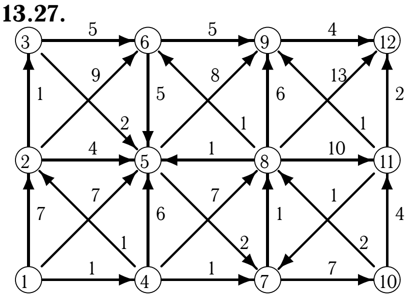
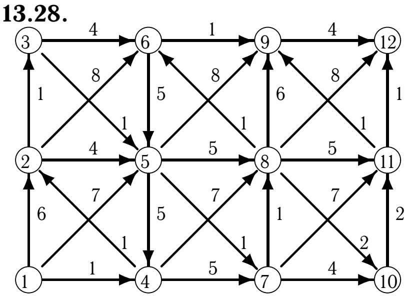
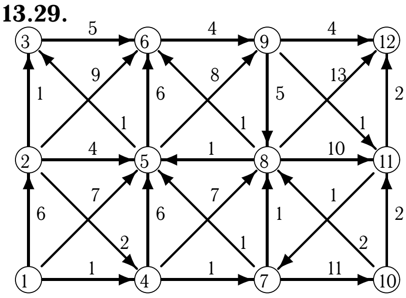
**13.27.**



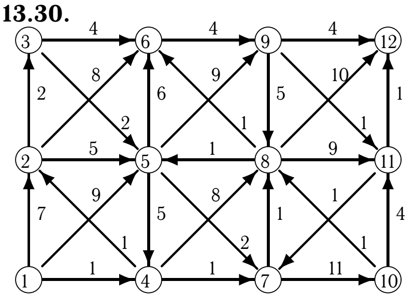
**13.28.**



**13.29.**



**13.30.**



**4.1.1. Пример.** *Дан взвешенный орграф (рис. 34). Найти кратчайший путь из вершины $A$ в $B$.*

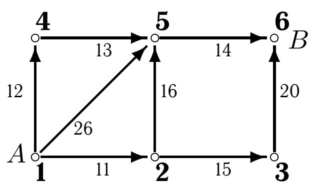



**Рис. 34**

### *Решение*

Применим алгоритм Е. Дейкстры [10], с.343; [29], с.128; [13], с.151.

Пошаговый алгоритм определения кратчайшего расстояния из вершины $A$ в $B$ состоит в следующем. С каждой вершиной связывается метка. Метка может быть постоянной или временной. Первоначально вершине $A$ приписывается постоянная метка 0, а всем остальным $\infty$. На первом шаге вычисляются расстояния от вершины с постоянной меткой $A$ до всех остальных. Если до некоторая вершина не соединена с вершиной с постоянной меткой или дуга направлена в обратную сторону, то расстояние принимается $\infty$. Найденные расстояния являются временными метками вершин. Минимальная из временных меток берется за постоянную. На следующем шаге временные метки всех вершин (кроме тех, у которых постоянные метки) вычисляются как сумма значения последней полученной постоянной метки и расстояния от нее, в том случае, если это значение не больше предыдущего значения временной метки этой вершины. Минимальная из временных меток опять берется за постоянную. Процесс продолжается до тех пор, пока вершина $B$ не получит постоянную метку. Значение этой метки — кратчайшее расстояние от $A$ до $B$.

Рассмотрим отдельные шаги решения.

1. Вершина А получает постоянную метку 0, остальные — $\infty$.

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|
| $\boxed{0}$ | $\infty$ | $\infty$ | $\infty$ | $\infty$ | $\infty$ |

2. Вычисляем расстояния от вершины 1 с постоянной меткой 0. Вершины 2, 4 и 5 меняют свои временные метки на 11, 12 и 26. Остальные имеют прежние метки $\infty$. Очевидно, наименьшая метка 11. Она и становится постоянной.

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|
| $\boxed{0}$ | | | $\infty$ | $\infty$ | $\infty$ |
| | $\boxed{11}$ | $\infty$ | 12 | 26 | $\infty$ |

3. Вычисляем расстояния от вершины 2 с постоянной меткой 11. Вершины 3 и 5 имеют расстояния 15 и 16 до вершины 2, метка которой имеет значение 11. Суммируя, получаем значения 26 и 27. Для вершины 5 прежнее значение 26 было меньше нового значения 27. Следовательно значение метки 5 не меняем, оно остается равным 26. Из трех временных меток 12, 26 и 26 наименьшая принадлежит вершине 4. Эта метка становится постоянной.

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|
| $\boxed{0}$ | | $\infty$ | | $\infty$ | $\infty$ |
| | $\boxed{11}$ | $\infty$ | $\boxed{12}$ | 26 | $\infty$ |
| | | 26 | | | $\infty$ |

4. Вычисляем расстояния от вершины 4 с постоянной меткой 12. Вершина 5 имеет до нее расстояние 13. Суммируя 13+12, получаем значение 25 временной метки вершины 5 вместо прежнего значения 26. Из двух временных меток вершин 3 и 5 наименьшая принадлежит вершине 5. Эта метка становится постоянной.

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|
| $\boxed{0}$ | | $\infty$ | | | $\infty$ |
| | $\boxed{11}$ | $\infty$ | $\boxed{12}$ | | $\infty$ |
| | | 26 | | | $\infty$ |
| | | 26 | | $\boxed{25}$ | $\infty$ |

5. На следующем этапе, вычисляя расстояния от вершины 5 с постоянной меткой 25, приходим к конечной вершине $B$. Но ее метка 25+14=39 не становится постоянной, так как она не является минимальной. От вершины 5 до вершины 3 расстояние $\infty$ (они не соединены). Прежнее значение временной метки вершины 3 меньше $\infty$. Поэтому метка вершины 3 не меняется. Метка вершины 3 со значением 26 меньше 39 становится постоянной и от нее на следующем этапе ищем расстояния.

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|
| $\boxed{0}$ | | | | | $\infty$ |
| | $\boxed{11}$ | | $\boxed{12}$ | | $\infty$ |
| | | | | | $\infty$ |
| | | | | $\boxed{25}$ | $\infty$ |
| | | $\boxed{26}$ | | | 39 |

6. От вершины 3 до вершины 6 расстояние 20, так как 26+20>39, то значение метки 6 не меняем. На этом шаге она остается прежней и единственной временной меткой. Временная метка вершины 6 становится постоянной, что означает конец процесса. Минимальное расстояние от $A$ до $B$ равно 39.

Две Maple-программы для определения кратчайшего пути в орграфе приведены на с. 122 и с. 124.

## 4.2. Поток в сети

Сетью называют взвешенный орграф с двумя выделенными вершинами: истоком и стоком. Исток имеет нулевую полустепень захода, а сток нулевую степень исхода. Поток выходит из истока и без потерь, в том же объеме заходит в сток. Условие равновесия (по объему входа и выхода) выполняется и для каждой вершины сети. Вес дуг означает как правило пропускную способность дуги. Задача о наибольшем потоке в сети не единственная, но вероятно, основная задача для потоков в сети.