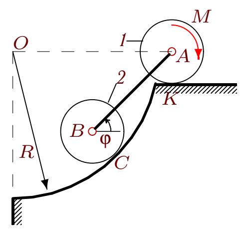
Задача 7



Оси двух дисков радиусом r соединены стержнем длиной $4r$. Диск A массой m_1 катится по горизонтальной поверхности, другой — массой m_2, — по цилиндрической поверхности радиусом $R = 5r$. К диску A приложен момент M. Составить уравнение движения системы. За обобщенную координату принять угол поворота стержня φ.

Решение

Заметим, что по условию задачи треугольник OBA равнобедренный. Отсюда угол между CB и осью x равен $\pi - \varphi$. Рассмотрим кинематический граф $C \xrightarrow[\pi-\varphi]{r} B \xrightarrow[\varphi]{4r} A$, где C — точка касания диска и поверхности, а точки O, B и C лежат на одной прямой — нормали к общей касательной поверхности и диска. Запишем соответствующие уравнения для проекций скоростей:

$$\begin{aligned} v_{Ax} &= v_{Cx} - r\omega_{2z}\sin(\pi-\varphi) - 4r\dot{\varphi}\sin\varphi; \\ v_{Ay} &= v_{Cy} + r\omega_{2z}\cos(\pi-\varphi) + 4r\dot{\varphi}\cos\varphi. \end{aligned}$$

Учитывая, что $v_{Cx} = v_{Cy} = v_{Ay} = 0$, определяем угловую скорость $\omega_{2z} = 4\dot{\varphi}$ и скорость $v_{Ax} = -8r\dot{\varphi}\sin\varphi$. Найдем скорость B. Составив граф $B \xrightarrow[\varphi]{4r} A$, получим:

$$\begin{aligned} v_{Ax} &= v_{Bx} - 4r\dot{\varphi}\sin\varphi; \\ v_{Ay} &= v_{By} + 4r\dot{\varphi}\cos\varphi. \end{aligned}$$

Найдем

$$\begin{aligned} v_{Bx} &= v_{Ax} + 4r\dot{\varphi}\sin\varphi = -4r\dot{\varphi}\sin\varphi, \\ v_{By} &= v_{Ay} - 4r\dot{\varphi}\cos\varphi = -4r\dot{\varphi}\cos\varphi. \end{aligned}$$

Отсюда имеем $v_B^2 = 16r^2\dot{\varphi}^2$. Для определения угловой скорости диска *1* составим граф $K \xrightarrow[\pi/2]{r} A$, где K — точка касания диска с поверхностью. В проекции на ось x: $v_{Ax} = v_{Kx} - r\omega_{1z}\sin(\pi/2)$. Ясно, что $v_{Kx} = 0$, поэтому $\omega_{1z} = 8\dot{\varphi}\sin\varphi$.

Кинетическая энергия однородного диска, катящегося без проскальзывания по неподвижной поверхности, определяется по формуле (I.6):

$$T_1 = \frac{3m_1v_A^2}{4} = 48m_1r^2\dot{\varphi}^2\sin^2\varphi, \; T_2 = \frac{3m_2v_B^2}{4} = 12m_2r^2\dot{\varphi}^2.$$

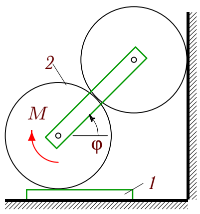
Суммарная кинетическая энергия имеет вид

$$T = \frac{\dot{\varphi}^2}{2}(A + B\sin^2\varphi).$$

Обобщенная сила

$$Q = \frac{1}{\dot{\varphi}}(-M\omega_{1z} + (-m_2 g)v_{By}) = -8M\sin\varphi + 4grm_2\cos\varphi.$$

Задача 8



Оси цилиндров соединены спарником. Верхний цилиндр катится без проскальзывания по вертикальной плоскости. Нижний цилиндр находится в зацеплении с верхним и катится по пластинке массой m_1, скользящей по горизонтальной плоскости. Радиусы цилиндров r. Масса нижнего цилиндра m_2. К нижнему цилиндру приложен момент M. Составить уравнение движения системы. За обобщенную координату принять угол поворота спарника φ.

Решение

Рассмотрим кинематический граф (рис. 6) $A \xrightarrow[\varphi]{2r} B$ вдоль спарника AB. Соответствующие уравнения для проекций скоростей

$$v_{Bx} = v_{Ax} - 2r\dot{\varphi}\sin\varphi, \;\; v_{By} = v_{Ay} + 2r\dot{\varphi}\cos\varphi.$$

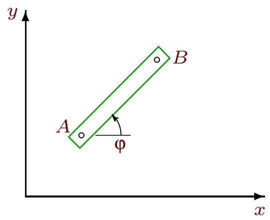


Рис. 6

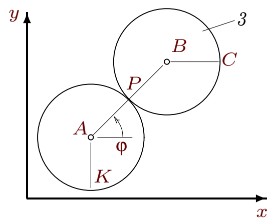


Рис. 7

Учитывая, что $v_{Ay} = v_{Bx} = 0$, имеем: $v_{Ax} = 2r\dot{\varphi}\sin\varphi$, $v_{By} = 2r\dot{\varphi}\cos\varphi$. Рассмотрим проекции скоростей на ось y для графа $B \xrightarrow[0]{r} C$ (рис. 7)

$$v_{Cy} = v_{By} + r\omega_{3z}\cos 0.$$

Откуда получаем угловую скорость верхнего цилиндра

$$\omega_{3z} = -2\dot{\varphi}\cos\varphi. \qquad (I.7)$$

Проекции скоростей на ось x для графа $K \xrightarrow[\pi/2]{r} A \xrightarrow[\varphi]{2r} B$, где K — точка касания нижнего цилиндра и пластинки (см. рис. 7)

$$v_{Bx} = v_{Kx} - r\omega_{2z}\sin(\pi/2) - 2r\dot{\varphi}\sin\varphi.$$

Найдем скорость поступательного движения пластинки:

$$v_{Kx} = r\omega_{2z} + 2r\dot{\varphi}\sin\varphi. \qquad (I.8)$$

Запишем граф по цилиндрам

$$K \xrightarrow[\pi/2]{r} A \xrightarrow[\varphi]{r} P \xrightarrow[\varphi]{r} B,$$

где P — точка соприкосновения цилиндров. Запишем соответствующие уравнения для проекций скоростей

$$v_{Bx} = v_{Kx} - r\omega_{2z}\sin(\pi/2) - r\omega_{2z}\sin\varphi - r\omega_{3z}\sin\varphi,$$

или

$$v_{Kx} = r\omega_{2z} + r\omega_{2z}\sin\varphi + r\omega_{3z}\sin\varphi. \qquad (I.9)$$

Из (I.7) — (I.9) следует выражение для угловой скорости нижнего цилиндра $\omega_{2z} = 2\dot{\varphi}(1+\cos\varphi)$ и скорость пластинки $v_{Kx} = 2r\dot{\varphi}(1 + \cos\varphi + \sin\varphi)$.

Запишем кинетическую энергию плоского движения цилиндра и поступательного движения пластинки:

$$T_1 = \frac{m_1 v_{Kx}^2}{2} = 2m_1 r^2\dot{\varphi}^2(1+\cos\varphi+\sin\varphi)^2;$$
$$T_2 = \frac{m_2 v_{Ax}^2}{2} + \frac{J_2\omega_{2z}^2}{2},$$

где $v_{Ax} = 2r\dot{\varphi}\sin\varphi$, $J_2 = m_2 r^2/2$. Суммарная кинетическая энергия имеет вид

$$T = \frac{\dot{\varphi}^2}{2}\left(A + B\sin^2\varphi + C\sin 2\varphi + D\sin\varphi + E\cos\varphi\right).$$

В выражение обобщенной силы войдет только момент:

$$Q = \frac{1}{\dot{\varphi}}(-M\omega_{2z}) = -2M(1+\cos\varphi).$$