9.3. Энергетический метод исследования устойчивости стержней

Постановка задачи. *Прямолинейный упругий стержень переменного сечения сжимается продольными силами, приложенными по концам и в различных сечениях стержня. Все внешние силы пропорциональны одному параметру. Определить критическую значение этого параметра.*

Условие потери устойчивости может быть оценено по формуле С. П. Тимошенко, выражающей равенство работы внешних сил P_i, $i = 1..n$, на продольных перемещениях потенциальной энергии изгиба. Предполагая, что начало координат находится в левой, неподвижной опоре, и l_i — координата приложения силы P_i, а P_i — проекция силы на направление, противоположное оси x, имеем

$$\sum_k^n P_i \int_0^{l_i} (v')^2 dx = \int_0^l E(x)J(x)(v'')^2 dx. \tag{9.12}$$

Для шарнирно опертого стержня длиной l прогиб можно задать функцией $v = A\sin(kx)$, $k = \pi/l$. Если внешние силы представить в виде $P_i = \alpha_i q$, то в этом случае уравнение дает следующее выражение для критического параметра q :

$$q = \int_0^l E(x)J(x)\sin^2(kx)dx \Bigg/ \left(\sum_k^n \alpha_i \int_0^{l_i} \cos^2(kx)dx \right). \tag{9.13}$$

Для приближенного решения прогиб можно представить полиномом или какой-либо другой функцией.

Пример. Прямолинейный стержень длиной l, закрепленный по концам, сжимается двумя продольными силами P (рис. 291). Задано соотношение моментов инерции участков стержня $J_1 = 1.5J_2$. Определить коэффициент μ приведения длины стержня в формуле для критической силы $P_{\text{кр}} = \pi^2 EJ_2/(\mu l)^2$.

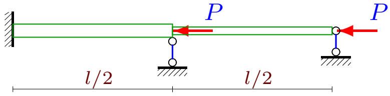


Рис. 291

Решение

Представим прогиб полиномом с неизвестными коэффициентами

$$v = \sum_{k=0}^{6} C_k (x/l)^k. \tag{9.14}$$

В заделке на левой опоре прогиб равен нулю и линия изгиба стержня имеет горизонтальную касательную:

$$v(0) = 0,\ \ v'(0) = 0 \tag{9.15}$$

Прогиб на средней опоре равен нулю:

$$v(l/2) = 0. \tag{9.16}$$

В шарнире на правой опоре прогиб и момент равны нулю. Согласно дифференциальному уравнению изгиба балки $EJv'' = M$ имеем :

$$v(l) = 0,\ \ v''(l) = 0. \tag{9.17}$$

Пять граничных условий для функции (9.14) дают систему пяти уравнений, содержащих семь констант $C_0, ..., C_6$

$$\begin{aligned}
&C_0 = 0,\\
&C_1 = 0,\\
&C_0 + C_1/2 + C_2/4 + C_3/8 + C_4/16 + C_5/32 + C_6/64 = 0,\\
&C_0 + C_1 + C_2 + C_3 + C_4 + C_5 + C_6 = 0,\\
&2C_2 + 6C_3 + 12C_4 + 20C_5 + 30C_6 = 0.
\end{aligned} \tag{9.18}$$

Решив систему, выразим константы $C_0, \mathrm{C}_1, \mathrm{C}_2, \mathrm{C}_3, C_4$ через C_5, C_6:

$$\begin{aligned}
&C_0 = C_1 = 0,\ \ C_2 = -(27C_6 + 10C_5)/16,\\
&C_3 = (93C_6 + 38C_5)/16,\ \ C_4 = -(41C_6 + 22C_5)/8
\end{aligned} \tag{9.19}$$

Таким образом, прогиб, удовлетворяющий заданным условиям опирания, имеет вид

$$v = C_2(x/l)^2 + C_3(x/l)^3 + C_4(x/l)^4 + C_5(x/l)^5 + C_6(x/l)^6. \tag{9.20}$$

Критическую силу найдем по формуле С.П. Тимошенко, которая для стержня с двумя участками имеет вид

$$P\left(\int_0^{l/2} (v')^2 dx + \int_0^{l} (v')^2 dx\right) = \int_0^{l/2} EJ_1 (v'')^2 dx + \int_{l/2}^{l} EJ_2 (v'')^2 dx \tag{9.21}$$

или

$$(0.038C_5C_6 + 0.062C_6^2 + 0.006C_5^2)Pl^2 - \\ -(3.194C_6^2 + 2.007C_5C_6 + 0.319C_5^2)EJ = 0. \tag{9.22}$$

Минимизируя P, дифференцируем (9.22) по C_5 и C_6 при условии $\partial P/\partial C_5 = 0$, $\partial P/\partial C_6 = 0$. Получаем однородную систему уравнений с матрицей

$$\begin{vmatrix} 0.012Pl^2 - 0.638EJ & -2.007EJ + 0.0385Pl^2 \\ -2.007EJ + 0.038Pl^2 & 0.124Pl^2 - 6.389EJ. \end{vmatrix} \tag{9.23}$$

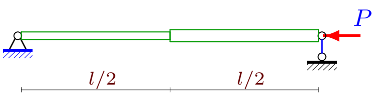
Приравнивая нулю определитель этой матрицы, получаем два решения

$$P = 50.985EJ/l^2, \quad P = 117.424EJ/l^2. \tag{9.24}$$

Минимальное значения соответствует критической силе $P = 50.985EJ/l^2$. Сравнивая это выражение с формулой Эйлера $P = \pi^2 EJ/(\mu l)^2$, находим коэффициент приведения длины $\mu = \pi/\sqrt{50.985} = 0.440$.

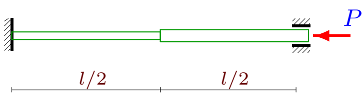
Условия задач. *Прямолинейный стержень длиной l, закрепленный по концам, сжимается одной или двумя продольными силами. Задано соотношение моментов инерции участков стержня. Определить коэффициент μ приведения длины стержня в формуле для критической силы $P_{\text{кр}} = \pi^2 EJ/(\mu l)^2$.*

1.



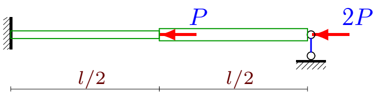
$J_1 = 0.7J,\ J_2 = J$

2.



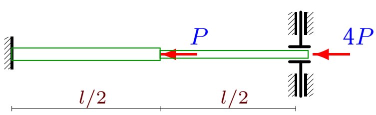
$J_1 = 0.8J,\ J_2 = J$

3.



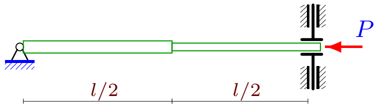
$J_1 = 0.9J,\ J_2 = J$

4.



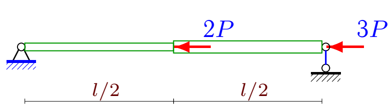
$J_1 = 1.1J,\ J_2 = J$

5.



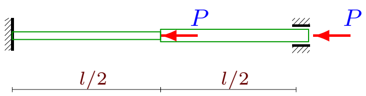
$J_1 = 1.2J,\ J_2 = J$

6.



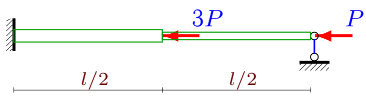
$J_1 = 0.8J,\ J_2 = J$

7.



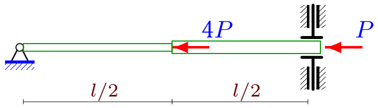
$J_1 = 0.9J,\ J_2 = J$

8.



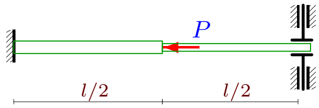
$J_1 = 1.1J,\ J_2 = J$

9.



$J_1 = 0.7J,\ J_2 = J$

10.



$J_1 = 1.2J,\ J_2 = J$

Ответы

№	
1	$Pl^2(0.49c_4^2 + 2.43c_4c_5 + 3.05c_5^2) = EJ(4.08c_4^2 + 20.77c_4c_5 + 26.84c_5^2)$
2	$Pl^2(1.9 \cdot 10^{-2}c_4^2 + 0.1c_4c_5 + 0.12c_5^2) = EJ(0.72c_4^2 + 3.65c_4c_5 + 4.75c_5^2)$
3	$Pl^2(0.2c_4^2 + 1.16c_4c_5 + 1.65c_5^2) = EJ(1.71c_4^2 + 9.55c_4c_5 + 13.57c_5^2)$
4	$Pl^2(5.61c_4^2 + 39.1c_4c_5 + 68.23c_5^2) = EJ(13.59c_4^2 + 93.28c_4c_5 + 161c_5^2)$
5	$Pl^2(3.11c_4^2 + 19.79c_4c_5 + 31.49c_5^2) = EJ(8c_4^2 + 50.65c_4c_5 + 80.42c_5^2)$
6	$Pl^2(1.94c_4^2 + 9.65c_4c_5 + 12.03c_5^2) = EJ(4.32c_4^2 + 21.85c_4c_5 + 28.05c_5^2)$
7	$Pl^2(2.86 \cdot 10^{-2}c_4^2 + 0.14c_4c_5 + 0.18c_5^2) = EJ(0.76c_4^2 + 3.83c_4c_5 + 4.95c_5^2)$
8	$Pl^2(0.19c_4^2 + 1.06c_4c_5 + 1.49c_5^2) = EJ(1.89c_4^2 + 10.45c_4c_5 + 14.71c_5^2)$
9	$Pl^2(13.38c_4^2 + 84.74c_4c_5 + 134.24c_5^2) = EJ(7.20c_4^2 + 46.02c_4c_5 + 73.65c_5^2)$
10	$Pl^2(0.73c_4^2 + 5.01c_4c_5 + 8.55c_5^2) = EJ(14.38c_4^2 + 98.55c_4c_5 + 169.86c_5^2)$

№	μ	
1	1.099	$c_0=0,\ c_1=c_4+(7/3)c_5,\ c_2=0,\ c_3=-2c_4-(10/3)c_5$
2	0.514	$c_0=0,\ c_1=0,\ c_2=c_4+2c_5,\ c_3=-2c_4-3c_5$
3	1.095	$c_0=0,\ c_1=0,\ c_2=(3c_4+7c_5)/2,\ c_3=-(5c_4+9c_5)/2$
4	2.070	$c_0=0,\ c_1=0,\ c_2=4c_4+(25/2)c_5, c_3=-4c_4-10c_5$
5	1.968	$c_0=0,\ c_1=8c_4+25c_5,\ c_2=0,\ c_3=-4c_4-10c_5$
6	2.136	$c_0=0,\ c_1=c_4+(7/3)c_5,\ c_2=0,\ c_3=-2c_4-(10/3)c_5$
7	0.614	$c_0=0,\ c_1=0,\ c_2=c_4+2c_5,\ c_3=-2c_4-3c_5$
8	1.000	$c_0=0,\ c_1=0,\ c_2=(3c_4+7c_5)/2,\ c_3=-(5c_4+9c_5)/2$
9	4.357	$c_0=0,\ c_1=8c_4+25c_5,\ c_2=0,\ c_3=-4c_4-10c_5$
10	0.711	$c_0=0,\ c_1=0,\ c_2=4c_4+(25/2)c_5, c_3=-4c_4-10c_5$

Maple – программа определения коэффициента приведения длины неоднородного стержня энергетическим методом дана на с. 376, точное решение — на с. 377.

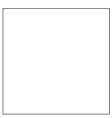
9.4. Подбор на устойчивость сечения сжатого стержня

Постановка задачи. *Определить размер сечения стержня сжатого продольной силой. Известны условия опирания, форма сечения и параметры материала стержня.*

Чугунный стержень длиной $l = 1.1$ м сжимается силой $F = 100$кН.

Требуется 1) найти размеры сечения при $[\sigma] = 130$ МПа; 2) найти значение критической силы и коэфф. запаса устойчивости.

В соответствии с условием закрепления *коэффициент приведения* $\mu = 1$.



Площадь (квадрат) $A = b^2$, момент инерции $J_{min} = b^4/12$.

Решение

Размер сечения найдем методом подбора. Для первой попытки примем $\varphi = 0.5$.

1) Площадь сечения

$$A = \frac{F}{[\sigma]\varphi} = \frac{100 \cdot 10^3}{130 \cdot 10^6 \cdot 0.5} \cdot 10^4 = 15.38\ \text{см}^2.$$

Сторона квадрата $b = \sqrt{A} = \sqrt{15.38} = 3.92$ см.