

План решения

1. Отбрасывая одну из подвижных опор, получаем основную систему метода сил, где в качестве неизвестной X будет реакция отброшенной опоры.

2. Определяем реакции R_k опор в основной системе от действия внешней нагрузки.

3. Определяем усилия S_i в стержнях фермы в основной системе от действия внешней нагрузки.

4. Определяем реакции опор r_k в основной системе от действия единичной силы, приложенной в месте отброшенной опоры по направлению ее реакции.

5. Определяем усилия s_i в стержнях фермы в основной системе от действия приложенной единичной силы.

6. Определяем коэффициенты δ_{11} и Δ_{1p} канонического уравнения метода сил

$$\delta_{11}X + \Delta_{1p} = 0 \quad (8.42)$$

по формулам

$$\delta_{11} = \sum_k \frac{s_k^2 l_k}{E_k F_k}, \quad \Delta_{1p} = \sum_k \frac{s_k S_k l_k}{E_k F_k}, \quad (8.43)$$

где l_k , E_k и F_k — длина, модуль упругости и площадь сечения k -го стержня. Суммирование ведется по всем стержням фермы.

7. Решаем уравнение (8.42) и находим реакцию X отброшенной подвижной опоры.

8. Реакции опор R_k^s и усилия S_k^s в стержнях статически неопределимой фермы определяем по формулам

$$R_k^s = R_k + r_k X, \quad S_k^s = S_k + s_k X. \quad (8.44)$$

Пример 5. Плоская один раз статически неопределимая ферма опирается на два подвижных и один неподвижный шарнир (рис. 221). Узел D нагружен горизонтальной силой $P = 12$ кН. Размеры даны в метрах. Найти усилия в стержнях фермы.

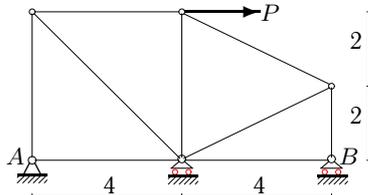


Рис. 221

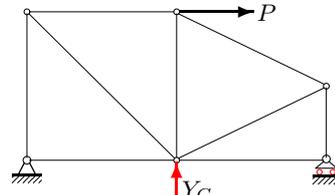


Рис. 222

Решение

1. Выбираем основную систему, отбрасывая вертикальную связь в узле C (рис. 222). Основная система статически определима и геометрически неизменяема. В качестве неизвестной X будет реакция Y_C отброшенной опоры.

2. Определяем реакции опор X_A , Y_A , Y_B в основной системе от действия внешней нагрузки (рис. 223).

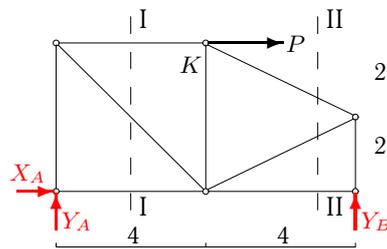


Рис. 223

Составляем три уравнения равновесия

$$\begin{aligned} \sum X_i &= X_A + P = 0, \\ \sum M_A &= Y_B \cdot 8 - P \cdot 4 = 0, \\ \sum M_B &= -Y_A \cdot 8 - P \cdot 4 = 0. \end{aligned} \quad (8.45)$$

Решаем систему уравнений. Находим $X_A = -P = -12$ кН, $Y_A = -P/2 = -6$ кН, $Y_B = P/2 = 6$ кН.

Для проверки составляем сумму проекцию всех сил, действующих на ферму, на ось y :

$$\sum Y_i = Y_A + Y_B = 6 - 6 = 0.$$

Уравнение удовлетворяется тождественно. Реакции Y_A и Y_B найдены верно¹.

3. Определяем усилия S_i в стержнях фермы в основной системе от действия внешней нагрузки. Используем принятые в строительной механике обозначения O_k для усилий верхнего пояса, D_k для диагоналей (раскосов), U_k для нижнего пояса и V_k для вертикаль-

¹Более надежная проверка, контролирующая также и реакцию X_A , состоит в проверке выполнения уравнения моментов относительно какой-либо точки, не обязательно совпадающей с узлом и не лежащей на линиях действия проверяемых реакций. В данной задаче это может быть центр средней стойки фермы.

ных стержней. Усилия O_1 , U_1 , D_1 найдем по методу Риттера [10]. Разрезаем стержни первой панели вертикальным сечением I-I (рис. 224). Реакции рассеченных стержней направляем в сторону сечения. Это правило соответствует принятому соглашению, согласно которому в растянутых стержнях положительные усилия, а отрицательные — в сжатых.

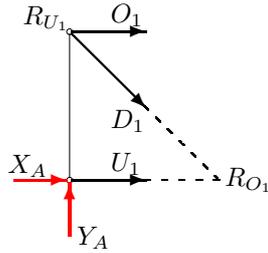


Рис. 224

Находим точки Риттера (моментные точки) на пересечениях линий действия усилий в сечении. Таких точек две: R_{O_1} , R_{U_1} .

Составляем два уравнения моментов относительно точек Риттера

$$\sum M_{R_{O_1}} = -O_1 \cdot 4 - Y_A \cdot 4 = 0, \quad (8.46)$$

$$\sum M_{R_{U_1}} = U_1 \cdot 4 + X_A \cdot 4 = 0. \quad (8.47)$$

Усилие D_1 в раскосе, для которого нет точки Риттера (усилия O_1 , U_1 параллельны), определяем из уравнения проекций на вертикальную ось

$$\sum Y_i = Y_A - D_1 \cos 45 = 0. \quad (8.48)$$

Из уравнений (8.46), (8.47), (8.48) получаем $O_1 = 6$ кН, $U_1 = 12$ кН, $D_1 = -8.485$ кН. Положительные усилия соответствуют растяжению, отрицательные — сжатию.

Для определения усилий O_2 , U_2 , D_2 произведем сечение II-II (рис. 225).

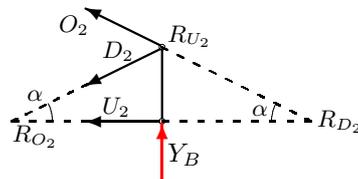


Рис. 225

Отбрасываем левую часть фермы. Рассматриваем равновесие оставшейся правой части, состоящей из одного вертикального стержня. Усилия в рассеченных стержнях направляем вдоль стержней в сторону сечения. Находим моментные точки на пересечениях линий действия усилий в сечении. Таких точек три: R_{O_2} , R_{U_2} , R_{D_2} .

Составляем уравнения моментов относительно этих точек:

$$\begin{aligned}\sum M_{RO_2} &= O_2 \cdot 4 \sin \alpha + O_2 \cdot 2 \cos \alpha + Y_B \cdot 4 = 0, \\ \sum M_{RD_2} &= D_2 \cdot 4 \sin \alpha + D_2 \cdot 2 \cos \alpha - Y_B \cdot 4 = 0, \\ \sum M_{RU_2} &= -U_2 \cdot 2 = 0\end{aligned}\quad (8.49)$$

Решая уравнения, получаем $O_2 = -6.708$ кН, $D_2 = 6.708$ кН, $U_2 = 0$. Усилия в остальных стержнях методом Риттера получить нельзя. Сечение Риттера должно пересекать три (не больше и не меньше) стержня фермы и делить ее на две части. Среднюю стойку (усилие V_2) можно рассечь сечением, проходящим через 4 стержня. Для левой и правой стойки также нет подходящих сечений, поэтому используем метод вырезания узлов. Вырезаем узел K (рис. 226). Разрезанные стержни заменяем усилиями, направленными по стержням из узла. То, что вектора с одним и тем же усилием для различных схем оказываются направленными в разные стороны не является ошибкой. Напротив, это соответствует аксиоме статики о действии и противодействии. Так, вектор с усилием O_2 на рис. 225 направлен вверх, а на рис. 226 вниз.

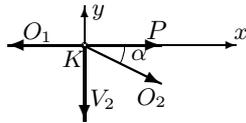


Рис. 226

Прикладываем внешнюю силу P , действующую по условию на этот узел. Выбираем систему координат x, y . Составляем уравнения равновесия узла в проекциях на эти оси

$$\begin{aligned}\sum X_i &= -O_1 + O_2 \cos \alpha + P = 0, \\ \sum Y_i &= -O_2 \sin \alpha - V_2 = 0.\end{aligned}\quad (8.50)$$

Усилия O_1 и O_2 уже найдены, поэтому первое уравнение системы (8.50) является проверочным, а из второго получим $V_2 = 3$ кН. Аналогично, вырезая узлы A и B (рис. 227, 228), из уравнений проекций на вертикальную ось получаем $V_1 = -Y_A = 6$ кН, $V_3 = -Y_B = -6$ кН.

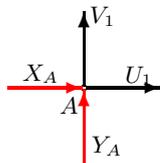


Рис. 227

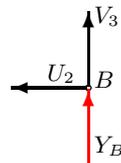


Рис. 228

4. Определяем реакции опор x_A, y_A, y_B в основной системе от действия единичной силы, приложенной в месте отброшенной опоры C по вертикали.

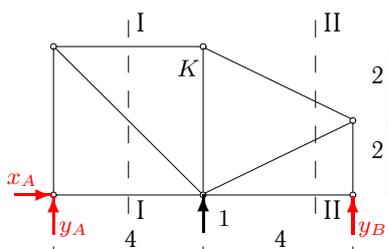


Рис. 229

Составляем уравнения равновесия:

$$\begin{aligned}\sum X_i &= x_A = 0, \\ \sum M_A &= y_B \cdot 8 + 1 \cdot 4 = 0, \\ \sum M_B &= -y_A \cdot 8 - 1 \cdot 4 = 0.\end{aligned}$$

Решаем систему уравнений. Находим $x_A = 0$, $y_A = y_B = -0.5$. Заметим, что единичная сила безразмерная, поэтому и реакции опор также безразмерные.

Для проверки составляем сумму проекцию всех сил, действующих на ферму, на ось y :

$$\sum Y_i = y_A + y_B + 1 = 0.5 + 0.5 - 1 = 0.$$

Проверка выполнена.

5. Определяем усилия s_i в стержнях фермы в основной системе от действия приложенной единичной силы.

Уравнения для усилий $u_1, u_2, v_1, \dots, d_3$ при этом не будут отличаться от соответствующих уравнений (8.46-8.50) для усилий $U_1, U_2, V_1, \dots, D_3$, если не считать, что при определении реакций опор и усилий от действия единичной силы все искомые величины обозначаются строчными буквами, т.е. y_A вместо Y_A и т.п. и значения реакций опор будут иные. В остальном же расчет усилий от единичной силы совпадает с уже выполненным для основной нагрузки, поэтому приведем результаты, занеся все в одну таблицу:

	№	S_i , кН	s_i	l_i , м
нижний пояс (U)	1	12.000	0.000	4.000
	2	0.000	0.000	4.000
вертикали (V)	1	6.000	-0.500	4.000
	2	3.000	-0.250	4.000
	3	-6.000	0.500	2.000
раскосы (D)	1	-8.485	-0.707	5.657
	2	6.708	-0.559	4.472
верхний пояс (O)	1	6.000	0.500	4.000
	2	6.708	0.559	4.472

В последний столбец занесены длины соответствующих стержней. Они потребуются для вычисления коэффициентов канонического уравнения.

6. Определяем коэффициенты δ_{11} и Δ_{1p} канонического уравнения метода сил по формулам (8.43)

$$\delta_{11} = \sum_k \frac{s_k^2 l_k}{EF} = \frac{8.374}{EF}, \quad \Delta_{1p} = \sum_k \frac{s_k S_k l_k}{EF} = \frac{15.400}{EF}.$$

7. Решаем уравнение (8.42)

$$8.374X + 15.4 = 0$$

и находим реакцию $X = Y_C = -1.839$ кН отброшенной подвижной опоры.

8. Реакции опор и усилия в стержнях статически неопределимой фермы определяем по формулам (8.44)

$$\begin{aligned} X_A^s &= X_A = -12 \text{ кН}, \\ Y_A^s &= Y_A + y_A \cdot X = -6 + 0.5 \cdot 1.839 = -5.08 \text{ кН}, \\ Y_B^s &= Y_B + y_B \cdot X = 6 + 0.5 \cdot 1.839 = 6.92 \text{ кН}, \\ U_1^s &= 12 \text{ кН}, \\ U_2^s &= 0, \\ V_1^s &= V_1 + X v_1 = 6 + 0.5 \cdot 1.839 = 5.080 \text{ кН}, \\ V_2^s &= V_2 + v_2 \cdot X = 3 + 0.25 \cdot 1.839 = 3.460 \text{ кН}, \\ V_3^s &= V_3 + v_3 \cdot X = -6 - 0.5 \cdot 1.839 = -6.920 \text{ кН}, \\ D_1^s &= D_1 + d_1 \cdot X = -8.485 + 0.707 \cdot 1.839 = -7.185 \text{ кН}, \\ D_2^s &= D_2 + d_2 \cdot X = 6.708 + 0.559 \cdot 1.839 = 7.736 \text{ кН}, \\ O_1^s &= O_1 + o_1 \cdot X = 6 - 0.5 \cdot 1.839 = 5.080 \text{ кН}, \\ O_2^s &= O_2 + o_2 \cdot X = 6.708 - 0.559 \cdot 1.839 = -7.736 \text{ кН}. \end{aligned}$$

Выполняем проверку равновесия статически неопределимой фермы в целом. Как и ранее, отбрасываем опоры и заменяем их действие реакциями (рис. 230). Составим сумму моментов всех сил, действующих на ферму, включая реакции, относительно точки K , которую разместим в этом случае в центре первой панели верхнего пояса. Через эту точку не проходит ни одна из проверяемых реакций, поэтому проверка будет наиболее эффективна.

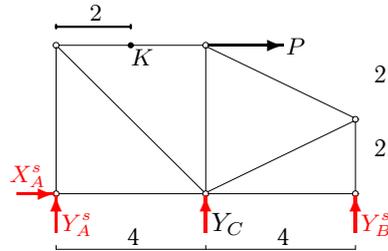


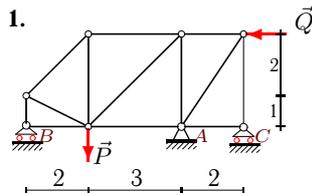
Рис. 230

$$\sum M_K = -Y_A^s \cdot 2 + X_A^s \cdot 4 + Y_C \cdot 2 + Y_B^s \cdot 6 = 10.16 - 48 - 3.678 + 41.52 = 0.$$

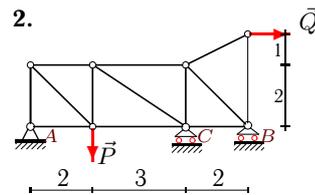
Найденные реакции опор удовлетворяют проверочному уравнению моментов.

Марле-программа расчета статически неопределимой фермы дана на с. 319.

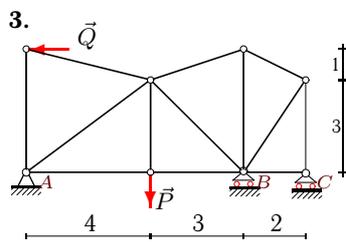
Условия задач. Плоская один раз статически неопределимая ферма опирается на неподвижный шарнир A и подвижные B и C. К узлам фермы приложены нагрузки P и Q. Размеры даны в метрах. Найти усилия в стержнях фермы.



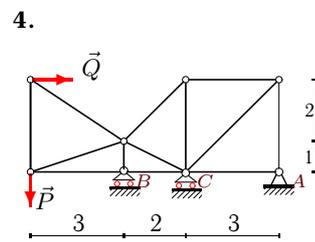
$$P = 9 \text{ кН}, Q = 5 \text{ кН}.$$



$$P = 6 \text{ кН}, Q = 5 \text{ кН}.$$



$$P = 9 \text{ кН}, Q = 3 \text{ кН}.$$



$$P = 9 \text{ кН}, Q = 6 \text{ кН}.$$