

Из полученного линейного уравнения определяем реакцию.

6. Реакцию второй опоры определяем из условия равновесия бруса в целом.

7. Подставляем найденную реакцию в выражения для деформаций и получаем удлинения участков $\delta l_k = l_k \varepsilon_k$.

8. Смещения сечений вычисляем как сумму удлинений

$$\Delta x_k = \sum_i^k \delta l_i, \quad k = 1, \dots, n.$$

Пример. Найти реакции опор стального прямого призматического бруса кусочно-постоянного сечения, закрепленного по концам (рис. 5). К брусу приложены горизонтальные силы $P_1 = 77\text{кН}$, $P_2 = 37\text{кН}$. Построить эпюры продольных сил, нормальных напряжений, относительных удлинений и горизонтальных смещений. Модуль упругости материала $E = 2 \cdot 10^5\text{МПа}$. Даны площади сечений $F_1 = 31\text{см}^2$, $F_2 = 27\text{см}^2$, $F_3 = 23\text{см}^2$ и длины $l_1 = 3\text{м}$, $l_2 = 2\text{м}$, $l_3 = 3\text{м}$.

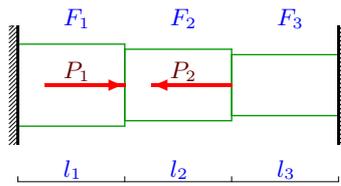


Рис. 5

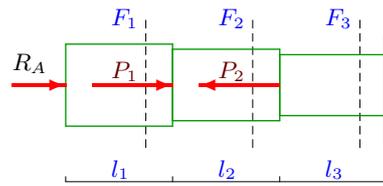


Рис. 6

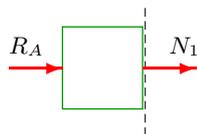


Рис. 7

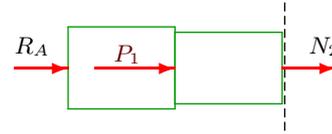


Рис. 8

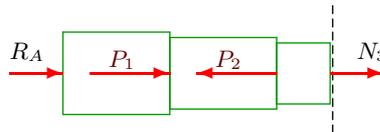


Рис. 9

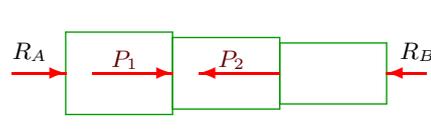


Рис. 10

Решение

1. Освобождаем одну из опор, заменяя ее действие на брус неизвестной реакцией (рис. 6). Реакцию направляем по внешней нормали к поверхности опоры.

Методом сечений, из условия равновесия внешних сил и реакций опор, находим усилие на участке 1 как функцию неизвестной реакции

(рис. 7): $N_1 = -R_A$. На участке 2: $N_2 = -R_A - P_1$ (рис. 8), на участке 3: $N_3 = -R_A - P_1 + P_2$ (рис. 9).

2. Вычисляем напряжения на участках:

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= N_1/F_1 = -R_A/F_1, \\ \sigma_2 &= N_2/F_2 = (-R_A - P_1)/F_2, \\ \sigma_3 &= N_3/F_3 = (-R_A - P_1 + P_2)/F_3.\end{aligned}$$

3. Вычисляем деформации на участках:

$$\begin{aligned}\varepsilon_1 &= \sigma_1/E = -R_A/(EF_1), \\ \varepsilon_2 &= \sigma_2/E = (-R_A - P_1)/(EF_2), \\ \varepsilon_3 &= \sigma_3/E = (-R_A - P_1 + P_2)/(EF_3).\end{aligned}$$

4. Записываем выражения для удлинений участков

$$\begin{aligned}\delta l_1 &= l_1\varepsilon_1 = -l_1R_A/(EF_1), \\ \delta l_2 &= l_2\varepsilon_2 = l_2(-R_A - P_1)/(EF_2), \\ \delta l_3 &= l_3\varepsilon_3 = l_3(-R_A - P_1 + P_2)/(EF_3).\end{aligned}$$

5. Приравниваем общее удлинение бруса нулю

$$-l_1R_A/(EF_1) - l_2(R_A + P_1)/(EF_2) + l_3(-R_A - P_1 + P_2)/(EF_3) = 0.$$

Из полученного линейного уравнения определяем реакцию R_A :

$$R_A = -\frac{P_1l_2/F_2 + (P_1 - P_2)l_3/F_3}{l_1/F_1 + l_2/F_2 + l_3/F_3} = -36.249 \text{ кН.}$$

Знак минус показывает, что заделка удерживает отрыв бруса от поверхности.

6. Реакцию второй опоры определяем из условия равновесия бруса в целом (рис. 10):

$$\sum X_i = R_A + P_1 - P_2 - R_B = 0, \quad R_B = R_A + P_1 - P_2 = 3.751 \text{ кН.}$$

Реакция больше нуля, следовательно брус прижат к правой опоре.

7. Подставляем найденную реакцию в выражения для деформаций и получаем удлинения участков

$$\begin{aligned}\delta l_1 &= 3 \cdot 36.249 \cdot 10^3 / (2 \cdot 10^{11} \cdot 31 \cdot 10^{-4}) = 0.175 \cdot 10^{-3} \text{ м} \\ \delta l_2 &= 2 \cdot 10^3 (36.249 - 77) / (2 \cdot 10^{11} \cdot 27 \cdot 10^{-4}) = -0.151 \cdot 10^{-3} \text{ м}\end{aligned}$$

8. Смещения сечений 1 и 2 вычисляем как сумму удлинений

$$\Delta x_1 = \delta l_1 = 0.175 \text{ мм}, \quad \Delta x_2 = \delta l_1 + \delta l_2 = 0.175 - 0.151 = 0.024 \text{ мм.}$$

Строим эпюру смещений (рис. 11):

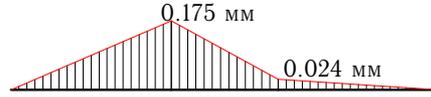
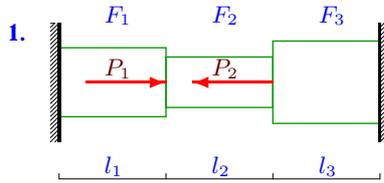
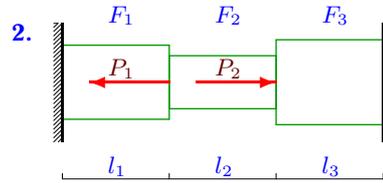


Рис. 11

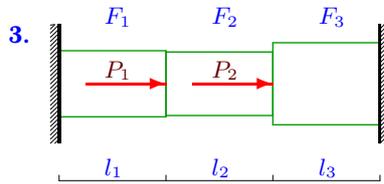
Условия задач. К двум сечениям стального прямого призматического бруса кусочно-постоянного сечения, закрепленного по концам, приложены силы P_1 , P_2 . Найти реакции опор бруса, продольные силы, нормальные напряжения, относительные удлинения и горизонтальные смещения сечений. Модуль упругости материала $E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$.



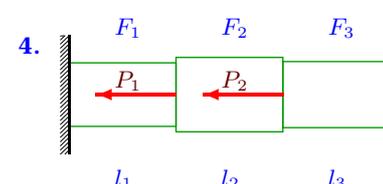
$$P_1 = 14 \text{ кН}, P_2 = 15 \text{ кН}, F_1 = 26 \text{ см}^2, F_2 = 19 \text{ см}^2, F_3 = 31 \text{ см}^2, l_1 = 3 \text{ м}, l_2 = 2 \text{ м}, l_3 = 3 \text{ м}.$$



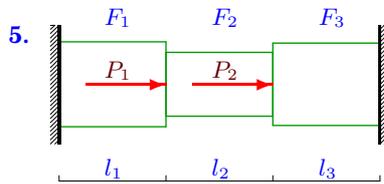
$$P_1 = 60 \text{ кН}, P_2 = 75 \text{ кН}, F_1 = 28 \text{ см}^2, F_2 = 20 \text{ см}^2, F_3 = 32 \text{ см}^2, l_1 = 2 \text{ м}, l_2 = 4 \text{ м}, l_3 = 3 \text{ м}.$$



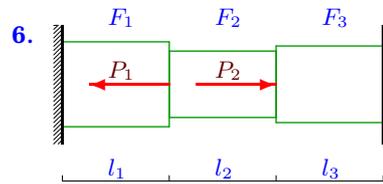
$$P_1 = 77 \text{ кН}, P_2 = 16 \text{ кН}, F_1 = 25 \text{ см}^2, F_2 = 24 \text{ см}^2, F_3 = 31 \text{ см}^2, l_1 = 3 \text{ м}, l_2 = 3 \text{ м}, l_3 = 3 \text{ м}.$$



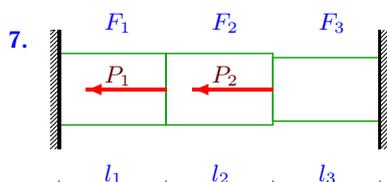
$$P_1 = 33 \text{ кН}, P_2 = 56 \text{ кН}, F_1 = 24 \text{ см}^2, F_2 = 28 \text{ см}^2, F_3 = 25 \text{ см}^2, l_1 = 2 \text{ м}, l_2 = 2 \text{ м}, l_3 = 2 \text{ м}.$$



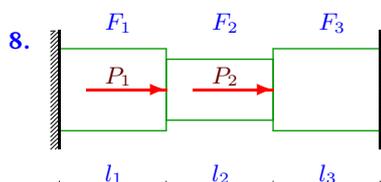
$$P_1 = 36 \text{ кН}, P_2 = 33 \text{ кН}, F_1 = 32 \text{ см}^2, F_2 = 24 \text{ см}^2, F_3 = 31 \text{ см}^2, l_1 = 3 \text{ м}, l_2 = 3 \text{ м}, l_3 = 2 \text{ м}.$$



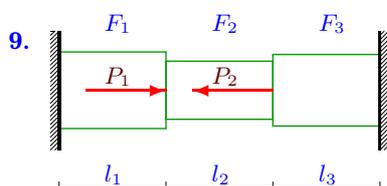
$$P_1 = 20 \text{ кН}, P_2 = 85 \text{ кН}, F_1 = 32 \text{ см}^2, F_2 = 25 \text{ см}^2, F_3 = 29 \text{ см}^2, l_1 = 2 \text{ м}, l_2 = 4 \text{ м}, l_3 = 3 \text{ м}.$$



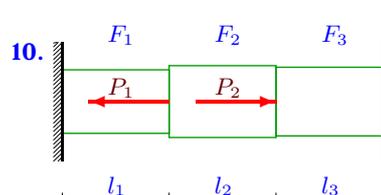
$$P_1 = 44 \text{ кН}, P_2 = 48 \text{ кН}, F_1 = 27 \text{ см}^2, \\ F_2 = 27 \text{ см}^2, F_3 = 24 \text{ см}^2, l_1 = 2 \text{ м}, \\ l_2 = 2 \text{ м}, l_3 = 2 \text{ м}.$$



$$P_1 = 68 \text{ кН}, P_2 = 32 \text{ кН}, F_1 = 31 \text{ см}^2, \\ F_2 = 23 \text{ см}^2, F_3 = 31 \text{ см}^2, l_1 = 3 \text{ м}, \\ l_2 = 3 \text{ м}, l_3 = 3 \text{ м}.$$



$$P_1 = 56 \text{ кН}, P_2 = 14 \text{ кН}, F_1 = 29 \text{ см}^2, \\ F_2 = 22 \text{ см}^2, F_3 = 27 \text{ см}^2, l_1 = 3 \text{ м}, \\ l_2 = 2 \text{ м}, l_3 = 2 \text{ м}.$$



$$P_1 = 40 \text{ кН}, P_2 = 75 \text{ кН}, F_1 = 24 \text{ см}^2, \\ F_2 = 27 \text{ см}^2, F_3 = 26 \text{ см}^2, l_1 = 2 \text{ м}, \\ l_2 = 4 \text{ м}, l_3 = 3 \text{ м}.$$

Ответы

№	R_A	δ_1	δ_2
	кН		
1	4.338	0.025	-0.026
2	-29.010	-0.104	0.206
3	54.495	0.327	0.186
4	-40.369	-0.168	-0.195
5	31.601	0.148	0.121
6	10.812	0.034	0.280
7	-47.200	-0.175	-0.187
8	57.247	0.277	0.207
9	30.555	0.158	0.042
10	-5.441	-0.023	0.233