

Сопротивление материалов  
Лекции  
Часть 2

По материалам проф. Подалкова В.В., Кирсанова М.Н.

Москва 2013

## Оглавление

Лекция 1 .....	2
Лекция 2 .....	6
Лекция 3 .....	7
Лекция 4 .....	9
Лекция 5 .....	11
Лекция 6 .....	12
Лекция 7 .....	14
Лекция 8 .....	16
Лекция 9 .....	17
Лекция 10 .....	18
Лекция 11 .....	20
Лекция 12 .....	30
Лекция 13 .....	32
Лекция 14 .....	34
Лекция 15 .....	36
Лекция 16 .....	37
Лекция 17 .....	38
Лекция 18 .....	40
Лекция 19 .....	42
Лекция 20 .....	44
Лекция 21 .....	45
Лекции 22, 23 .....	47
Лекция 24, 25 .....	50
Лекция 26 .....	53
Лекция 27 .....	55

## Лекция 1

Среди огромного разнообразия твердых тел в природе только малая часть обладает способностью полностью восстанавливать свою форму и размеры после прекращения действия внешних усилий. Большинство же тел уже при умеренных внешних усилиях испытывают необратимое деформирование. Возникновение и характер остаточных деформаций неодинаковы для разных классов тел. В одних телах эти деформации зависят от скорости приложения внешних усилий, в других - нет. Первую группу образуют вязкие или ползущие тела, вторую - пластические. Именно пластические тела и составляют предмет

изучения в данном курсе. Можно сказать, что с определенной долей идеализации в эту группу тел входит большинство металлов и сплавов, работающих при нормальных температурах, т. е. большинство строительных материалов. Поэтому прикладное значение излагаемой ниже математической теории пластичности должно быть даже выше, чем классической теории упругости, которая охватывает хотя и большую группу тел, но справедлива только при достаточно низких уровнях усилий. Однако реальные запросы практики, за исключением специальных задач, могут показаться чуждыми теории пластичности. Действительно, в конструкциях многократного и длительного пользования, которые составляют подавляющее большинство изделий современного машиностроения, необратимые деформации, строго говоря, недопустимы. Значит, расчет такой конструкции должен вестись на основе теории упругости, а в качестве критерия работоспособности должно быть взято условие возникновения первых пластических деформаций, т. е. условие достижения предела упругости. Однако при значительной неоднородности поля напряжений, например при наличии концентраторов (отверстий, выточек), принятие такого критерия оказывается невыгодным. При растяжении пластинки с малым круговым отверстием максимальные по упругому расчету напряжения на контуре отверстия в три раза превышают напряжения в удаленной от отверстия области. Поэтому в соответствии с указанным выше критерием допустимая для пластинки с отверстием нагрузка должна быть в три раза меньше, чем для сплошной, в то время как деформативные свойства обеих пластинок в целом (перемещения внешних границ) практически неразличимы. Мириться с тем, что сверление отверстия для крепления может быть, несущей детали столь сильно снижает силовые возможности пластинки, конечно, нельзя. А выход только один: допустить вблизи отверстия появление пластических деформаций. При этом снижается концентрация, ибо пластическое деформирование способствует выравниванию напряжений. Но для того чтобы эти пластические деформации не вызвали ощутимого изменения геометрии конструкции в целом или ее рабочих поверхностей, область распространения пластических деформаций (зона пластичности) должна быть мала по сравнению с характерными размерами тела. Цель таких задач о малых пластических областях вблизи концентраторов напряжений такая же, что и в упругости, - определение полей напряжений и перемещений, причем второе нужно в основном для контроля общей податливости конструкции. Для суждения же о работоспособности конструкции нужно привлекать дополнительные гипотезы типа теорий прочности.

Рассмотрим ту же задачу о пластинке с отверстием, но пусть теперь в отверстии с некоторым зазором вставлен болт с действующей на него в плоскости пластинки силой.

Естественно, что допуск на смещение не может быть меньше зазора. Поэтому даже, если и возникнут пластические деформации, приводящие к

суммарному перемещению, малому по сравнению с допуском, то это не отразится на работоспособности конструкции. Может, однако, случиться, что начиная уже с малого суммарного перемещения при постоянном усилии, болт, как в масло, начнет углубляться в пластинку.

Такая ситуация - появление предельного равновесного состояния - возможна, если пластичность материала идеальна: для поддержания пластического деформирования элемента не требуется повышать уровень напряжений в нем, и для конструкции из такого идеально пластического материала вопрос о работоспособности решается без привлечения каких-либо новых гипотез определением несущей способности конструкции, т. е. уровня внешних усилий, отвечающих предельному состоянию.

Возможность прямого ответа на основной вопрос: выдержит или нет конструкция данную нагрузку, открывающаяся в рамках идеально пластической модели, столь соблазнительна, что используется значительно более широко, чем может быть фактически обоснована. Зачастую предельное состояние достигается при значительных, а то и при бесконечных пластических деформациях. Естественно, что результаты соответствующих расчетов только условно могут быть перенесены на конструкции долговременного и многократного использования. Тем не менее практика показывает, что такие расчеты полезны, и, следовательно, разработка методов расчета на несущую способность по предельному пластическому состоянию в общем случае оправдана.

Специальными задачами пластичности, упомянутыми выше, являются технологические задачи обработки металлов давлением. Прокатка, штамповка, продавливание и т. д. - все эти процессы, как правило, сопровождаются большими перемещениями и деформациями, а поэтому здесь теория упругости просто не применима.

Более того, пластические деформации значительно превосходят упругие, так что при определении основной в таких задачах расчетной характеристики: усилий, действующих на инструмент (валки, штамп, фильера), - упругими деформациями разумно пренебречь.

Таким образом, возникает модель жестко-пластического тела, которая вследствие своей относительной простоты широко используется и в задачах, где упругими деформациями пренебрегать уже нельзя (например, в задачах о предельном пластическом состоянии). В рамках этой модели элемент тела остается абсолютно жестким вплоть до достижения некоторого уровня напряжений, а затем деформируется пластически.

Обеспечивая в известных случаях простые решения, достаточно хорошо согласующиеся с экспериментом, эта модель таит в себе ряд подводных,

проистекающих из того, что в силу уравнений механики сплошной среды однозначное определение напряжений в жестких областях, а следовательно, и их границ невозможно. В связи с этим нельзя ожидать полной достоверности решения для всех характеристик, в частности для поля перемещений и их скоростей.

Обычно при расчетах по схеме жестко-пластического тела считают пластичность идеальной, хотя эта модель может включать и упрочнение, при котором рост пластических деформаций требует увеличения уровня напряжений. Подобный эффект в той или иной мере присутствует во всех реальных упруго-пластических телах и модель идеальной пластичности является идеализацией, пригодной тем не менее для получения основных расчетных характеристик во многих задачах.

Существует, однако, проблема, в которой введение эффекта упрочнения принципиально необходимо, - это проблема устойчивости пластического деформирования. Использование идеально пластической модели приводит здесь, как правило, к тривиальному выводу о неустойчивости.

Представляя значительный интерес в принципиальном плане, теория пластической устойчивости может иметь решающее значение для оценки работоспособности конструкций только с развитыми зонами пластичности. Тем не менее оценки, даваемые этой теорией, полезны и для расчета конструкций многократного и длительного использования. Дело в том, что по существующей практике, предельные рабочие нагрузки назначаются исходя из некоторого коэффициента запаса. Поэтому хотя для нормального функционирования долгоживущих конструкций рабочие напряжения не должны превосходить (за исключением малых областей вблизи концентраторов) предела упругости, расчетные напряжения могут не удовлетворять этому условию, т. е. быть решениями соответствующей пластической задачи. Поскольку же напряжения, определяемые по теории пластической устойчивости, значительно ниже упругих, то они зачастую и служат отправными точками отсчета. Заметим, что поскольку отношение критического напряжения по расчету на устойчивость к пределу упругости не должно превышать коэффициента запаса, а последние для современных конструкций невелики, то практическое значение для расчета конструкций многократного и длительного действия имеет теория пластической устойчивости при напряжениях, мало превышающих предел упругости.

Перечисленные выше задачи и возможные идеализации относятся к сфере непосредственного потребления практики и, не умаляя значения общей теории пластичности как одного из фундаментальных разделов механики сплошной среды, очерчивают круг вопросов, на которые в первую очередь должен быть направлен научный поиск.

## Лекция 2

### Определяющие соотношения в теории пластичности

Для математической постановки задачи механики сплошной среды необходимы соотношения, определяющие связь между силовыми и кинематическими параметрами в элементе среды. В рамках теории упругости такими определяющими соотношениями являются уравнения, связывающие конечные значения напряжений и деформаций, причем основой для их получения служат законы термодинамики обратимых процессов.

Пластическое деформирование среды является процессом необратимым, и здесь возможности термодинамики значительно скромнее, во-первых, потому, что второй ее закон уже не определяет, а лишь ограничивает изменение термодинамических функций, а, во-вторых, и в главных, потому, что выбор параметров внутреннего состояния в рамках термодинамики остается неопределенным, в связи с чем приходится идти на те или иные дополнительные предположения.

Кроме того, закон деформирования упруго-пластического тела должен, как это показывают эксперименты, обладать одной специфической особенностью: предписываемое им поведение материала должно зависеть от направления процесса.

Такая своеобразная неаналитичность приводит к появлению в фазовом пространстве внутренних параметров некоторых предельных поверхностей, очертание и изменение которых оказывает, как это будет видно, решающее влияние на форму самого закона деформирования.

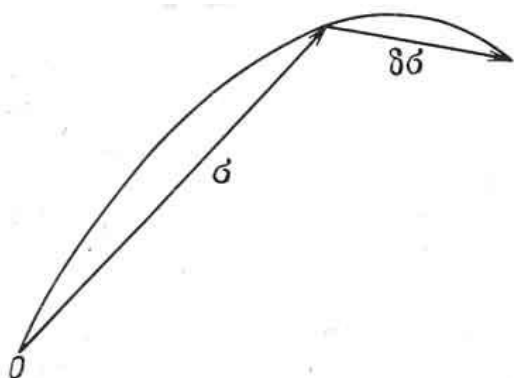
### Поверхность нагружения

В результате изменения внешних сил, действующих на тело, и перемещений его границы, происходит изменение напряженно-деформированного состояния каждого его элемента. Будем называть процесс изменения напряжений  $\sigma_{ij}$  в элементе процессом нагружения, а изменение его деформаций  $\epsilon_{ij}$  - процессом деформирования ( $i, j = 1, 2, 3$ ).

Любой из этих процессов можно представить в виде кривых - траекторий в некоторых фазовых пространствах, координатами которых являются параметры либо напряженного, либо деформированного состояния. Простейшим примером таких пространств является декартово пространство напряжений, вдоль ортов которого откладываются значения компонентов тензора напряжений, вычисленные в некоторой фиксированной координатной сетке. В дальнейшем в качестве последней всегда берется неподвижная прямоугольная система координат  $x_i$ .

В указанном выше пространстве напряжений каждому напряженному состоянию  $\sigma_{ij}$  отвечает определенная точка или вектор  $\sigma$  - вектор напряжений, начало которого совпадает с началом координат пространства напряжений (ненапряженное состояние), а конец совпадает с данной точкой.

Изменению напряженного состояния (догрузке)  $\delta\sigma_{ij}$  отвечает вектор  $\delta\sigma$  который будем называть вектором догрузки, процессу, изменения напряжений - траектория, вычерчиваемая концом вектора  $\sigma$  (траектория или путь нагружения (рис. 1)). Иногда точки пространства будем обозначать просто буквами, причем всегда считается, что точка О отвечает отсутствию напряжений.



**Рис.1**

Аналогичным образом можно определить пространство деформаций. Более того, одно и то же девятимерное декартово пространство можно использовать как для представления напряжений, так и для представления деформаций, только для простоты сравнения результатов нужно условиться откладывать вдоль данного орта пространства одноиндексные компоненты тензоров, например,  $\sigma_{22}$  и  $\epsilon_{22}$ ,  $\sigma_{12}$  и  $\epsilon_{22}$ . Такое совмещение пространств будет широко в дальнейшем использоваться.

В силу обратимости деформаций упругое тело обладает тем свойством, что результат (состояние) деформирования полностью определяется результатом (состоянием) нагружения и не зависит от вида процесса нагружения. Каждой траектории нагружения отвечает своя траектория деформирования, но каковы бы ни были траектории нагружения, приводящие в одно и то же напряженное состояние, результирующая деформация будет одинаковой.

### Лекция 3

Для неупругих тел это свойство независимости от истории вообще утрачивается. Однако для некоторых реальных тел сохраняется другое, более частное свойство упругости: результат деформирования не зависит от скорости процесса, нагружения в данное напряженное состояние. Тела, обладающие

таким свойством, называются пластическими или, точнее, упруго-пластическими, и именно такие тела будут рассматриваться в данном курсе. Упруго-пластические тела, наиболее важным представителем которых являются распространенные в технике металлы и сплавы, обладают рядом характерных свойств, первое представление о которых дает одномерный эксперимент, например эксперимент на чистый сдвиг. На рис. 2 представлена характерная диаграмма зависимости касательного напряжения  $\tau$  от сдвига  $\gamma$  для упруго-пластического материала. Вблизи естественного ненапряженного состояния имеется область чисто упругого поведения, отвечающая прямой  $[\tau_0, -\tau'_0]$  с угловым коэффициентом  $G$  ( $G$  - модуль упругого сдвига).

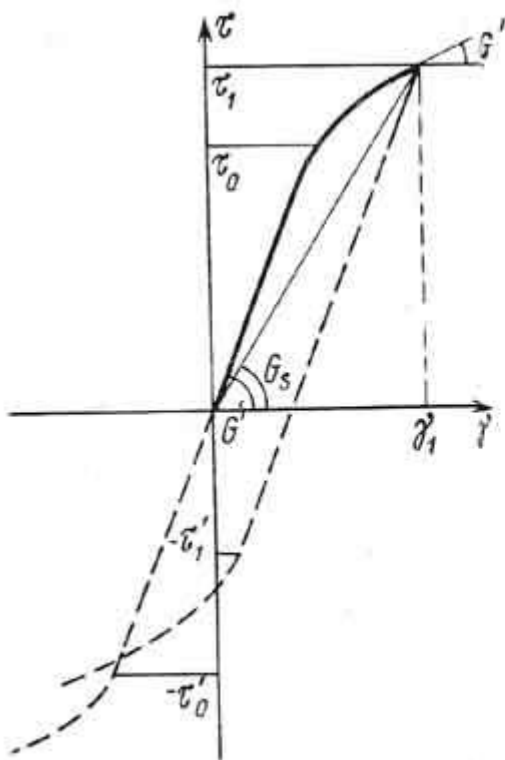


Рис.2

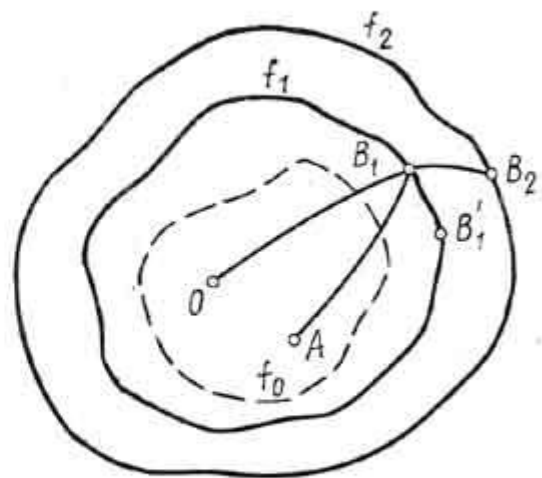


Рис.3

Деформации, выходящие за указанный диапазон, являются уже неупругими, в связи с чем соответствующие концам линейного участка напряжения  $\tau_0$  и  $-\tau'_0$ , можно называть начальными пределами упругости, прямым и обратным соответственно. Если происходит возрастание  $\tau$  за значение  $\tau_0$ , то изображающая точка двигается по некоторой кривой  $\tau = \tau(\gamma)$ . Но если за состоянием  $\tau = \tau_1$  текущее значение  $\tau$  станет уменьшаться (разгрузка), то связь между приращениями напряжений и деформаций станет снова упругой с тем же модулем  $G$ , что и на начальном участке<sup>1</sup> (пунктирная прямая на рис. 2).

При дальнейшем изменении напряжения прирост деформаций будет оставаться упругим, пока  $\tau$  не станет снова равным  $\tau_1$  или, уменьшаясь, не



достигнет некоторого значения  $\tau_1'$ . Следовательно, для материала, испытавшего неупругую деформацию  $\gamma_1$  новым прямым пределом упругости будет  $\tau_1$ , а обратным -  $\tau_1$ .

Очевидно, что  $\tau_1 \geq \tau_0$ . Строгое неравенство отвечает случаю упрочнения - повышению предела упругости в процессе деформирования. Замечено, что для упрочняющихся материалов величина обратного предела упругости, как правило, падает:  $\tau_1' < \tau_0'$ . Это явление носит название эффекта Баушингера (материал упрочняется в отношении прямого предела упругости и разупрочняется в отношении обратного). Случай отсутствия упрочнения (идеальная пластичность) отвечает вырождению кривой  $\tau = \tau(\gamma)$  прямую, параллельную оси  $\gamma(\tau = \tau_0)$ , и может рассматриваться как предельный.

Обозначим через  $G_{\dot{\gamma}}$  угловой коэффициент наклона касательной к кривой  $t = t(g)$ , а через  $G_s$  - отношение  $t$  к  $g$  в текущей ее точке и будем называть коэффициенты  $G$ ,  $G_{\dot{\gamma}}$  и  $G_s$  упругим, касательным и секущим модулями соответственно. Обобщение указанных выше свойств упруго-пластического тела на случай сложного напряженного состояния приводит к концепции о существовании поверхности нагружения. Эта концепция (В. Прагер, 1949) состоит в следующем (рис. 3).

#### Лекция 4

Для каждой текущей точки  $B_1$  произвольной траектории нагружения  $OB_1$  в пространстве напряжений существует поверхность пределов упругости  $f_1$  (поверхность нагружения), все внутренние точки которой достижимы из данной упругим деформированием. Поэтому если начиная с какой-то точки траектория нагружения идет внутри поверхности, построенной для этой точки, например  $B_1A$ , то новых необратимых деформаций не возникает. Считается, что в таком процессе сама поверхность нагружения не изменяется; для любой точки такой траектории поверхностью нагружения служит поверхность  $f_1$ . Начальная поверхность  $f_0$  показана на рис. 3 пунктиром.

Если же траектория выходит наружу поверхности нагружения, построенной для предыдущей точки, например траектория  $B_1B_2$ , то возникают новые необратимые деформации. Очевидно, что при этом меняется сама поверхность нагружения (ибо она должна содержать текущую точку траектории). Считается, что это изменение поверхности нагружения происходит непрерывно: если отрезок  $B_1B_2$  мал, то новая поверхность  $f_2$ , отвечающая точке  $B_2$ , мало отличается от  $f_1$  и в пределе, когда  $B_1 \rightarrow B_2$  эти поверхности совпадают.

Будем называть процесс, при котором возникают необратимые деформации, активным нагружением, а процесс, сопровождающийся только

упругим деформированием, - пассивным нагружением или разгрузкой. Процесс, при котором траектория нагружения, начиная с некоторой точки, идет вдоль поверхности нагружения, построенной для этой точки, например  $B_1B_1'$  является пограничным между активным и пассивным, и его естественно называть нейтральным нагружением, а свойства деформирования в нем определять как предельные.

В силу сказанного естественно представлять деформацию элемента  $e_{ij}$  как сумму упругой (обратимой)  $e_{ij}^e$  и пластической (необратимой)  $e_{ij}^p$  частей:

$$e_{ij} = e_{ij}^e + e_{ij}^p \quad 1.1)$$

Очевидно, что форма и размеры поверхности нагружения определяются только пластической частью деформации и историей ее изменения. Следовательно, аналитически уравнение текущей предельной поверхности можно представить в виде

$$f(\sigma_{ij}, e_{ij}^p, \chi_n^p) = 0, \quad 1.2)$$

где через  $\chi_n^p$  условно представлены параметры, зависящие от истории изменения  $e_{ij}^p$  постоянные при фиксированных  $e_{ij}^p$ .

Ясно, что если состояние  $\sigma_{ij}$  находится внутри поверхности нагружения, то любая бесконечно малая догрузка из этого состояния, характеризуемая тензором приращения напряжений  $\delta\sigma_{ij}$  отвечает пассивному нагружению. Активное нагружение возможно только тогда, когда  $\sigma_{ij}$  принадлежит текущей поверхности нагружения, а вектор  $\delta\sigma$  составляет с вектором-градиентом функции  $f$  нетупой угол. Отсюда следует, что условием активного нагружения будет выполнение равенства (1.2) вместе с неравенством

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \delta\sigma_{ij} > 0 \quad 1.3)$$

Здесь и в дальнейшем по повторяющимся индексам производится суммирование.

Если при выполнении (1.2)  $(\partial f / \partial \sigma_{ij}) \delta\sigma_{ij} < 0$ , то догрузка  $\delta\sigma_{ij}$  не вызывает пластических деформаций. Точку поверхности нагружения, из которой производится догрузка, будем в дальнейшем называть точкой нагружения.

Указанное выше условие непрерывного изменения гладкой поверхности нагружения аналитически выражается в виде

$$\delta f = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \delta \sigma_{ij} + \frac{\partial f}{\partial e^p_{ij}} \delta e^p_{ij} + \frac{\partial f}{\partial \chi_{ij}} \delta \chi_{ij} = 0 \quad 1.4)$$

Для большинства практически важных металлов и сплавов с достаточной степенью точности можно считать, что обратимая часть деформации связана с напряжениями линейно-упругим соотношением

$$e_{ij}^e = A_{ijkl} \sigma_{kl}, \quad A_{ijkl} = A_{klij} = A_{jikl} = A_{ijlk}, \quad 1.5)$$

где  $A_{ijkl}$  - тензор упругих постоянных.

## Лекция 5

Пластичность — способность материала без разрушения получать большие остаточные деформации. Свойство пластичности имеет решающее значение для таких технологических операций, как штамповка, вытяжка, волочение, изгиб и др. Мерой пластичности являются относительное удлинение  $\delta$  и относительное сужение  $\psi$ , определяемые при проведении испытаний на растяжение. Чем больше  $\delta$ , тем более пластичным считается материал. По уровню относительного сужения  $\psi$  можно делать вывод о технологичности материала. К числу весьма пластичных материалов относятся отожженная медь, алюминий, латунь, золото, малоуглеродистая сталь и др. Менее пластичными являются дюраль и бронза. К числу слабо пластичных материалов относятся многие легированные стали.

У пластичных материалов прочностные характеристики на растяжение и сжатие сопоставляют по пределу текучести. Принято считать, что  $\sigma_{т.р} \approx \sigma_{т.с}$ .

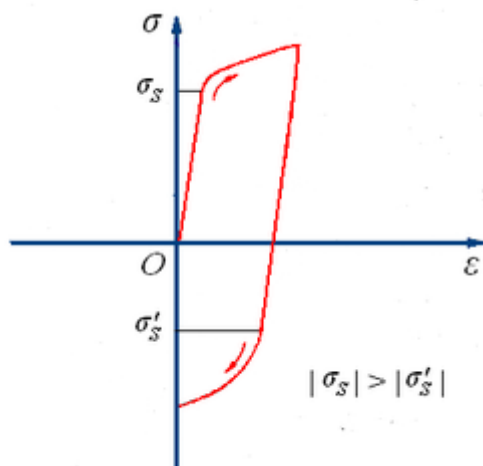
Первые работы по теории пластичности были выполнены в семидесятих годах XIX века Сен-Венаном и Леви, которым принадлежит создание одного из вариантов теории пластичности, а также получение основных уравнений задачи плоской деформации. В 1909 г. была опубликована работа Хар и Кармана, в которой была сделана попытка вывода основных уравнений теории пластичности из вариационного принципа. В статье Мизеса (1913 г.) система уравнений Сен-Венана — Леви была дополнена иным условием пластичности, которое несколько раньше было получено Губером. Генки, Прандтлем и Мизесом были получены основные уравнения различных вариантов теории пластичности и решения задачи плоской деформации. В 20-х годах XX века в ряде работ были опубликованы результаты экспериментальной проверки

различных гипотез и приведены решения задач теории пластичности. В настоящее время известно большое число различных вариантов теорий пластичности, отличающихся выбором положенных в их основу определяющих соотношений, определяющих поведение среды.

Деформационная теория активно развивалась чл.-корр. АН СССР А. А. Ильюшиным. В рамках деформационной теории пластичности тело идеализируется как нелинейно упругое. В частности, для заданного деформированного состояния напряжённое состояние не зависит от конкретного пути нагружения в пространстве деформаций. Достоинства теории заключаются в её простоте и возможности предсказания максимальных усилий в условиях монотонного пропорционального нагружения. Недостатки теории заключаются в её неприменимости в случае смены знака нагружения а также в случае сложного нагружения. Теория не пригодна для описания следующих феноменов: эффект гистерезиса; локализация деформаций (в частности, шейкообразование); эффект Баушингера; остаточные напряжения; распруживание.

## Лекция 6

**Эффект Баушингера** (названный по фамилии И. Баушингера, который обнаружил его при исследованиях каменной соли) заключается в уменьшении сопротивления кристаллического материала пластической деформации после предварительной малой пластической деформации противоположного знака. Эффект Баушингера является проявлением неупругости материала в зоне перехода к упругопластическим деформациям.



**Рис. 4**

Кривая деформации растяжения —сжатия, которая характеризует эффект Баушингера. Кривая деформации на рисунке воспроизводит предварительное нагружение (например, растяжение) образца до малых значений пластической

деформации и последующую разгрузку. При повторном нагружении в противоположном направлении (сжатии), вследствие эффекта Баушингера, материал деформируется легче, чем он бы деформировался под действием нагружения того же направления, что и предыдущее. Эффект обнаруживается при малых значениях предварительной деформации (до 1%), уменьшаясь при увеличении её величины. С точки зрения дислокационного механизма пластической деформации эффект Баушингера указывает на то, что при повторном деформировании заблокированным перед препятствиями дислокациям легче двигаться в направлении, противоположном к их движению при предварительной пластической деформации. Эффект Баушингера имеет важное практическое значение при циклической деформации металлов, влияя на процессы усталостного разрушения, при деформации дисперсионно упрочненных сплавов.

С развитием вычислительной техники и численных методов механики сплошных сред деформационная теория была вытеснена более совершенной теорией типа течения.

В рамках теорий типа течения тензор деформаций разделяется на упругую и пластическую составляющие. При этом напряжения описываются однозначной функцией упругих деформаций, а приращения пластических деформаций или скоростей пластических деформаций зависят от напряжений. При формулировке определяющих соотношений существует большая свобода выбора между различными подходами.

Достоинства теории типа течения заключаются в её универсальности. Некоторые модели пластичности, построенные в рамках этой теории, пригодны для адекватного описания следующих феноменов: эффект гистерезиса; эффект Баушингера; остаточные напряжения; распруживание.

С помощью соответствующих моделей возможно определение момента локализации деформаций. Более того, модели этой группы допускают обобщения для учёта следующих эффектов, наблюдаемых при пластических деформациях: вязкость, ползучесть и релаксация; повреждаемость материала и усталостное разрушение; нагрев материала и зависимость пластических свойств от температуры; изменение текстуры.

В настоящее время активно ведутся работы по созданию моделей теории пластичности для металлов с памятью формы, а также модели, учитывающие изменение микроструктуры (мельчение зерна, эволюция дислокационных структур) при интенсивной пластической деформации.

Общие недостатки:

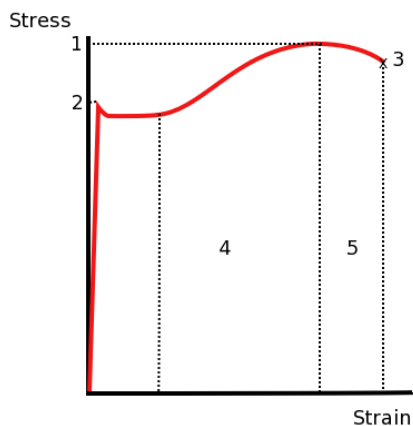
1. Для калибровки моделей, учитывающих большое количество эффектов, требуется проведение многочисленных и сложных экспериментов.
2. В случае больших деформаций разделение деформации на упругую и неупругую составляющие не может быть проведено однозначным образом.

На сегодняшний день подавляющее большинство моделей пластичности, предлагаемых современными коммерческими расчётными комплексами, является моделями типа течения. Эти модели хорошо сочетаются с методом конечных элементов (МКЭ), являющимся стандартом в практике инженерных расчётов на прочность.

## Лекция 7

Начиная с 50-х годов в СССР получает развитие теория пластичности, основанная на концепции скольжения. По мнению некоторых исследователей, эта теория имеет ряд существенных преимуществ по сравнению с «классическими» теориями пластичности. Так, экспериментальное определение поверхности текучести требует точной фиксации момента возникновения пластической деформации, что в действительности невозможно осуществить. Поэтому при построении теории пластичности естественнее исходить не из условия пластичности (поверхности текучести), а из зависимостей между напряжениями и деформациями, которые даёт эксперимент. Такой подход, развиваемый А. А. Ильюшиным в течение трёх десятилетий, дополняется построением упрощённого механизма пластической деформации («скольжение»). В этом направлении известны работы советских академических школ В. В. Новожилова, Е. И. Шемякина, М. Я. Леонова. Специализированным научным журналом по теории пластичности является International Journal of Plasticity. Кроме того, прикладные вопросы формовки обсуждаются в специализированном журнале International Journal of Material Forming. Работы по теории пластичности, среди прочих работ по механике, публикуются в ряде российских журналов более широкой направленности: Прикладная Механика и Техническая Физика, Прикладная Математика и Механика, Механика твёрдого тела.

Деление материалов на пластичные и хрупкие является условным не только потому, что между теми и другими не существует резкого перехода в значениях  $\delta$  и  $\psi$ . В зависимости от условий испытания многие хрупкие материалы способны вести себя как пластичные, а пластичные — как хрупкие.



**Рис. 5**

Очень большое влияние на проявление свойств пластичности и хрупкости оказывают скорость натяжения и температура. При быстром натяжении более резко проявляется свойство хрупкости, а при медленном — свойство пластичности. Например, хрупкое стекло способно при длительном воздействии нагрузки при нормальной температуре получать остаточные деформации. Пластичные же материалы, такие как малоуглеродистая сталь, под воздействием резкой ударной нагрузки проявляют хрупкие свойства.

**Предел текучести** — механическое напряжение  $\sigma_T$ , отвечающее нижнему положению верхнего отклонения по площади неизвестной эпюры площадки текучести на диаграмме деформирования материала. В случае, если такая площадка отсутствует, что характерно, например, для хрупких тел, вместо  $\sigma_T$  используется условный предел текучести  $\sigma_{0,2}$  (читается: сигма ноль-два), который соответствует напряжению, при котором остаточная (пластическая деформация) составляет 0,2 % от длины испытываемого образца.

Часто для данной механической характеристики дают формулировку «напряжение, при котором начинает развиваться пластическая деформация», не делая разницы с пределом упругости. В реальности значения предела текучести выше, чем предел упругости примерно на 5%.

Деформация называется упругой, если она исчезает после удаления вызвавшей её нагрузки, и пластической, если после снятия нагрузки она не исчезает (во всяком случае, полностью). Все реальные твёрдые тела при деформации в большей или меньшей мере обладают пластическими свойствами. При некоторых условиях пластическими свойствами тел можно пренебречь, как это и делается в теории упругости. Твёрдое тело с достаточной точностью можно считать упругим, то есть не обнаруживающим заметных пластических деформаций, пока нагрузка не превысит некоторого предела (предел упругости).

Природа пластической деформации может быть различной в зависимости от температуры, продолжительности действия нагрузки или скорости деформации. При неизменной нагрузке, приложенной к телу, деформация изменяется со временем; это явление называется ползучестью. С возрастанием температуры скорость ползучести увеличивается. Частными случаями ползучести являются релаксация и упругое последействие. Одной из теорий, объясняющих механизм пластической деформации, является теория дислокаций в кристаллах.

## Лекция 8

В теории упругости и пластичности тела рассматриваются как «сплошные». Сплошность (то есть способность заполнять весь объём, занимаемый материалом тела, без всяких пустот) является одним из основных свойств, приписываемых реальным телам. Понятие сплошности относится также к элементарным объёмам, на которые можно мысленно разбить тело. Изменение расстояния между центрами каждой двух смежных бесконечно малых объёмов у тела, не испытывающего разрывов, должно быть малым по сравнению с исходной величиной этого расстояния. Простейшей элементарной деформацией является относительное удлинение некоторого элемента:

$$\epsilon = (l_2 - l_1)/l_1$$

Где  $l_2$  — длина элемента после деформации;  $l_1$  — исходная длина этого элемента. На практике чаще встречаются малые деформации — такие, что  $\epsilon \ll 1$ .

Измерение деформации производится либо в процессе испытания материалов с целью определения их механических свойств, либо при исследовании сооружения в натуре или на моделях для суждения о величинах напряжений. Упругие деформации весьма малы, и их измерение требует высокой точности. Измерение деформаций называется тензометрией; измерения обычно производятся с помощью тензометров. Кроме того, широко применяются резистивные тензодатчики, поляризационно-оптический метод исследования напряжения, рентгеноструктурный анализ. Для суждения о местных пластических деформациях применяют накатку на поверхности изделия сетки, покрытие поверхности легко растрескивающимся лаком или хрупкими прокладками и т. д.

**Пластическая деформация** **твёрдых тел (ползучесть)** может происходить двумя принципиально разными механизмами: *дислокационным* и *диффузионным*. Первый механизм реализуется за счёт движения в объёме кристаллов дислокаций и других дефектов решётки и не требует термической активации.



Диффузионный механизм реализуется путем перемещения вакансий и характерен для повышенных температур.

Кроме того в качестве дополнительного механизма выделяется *скольжение по границам зерен*. Основными механизмами сдвиговой пластической деформации кристаллических тел являются **скольжение** и **двойникование**. **Скольжение**-это такое перемещение одной части кристалла относительно другой, при котором кристаллическое строение обеих частей остается неизменным. Скольжение происходит, когда касательное напряжение в плоскости скольжения достигает определенного значения для данного материала - так называемого сопротивления сдвигу. В области сдвига кристаллическая решётка остается такой же, как и в обеих частях кристалла, и каждый атом в этой области перемещается на одинаковые расстояния, составляющие целое число периодов повторяемости решётки. Отполированная поверхность кристалла после деформации скольжением при рассмотрении в оптическом микроскопе оказывается покрытой одной или несколькими системами параллельных тонких линий, называемых *линиями скольжения*. Эти линии представляют собой ступеньки на поверхности, возникающие в результате сдвига кристалла вдоль плоскости, которая и называется *плоскостью скольжения*, а направление сдвига в этой области - *направлением скольжения*. Комбинация данной плоскости и направления скольжения в ней составляет систему скольжения.

## Лекция 9

**Ползучесть материалов (последствие)** — изменение с течением времени деформации твёрдого тела под воздействием постоянной нагрузки или механического напряжения. *Ползучести* в той или иной мере подвержены все твёрдые тела — как кристаллические, так и аморфные.

## История

Явление *ползучести* было замечено К. Навье (1826), Г. Кориолисом (1830 г.), но впервые количественно изучено Л. Вика (1834 г.). Систематические исследования *ползучести* металлов и сплавов, резин, стекол относятся к началу XX века и особенно к 40-м годам, когда в связи с развитием техники столкнулись, например, с *ползучестью* дисков и лопаток паровых и газовых турбин, реактивных двигателей и ракет, в которых значительный нагрев сочетается с механическими нагрузками. Потребовались конструкционные материалы (жаропрочные сплавы), детали из которых выдерживали бы нагрузки длительное время при повышенных температурах. Долгое время считали, что *ползучесть* может происходить только при повышенных

температурах, однако *ползучесть* имеет место и при очень низких температурах, так, например, в кадмии заметная *ползучесть* наблюдается при температуре  $-269\text{ C}^\circ$ , а у железа — при  $-169\text{ C}^\circ$ .

## Причины и свойства

*Ползучесть* материалов экспериментально изучают прежде всего при простых напряженных состояниях: одноосных растяжении, сжатии, а также чистом сдвиге. Условия проведения таких экспериментов определены ГОСТами. *Ползучесть* при сложных напряженных состояниях изучают обычно на тонкостенных трубчатых образцах.

## Кривая ползучести

*Ползучесть* описывается так называемой кривой *ползучести*, которая представляет собой зависимость деформации от времени при постоянных температуре и приложенной нагрузке (или напряжении).

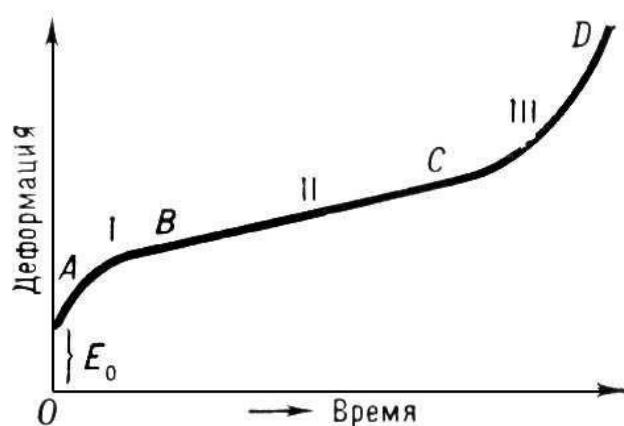


Рис. 1

Её условно делят на три участка, или стадии:

- АВ — участок неустановившейся (или затухающей) *ползучести* (стадия I),
- ВС — участок установившейся *ползучести* — деформации, идущей с постоянной скоростью (стадия II),
- CD — участок ускоренной *ползучести* (стадия III),
- $E_0$  — деформация в момент приложения нагрузки (стадия IV),
- точка D — момент разрушения.

## Лекция 10

### Стадии ползучести

Как общее время до разрушения, так и протяжённость каждой из стадий зависят от температуры и приложенной нагрузки. При температурах, составляющих 40 %-80 % температуры плавления металла (именно эти температуры представляют наибольший технический интерес), затухание *ползучести* на первой её стадии является результатом деформационного упрочнения (наклёпа). Так как *ползучесть* происходит при высокой температуре, то возможно также снятие наклёпа — так называемый возврат свойств материала. Когда скорости наклёпа и возврата становятся одинаковыми, наступает II стадия *ползучести*. Переход в III стадию связан с накоплением повреждения материала (поры, микротрещины), образование которых начинается уже на I и II стадиях.

## **Ползучесть и пластичность**

Описанные кривые *ползучести* имеют одинаковый вид для широкого круга материалов — металлов и сплавов, ионных кристаллов, полупроводников, полимеров, льда и других твёрдых тел. Структурный же механизм *ползучести*, то есть элементарные процессы, приводящие к *ползучести*, зависит как от вида материала, так и от условий, в которых происходит *ползучесть*. Физический механизм *ползучести*, особенно при высоких температурах, имеет преимущественно диффузионную природу и тем отличается от механизма деформирования при пластичности, которая связана с быстрым скольжением вдоль атомных плоскостей зёрен поликристалла (Ю.Н. Работнов. Механика деформируемого твёрдого тела). Всё многообразие элементарных процессов необратимой пластической деформации, приводящих к *ползучести*, можно условно разделить на процессы, осуществляемые движением дислокаций (дефектов в кристалле), и процессы, обусловленные диффузией. Последние имеют место у аморфных тел при всех температурах их существования, а также у кристаллических тел, в частности у металлов и сплавов, при достаточно высоких температурах. При температурах, близких к температурам плавления различие между *ползучестью* и пластичностью становится менее выраженным<sup>[1]</sup>. При неизменной общей деформации напряжения в нагруженном теле с течением времени убывают вследствие *ползучести*, то есть происходит релаксация напряжений.

## **Жаропрочность**

Высокое сопротивление *ползучести* является одним из факторов, определяющих жаропрочность. Для сравнительной оценки технических материалов сопротивление *ползучести* характеризуют пределом *ползучести* — напряжением, при котором за заданное время достигается данная деформация. В авиационном моторостроении принимают время, равное 100—200 ч, при конструировании стационарных паровых турбин — 100 000 ч. Иногда сопротивление *ползучести* характеризуют величиной скорости деформации по

прошествии заданного времени. Скорость полной деформации  $\dot{\epsilon}$  складывается из скорости  $\dot{\epsilon}_e$  упругой деформации и скорости  $\dot{\epsilon}_\pi$  деформации *ползучести*. ар

## Положение в теории

Теория ползучести близко примыкает к теории пластичности, однако в связи с разнообразием механических свойств твёрдых тел единой теории *ползучести* нет. Для металлов большей частью пользуются теорией течения:  $\dot{\epsilon}_\pi = f(s, t)$  где  $s$  — напряжение,  $t$  — время,

которая удовлетворительно описывает *ползучесть* при напряжениях, изменяющихся медленно и монотонно, но имеет существенно нелинейный характер зависимости  $\dot{\epsilon}_\pi$  от  $s$ .

Более полное описание ползучести даёт теория упрочения:  $\dot{\epsilon}_\pi = f(s, \dot{\epsilon}_\pi)$ ,

которая удобна для приближённого анализа кратковременной *ползучести* при высоком уровне напряжений. Теория упрочения правильно улавливает некоторые особенности ползучести при изменяющихся напряжениях, однако её применение связано с большими математическими трудностями.

В механике полимеров обычно пользуются теорией наследственности:

$$\phi(\varepsilon) = \sigma(t) + \int_0^t K(t - \tau) \sigma(\tau) d\tau$$

где  $K(t - \tau)$  так называемые ядро последействия, которое характеризует, в какой мере в момент времени  $t$  ощущается влияние (последействие) на деформацию единичного напряжения, действовавшего в течение единичного промежутка времени в более ранний момент  $\tau$ . Так как напряжение действует и в другие моменты времени, то суммарное последействие учитывается интегральным членом. Теория наследственности определяет полную деформацию и даёт качественное описание некоторых более сложных явлений (например, эффекта обратной ползучести).

## Лекция 11

**Вязкоупругость** — механическое свойство вещества быть как упругим, так и вязким. Развитие теории вязкоупругости связано с широким использованием полимерных материалов. Вязкоупругие свойства проявляются, например, в том, что внезапно приложенное и поддерживаемое неизменным напряжённое состояние вызывает мгновенную деформацию, сопряжённую с упругим откликом, вслед за чем следует процесс вязкого течения, который может быть ограниченным и неограниченным во времени. При этом поведение

вещества определяется не только текущим напряженным состоянием, но и всеми прошлыми состояниями, то есть вещество обладает свойством, которое называют эффектом памяти или динамической памятью. Не следует путать это свойство с эффектом памяти формы. Превалирование упругих или вязких свойств определяется продолжительностью внешнего воздействия (см. Число Деборы).

## Эффект памяти формы

### Введение

Одно из базовых восприятий людьми явлений внешнего мира — это стойкость и надежность металлических изделий и конструкций, стабильно сохраняющих свою функциональную форму продолжительное время, если, конечно, они не подвергаются критическим воздействиям.

Однако, казалось бы, вопреки здравому смыслу, существует ряд материалов, металлических сплавов, которые при нагреве, после предварительной деформации, демонстрируют явление возврата к первоначальной форме. То есть эти металлы, не являясь живыми существами, обладают особым свойством, позволяющим им проявлять своеобразную память.

### Феномен

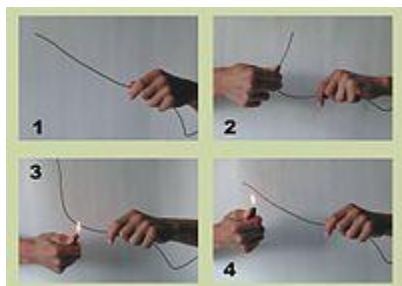


Рис. 2

Чтобы понять **эффект памяти формы**, достаточно один раз увидеть его проявление (см. рис 1). Что происходит?

1. Есть металлическая проволока.
2. Эту проволоку изгибают.
3. Начинаем нагревать проволоку.
4. При нагреве проволока распрямляется, восстанавливая свою исходную форму.

### Суть явления

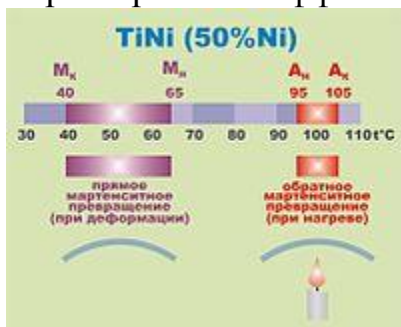


Рис. 3

Почему так происходит? (См. рис. 2)

1. В исходном состоянии в материале существует определенная структура. На рисунке она обозначена правильными квадратами.
2. При деформации (в данном случае изгибе) внешние слои материала вытягиваются, а внутренние сжимаются (средние остаются без изменения). Эти вытянутые структуры — мартенситные пластины, что не является необычным для металлических сплавов. Необычным является то, что в материалах с памятью формы мартенсит термоупругий.
3. При нагреве начинает проявляться термоупругость мартенситных пластин, то есть в них возникают внутренние напряжения, которые стремятся вернуть структуру в исходное состояние, то есть сжать вытянутые пластины и растянуть сплюснутые.
4. Поскольку внешние вытянутые пластины сжимаются, а внутренние сплюснутые растягиваются, материал в целом проводит автодеформацию в обратную сторону и восстанавливает свою исходную структуру, а вместе с ней и форму.

Характеристики эффекта памяти формы



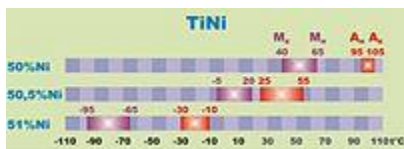


Рис. 4

Эффект памяти формы характеризуется двумя величинами.

1. Маркой сплава со строго выдержанным химическим составом. (См. далее «Материалы с памятью формы»)
2. [Температурами мартенситных превращений](#).

В [процессе](#) проявления **эффекта памяти формы** участвуют мартенситные превращения двух видов — прямое и обратное. Соответственно, каждое из них проявляется в своем температурном [интервале](#):  $M_H$  и  $M_K$  — начало и конец прямого мартенситного превращения при деформации,  $A_H$  и  $A_K$  — начало и конец обратного мартенситного превращения при нагреве.

Температуры мартенситных превращений являются [функцией](#) как [марки](#) сплава (системы сплава), так и его [химического состава](#). Небольшие изменения химического состава сплава (намеренные или как [результат брака](#)) ведут к сдвигу этих температур (см. рис. 4).

Отсюда следует необходимость строгой выдержки химического состава сплава для однозначного функционального проявления эффекта памяти формы, что переводит металлургическое производство в сферу [высоких технологий](#).

Эффект памяти формы проявляется несколько миллионов [циклов](#); его можно усиливать предварительными [термообработками](#).

Возможны реверсивные эффекты памяти формы, когда материал при одной температуре «вспоминает» одну форму, а при другой температуре — другую.

Чем выше температуры обратного мартенситного превращения, тем в меньшей степени выражен эффект памяти формы. Например, слабый эффект памяти формы наблюдается в сплавах системы Fe-Ni (5 — 20 %Ni), у которых температуры обратного мартенситного превращения 200—400°C.

В ряду функциональных свойств памяти формы важное теоретическое и практическое значение принадлежит явлению так называемой деформации ориентированного превращения. Смысл этого наследственного феномена заключается в следующем. Если охлаждаемое под напряжением тело разгрузить в области температур реализации пластичности прямого мартенситного превращения и не прекратить понижение температуры, далеко не всегда продолжающееся охлаждение не будет вызывать макроскопического деформирования. Наоборот, чаще всего деформация продолжает накапливаться, как если бы материал почти не разгружали. В других случаях



имеет место интенсивный возврат при охлаждении. Такие свойства, первое из которых принято называть деформацией ориентированного превращения, второе - аномальным возвратом деформации, связывают с подрастанием возникших под нагрузкой кристаллов мартенсита - в случае деформации ориентированного превращения кристаллов "положительной" ориентации, а в случае аномального возврата - "отрицательной" ориентации. Названные явления могут быть инициированы, в частности, ориентированными микронапряжениями.

## Сверхупругость

Другим явлением, тесно связанным с эффектом памяти формы, является **сверхупругость** — свойство материала, подвергнутого [нагрузению](#) до напряжения, значительно превышающего [предел текучести](#), полностью восстанавливать первоначальную форму после снятия нагрузки.

Сверхупругое поведение на порядок выше упругого.

Сверхупругость наблюдается в области температур между началом прямого мартенситного превращения и концом обратного.

Материалы с эффектом памяти формы  
Никелид титана

Лидером среди материалов с памятью формы по применению и по изученности является **никелид титана**.

**Никелид титана** — это [интерметаллид](#) эквиатомного состава с 55 мас.%Ni. [Температура плавления](#) 1240—1310°C, [плотность](#) 6,45 г/см<sup>3</sup>. Исходная структура **никелида титана** стабильная объемно-центрированная кубическая решетка типа CsCl при деформации претерпевает термоупругое мартенситное превращение с образованием [фазы](#) низкой [симметрии](#).

Другое название этого сплава, принятое за рубежом, — **нитинол** происходит от [аббревиатуры](#) NiTiNOL, где NOL — это сокращенное название Лаборатории морской артиллерии США, где этот материал был разработан в 1962 году.

Элемент из **никелида титана** может исполнять функции как [датчика](#), так и [исполнительного механизма](#).

**Никелид титана** обладает:

1. Превосходной [коррозионной стойкостью](#).
2. Высокой [прочностью](#).
3. Хорошими [характеристиками](#) формозапоминания. Высокий [коэффициент](#) восстановления формы и высокая восстанавливающая [сила](#). Деформация



до 8 % может полностью восстанавливаться. Напряжение восстановления при этом может достигать 800 МПа.

4. Хорошая совместимость с живыми организмами.
5. Высокая демпфирующая способность материала.

Недостатки:

1. Из-за наличия [титана](#) сплав легко присоединяет [азот](#) и [кислород](#). Чтобы предотвратить реакции с этими элементами при производстве надо использовать вакуумное оборудование.
2. Затруднена обработка при изготовлении деталей, особенно резанием. (Оборотная сторона высокой прочности).
3. Высокая [цена](#). В конце [XX века](#) он стоил чуть дешевле [серебра](#).

При современном уровне [промышленного производства изделия](#) из **никелида титана** (наряду со сплавами системы Cu-Zn-Al) нашли широкое [практическое применение](#) и рыночный [сбыт](#). (См. далее «Применение материалов с памятью формы»).

Другие сплавы

На конец XX века **эффект памяти формы** был обнаружен более чем у 20 сплавов. Кроме **никелида титана** эффект памяти формы обнаружен в системах:

- Au-Cd. Разработан в 1951 году в Иллинойском университете, США. Один из пионеров материалов с памятью формы.
- Cu-Zn-Al. Наряду с никелидом титана имеет практическое применение. Температуры мартенситных превращений в интервале от  $-170$  до  $100^{\circ}\text{C}$ .
  - Преимущества (по сравнению с никелидом титана):
    - Можно выплавлять в обычной [атмосфере](#).
    - Легко обрабатывается резанием.
    - Цена — в пять раз дешевле.
  - Недостатки:
    - Хуже по характеристикам формозапоминания.
    - Хуже механические и коррозионные свойства.
    - При термообработке легко происходит укрупнение зерна, что приводит к снижению механических свойств.
    - Проблемы стабилизации зерна в [порошковой металлургии](#).
- Cu-Al-Ni. Разработан в [университете](#) города [Осака](#), Япония. Температуры мартенситных превращения в интервале от  $100$  до  $200^{\circ}\text{C}$ .
- Fe-Mn-Si. Сплавы этой системы наиболее дешевые.
- Fe-Ni
- Cu-Al
- Cu-Mn

- Co-Ni
- Ni-Al

и др.

Некоторые исследователи полагают, что **эффект памяти формы** принципиально возможен у любых материалов, претерпевающих мартенситные превращения, в том числе и у таких чистых металлов как титан, [цирконий](#) и [кобальт](#).

Производство никелида титана

[Плавка](#) происходит в [вакуумно-гарнисажной печи](#) или в [электродуговой печи](#) с [расходуемым электродом](#) в [защитной атмосфере](#) ([гелий](#) или [аргон](#)). [Шихтой](#) в обоих случаях служит [йодидный титан](#) или [титановая губка](#), спрессованная в [брикеты](#), и [никель](#) марки Н-0 или Н-1.

Для получения равномерного [химического состава](#) по [сечению](#) и высоте [слитка](#) рекомендуется двойной или тройной переплав.

При выплавке в дуговой печи рекомендуется [сила тока](#) 1,2 кА, [напряжение](#) 40 В, давление гелия 53 МПа.

Оптимальный режим остывания слитков с целью предотвращения [растрескивания](#) — [охлаждение с печью](#) (не больше 10° в секунду).

Удаление [поверхностных дефектов](#) — обдирка [наждачным кругом](#).

Для более полного выравнивания химического состава по объёму слитка проводят [гомогенизацию](#) при температуре 950—1000°С в инертной атмосфере.

Применение материалов с эффектом памяти формы  
Соединительные втулки из никелида титана



Рис. 4.5

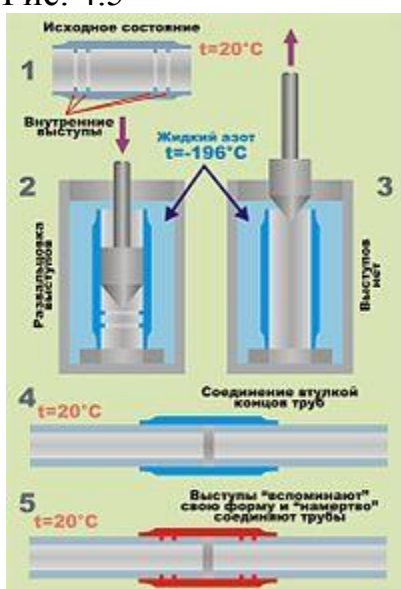


Рис. 4.6

Втулка, впервые разработанная и внедренная [фирмой](#) «Рейхем Корпорейшен», США, для соединения труб гидравлической системы военных [самолетов](#). В [истребителе](#) более 300 тысяч таких соединений, но ни разу не поступило сообщений об их поломках.

Внешний вид соединительной втулки показан на рис. 4.5. Её функциональными элементами являются внутренние выступы.

Применение таких втулок заключается в следующем (см. рис. 4.6):

1. Втулка в исходном состоянии при температуре 20°C.
2. Втулка помещается в [криостат](#), где при температуре -196°C [плунжером](#) развальцовываются внутренние выступы.
3. Холодная втулка становится изнутри гладкой.

4. Специальными клещами втулку вынимают из криостата и надевают на концы соединяемых [труб](#).
5. [Комнатная температура](#) является температурой нагрева для данного состава сплава. Далее все происходит «автоматически». Внутренние выступы «вспоминают» свою исходную форму, выпрямляются и врезаются во внешнюю поверхность соединяемых труб.

Получается прочное [вакуумплотное соединение](#), выдерживающее [давление](#) до 800 атм.

По сути дела этот тип соединения заменяет [сварку](#). И предотвращает такие недостатки [сварного шва](#), как неизбежное разупрочнение металла и накопление дефектов в переходной зоне между металлом и сварным швом.

Кроме того, этот метод соединения хорош для финального соединения при сборке [конструкции](#), когда сварка из-за переплетения узлов и трубопроводов становится труднодоступной.

Эти втулки используются в авиационной, космической и автомобильной [технике](#).

Этот метод также используется для соединения и ремонта труб [подводных кабелей](#).

В [медицине](#)

- [Перчатки](#), применяемые в процессе [реабилитации](#) и предназначенные для реактивации групп активных [мышц](#) с функциональной недостаточностью. Могут быть использованы в межзапястных, [локтевых](#), [плечевых](#), [голеностопных](#) и [коленных суставах](#).
- Противозачаточные спиральки, которые после введения приобретают функциональную форму под воздействием температуры тела.
- [Фильтры](#) для введения в [сосуды](#) кровеносной системы. Вводятся в виде прямой проволоки с помощью [катетера](#), после чего они приобретают форму фильтров, имеющих заданную локацию.
- Зажимы для защемления слабых вен.
- Искусственные мышцы, которые приводятся в действие [электрическим током](#).
- Крепежные [штифты](#), предназначенные для фиксации протезов на [костях](#).
- Искусственное удлинительное приспособление для так называемых растущих протезов у детей.
- Замещение хрящей головки [бедренной кости](#). Заменяющий материал становится самозажимным под действием сферической формы (головки бедренной кости).
- Стержни для коррекции [позвоночника](#) при [сколиозе](#).

- Временные зажимные фиксирующие элементы при [имплантации](#) искусственного [хрусталика](#).
- Оправа для [очков](#). В нижней части, где [стекла](#) крепятся проволокой. Пластиковые линзы не выскальзывают при охлаждении. Оправа не растягивается при протирке линз и длительном использовании. Используется эффект **сверхупругости**.
- Ортопедические импланты.
- Проволока (ортодонтическая дуга) для [исправления зубного ряда](#).
- [Имплантаты дентальные](#) (самофиксация расходящихся элементов в кости)

## Тепловая сигнализация

- Пожарная сигнализация.
- Противопожарные заслонки.
- Сигнальные устройства для ванн.
- Сетевой предохранитель (защита [электрических цепей](#)).
- Устройство автоматического открывания-закрывания [окон](#) в [теплицах](#).
- Бойлерные баки тепловой [регенерации](#).
- [Пепельница](#) с автоматическим стряхиванием пепла.
- Электронный контактор.
- Система для предотвращения выхлопа газов, содержащих пары [топлива](#) (в [автомобилях](#)).
- Устройство для удаления тепла из [радиатора](#).
- Устройство для включения противотуманных фар.
- Регулятор температуры в [инкубаторе](#).
- Ёмкость для мытья теплой водой.
- Регулирующие [клапаны](#) охлаждающих и нагревательных устройств, тепловых [машин](#).

## Другие применения

- Фирма «Фокус Боро», Япония использует никелид титана в приводных устройствах самописцев. Входной сигнал самописца преобразуется в электрический ток, которым нагревается проволока из никелида титана. За счет удлинения и сокращения проволоки приводится в движение [перо](#) самописца. С 1972 года изготовлено несколько миллионов таких узлов (данные на конец XX века). Так как [механизм](#) привода очень прост, поломки случаются крайне редко.
- Электронная кухонная плита конвекционного типа. Для переключения [вентиляции](#) при микроволновом нагреве и нагреве циркуляционным горячим воздухом используется датчик из никелида титана.
- Чувствительный клапан комнатного [кондиционера](#). Регулирует направление ветра в продувочном отверстии кондиционера, предназначенного для охлаждения и отопления.

- [Кофеварка](#). Определение [температуры кипения](#), а также для включения-выключения клапанов и переключателей.
- Электромагнитный кухонный комбайн. Нагрев производится [вихревыми токами](#), возникающими на дне [кастрюли](#) под действием магнитных силовых полей. Чтобы не обжечься, появляется сигнал, который приводится в действие элементом в виде катушки из никелида титана.
- Электронная сушилка-хранилище. Приводит в движение заслонки при регенерации обезвоживающего вещества.
- В начале 1985 года формозапоминающие сплавы, используемые для изготовления [каркасов бюстгальтеров](#), стали с успехом завоевывать [рынок](#). Металлический каркас в нижней части чашечек состоит из проволоки из никелида титана. Здесь используется свойство сверхупругости. При этом нет ощущения присутствия проволоки, впечатление мягкости и гибкости. При деформации (при стирке) легко восстанавливает форму. Сбыт — 1 млн штук в год. Это одно из первых практических применений материалов с памятью формы.
- Изготовление разнообразного зажимного [инструмента](#).
- [Герметизация корпусов](#) микросхем.
- Высокая эффективность превращения [работы](#) в тепло при мартенситных превращениях (в никелиде титана) предполагает использование таких материалов не только как высокодемпфирующих, но и в качестве рабочего тела [холодильников](#) и [тепловых насосов](#).
- Свойство сверхупругости используется для создания высокоэффективных [пружин](#) и аккумуляторов механической энергии.
- Также используется «эффект памяти» в изготовлении ювелирных изделий. Например, украшение в виде цветка. При надевании его на шею на цепочке, лепестки цветка, прислоняясь к телу, раскрываются, обнажая спрятанный внутри драгоценный камень.
- «Эффект памяти» используется и иллюзионистами — например, в фокусе, в котором изогнутый гвоздь сам выпрямляется в руках фокусника или одного из зрителей

## Лекция 12

Собственные колебания прямоугольного стержня.

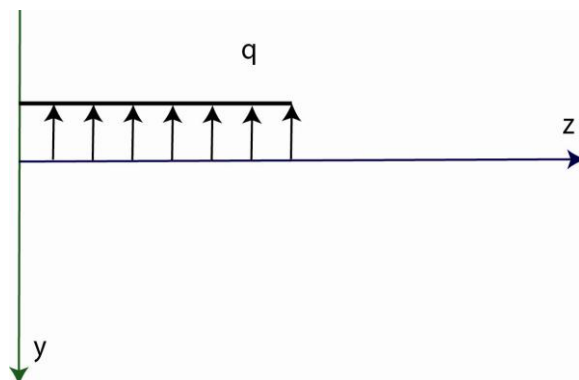


Рис.49

Уравнение движения имеет вид:

$$EJ \frac{\partial^4 v}{\partial z^4} + \rho F \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0 \quad (1)$$

$\rho$  – плотность материала;

$F$  - площадь поперечного сечения стержня.

Решение уравнения ищем в виде:

$$v = V(z)e^{i\omega t} \quad (2)$$

$\omega$  – частота собственных колебаний.

Подставляя (2) в (1), получаем:

$$EJ \frac{\partial^4 v}{\partial z^4} - \rho F \omega^2 V = 0 \quad \text{или} \quad V^{IV} - \lambda^4 V = 0 \quad (3)$$

где

$$\lambda^4 = \frac{\rho F \omega^2}{EJ}$$

$$V = Ce^{xz}; x^4 - \lambda^4 = 0$$

$$x_{1,2} = \pm \lambda; x_{3,4} = \pm i\lambda$$

т.е.

$$V(z) = c_1 sh \lambda z + c_2 ch \lambda z + c_3 \sin \lambda z + c_4 \cos \lambda z$$

Формулой 5 определяется балочная функция.

### Пример №1

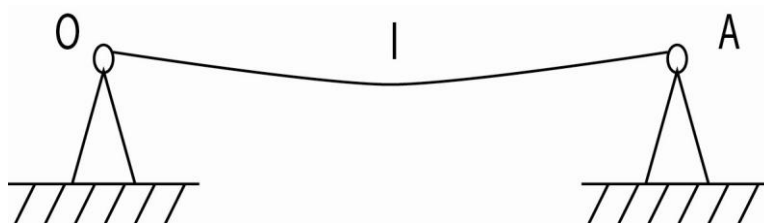


Рис.50

Шарнирное опирание стержня

$$\left. \begin{aligned} V|_{z=0} &= V|_{z=l} = 0 \\ V'|_{z=0} &= V'|_{z=l} = 0 \end{aligned} \right\}$$

$$V = \lambda^2 (c_1 sh \lambda z + c_2 ch \lambda z - c_3 \sin \lambda z - c_4 \cos \lambda z)$$

$$c_2 + c_4 = 0$$

$$c_2 - c_4 = 0$$

$$\left. \begin{aligned} c_1 sh \lambda l + c_2 eh \lambda l + c_3 \sin \lambda l + c_4 ea \lambda l &= 0 \\ c_1 sh \lambda l + c_2 eh \lambda l - c_3 \sin \lambda l - c_4 ea \lambda l &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Из (6) находим:

$$c_2 = c_4 = 0$$

$$\left. \begin{aligned} c_1 sh \lambda l + c_3 \sin \lambda l &= 0 \\ c_1 sh \lambda l - c_3 \sin \lambda l &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Из (7) получаем:

$$2c_3 \sin \lambda l = 0 \Rightarrow \sin \lambda l = 0$$

$$\lambda_n l = \bar{a}n, \quad \lambda_n = \frac{\bar{a}n}{l}, \text{ откуда имеем}$$

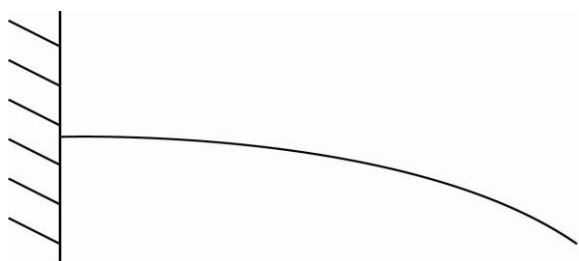
$$\omega_n = \sqrt{\frac{\lambda_n^4 EY}{SF}} = \sqrt{\left(\frac{\pi n}{l}\right) \frac{4EY}{SF}}$$

$$V_n = C_n \sin \lambda_n z \Rightarrow$$

$$V = C_n \sin \frac{\pi n z}{l} \quad (8)$$

## Пример №2

Стержень со свободным и заделанным концом



$$\left. \begin{aligned} V|_{t=0} &= iV'|_{t=e} = 0 \\ V^a|_{t=e} &= V^m|_{t=e} = 0 \end{aligned} \right\}$$

Рис.51

## Лекция 13

### Ортогональность балочных функций

Две функции называются ортогональными, если их скалярное произведение равно нулю при  $m \neq k$

$$V_m \bullet V_k = \int_0^e V_m(\lambda_m z) V_k(\lambda_k z) dz = 0$$



## Доказательство

$$\left. \begin{aligned} &V_m^{IV} - \lambda_m^4 V_m = 0 \\ &V_k^{IV} - \lambda_k^4 V_k = 0 \end{aligned} \right\} \bullet V_k$$

$$V_k^{IV} \bullet V_k - V_k^{IV} \bullet V_m - (\lambda_m^4 - \lambda_k^4) V_k \bullet V_m = 0 \quad (1)$$

$$V_k^{IV} \bullet V_k = \int_o^e V_m^{IV} V_k dz = [V_k V_m^{III}]_o^e - \int_o^e V_m^{III} V_k^I dz = - \int_o^e V_k^I dV_m^{II} = - [V_k^I V_m^{III}]_o^e + \int_o^e V_m^{II} V_k^{II} dz$$

$$V_m^{IV} \bullet V_k = \int_o^e V_m^{II} V_k^{II} dz \quad (2)$$

$$[V_k V_m^{III}]_o^e = [V_k^I V_m^{II}]_o^e = 0 \quad (3)$$

Выражение (3) имеет место в силу граничных условий: *Заделка, шарнирное отиране, свободный край*. Аналогично имеем:

$$V_k^{IV} V_m = \int_o^e V_k^{II} V_m^{II} dz \quad (4)$$

Принимая во внимание (2) и (4), получаем:

$$\lambda_m^4 - \lambda_k^4 V_m V_k = 0$$

Или

$$V_m V_k = 0 \text{ при } m \neq k$$

Функции Крылова:

$$\begin{aligned} X_{1k} &= \frac{1}{2} (ch \lambda_k z + \cos \lambda_k z) \\ X_{2k} &= \frac{1}{2 \lambda_k} (sh \lambda_k z + \sin \lambda_k z) \\ X_{3k} &= \frac{1}{2 \lambda_k^2} (ch \lambda_k z - \cos \lambda_k z) \\ X_{4k} &= \frac{1}{2 \lambda_k^3} (sh \lambda_k z - \sin \lambda_k z) \end{aligned} \quad (5)$$

Из (5) следует:

$$X'_{4k} = X_{3k}, X'_{3k} = X_{2k}, X'_{2k} = X_{1k} : X'_{1k} = X'_{4k} \lambda_k^4$$

Пример:

Стержень с заделанными конусами



Рис.1

$$V \lambda z = C_1 X_1 + C_2 X_2 + C_3 X_3 + C_4 X_4$$

Используя граничные условия при

$$z = 0 : V = 0 : V'(z) = 0,$$

$$C_1 = 0 : C_2 = 0.$$

Получаем относительно  $C_3$  и  $C_4$

$$C_1 = 0 : C_2 = 0.$$

получаем однородную систему уравнений при помощи граничных условий при  $z = e$

## Лекция 14

### Вынужденные колебания стержня

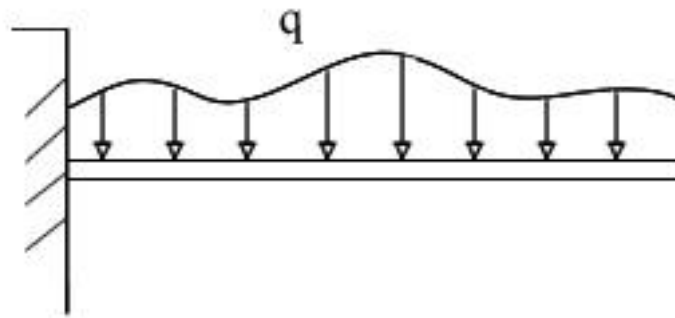


Рис.2

$$q = q(z, t)$$

$$\rho F \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + EI \frac{\partial^4 v}{\partial z^4} = q(z, t) \quad (1)$$

Решение уравнения (1) представим в виде ряда по балочным функциям:

$$v = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(z) v_n(t) \quad (2)$$

Подставим (2) в (1) и получим:

$$\rho F \sum_{n=1}^{\infty} \ddot{\varphi}_n V_n + EI \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n V_n = q(z, t)$$

Принимая во внимание уравнение:

$$V_n - \lambda_n^4 V_n = 0 \quad \text{получим:}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[ \rho F \ddot{\varphi}_n - EI \lambda_n^4 \varphi_n \right] V_n = q(z, t) \quad (3)$$

Умножая уравнение (3) на координатную функцию  $V_n$ , получаем:

$$\left[ \rho F \ddot{\varphi}_n + EI \lambda_n^4 \varphi_n \right] V_n \lambda_n z = q V \lambda_n z \quad (4)$$

$$\ddot{\varphi}_n + \omega_n^2 \varphi_n = H \quad (5)$$

$$\omega_n^2 = \frac{EI \lambda_n^4}{\rho F}, \quad H = \frac{q \lambda_n z}{\rho F V \lambda_n z}.$$

Решение уравнения (5) ищем при помощи метода вариации произвольных постоянных.

Имеем однородное уравнение:

$$\ddot{\varphi}_{n_0} + \omega_n^2 \varphi_{n_0} = 0$$

Его решение:

$$\varphi_{n_0} = C_n \sin \omega_n t + D_n \cos \omega_n t$$

Полагаем что:  $C_n = C_n(t); D_n = D_n(t)$

Сделаем замену переменных:

$$\left. \begin{aligned} \varphi_{n_r} &= C(t) \sin \omega_n t + D(t) \cos \omega_n t \\ \dot{\varphi}_{n_r} &= C(t) \omega_n \cos \omega_n t - D(t) \omega_n \sin \omega_n t \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Далее имеем:

$$\ddot{\varphi}_{n_r} = \omega_n \dot{C}_n \cos \omega_n t - C_n \omega_n^2 \sin \omega_n t - \dot{D}_n \omega_n \sin \omega_n t - D_n \omega_n^2 \cos \omega_n t \quad (7)$$

Подставляя (6) и (7) в (5), получаем:

$$\left. \begin{aligned} \dot{C}_n \omega_n \cos \omega_n t - \dot{D}_n \omega_n \sin \omega_n t &= H_n \cos \omega_n t \\ \dot{C}_n \omega_n \sin \omega_n t + \dot{D}_n \omega_n \cos \omega_n t &= 0 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} & * \cos \omega_n t \\ & * \sin \omega_n t \end{aligned} \quad (9)$$

Из (9) Находим:

$$\left. \begin{aligned} \dot{C}_n \omega_n &= H_n \sin \omega_n t \\ -\dot{D}_n \omega_n &= H_n \cos \omega_n t \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\left. \begin{aligned} C_n &= \frac{1}{\omega_n} \int_0^t H_n(\tau) \sin \omega_n \tau d\tau \\ D_n &= \frac{1}{\omega_n} \int_0^t H_n(\tau) \cos \omega_n \tau d\tau \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Принимая во внимание (6) и (10), получаем:

$$\varphi_{nz} = c_n f_n \omega_n t + d_n c a \omega_n t + \frac{1}{\omega_n} \int_0^t H_n(\tau) f_n \omega_n (t - \tau) d\tau$$

Постоянные  $c_n$  и  $d_n$  находим из начальных условий.

## Лекция 15

### Собственные колебания стержня при наличии вязкого трения

Рассмотрим модель вязкого трения Кельвина – Фойхта:

$$\sigma = E\varepsilon + E_*\dot{\varepsilon}$$

$E_*$  - коэффициент вязкого трения

В этом случае уравнение собственных колебаний имеет вид:

$$\rho F \ddot{v} + EJv^{IV} + E_*J\dot{v}^{IV} = 0 \quad (1)$$

Решение уравнения (1) ищем в виде:

$$v_n = V_n(\lambda_n z)\varphi_n(t)$$

$$\rho F \ddot{\varphi} V_n + EJ V_n^{IV} \varphi_n + E_*J V_n^{IV} \dot{\varphi} = 0$$

Используя уравнение для балочных функций, получаем:

$$\ddot{\varphi}_n + 2e_*\omega_n \dot{\varphi}_n + \omega_n^2 \varphi_n = 0 \quad (2)$$

$$2e_* = \frac{E_*}{E} \omega_n$$

Далее рассмотрим случай малого трения, то есть  $2e_* \ll 1$ . Решение уравнения (2) ищем в виде:

$$\varphi_n = c_n e^{\lambda t} \quad (3)$$

из (2) находим:

$$\lambda^2 + 2e_*\omega_n \lambda + \omega_n^2 = 0 \Rightarrow$$

$$\lambda_{1,2} = -e_*\omega_n \pm \sqrt{e_*^2\omega_n^2 - \omega_n^2} \Rightarrow$$

$$\lambda_{1,2} = -e_*\omega_n \pm i\omega_n \sqrt{1 - e_*^2}$$

или

$$\lambda_{1,2} = -e_*\omega_n \pm \omega_n \quad (4)$$

где

$$\omega_n = \omega_n \sqrt{1 - e_*^2}$$

Принимая во внимание (3) и (4), находим:

$$\varphi_n = C_{1n} e^{\lambda_1 t} + C_{2n} e^{\lambda_2 t} \quad (5)$$

Переходя в (5) к действительным переменным получаем:

$$\varphi_n = e^{-e_* \omega_n t} (C_1 \varepsilon_i \omega t + C_2 C_n \omega_n t) \quad (6)$$

Постоянные (5) и (6) находим из начальных условий.

## Лекция 16

### Вынужденные колебания при наличии сил вязкого трения

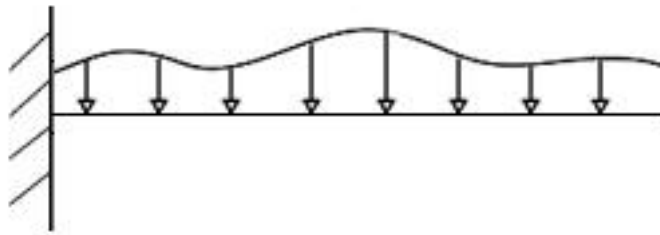


Рис.3

$$q = q(t; z)$$

Уравнение вынужденных колебаний имеет вид:

$$EJ v^{IV} + E_* J \dot{v}^{IV} + \rho F \ddot{v} = q(t; z) \quad (7)$$

Найдем вначале частное решение уравнения (7). Положим:

$$v = \sum_{n=1}^{\infty} V_n(\lambda_n z) \varphi_n(t) \quad (8)$$

Подставим (8) в (7) и представим

$$q(t; z) = \sum_{n=1}^{\infty} H_n(t) V_n(\lambda_n z)$$

в результате получим:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[ \rho F \ddot{\varphi}_n V_n(\lambda_n z) + E_* J \dot{\varphi}_n \lambda_n^4 V_n + EJ \varphi_n \lambda_n^4 V(\lambda_n z) \right] = \sum_{n=1}^{\infty} H_n(t) V_n(\lambda_n z) \quad (9)$$

Из уравнения (9) получаем:

$$\ddot{\varphi}_n + 2e_*\omega_n\dot{\varphi}_n + \omega_n^2\varphi_n = H_n(t); \quad (10)$$

$$H_n(t) = \frac{H(t)}{\rho F}, \quad (n=1,2,\dots)$$

Частное решение уравнения (10) ищем методом вариации произвольных постоянных:

$$\left. \begin{aligned} \varphi_{nr} &= C_n(t)e^{\lambda_1 t} + D_n(t)e^{\lambda_2 t} \\ \dot{\varphi}_{nr} &= C_n(t)\lambda_1 e^{\lambda_1 t} + D_n(t)\lambda_2 e^{\lambda_2 t} \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

где  $\lambda_{1,2}$  определяются формулами (4).

Далее находим:

$$\ddot{\varphi}_{nr} = \dot{C}_n\lambda_1 e^{\lambda_1 t} + C_n\lambda_1^2 e^{\lambda_1 t} + \dot{D}_n\lambda_2 e^{\lambda_2 t} + D_n\lambda_2^2 e^{\lambda_2 t} \quad (12)$$

Подставляем (12) в (10) и, используя дополнительное условие, получаем:

$$\left. \begin{aligned} \dot{C}_n\lambda_1 e^{\lambda_1 t} + \dot{D}_n\lambda_2 e^{\lambda_2 t} &= H_n(t) \\ \dot{C}_n e^{\lambda_1 t} + \dot{D}_n e^{\lambda_2 t} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

Из (13) находим:

$$\dot{C}_n = \frac{e^{-\lambda_1 t}}{\lambda_1 - \lambda_2} H_n(t); \quad \dot{D}_n = \frac{e^{-\lambda_2 t}}{\lambda_1 - \lambda_2} H_n(t) \quad (14)$$

Интегрируя систему (14) и принимая во внимание (4), получаем:

$$\left. \begin{aligned} C_n &= -\frac{i}{2\omega_n} \int_0^t e^{-\lambda_1 \tau} H_n(\tau) d\tau \\ D_n &= -\frac{i}{2\omega_n} \int_0^t e^{-\lambda_2 \tau} H_n(\tau) d\tau \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

Подставляя (15) в (11) получаем:

$$\gamma_{nr} = -\frac{i}{2\omega_n} \int_0^t [e^{\lambda_1(t-\tau)} - e^{\lambda_2(t-\tau)}] H_n(\tau) \lambda \tau \quad (16)$$

Совершая в (16) переход к действительным и мнимым переменным получаем:

$$\gamma_{nr}(t) = \frac{1}{\omega_n} \int_0^t e^{-e_*\omega_n(t-\tau)} \sin \omega_n(t-\tau) H_u(\tau) \delta \tau \quad (17)$$

Подставляя (17) в (8), получаем окончательное выражение для частного решения.

## Лекция 17

### Собственные колебания стержня с грузом на конце



Рис.1

$\rho, F, E, \gamma, m, I_c, l$

$m$ - масса груза,  $I_c$  - его момент инерции относительно точки С.

Найдем действие по Гамильтону

$$V = \int_{t_1}^{t_2} T - \Pi dt$$

$$V = \int_{t_1}^{t_2} \left[ \frac{1}{2} \rho F \int_0^l \dot{V}^2 dz + \frac{1}{2} m \dot{V}^2(l) + \frac{1}{2} I_c [\dot{V}'(l)]^2 - \frac{1}{2} EJ \int_0^l V'' \delta V'' dz \right] dt = 0 \quad (1)$$

Воспользуемся уравнением:

$$\delta V = 0 \quad (2)$$

$$\delta V = \int_{t_1}^{t_2} \left[ \rho F \int_0^l \dot{V} \delta \dot{V} dz + m \dot{V}(l) \delta \dot{V}(l) + I_c \dot{V}'(l) \delta \dot{V}'(l) - EJ \int_0^l V'' \delta V'' dz \right] dt = 0 \quad (3)$$

Интеграция уравнения (3) по частям, получаем:

$$\int_{t_1}^{t_2} \left\{ \int_0^l \left[ -\rho F \ddot{V} - EJ V^{IV} \right] \delta V dz - m \ddot{V}(l) \delta V(l) - I_c \ddot{V}'(l) \delta V'(l) - EJ V''(l) \delta V''(l) + \right. \\ \left. + EJ V'''(l) \delta V(l) \right\} dt = 0 \quad (4)$$

Так как вариации  $\delta V$ ,  $\delta V(l)$  и  $\delta V'(l)$  являются независимыми переменными, то для выполнения условия (4) необходимо чтобы сомножители при этих вариациях обращались в нуль.

В результате получаем дифференциальное уравнение колебаний стержня и естественные граничные условия.

$$\rho F \ddot{V} + EJ V^{IV} = 0 \quad (5)$$

$$\left. \begin{aligned} EJ V'''(l) - m \ddot{V}(l) &= 0 \\ J_l \ddot{V}'(l) + EJ V''(l) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Нахождение собственных форм и собственных частот колебаний стержня проведем после нормализации уровня (5) и условий (6).

Введём

$$v = \frac{z}{l}; \quad \tau = \frac{t}{T}$$

В результате получим:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \tau^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial S^4} = 0 \quad (7)$$

$$\left. \begin{aligned} v''' - \mu \ddot{v} &= 0 \\ I_0 v'' + \dot{v}' &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

где  $\dot{\phantom{x}} = \frac{\partial}{\partial \tau}$

$$I_0 = \frac{l^3 \rho F}{I_l}; \mu = \frac{m}{l \rho F} = \frac{m}{m_{cm.}}$$

Пример.

Решим спектральную задачу (7),(8).

Добавляя для определенности граничные условия;

$$v(0) = 0; v'(0) = 0 \quad (9)$$

Решение уравнения (7) и ищем в виде:

$$v = V(s) e^{i\omega \tau} \quad (10)$$

Подставляя в (7),(8) и (9), получаем:

$$\frac{d^4 V}{ds^4} - \lambda^4 V = 0 \quad (11)$$

$$\left. \begin{aligned} V''' - \mu \lambda^4 V &= 0 \\ I_0 V'' - \lambda^4 V' &= 0 \\ V(0) = 0; V'(0) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

Решение уравнения (11) имеет вид:

$$V = C_1 \sinh \lambda s + C_2 \cosh \lambda s + C_3 \sin \lambda s + C_4 \cos \lambda s$$

Удовлетворяя граничным условиям (12) получаем однородную систему алгебраических уравнений относительно постоянных  $C_1, C_2, C_3, C_4$ .

Обращая определитель этой системы в 0, находим собственные значения  $\lambda_1, \lambda_2, \dots$

## Лекция 18

### Собственные колебания стержня кусочно-постоянного поперечного сечения

Дано:  $E_1, l_1, F_1, I_1,$   
 $E_2, l_2, F_2, I_2$



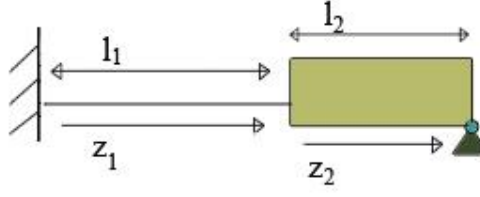


Рис.2

Действия по Гамильтону имеет вид:

$$\begin{aligned}
 v_1 &= \int_{t_1}^{t_2} (T_1 - \Pi_1) dt; v_2 = \int_{t_1}^{t_2} (T_2 - \Pi_2) dt \\
 v_1 &= \int_{t_1}^{t_2} \left[ \frac{\rho F_1}{2} \dot{v}_1^2 dz_1 - \frac{E_1 I_1}{2} \int_0^{l_1} v_1''^2 dz_1 \right] dt \\
 \delta v_1 &= \int_{t_1}^{t_2} \left[ \rho_1 F_1 \int_0^{l_1} \dot{v}_1 \delta \dot{v}_1 dz_1 - E_1 I_1 \int_0^{l_1} v_1'' \delta v_1'' dz_1 \right] dt = 0
 \end{aligned} \tag{1}$$

Выполняя интегрирование по частям, получим:

$$\int_0^{l_1} v_1'' \delta v_1'' dz_1 = v_1'' \delta v_1' \Big|_{z_1=l_1} - v_1''' \delta v_1 \Big|_{z_1=l_1} + \int_0^{l_1} v_1^{IV} \delta v_1 dz_1 \tag{2}$$

Далее имеем:

$$\begin{aligned}
 v_2 &= \int_{t_1}^{t_2} \left[ \frac{\rho_2 F_2}{2} \dot{v}_2^2 dz_2 - \frac{E_2 I_2}{2} \int_0^{l_2} v_2''^2 dz_2 \right] dt \\
 \delta v_2 &= \int_{t_1}^{t_2} \left[ \rho_2 F_2 \int_0^{l_2} \dot{v}_2 \delta \dot{v}_2 dz_2 - E_2 I_2 \int_0^{l_2} v_2'' \delta v_2'' dz_2 \right] dt = 0
 \end{aligned}$$

Интегрируя по частям, получаем:

$$\int_0^{l_2} v_2'' \delta v_2'' dz_2 = -v_2'' \delta v_2' \Big|_{t_2=0} + v_2''' \delta v_2 \Big|_{t_2=0} + \int_0^{l_2} v_2^{IV} \delta v_2 dz_2$$

Таким образом, находим:

$$\begin{aligned}
 &\int_{t_1}^{t_2} \left\{ \int_0^{l_2} (\rho_2 F_2 \dot{v}_2 - E_2 I_2 v_2^{IV}) \delta v_2 dz_2 + E_2 I_2 v_2'' \delta v_2' \Big|_{t_2=0} - E_2 I_2 v_2''' \delta v_2 \Big|_{t_2=0} + \right. \\
 &\left. + \int_0^{l_1} \left( -\rho_1 F_1 \ddot{v}_1 - E_1 I_1 v_1^{IV} \right) \delta v_1 dz_1 - E_1 I_1 v_1'' \delta v_1' \Big|_{z_1=l_1} + E_1 I_1 v_1''' \delta v_1 \Big|_{z_1=l_1} \right\} dt = 0
 \end{aligned} \tag{3}$$

Далее имеем:

$$\begin{aligned}
 &\left. \begin{aligned} \delta v_2' \Big|_{z_2=0} &= \delta v_1' \Big|_{z_1=l_1} \\ \delta v_2 \Big|_{z_2=0} &= \delta v_1 \Big|_{z_1=l_1} \end{aligned} \right\}
 \end{aligned} \tag{4}$$

Используя условия независимости вариаций и условия (4) из уравнения (3) получаем дифференциальные уравнения колебаний стержня и естественные граничные условия:

$$\rho_1 F_1 \ddot{V}_1 + E_1 J_1 V_1^{IV} = 0$$

$$\rho_2 F_2 \ddot{V}_2 + E_2 J_2 V_2^{IV} = 0$$

$$E_2 J_2 V_2'' \Big|_{z_2=0} - E_1 J_1 V_1'' \Big|_{z_1=l_1} = 0$$

$$F_2 J_2 V_2''' \Big|_{z_2=0} + E_1 J_1 V_1''' \Big|_{z_1=l_1} = 0$$

На стыке соединения стержней имеем кинематические граничные условия:

$$\left. \begin{aligned} V_1 \Big|_{z_1=l_1} &= V_2 \Big|_{z_2=0} \\ V_1' \Big|_{z_1=l_1} &= V_2' \Big|_{z_2=0} \end{aligned} \right\}$$

Далее спектральная задача решается способом, изложенным выше.

## Лекция 19

### Нелинейные собственные колебания стержня

Найдем в начале радиус кривизны стержня.

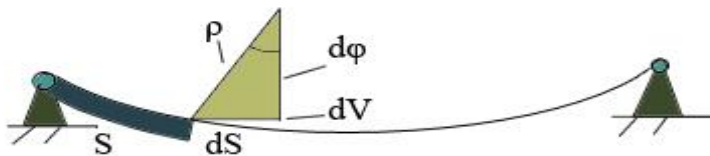


Рис.3

$l$  – длина стержня

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d\varphi}{dS}; \sin \varphi = \frac{dV}{dS};$$

$$\cos \varphi \frac{d\varphi}{dS} = \frac{d^2 V}{dS^2}$$

$$\frac{d\varphi}{dS} = \frac{1}{\cos \varphi} \frac{d^2 V}{dS^2}; \quad \frac{d\varphi}{dS} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 \varphi}} \frac{d^2 V}{dS^2};$$

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d\varphi}{dS} = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{dV}{dS}\right)^2}} \frac{d^2 V}{dS^2} \Rightarrow$$

Изгибающий момент

$$M_x = EJ_x \frac{1}{\sqrt{1 - (V')^2}} V'' \quad (1)$$

Принимая во внимание (1), находим уравнения для изгибных колебаний стержня.

$$EJ_x \left[ \frac{V''}{\sqrt{1 - (V')^2}} \right]'' + \rho F \ddot{V} = 0 \quad (2)$$

Т.к. мы рассматриваем малые колебания стержня, то уравнение (2) можно преобразовать к виду:

$$EJ_x \left[ 1 + \frac{1}{2} (V')^2 \right] V'''' + \rho F \ddot{V} = 0 \quad (3)$$

Рассмотрим шарнирное опирание стержня. Тогда в одномодовом приближение решение уравнения (3) можно представить в виде:

$$V = f(t) + \sin \frac{\pi}{l} Z \quad (4)$$

Подставим (4) в (3) и применим процедуру Бубнова-Галеркина:

$$EJ_x \int_0^l \left\{ \left[ 1 + \frac{1}{2} (V')^2 \right] V'''' \right\} \sin \frac{\pi}{l} Z^{dz} + \rho F \ddot{f} \int_0^l \sin^2 \frac{\pi}{l} Z^{dz} = 0$$

$$EJf \left( \frac{\pi}{l} \right)^4 \frac{1}{2} l - EJ \frac{1}{16} f^3 \left( \frac{\pi}{l} \right)^6 l + \rho F \frac{1}{2} l \ddot{f} = 0$$

$$\ddot{f} + \omega_0^2 f + \left( \frac{\pi}{l} \right)^2 \omega_0^2 f^3 = 0 \quad (5)$$

$$\omega_0 = \left( \frac{\pi}{l} \right)^2 \sqrt{\frac{EJ}{\rho F}},$$

где  $\omega_0$  – частота колебаний стержня при решении задачи в линейной постановке. Т.к. прогиб  $f \ll l$ , то удобно ввести новую переменную

$$\frac{f}{l} = \sqrt{\varepsilon} \varphi, \text{ где } \varepsilon \ll 1:$$

Из уравнения (5) получаем

$$\ddot{\varphi} + \omega_0^2 \varphi - \pi^2 \varepsilon \omega_0^2 \varphi^3 = 0 \quad (6)$$

Решения уравнения (6) ищем методом двух масштабов.

Полагаем

$$\varphi = A \tau \cos[\omega_0 t + \alpha(\tau)] + \varepsilon \varphi_1(t)$$

$\tau = \varepsilon t$  – медленное время.

Тогда с точностью до величин первого порядка малости имеем:

$$\begin{aligned}\dot{\varphi} &= \dot{A} \cos[\omega_0 t + \alpha(\tau)] - A(\omega + \dot{\alpha}) \sin[\omega_0 t + \alpha(\tau)] + \varepsilon \dot{\varphi}_1 \\ \ddot{\varphi} &= -2\omega_0 \dot{A} \sin[\omega_0 t + \alpha(\tau)] - A(\omega_0^2 + 2\dot{\alpha}\omega_0) \cos[\omega_0 t + \alpha(\tau)] + \varepsilon \ddot{\varphi}_2\end{aligned}\quad (7)$$

Подставим (7) в (6) и в результате получим:

$$\begin{aligned}& -2\omega_0 \cdot A \cdot \sin[\omega_0 \cdot t + \alpha(\tau)] - 2A \cdot \alpha \cdot \omega_0 \cdot \cos[\omega_0 \cdot t + \alpha(\tau)] + \\ & + \varepsilon \cdot (\dot{\varphi}_1 + \omega_0^2 \cdot \varphi_1) = -\pi^2 \cdot \varepsilon \cdot \omega_0^2 \cdot A^3 \cdot \cos^3[\omega_0 \cdot t + \alpha(\tau)] \\ & \text{Преобразуем данное уравнение к виду:} \\ & -2\omega_0 \cdot A \cdot \sin[\omega_0 \cdot t + \alpha(\tau)] - 2A \cdot \alpha \cdot \omega_0 \cdot \cos[\omega_0 \cdot t + \alpha(\tau)] + \\ & + \varepsilon \cdot (\dot{\varphi}_1 + \omega_0^2 \cdot \varphi_1) = -\frac{3}{4} \cdot \varepsilon \cdot \omega_0^2 \cdot A^3 \cdot \cos[3\omega_0 \cdot t + 3\alpha(\tau)] + \frac{\varepsilon}{4} A^3 \cdot \omega_0^2 \cdot \\ & \cdot \cos[3\omega_0 \cdot t + 3\alpha(\tau)]\end{aligned}\quad (8)$$

Для того что бы отсутствовали разложенные слагаемые, в уравнении (8) следует приравнять сомножители при  $\sin[\omega_0 \cdot t + \alpha(\tau)]$  слева и справа.

$$\left. \begin{aligned} -2\omega_0 A &= 0 \\ -2A\omega_0 \alpha &= -\frac{3}{4} \varepsilon A^3 \omega_0^2 \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Из (9) получаем:

$$A = \text{const} = A_0$$

$$\alpha_0 = \frac{3}{8} \varepsilon \cdot \omega_0 \cdot A_0^2 \Rightarrow$$

$$\alpha = \frac{3}{8} \omega_0 \cdot \varepsilon \cdot A_0^2 \cdot t + \alpha_0$$

Окончательно получаем:

$$\alpha = A_0 \cdot \cos \left[ \left( 1 + \frac{3}{8} \varepsilon \cdot A_0^2 \right) \omega_0 t + \alpha_0 \right]$$

Таким образом, учёт нелинейной деформации вызывает повышение собственных частот колебаний.

## Лекция 20

### Нелинейные собственные колебания стержня при наличии сил вязкого трения

В этом случае уравнение (6) примет вид:

$$\ddot{\varphi} + \omega_0^{2\varphi} - \pi^2 \cdot \varepsilon \cdot \omega_0^2 \cdot \varphi^3 = -2 \cdot \gamma \cdot \varepsilon_{\omega_0} \cdot \dot{\varphi} \quad (1)$$

Здесь  $\gamma = 1$  коэффициент вязкого трения

Решение уравнения (1) ищем, как и ранее, в виде:

$$\alpha = A(\tau) \cdot \cos[\omega_0 \cdot t + \alpha(\tau)] + \varepsilon \cdot \varphi_1(t)$$

тогда

$$\dot{\varphi} = \dot{A} \cos \omega_0 t + \alpha(\tau) - A(\omega_0 + \dot{\alpha}) \sin \omega_0 t + \alpha(\tau) + \varepsilon \dot{\varphi}_1 \quad (2)$$

$$\ddot{\varphi} = -2\omega_0 \dot{A} \sin \omega_0 t + \alpha(\tau) - A(\omega_0^2 + 2\dot{\alpha}\omega_0) \cos \omega_0 t + \alpha(\tau) + \varepsilon \ddot{\varphi}_1$$

Подставляя (2) в (1) получаем:

$$\begin{aligned} & -2\omega_0 \dot{A} \sin \omega_0 t + \alpha(\tau) - 2A\omega_0 \dot{\alpha} \cos \omega_0 t + \alpha(\tau) + \\ & + \varepsilon(\ddot{\varphi}_1 + \omega_0^2 \varphi_1) = -\frac{3}{4} \varepsilon \omega_0 A^3 \cos \omega_0 t + \alpha(\tau) + \\ & + 2\gamma \varepsilon A \omega_0^2 \sin \omega_0 t + \alpha(\tau) + \frac{1}{4} \varepsilon A \omega_0^3 \cos 3\omega_0 t + \alpha(\tau) \end{aligned} \quad (3)$$

Приравнявая сомножители при одинаковых  $\sin \omega_0 t + \alpha(\tau)$  и  $\cos \omega_0 t + \alpha(\tau)$  слева и справа в уравнении (3) получаем:

$$\dot{A} + \gamma \varepsilon \omega_0 A = 0$$

$$\dot{\alpha} = \frac{3}{8} \varepsilon \omega_0 A^2$$

Далее находим:

$$A = A_0 l^{-\gamma \varepsilon \omega_0 t}$$

$$\alpha = -\frac{3}{8\gamma} A_0^2 l^{-\gamma \varepsilon \omega_0 t} + \alpha_0$$

## Лекция 21

### Устойчивость стержня. Задача Эйлера

Рассмотрим стержень, один конец которого неподвижен, а на другой подвижный конец стержня действует продольная сила.

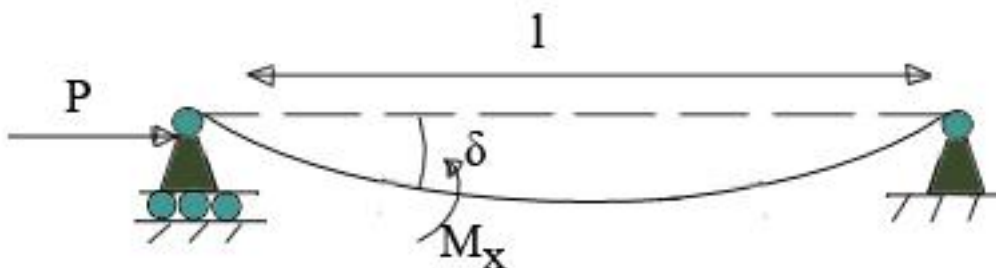


Рис.4

Имеем уравнение равновесия:

$$-Pv + M_x = 0 \Rightarrow \text{т.к. } M_x = -EJ_x \frac{d^2v}{dz^2}$$

то

$$EJ_x \frac{d^2v}{dz^2} + Pv = 0 \quad (1)$$

Рассмотрим шарнирное опирание стержня, тогда

$$v = C \sin \frac{\pi n z}{l} \quad (2)$$

Подставляя (2) в (1)

$$C \left[ P_n - EJ_x \left( \frac{\pi n}{l} \right)^2 \right] \sin \frac{\pi n z}{l} = 0$$

Откуда находим:

$$P_n = EJ_x \left( \frac{\pi n}{l} \right)^2 ;$$

Это и есть критическая сила по Эйлеру, при которой стержень потеряет устойчивость.

Найдем далее прогиб стержня при потере устойчивости. Для этого воспользуемся полученным ранее уравнением для кривизны:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{V''}{\sqrt{1-V'^2}} = \left[ 1 + \frac{1}{2} V'^2 \right] V''; \quad (3)$$

Подставим (3) в (1) и получим:

$$EI_x V H'' \left[ 1 + \frac{1}{2} (V')^2 \right] + Pv = 0; \quad (4)$$

Рассмотрим стержни с отпиранием и положением:

$$V = C_n \rho_i n \frac{\pi n Z}{l}; \quad (5)$$

Подставим (5) в (4) и выполним процедуру Бубнова-Галеркина. В результате будем иметь:

$$-EI_x \left( \frac{\pi n}{l} \right)^2 - EI_x \left( \frac{\pi n}{l} \right)^4 C_n^2 + p = 0;$$

Или:

$$P - P_n = P_n \frac{C_n^2}{8} \left(\frac{\pi n}{e}\right)^2;$$

Окончательно получаем:

$$C_n = \frac{2l}{\pi n} \sqrt{\left(\frac{p}{p_n} - 1\right)}; \quad (6)$$

Формула (6) определяет амплитуду прогиба стержня после потери устойчивости.

Влияние продольного усилия на собственную частоту поперечного колебания стержня.

Имеем:

$$EI_x V^4 + p v'' + \rho F V v'' = 0; \quad (7)$$

Рассмотрим шарнирное опирание стержня, тогда:

$$V = C e^{i\omega t} \sin \frac{\pi n z}{e}; \quad (8)$$

Подставляя (8) в (7), получаем:

$$EI_x \left(\frac{\pi n}{e}\right)^4 - \left(\frac{\pi n}{e}\right)^2 p - \lambda F \omega^2 = 0;$$

Откуда находим:

$$\omega^2 = \frac{1}{\rho F} \left(\frac{\pi n}{e}\right)^2 [EI_x \left(\frac{\pi n}{e}\right)^2 - p]; \quad (9)$$

Из (9) следует: сжимающее усилие уменьшает частоту собственных колебаний, а растягивающее увеличивает.

## Лекции 22, 23

Параметрические колебания стержня при наличии гармонической продольной силы удовлетворяют уравнению:

$$Er v^{IV} + P_0 \cos 2\omega t + \rho F \dot{v} = 0 \quad (1)$$

$2\omega$  - частота вынуждающей силы. Решение уравнения (1) ищем в виде:

$$v = f(t) \sin \frac{\pi t}{e}$$

Тогда для функции  $f(t)$  получаем уравнение:

$$\ddot{f} + \varepsilon \omega_0^2 \cos 2\omega t f + \omega_0^2 f = 0 \quad \text{где} \quad (2)$$

$$\omega_0^2 = \frac{EJ \left(\frac{\pi}{\ell}\right)^4}{\rho F}$$

$$\varepsilon = \frac{\rho_0}{EJ\left(\frac{\pi}{\ell}\right)^2} \ll 1$$

То есть амплитуда продольной силы является малой величиной. Рассмотрим в начале случай, когда частота продольной силы  $\omega$  находится вдали от частоты собственных колебаний  $\omega_0$ , то есть  $\omega \neq \omega_0$ . Тогда решение уравнения (2) ищем в виде:

$$f = A(\tau) \cos \omega_0 t + \alpha(\tau) + \varepsilon f_1(t) \quad (3)$$

где  $\tau = \varepsilon t$  - медленное время. Из уравнения (3) с точностью до величин первого порядка малости получаем:

$$\begin{aligned} \dot{f} &= \dot{A} \cos(\omega_0 t + \alpha) + A(\omega_0 + \dot{\alpha}) \sin(\omega_0 t + \alpha) + \varepsilon \dot{f}_1 \\ \ddot{f} &= -2\omega_0 \dot{A} \sin(\omega_0 t + \alpha) - A(\omega_0^2 + 2\dot{\alpha}\omega_0) \cos(\omega_0 t + \alpha) + \varepsilon \ddot{f}_1 \end{aligned} \quad (4)$$

Подставляя (4) в (3) получим:

$$\begin{aligned} -2\omega_0 \dot{A} \sin(\omega_0 t + \alpha) - 2A\dot{\alpha}\omega_0 \cos(\omega_0 t + \alpha) + \varepsilon(\ddot{f}_1 + \omega_0^2 f_1) = \\ = -\frac{1}{2}\varepsilon\omega_0^2 \{ \cos[(2\omega - \omega_0)t - \alpha] \} + \cos[(2\omega + \omega_0)t + \alpha] \} \end{aligned} \quad (5)$$

Для того чтобы отсутствовали резонансные слагаемые, следует положить в уравнении (5):

$$\dot{A} = 0; \dot{\alpha} = 0 \quad \text{или} \quad A = A_0; \alpha = \alpha_0.$$

Таким образом, будем иметь  $f = A_0 \cos(\omega t + \alpha) + f_1(t)$ , где  $f_1$  получается как частное решение следующего уравнения:

$$\ddot{f}_1 + \omega_0^2 f_1 = \frac{1}{2}\varepsilon\omega_0^2 \cos(2\omega - \omega_0)t - \alpha_0 + \cos(2\omega + \omega_0)t + \alpha_0$$

Рассмотрим далее случай, когда  $\omega \approx \omega_0$ , т. е.  $\omega - \omega_0 = \Delta\omega$ ;  $\Delta\omega \ll \omega, \omega_0$ .

$$\text{Или } \frac{\Delta\omega}{\omega_0} = K\varepsilon\omega_0; \quad K \approx 1$$

Решение уравнения (2) ищем в виде:

$$f = p(\tau) \cos \omega t + q(\tau) \sin \omega t + \varepsilon f_0(t),$$

тогда:

$$\begin{aligned} \dot{f} &= \dot{p} \cos \omega t - \omega p \sin \omega t + \dot{q} \sin \omega t - \omega q \cos \omega t + \varepsilon \dot{q}_1 \\ \ddot{f} &= -2\omega \dot{p} \sin \omega t - \omega^2 p \sin \omega t + 2\dot{\omega} q \cos \omega t - \omega^2 q \sin \omega t + \delta \ddot{q}_1 \end{aligned} \quad (3)$$



Подставляя (3) в (2), получаем

$$\begin{aligned} & -2\omega \dot{p} \sin \omega t + 2\omega \dot{q} \cos \omega t - 2\omega \varepsilon^2 kp \cos \omega t - 2\omega_0^2 kq \sin \omega t + \varepsilon(\ddot{q}_1 + \omega_0^2 q_1) = \\ & = -\varepsilon \omega^2 p \cos 2\omega_0 t \cos \omega t - \varepsilon \omega^2 q \cos 2\omega_0 t \sin \omega t \end{aligned} \quad (4)$$

После преобразования правой части уравнения (4), получаем:

$$\begin{aligned} & -2\omega \dot{p} \sin \omega t + 2\omega \dot{q} \cos \omega t - 2\omega^2 \varepsilon Kp \cos \omega t - \\ & -2\omega^2 \varepsilon Kq \sin \omega t + \varepsilon(\ddot{q}_2 + \omega_0^2 q_1) = \\ & = -\varepsilon \omega^2 p \frac{1}{2} [\cos \omega t + \cos 3\omega t] - \\ & -\varepsilon \omega^2 q \frac{1}{2} [-\sin \omega t + \sin 3\omega t] \end{aligned}$$

Чтобы отсутствовали резонансные слагаемые, следует приравнять сомножители в данном уравнении при  $\sin \omega t$  и  $\cos \omega t$

$$\left. \begin{aligned} -2\omega \dot{p} - 2\omega^2 \varepsilon Kq - \varepsilon \omega^2 \frac{1}{2} q &= 0 \\ 2\omega \dot{q} - 2\omega^2 \varepsilon Kp + \varepsilon \omega^2 \frac{1}{2} p &= 0 \end{aligned} \right\}$$

или будет иметь

$$\begin{aligned} \dot{p} + \varepsilon \omega \left( K + \frac{1}{4} \right) p &= 0 \\ -\varepsilon \omega \left( K - \frac{1}{4} \right) p + \dot{q} &= 0 \end{aligned}$$

Подставим сюда  $p = C_1 e^{\lambda t}; q_1 = C_2 e^{\lambda t}$ . Получим

$$\left. \begin{aligned} c_1 \lambda + c_2 \varepsilon \omega \left( K + \frac{1}{4} \right) &= 0 \\ -c_1 \varepsilon \omega \left( K - \frac{1}{4} \right) + c_2 \lambda &= 0 \end{aligned} \right\}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} \lambda & \varepsilon \omega \left( K + \frac{1}{4} \right) \\ -\varepsilon \omega \left( K - \frac{1}{4} \right) & \lambda \end{vmatrix} = 0$$

Далее имеем:

$$\lambda^2 + \varepsilon^2 \omega^2 (K - \frac{1}{16}) = 0$$

Откуда находим:

$$\lambda_{1,2} = \pm \varepsilon \omega \sqrt{\frac{1}{16} - K^2}$$

Если  $\frac{1}{16} - K^2 > 0$ , то получается неустойчивое решение задачи.

## Лекция 24, 25

### Собственные колебания прямоугольной пластины

Рассмотрим собственные колебания прямоугольной пластины

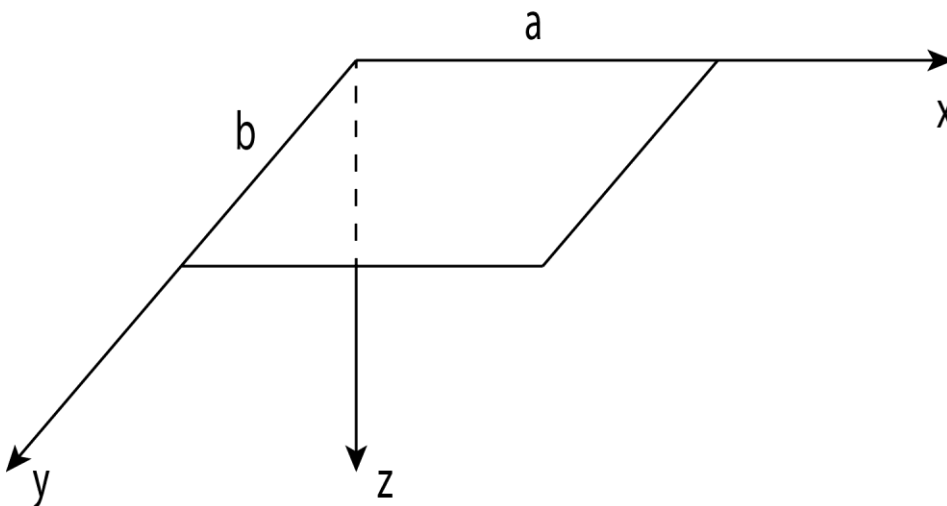


Рис.1

В этом случае уравнение колебательного движения пластины имеет вид:

$$D \nabla^4 \omega + \rho h \frac{\partial^2 \omega}{\partial t^2} = 0 \quad (1)$$

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}, \nabla^4 = \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right)^2 \quad (2)$$

Рассмотрим колебания пластины, когда граничные условия удовлетворяют шарнирному отиранию по всем краям, т.е. :

$$\omega|_{x=0} = 0 ; \omega|_{x=a} = 0 ; \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2}|_{x=0} = 0 ; \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2}|_{x=a} = 0 \quad (3)$$

$$\omega|_{y=0} = 0 ; \omega|_{y=b} = 0 ; \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2}|_{y=0} = 0 ; \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2}|_{y=b} = 0$$

В этом случае решение уравнения (1) следует взять в виде:

$$\omega = C_{nk} e^{i\omega t} \sin \frac{k\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (4)$$

$k=1,2,\dots, n=1,2,\dots$

Подставляя (4) в (1), получаем:

$$\begin{aligned} 9 \left[ \left( \frac{ka}{a} \right)^2 + \left( \frac{na}{b} \right)^2 \right]^2 - \rho h \omega_{kn}^2 &= 0 \\ \Rightarrow \\ \omega_{kn} &= \sqrt{\frac{D}{\rho n} \left[ \left( \frac{ka}{a} \right)^2 + \left( \frac{na}{b} \right)^2 \right]} \Rightarrow \\ \omega_{kn} &= \sqrt{\frac{D}{\rho n}} \lambda_{kn} \end{aligned} \quad (5)$$

где:

$$\lambda_{kn} = \pi^2 \left[ \left( \frac{k}{a} \right)^2 + \left( \frac{n}{b} \right)^2 \right]$$

Рассмотрим собственные колебания прямоугольной пластины, когда две противоположные кромки имеют шарнирное опирание на двух остальных могут быть произвольные граничные условия.

Пусть для определённости имеем:

$$\omega /_{x=0} = \omega /_{x=a} = 0, \quad \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} /_{x=0} = \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} /_{x=a} = 0$$

Тогда решение уравнения (1) имеем в виде:

$$\begin{aligned} \omega &= f_n(y) \ln \frac{\pi n x}{a} e^{i\omega t} \\ n &= 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (6)$$

Подставляя (6) в (1) получаем:

$$\begin{aligned} D \left[ f_n^{IV} - 2 f_n'' \left( \frac{\pi n}{a} \right)^2 + f_n \right] - \omega_n^2 f &= 0 \\ f_n^{IV} - 2 \left( \frac{\pi n}{a} \right)^2 f_n'' + f_n - \frac{\omega_n^2 f}{D} &= 0 \Rightarrow \\ f_n^{IV} - 2 \frac{x^2}{n} f_n'' + k_n f &= 0 \\ x_n^2 &= \left( \frac{\pi n}{a} \right)^2 \\ f_n &= e e^{xy} \\ \lambda^4 - 2 x_4^2 x^2 + k_n &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lambda_{1,2}^2 &= x_n^2 \pm \sqrt{x_n^4 - k_n} \\ \lambda_1 &= \sqrt{x_n^2 + \sqrt{x_n^4 - k_n}} \\ \lambda_2 &= \sqrt{x_n^2 - \sqrt{x_n^4 - k_n}} \\ \lambda_3 &= \sqrt{x_n^2 - \sqrt{x_n^4 - k_n}} \\ \lambda_4 &= \sqrt{x_n^2 + \sqrt{x_n^4 - k_n}}\end{aligned}$$

или

$$\left. \begin{aligned}\lambda_{1,2} &= \pm \sqrt{x_n^2 + \sqrt{x_n^4 - \frac{\omega_n^2}{D}}} \\ \lambda_{3,4} &= \pm \sqrt{x_n^2 - \sqrt{x_n^4 - \frac{\omega_n^2}{D}}}\end{aligned}\right\} \quad 5$$

Принимая во внимание (5), получаем:

$$f_n = c_1 sh \lambda_1 z + c_2 ch \lambda_1 z + c_3 sh \lambda_2 z + c_4 ch \lambda_2 z \quad 6$$

Рассмотрим для определенности заделку по двум остальным кромкам, т.е.

$$\omega \Big|_{y=0} = \omega \Big|_{y=b} = 0; \quad \omega \Big|_{y=0} = \omega \Big|_{y=b} = 0; \quad 7$$

Имеем:

$$f_n = c_1 \lambda_1 ch \lambda_1 z + c_2 \lambda_1 sh \lambda_1 z + c_3 \lambda_2 ch \lambda_2 z + c_4 \lambda_2 sh \lambda_2 z \quad 8$$

Используя (6) и (8), получаем систему однородных уравнений относительно постоянных  $C_1, C_2, C_3, C_4$ :

$$C_3 + C_4 = 0$$

$$C_1 \lambda_1 + C_3 \lambda_2 = 0$$

$$c_1 sh \lambda_1 b + c_2 ch \lambda_1 b + c_3 sh \lambda_2 b + c_4 ch \lambda_2 b = 0$$

$$c_1 \lambda_2 ch \lambda_1 b + c_2 \lambda_1 sh \lambda_1 b + c_3 \lambda_2 ch \lambda_2 b + c_4 \lambda_2 sh \lambda_2 b = 0$$

Обращая определитель данной системы в нуль, получаем трансцендентное уравнение для определения частот колебаний

$$\omega_{n,k}$$

где  $k = (1, 2, \dots)$ .

## Лекция 26

### Собственные колебания пластины при наличии вязкого трения

Рассмотрим собственные колебания прямоугольной пластины при наличии сил вязкого трения. В этом случае дифференциальное уравнение изгиба пластины имеет вид:

$$D\nabla^4 \omega + \rho h \ddot{\omega} + D^* \nabla^4 \dot{\omega} = 0 \quad 1$$

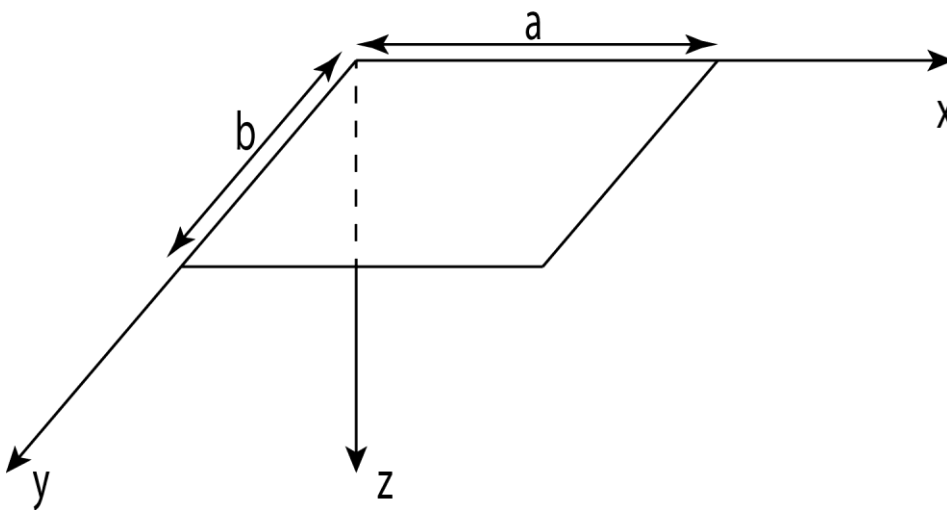


Рис.2

Где

$$D^* = \frac{E^* h^3}{12(1-\nu^2)}$$

$E^*$  -вязкоупругий модуль Юнга. Рассмотрим шарнирное опирание пластины. Прогиб представим в виде, разделив переменные

$$w = f_{kn}(t) \sin \frac{\pi k x}{a} \sin \frac{\pi n y}{b} \quad 2$$

Подставляя (2) в (1), получаем:

$$\rho h \ddot{f}_{kn} + D^* \left[ \left( \frac{\pi k}{a} \right)^2 + \left( \frac{\pi n}{b} \right)^2 \right]^2 \dot{f}_{kn} + D \left[ \left( \frac{\pi k}{a} \right)^2 + \left( \frac{\pi n}{b} \right)^2 \right]^2 f_{kn} = 0$$

Или

$$\ddot{f}_{kn} + 2e_* M_{kn}^2 \dot{f}_{kn} + M_{kn}^2 f_{kn} = 0 \quad (3)$$

$$2e_* = \frac{E_*}{E}$$

Решение уравнения (3) ищем в виде:

$$f_{kn} = c_{kn} e^{\lambda_{kn} t} \quad (4)$$

Подставляя (4) в уравнение (3), получаем:

$$\lambda_{kn}^2 + 2e_* M_{kn}^2 \lambda_{kn} + M_{kn}^2 = 0$$

Откуда находим:

$$\lambda_{kn} = -\frac{-2e_*}{2} M_{kn}^2 \pm \sqrt{e_*^2 M_{kn}^4 - M_{kn}^2}$$

Или

$$\begin{aligned} \lambda_{kn} &= -e_* M_{kn}^2 \pm M_{kn}^2 \sqrt{1 - \frac{M_{kn}^2}{e_*^2 M_{kn}^4}} \Rightarrow \\ \lambda_{kn} &= -e_* M_{kn}^2 \pm e_* M_{kn}^2 \sqrt{1 - \frac{1}{e_*^2 M_{kn}^2}} \end{aligned} \quad (5)$$

Большое вязкое трение. Тогда:

$$\frac{1}{\rho_*^2 M_{kn}^2} < 1$$

В этом случае имеем:

$$f_{kn} = c_{kn}^{(1)} e^{-\lambda_{kn}^{(1)} t} + c_{kn}^{(2)} e^{-\lambda_{kn}^{(2)} t} \quad (6)$$

$$\lambda_{kn}^{(1)} = e_* M_{kn}^2 + e_* M_{kn}^2 \sqrt{1 - \frac{1}{e_*^2 M_{kn}^2}} > 0$$

$$\lambda_{kn}^{(2)} = e_* M_{kn}^2 - e_* M_{kn}^2 \sqrt{1 - \frac{1}{e_*^2 M_{kn}^2}} > 0$$

Постоянные  $c_{kn}^{(1)}$  и  $c_{kn}^{(2)}$  находятся из начальных условий. В данном случае имеет место аperiodическое движение. Если имеет место случай малого трения, тогда:

$$\frac{1}{e_*^2 M_{kn}^2} > 1 \qquad 1 - \frac{1}{e_*^2 M_{kn}^2} < 0$$

И следовательно

$$\begin{aligned} \lambda_{kn}^1 &= -e_* \mu_{kn}^2 + i e_* \mu_{kn}^2 x_{kn}^2 \\ \lambda_{kn}^2 &= -e_* \mu_{kn}^2 + i e_* \mu_{kn}^2 x_n^2 \\ x_{kn}^2 &= \frac{1}{e_*^2 \mu_{kn}^2} - 1; i = \sqrt{-1} \end{aligned}$$

В данном случае имеем периодические затухающие колебания.

$$t_{kn} = e^{-e_* \mu_{kn}^2 t} (C_1 \sin e_* \mu_{kn}^2 x_n^2 t + C_2 \cos \mu_{kn}^2 x_n^2 t)$$

## Лекция 27

### Формула Рэлея-Ритца для определения собственных частот колебаний стержня

Рассматриваем собственные колебания стержня в случае, когда отсутствуют силы вязкого трения. Тогда имеет место закон сохранения полной механической энергии.

$$\hat{E} = T + \Pi = const \tag{1}$$

$$\hat{E} = \frac{1}{2} \rho F \int_0^e v'^2 dz + \frac{1}{2} EI_x \int_0^e v''^2 dz = C \tag{2}$$

Функцию прогиба представим в виде:

$$v = V(z) \sin \omega t \tag{3}$$

где  $V = V(z)$  — координатная функция,  $\omega$  — частота собственных колебаний стержня. Подставим (3) в (2) и в результате получим:

$$\hat{E} = \left[ \frac{1}{2} \rho F \omega^2 \int_0^e V^2 dz \right] \cos^2 \omega t + \left[ \frac{EI_x}{2} \int_0^e V''^2 dz \right] \sin^2 \omega t = C \quad (4)$$

Пусть  $\sin \omega t = 0$ ; тогда  $\cos \omega t = 1$ , в этом случае имеем:

$$\frac{1}{2} \rho F \omega^2 \int_0^e V^2 dz = C \quad (5)$$

Если  $\cos \omega t = 0$ , тогда  $\sin \omega t = 1$ ; в этом случае получаем:

$$\frac{EI_x}{2} \int_0^e V''^2 dz = C \quad (6)$$

Из (5) и (6) находим:

$$\omega^2 = \frac{EI_x \int_0^e V''^2 dz}{\rho F \int_0^e V^2 dz} \quad (7)$$

**Замечание.** Формулу Рэлея – Ритца можно так же применять при нахождении частоты колебаний пластины.

Пример: Найдём частоту колебаний стержня, один конец которого зафиксирован, а другой свободен.

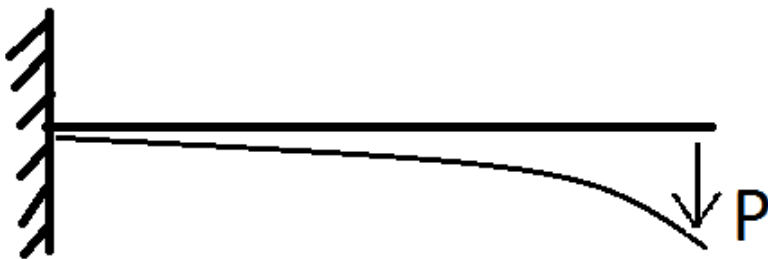


Рис.3

В качестве координатной функции возьмём прогиб стержня под действием силы  $P$  на конус.

В этом случае:

$$EJ_x V^4 = 0$$



$$V|_{z=e} = 0; V'|_{z=0} = 0$$

$$V^2|_{z=e} = 0; EJ_x V^3|_{z=e} = P$$

Имеем:

$$V = C_0 + C_1 Z + \frac{C_2}{2} Z^2 + \frac{C_3}{6} Z^3$$

Удовлетворяя граничным условиям, получаем:

$$C_0 = C_1 = 0$$

$$C_2 + C_3 l = 0$$

$$C_3 = \frac{P}{EJ_x}$$

Т.к. координатная функция определена с точностью до произвольной, то имеем:

$$V = C(-lz^2 + \frac{z^3}{3}) \quad (8)$$

Подставляя (8) в (7) находим квадрат частоты

$$\omega^2 = \frac{35}{99} \frac{EJ_x}{\rho Fl^k}$$