СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие

В Страсбурге есть кафедральный собор Нотр-Дам, построенный в начале 13 века. Известна легенда, связанная с ним [1]. Архитектор в качестве украшения и опоры большого свода воздвиг внутри здания высокую колонну (*Pilier du Jugement Dernier* [2]). У коллег архитектора и жителей города возникло сомнение, выдержит ли эта колонна такую нагрузку? Сколько времени простоит эта колонна? Но архитектор был уверен в своем творении, а в качестве насмешки над сомневающимися установил скульптурную копию одного из своих оппонентов, сидящим на балкончике над входом в собор и наблюдающим «сомнительную» колонну. Время идет, а человечек на балюстраде смотрит на колонну и все ждет, когда рухнет колонна (рис. 1).

Рис. 1

Теперь, с позиций современной науки, установившей реологические свойства многих строительных материалов, можно считать, что эта легенда — первая постановка задачи устойчивости при ползучести с определением зависимости критического времени от действующей нагрузки.

Механическое движение твердых тел, деформирование упругих и неупругих сред и конструкций описывается дифференциальными уравнениями. Для задач о движении материальной точки или тела необходимо ставить какие-то начальные условия, или какие-то условия на характеристики этого движения, позволяющие найти константы интегрирования. Принят наиболее естественный вариант: в некоторый момент времени, например, при $t = 0$, известны координаты точки и ее скорость. Отсюда можно получить зависимость координат точки во все последующее время. Число начальных условий равно порядку дифференциального уравнения. Но ничто не запрещает поставить условия

[1] http://www.mishanita.ru

[2] Колонна Страшного Суда

и на ускорение или даже высшие производные — третьи, четвертые и более высокие порядки. Такую начальную задачу будем называть *обобщенной задачей Коши*. В этом случае с помощью уравнения движения можно найти значения начального положения и скорости, выразив их через заданные высшие производные. Вот здесь мы и подходим к сути того, что излагается в этой книге. *Процедура выражения функции и скорости через высшие производные в некоторых случаях может не состояться*! Эти случаи являются *особыми точками* начальной задачи и называются потерей стабильности процесса, или, иначе, нестабильностью. Имеем, например, дифференциальное уравнение $\dot{x} + (a - t)x = 0$, где точка над символом означает производную по времени [1] $\dot{x} = dx(t)/dt$, a — некоторое число. Если поставить условие на скорость $\dot{x}(t_0) = v_0$, то найти $x(t_0)$ можно лишь при $t \neq a$. Таким образом, в предлагаемом определении, значение $t = a$ является точкой нестабильности (особой точкой) процесса. В рамках одной теории будем различать две постановки: анализ стабильности процесса и анализ стабильности *возмущенного* движения (или процесса).

Второй случай относится в большей степени к процессам, описываемых нелинейными уравнениями. Поясним это на примере. Уравнение прямолинейного движения точки массой m под действием силы F имеет вид $m\dot{v} = F$, где $v(t)$ — скорость точки. Пусть $m = 1$ кг, а сила зависит от скорости: $F = -av - b/v$, где a и b — некоторые константы. Для скорости точки имеем, таким образом, обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка

$$\dot{v}v + av^2 + b = 0. \tag{I}$$

Рассмотрим малое отклонение от основного процесса, выбрав условно за основной процесс решение уравнения при определенном заданном начальном условии на $v(t)$. В результате возмущения функция $v(t)$ и ее скорость $\dot{v}(t)$ приобретут приращения

$$\tilde{v} = v + \Delta v, \qquad \tilde{\dot{v}} = \dot{v} + \Delta\dot{v}. \tag{II}$$

Для возмущенных величин также справедливо уравнение движения

$$\tilde{\dot{v}}\tilde{v} + a\tilde{v}^2 + b = 0.$$

Подставляя сюда приращения (II) и пренебрегая малыми величинами, т. е. оставляя только линейные по приращениям величины, получаем

$$v\Delta\dot{v} + (\dot{v} + 2av)\Delta v = 0.$$

[1] Вторая производная — две точки; порядок высших производных обозначается верхним индексом в скобках: $v^{(n)} = d^n v/dt^n$.

В те моменты времени, когда скобка при Δv обращается в нуль, связь приращений $\Delta \dot{v}$ и Δv

$$\Delta v = -\frac{v}{\dot{v} + 2av}\Delta \dot{v} \tag{III}$$

вырождается. Равенство знаменателя в (III) соответствует нестабильности возмущенного процесса. Так как из уравнения движения следует $\dot{v} = -av - b/v$, то нестабильность наблюдается при совершенно определенной скорости движения

$$v = \sqrt{b/a}. \tag{IV}$$

Если из решения уравнения движения известна функция $v(t)$, то из (IV) можно найти значение t, при котором малые или даже как угодно малые возмущения $\Delta \dot{v}$ скорости должны соответствовать неограниченно большим возмущениям Δv. Безусловно, это что-то значит для основного процесса. Конечно, это проявляется не так явно, как в задачах устойчивости, так как здесь требуется возмущение совершенно определенного вида, да еще и приложенного в соответствующий момент, но пренебрегать этим фактом в расчетах нельзя.

В настоящей работе даны решения задач выпучивания стержней в условии ползучести на основе предлагаемого подхода.

Заметим, что существо проблемы состоит в том, что классические постановки *устойчивости* здесь не проходят. В таких постановках все неупругие реологические системы изначально неустойчивы, хотя из практики известно, что критическое время (уменьшающееся вместе с ростом нагрузки) для этих систем существует.

Большинство решений основано на символьных преобразованиях, иногда весьма трудоемких. Более того, если в большинстве задач механики, где основные уравнения известны, или их вывод не требует сложных преобразований, результат можно получить численно, то при анализе стабильности аналитические преобразования абсолютно необходимы. Прежде всего они нужны для получения упругих эквивалентов реологических сред. Поэтому без современных средств компьютерной математики здесь не обойтись. В последней главе даны программы системы Maple [2, 19, 25, 28, 31, 56, 58, 75, 84], позволяющие выполнять все аналитические преобразования. Выбор именно Maple, а не других, также мощных программ, связан только с личными предпочтениями автора. Большинство задач вполне выполнимы и в других системах (Mathematica [30], Maxima). Первые свои результаты (1990-е годы) автор получил в пакете Reduce, компактной и мощной программе, умещавшейся на одной дискете и работавшей под управлением DOS 6.22.

Применение системы компьютерной математики в этой книге вызвано еще одной важной причиной. Читая различные научные статьи и книги, особенно, где приводятся сложные формулы для решения, необходимые в какой-либо практической проблеме, автор всегда относился к опубликованным результатам с некоторым естественным недоверием. А что, если в формулу вкралась ошибка, глупая опечатка, ошибка наборщика, часто непонимающего суть текста? Стоит ли рисковать и использовать эту формулу, пусть даже очень простую и красивую и принадлежащую авторитетному ученому и опубликованную в солидном журнале или в известном издательстве? Конечно же, хочется ее проверить. Алгоритм вывода формулы обычно дается. Но даже если в тексте нет сакраментальных *«легко видеть..»*, или *«очевидно..»*, повторять все хитросплетения замен, решений, упрощений, разложений в ряд, интегрирований и дифференцирований весьма утомительно и обычно в таких случаях формула откладывается в сторону, берется какой-нибудь более простой и хорошо зарекомендовавший себя результат [1], и все усилия автора формулы остаются напрасными. Если же к формулам приложена программа для Maple или другой подобной математической системы с возможностью свободно скачать текст с сайта автора, то, пользуясь ею, можно быстро и надежно все самому пересчитать «с нуля». Идею достоверности передачи знаний в виде *оживших формул* в статьях и книгах уже давно разрабатывает и реализует в том числе в виде расчетного сервера twt.mpei.ac.ru/OCHKOV/VPU_Book_New/mas/index.html для Mathcad профессор НИУ МЭИ Очков Валерий Федорович [2]. Именно этот опыт, а также печальный опыт чтения книг и даже справочников с опечатками, и подвигнул автора к написанию книги с легко проверяемыми формулами. Все программы, с помощью которых можно проверить изложенный в настоящем труде материал, а также при желании продвинуться в исследованиях дальше (и это только приветствуется!), расположены на первой странице сайта автора vuz.exponenta.ru. С некоторыми темами в виде лекций на YouTube можно ознакомиться на канале Kirsanov2011.

В конце книги приведены некоторые справочные сведения о пакете линейной алгебры системы Maple.

Все замечания и предложения автор принимает по адресу c216@ya.ru.

Автор выражает благодарность профессору Локощенко А. М. за таблицу материальных констант металлов, профессору Кобрину А. И. за полезные обсуждения и замечания по существу проблемы и Адамову Б. И. за историческую справку.

[1] Например, формула Эйлера для критической нагрузки сжатого упругого стержня — тут уж можно не сомневаться. Проверено веками.

[2] Очков В.Ф. Формулы в научных публикациях: проблемы и решения (pdf) // Cloud of Science. Т. 1, № 3. 2014. С. 421-456/