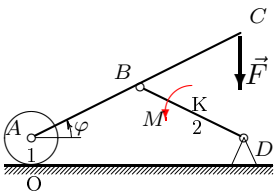


Примеры решения механических задач с одной степенью свободы с помощью уравнений Лагранжа 2-го рода:



1.17. Механизм состоит из стержня AC , цилиндра массой m_1 и кривошипа BD массой m_2 . Цилиндр катится по горизонтальной плоскости. На стержень действует вертикальная сила F , на кривошип — момент M . $AB = BC = BD = a$. За обобщенную координату принять φ .

РЕШЕНИЕ

Выразим скорости тел через обобщенную координату:

Составим граф: $O \xrightarrow[\pi/2]{R} A \xrightarrow[\varphi]{a} B \xrightarrow[-\varphi]{a} D$

$$y: 0 = \cos(\pi/2)\Omega_1 R + \cos\varphi \dot{\varphi} a + \cos(\varphi)\Omega_2 a$$

$$\text{Получим: } \Omega_2 = -\dot{\varphi}$$

$$x: 0 = -\Omega_1 R - \sin(\varphi)\dot{\varphi} a - \sin(\varphi)\Omega_2 a$$

$$\text{Получим: } \Omega_1 = -2\sin(\varphi)\dot{\varphi}$$

Из графа $O \xrightarrow[\pi/2]{R} A$ получим $V_{Ax} = 2\sin(\varphi)\dot{\varphi}R$

Составим граф: $A \xrightarrow[\varphi]{2a} C$

$$x: V_{Cx} = 2\sin(\varphi)a - 2\sin(\varphi)\dot{\varphi}a = 0$$

$$y: V_{Cy} = 2a\cos(\varphi)\dot{\varphi}$$

Составим граф: $D \xrightarrow[\pi-\varphi]{a/2} K$

$$y: V_{Ky} = a\cos(\varphi)\dot{\varphi}/2$$

Кинетическая энергия:

$$T = 3/4m_2V_{Ax}^2 + 1/2m_2a^2\Omega_2^2/6$$

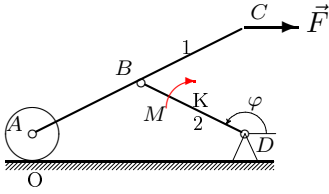
$$T = \dot{\varphi}^2(3m_1a^2\sin^2\varphi + m_2a^2/6)$$

$$T = \dot{\varphi}^2/2(A\sin^2\varphi + B)$$

Обобщенная сила:

$$Q = (-FV_{Cy} + M\Omega_2 - m_2gV_{Ky})/\dot{\varphi}$$

$$Q = -2F\cos(\varphi)a - M - m_2g\cos(\varphi)a/2$$



1.18. Механизм состоит из стержня AC массой m_1 , цилиндра и кривошипа BD массой m_2 . Цилиндр катится по горизонтальной плоскости. На стержень действует горизонтальная сила F , на кривошип — момент M . $AB = BC = BD = a$. За обобщенную координату принять φ .

РЕШЕНИЕ

Выразим скорости тел через обобщенную координату:

$$\text{Составим граф: } D \xrightarrow{a} B \xrightarrow{a} A \xrightarrow{R} O$$

$$y: 0 = \cos(\varphi)a\dot{\varphi} + \cos(\varphi)\Omega_1 a + \cos(\pi/2)R\Omega_{OA}$$

$$\text{Получим: } \Omega_1 = -\dot{\varphi}$$

$$\text{Составим граф: } D \xrightarrow{a} B \xrightarrow{a} A$$

$$x: V_{Ax} = -\sin(\varphi)a\dot{\varphi} - \sin(\varphi)\dot{\varphi}a = -2a\dot{\varphi}\sin(\varphi)$$

$$\text{Составим граф: } A \xrightarrow{2a} C$$

$$x: V_{Cx} = -2\sin(\varphi)\dot{\varphi}a + 2\sin(\varphi)\dot{\varphi}a = 0$$

$$\text{Составим граф: } D \xrightarrow{a/2} K$$

$$y: V_{Ky} = a\cos(\varphi)\dot{\varphi}/2$$

$$\text{Составим граф: } A \xrightarrow{2a} B$$

$$x: V_{By} = a\cos(\varphi)\dot{\varphi}$$

Кинетическая энергия:

$$T = m_1 V_B^2/2 + m_1 4a^2/6\Omega_1^2 + m_2 a^2/6\Omega_2^2$$

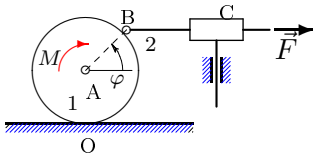
$$T = (2/3)m_1 a^2 \dot{\varphi}^2 + (m_2 a^2/6)\dot{\varphi}^2$$

$$T = \dot{\varphi}^2 B/2$$

Обобщенная сила:

$$Q = (-M\Omega_2 + FV_{Cx} - m_2 g V_{Ky} - m_1 g V_{By})/\dot{\varphi}$$

$$Q = -M - m_2 g \cos a/2 - m_1 g \cos(\varphi)a$$



1.19. Сквозь муфту, закрепленную на вертикальном штоке, скользит горизонтальный стержень, соединенный шарниром с ободом цилиндра. Масса цилиндра m_1 , радиус — R . Масса стержня m_2 . К цилиндру приложен момент M , к стержню — сила F . За обобщенную координату принять φ .

РЕШЕНИЕ

Составим граф: $O \xrightarrow{\pi/2} A$

$$V_{Ax} = -\dot{\varphi}R$$

Составим граф: $A \xrightarrow{\varphi} B$

$$V_{Bx} = -\dot{\varphi}R - \sin(\varphi)R\dot{\varphi}$$

$$V_{By} = \cos(\varphi)\dot{\varphi}R$$

Стержень движется поступательно

Кинетическая энергия:

$$T = (3/4)m_1V_{Ax}^2 + m_2V_B^2/2$$

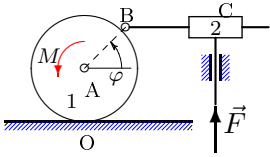
$$T = (3/4)m_1\dot{\varphi}^2R^2 + m_2/2(2\dot{\varphi}^2R^2 + 2R^2\dot{\varphi}^2\sin(\varphi))$$

$$T = \dot{\varphi}^2/2(A + B\sin(\varphi))$$

Обобщенная сила:

$$Q = (-M\Omega_1 + FV_{Bx} - m_2gV_{By})/\dot{\varphi}$$

$$Q = -M - FR - FR\sin(\varphi) - m_2g\cos(\varphi)R$$



1.20. Сквозь муфту, закрепленную на вертикальном штоке, скользит горизонтальный стержень, соединенный шарниром с ободом цилиндра. Масса цилиндра m_1 , радиус — R . Масса муфты m_2 . К цилиндру приложен момент M , к штоку — сила F . За обобщенную координату принять φ .

РЕШЕНИЕ

Составим граф: $O \xrightarrow{\pi/2} A$

$$V_{Ax} = -\dot{\varphi}R$$

Составим граф: $A \xrightarrow{\varphi} B$

$$V_{Bx} = -\dot{\varphi}R - \sin(\varphi)R\dot{\varphi}$$

$$V_{By} = \cos(\varphi)\dot{\varphi}R$$

$$V_{Cy} = V_{By}$$

Кинетическая энергия:

$$T = (3/4)m_1V_{Ax}^2 + m_2V_{Cy}^2/2$$

$$T = (3/4)m_1\dot{\varphi}^2R^2 + (m_2R^2/2)\dot{\varphi}^2\cos^2\varphi$$

$$T = \dot{\varphi}^2/2(A + B\cos^2\varphi)$$

Обобщенная сила:

$$Q = (M\Omega_1 + FV_{Cy} - m_2gV_{Cy})/\dot{\varphi}$$

$$Q = M + (F - m_2g)\cos(\varphi)R$$