

1.2.2. Пример. Построить реберный граф для графа на рис. 1, с. 10.

Решение

Задачу решим графически, с помощью прямого построения реберного графа по определению. В центре каждого ребра исходного графа G поместим вершину будущего реберного графа $L(G)$.

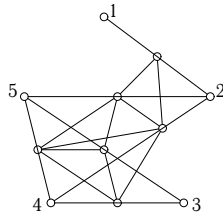


Рис. 5

Полученные вершины будем соединять ребрами графа $L(G)$, если ребра графа G , на которых лежат эти вершины, смежны. На рисунке 5 ребра графа $L(G)$ для наглядности выделим более толстыми линиями. В результате реберный граф получит $m_1 = 10$ ребер и 6 вершин (по числу t ребер графа G).

Число m_1 соответствует тому числу, которое должно получиться по формуле (1.2). Степенная последовательность графа 1-3-2-3-3. Вычислим

$$m_1 = \frac{1}{2}(1^2 + 3^2 + 2^2 + 3^2 + 3^2) - 6 = 16 - 6 = 10.$$

Таким образом, на рисунке совмещены исходный граф G (тонкие линии) и его реберный граф $L(G)$ (толстые линии).

Решение задачи о нахождении реберного графа в системе **Maple** приведено на с. 96.

1.3. Хроматический полином

Произвольная функция $f(v)$ на множестве вершин графа называется *раскраской* графа. Раскраска называется *правильной*, если $f(v_1) \neq f(v_2)$ для любых смежных вершин v_1 и v_2 . Минимальное число k , при котором граф G является k -раскрашиваемым, называется *хроматическим числом* графа $\chi(G)$. Для хроматического числа имеются оценки:

Теорема 7. (Брукс¹). Для любого графа G , не являющегося полным, $\chi(G) \leq \Delta(G)$, если $\Delta(G) \geq 3$ — максимальная из степеней вершин графа.

Для определения числа способов раскраски графа в x цветов можно составить *хроматический полином* $P(G, x)$. Значение полинома при конкретном $x = x_0$ равно числу правильных раскрасок графа в x_0 цветов.

¹Brooks R.L.

Имеется лемма, утверждающая, что *хроматический полином графа имеет вид*

$$P(G, x) = P(G_1, x) + P(G_2, x), \quad (1.3)$$

где G_1 — граф, полученный из G добавлением нового ребра (uv) , а граф G_2 получается из G отождествлением вершин u и v .

Другой вариант леммы:

$$P(G, x) = P(G_1, x) - P(G_2, x), \quad (1.4)$$

где G_1 — граф, полученный из G удалением ребра (uv) , а граф G_2 получается из G отождествлением вершин u и v .

Операцию отождествления вершин u и v называют также *стягиванием* ребра (uv) .¹

Оба варианта леммы составляет основу для хроматической редукции графа. Хроматическая редукция графа — представление графа в виде нескольких пустых или полных графов, сумма хроматических полиномов которых равна хроматическому полиному графа. Очевидно, что хроматический полином пустого графа O_n равен x^n (каждая вершина может быть раскрашена независимо от других), а для полного графа $P(K_n, x) = x(x-1)(x-2)\dots(x-n+1)$. Последнее выражение называют *факториальной степенью*² переменной x : $P(K_n, x) = x^{(n)}$.

Разложения по пустым и полным графам связаны. Факториальную степень можно представить в виде полинома

$$x^{(n)} = \sum_{k=0}^n s_1(n, k)x^k, \quad (1.5)$$

где $s_1(n, k)$ — числа Стирлинга первого рода и, наоборот, степень x^n можно выразить через факториальные степени

$$x^n = \sum_{k=0}^n s_2(n, k)x^{(k)}, \quad (1.6)$$

¹Граф G называется *стягиваемым* к графу H , если H получается из G последовательным стягиванием его ребер.

Число Хадвигера (Hadwiger H.) графа G — максимальный порядок полного графа, к которому стягивается граф G .

²Факториальная степень связана с символом $(a)_k$ Похгаммера (Pochhammer L.), который определен как $(a)_k = a(a+1)\dots(a+k-1)$. Очевидно, $(a)_k = (a+k-1)^{(k)}$. Для символа Похгаммера имеется большое число формул, см., например, **Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И.** *Интегралы и ряды. Дополнительные главы.* — М.: Наука. 1986

где $s_2(n, k)$ — числа Стирлинга¹ второго рода, обладающие следующими свойствами

$$\begin{aligned} s_2(n, k) &= s_2(n-1, k-1) + ks_2(n-1, k), \quad 0 < k < n, \\ s_2(n, n) &= 1, \quad (n \geq 0), \quad s_2(n, 0) = 0, \quad (n > 0). \end{aligned} \quad (1.7)$$

При получении хроматического полинома могут быть полезны следующие теоремы [2].

Теорема 8. Коэффициенты хроматического полинома составляют знакопеременную последовательность.

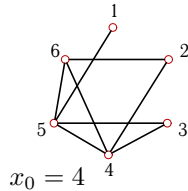
Теорема 9. Абсолютная величина второго коэффициента хроматического полинома равна числу ребер графа.

Теорема 10. Наименьшее число i , для которого отличен от нуля коэффициент при x^i в хроматическом полиноме графа G равно числу компонент связности графа G .

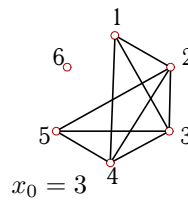
Кроме вершинной раскраски существует еще реберная раскраска и раскраска граней.

1.3.1. Задачи. Найти хроматический полином графа (3.1 – 3.9) и вычислить число способов раскраски графа в x_0 цветов.

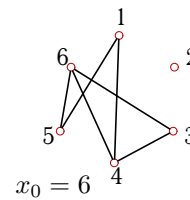
3.1.



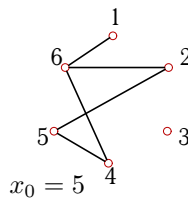
3.2.



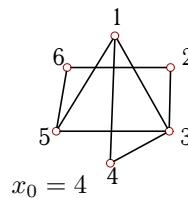
3.3.



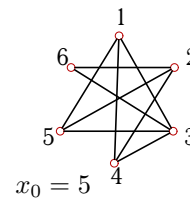
3.4.



3.5.

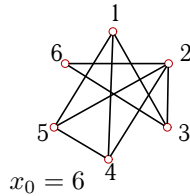


3.6.

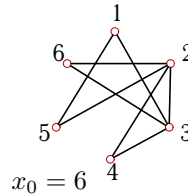


¹Stirling T.

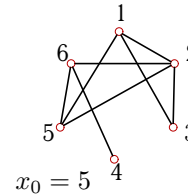
3.7.



3.8.



3.9.



Ответы

№	$C(x)$	$C(x_0)$
3.1	$x^6 - 8x^5 + 25x^4 - 38x^3 + 28x^2 - 8x$	288
3.2	$x^6 - 9x^5 + 29x^4 - 39x^3 + 18x^2$	0
3.3	$x^6 - 6x^5 + 14x^4 - 15x^3 + 6x^2$	15120
3.4	$x^6 - 5x^5 + 10x^4 - 9x^3 + 3x^2$	5200
3.5	$x^6 - 8x^5 + 26x^4 - 43x^3 + 36x^2 - 12x$	336
3.6	$x^6 - 9x^5 + 34x^4 - 66x^3 + 64x^2 - 24x$	1980
3.7	$x^6 - 9x^5 + 33x^4 - 61x^3 + 56x^2 - 20x$	8160
3.8	$x^6 - 8x^5 + 26x^4 - 43x^3 + 36x^2 - 12x$	10080
3.9	$x^6 - 8x^5 + 25x^4 - 38x^3 + 28x^2 - 8x$	2160

1.3.2. Пример. Найти хроматический полином графа (рис. 6).

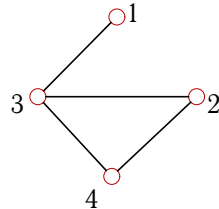


Рис. 6

Решение

В зависимости от числа ребер графа можно использовать разложение (1.3) или (1.4). Если графа почти полный, то добавив несколько ребер по разложению (1.3), получим хроматический полином в виде суммы факториальных степеней. Если же ребер мало, и для получения пустого графа требуется удалить только несколько ребер, то следует использовать разложение (1.4) с удалением ребер. Такие действия называются хроматической редукцией.

1. Хроматическая редукция по пустым графам. Воспользуемся леммой (1.4). Удаляя ребра и отождествляя соответствующие вершины (стягивая ребра), сведем исходный граф к пустым графам. Сначала разложим граф на два, убрав, а затем стянув ребро 1-3. Выполненное действие запишем в виде условного равенства

$$G = \begin{array}{c} \circ \\ \diagup \quad \diagdown \\ \circ \end{array} = \begin{array}{c} \circ \\ \diagup \quad \diagdown \\ \circ \end{array} - \begin{array}{c} \circ \\ \diagup \quad \diagdown \\ \circ \end{array} = G_1 - G_2.$$

Здесь операция сложения или вычитания относится не к самому графу, а к его хроматическому полиному. Таким образом последнее равенство означает, что $P(G) = P(G_1) - P(G_2)$. Для сокращения записи обозначение $P()$ будем опускать. Далее разложим каждый из графов G_1 и G_2 , пользуясь той же леммой

$$G_1 = \begin{array}{c} \circ \\ \diagup \quad \diagdown \\ \circ \end{array} = \begin{array}{c} \circ \\ \diagup \quad \diagdown \\ \circ \end{array} - \begin{array}{c} \circ \\ \diagup \quad \diagdown \\ \circ \end{array} = \begin{array}{c} \circ \\ \diagup \quad \diagdown \\ \circ \end{array} - 2 \begin{array}{c} \circ \\ \diagup \quad \diagdown \\ \circ \end{array} = O_4 - O_3 - 2(O_3 - O_2),$$

$$G_2 = \begin{array}{c} \circ \\ \diagup \quad \diagdown \\ \circ \end{array} = \begin{array}{c} \circ \\ \diagup \quad \diagdown \\ \circ \end{array} - \begin{array}{c} \circ \\ \diagup \quad \diagdown \\ \circ \end{array} = \begin{array}{c} \circ \\ \diagup \quad \diagdown \\ \circ \end{array} - 2 \begin{array}{c} \circ \\ \diagup \quad \diagdown \\ \circ \end{array} = O_3 - O_2 - 2(O_2 - O_1).$$

Приведем подобные члены

$$\begin{aligned} G = G_1 - G_2 &= O_4 - O_3 - 2(O_3 - O_2) - \\ &\quad - (O_3 - O_2 - 2(O_2 - O_1)) = O_4 - 4O_3 + 5O_2 - 2O_1. \end{aligned} \quad (1.8)$$

Получим в итоге искомый хроматический полином

$$P(G, x) = x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 2x. \quad (1.9)$$

Разложение (1.8) называется хроматической редукцией графа по пустым графам.

Очевидно, результат соответствует утверждениям теорем 8-10. Коэффициенты в 1.9 образуют знакопеременную последовательность, а коэффициент при x^3 равен 4 — числу ребер. Наименьшая степень x в полиноме равна 1, т.е. числу компонент связности графа.

2. Хроматическая редукция по полным графам. Добавим сначала к графу (рис. 6) ребро 1-4, получим граф с большим числом ребер. Затем в этом же (исходном) графе отождествим вершины 1 и 4. В результате получим два графа

$$G = \begin{array}{c} \circ \\ \diagup \quad \diagdown \\ \circ \end{array} = \begin{array}{c} \circ \\ \diagup \quad \diagdown \\ \circ \end{array} + \begin{array}{c} \circ \\ \diagup \quad \diagdown \\ \circ \end{array} \quad (1.10)$$

Отождествление вершин всегда приводит к уменьшению порядка и (иногда) размера графа. Вторым граф — это полный граф K_3 , его преобразовывать больше не требуется. К первому графу добавим ребро 1-2 и отождествим вершины 1 и 2:

$$\begin{array}{c} \circ \\ \diagup \quad \diagdown \\ \circ \end{array} = \begin{array}{c} \circ \\ \diagup \quad \diagdown \\ \circ \end{array} + \begin{array}{c} \circ \\ \diagup \quad \diagdown \\ \circ \end{array} = K_4 + K_3. \quad (1.11)$$

В итоге

$$\begin{array}{c} \swarrow \\ \circ \\ \searrow \end{array} = K_4 + 2K_3. \quad (1.12)$$

Хроматический полином примет вид

$$\begin{aligned} P(G, x) &= x^{(4)} + 2x^{(3)} = x(x-1)(x-2)(x-3) + \\ &+ 2x(x-1)(x-2) = x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 2x. \end{aligned} \quad (1.13)$$

Разложение (1.12) называется хроматической редукцией графа по полным графам.

Оба способа дали один результат, и из редукции по полным графам легко следует редукция по пустым. Для этого достаточно раскрыть скобки и привести подобные члены, как в (1.13). Однако обратное действие не очевидно. Для того, чтобы полином $x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 2x$, полученный из пустых графов, выразить в виде суммы факториальных степеней, необходимы числа Стирлинга 2-го рода. Согласно рекуррентным формулам (1.7) имеем следующие числа

$$\begin{aligned} s_2(3, 2) &= s_2(2, 1) + 2s_2(2, 2) = 3, \\ s_2(4, 2) &= s_2(3, 1) + 2s_2(3, 2) = 1 + 2 \cdot 3 = 7, \\ s_2(4, 3) &= s_2(3, 2) + 3s_2(3, 3) = 3 + 3 = 6. \end{aligned}$$

Пользуясь (1.6) и найденными числами Стирлинга 2-го рода, получим

$$\begin{aligned} x^2 &= x^{(1)} + x^{(2)}, \\ x^3 &= x^{(1)} + 3x^{(2)} + x^{(3)}, \\ x^4 &= x^{(1)} + 7x^{(2)} + 6x^{(3)} + x^{(4)}. \end{aligned}$$

Таким образом произведем преобразование хроматического полинома

$$\begin{aligned} x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 2x &= x^{(1)} + 7x^{(2)} + 6x^{(3)} + x^{(4)} - \\ - 4(x^{(1)} + 3x^{(2)} + x^{(3)}) + 5(x^{(1)} + x^{(2)}) + 2x^{(1)} &= x^{(4)} + 2x^{(3)}. \end{aligned}$$

Хроматическое число $\chi(G)$ графа лучше всего получить, разложив хроматический полином на сомножители

$$P(G, x) = x(x-1)^2(x-2).$$

Минимальное натуральное число x , при котором $P(G, x)$ не обращается в ноль равно 3. Отсюда получаем $\chi(G) = 3$. Так как максимальная степень вершин графа $\Delta(G) = 3$, то выполняется оценка $\chi(G) \leq \Delta(G)$ (с. 16).

Maple-программа для нахождения хроматического полинома графа с использованием оператора `chrompoly` пакета `networks` приведена на с. 97.