№	V_A	V_B	H	M_*	x_M^*	$M(x_1)$	$Q(x_1)$	$N(x_1)$
1	35.333	12.667	17.538	65.333	12.000	49.333	3.201	-27.431
2	41.357	42.643	39.000	25.867	3.733	11.531	-6.008	-46.848
3	43.426	82.574	50.354	95.777	7.367	54.182	-4.855	-72.636
4	12.833	28.167	16.750	32.778	20.000	-28.889	-1.536	-21.045
5	12.481	43.519	15.361	64.220	20.800	62.089	-6.349	-27.364
6	44.964	50.036	33.550	19.863	19.133	-9.528	0.754	-38.049
7	15.161	39.839	13.025	61.340	22.400	60.274	-2.119	-19.631
8	24.058	25.942	23.083	22.107	6.933	-16.562	4.805	-27.138
9	20.833	40.167	21.250	35.776	18.800	30.222	3.909	-21.517
10	6.667	23.333	8.308	48.160	27.600	-20.000	-0.960	-10.608

5.4. Рама

Постановка задачи. *Построить эпюры M, Q, N в раме. Найти перемещение заданной точки рамы в определенном направлении. Все стержни имеют одинаковую жесткость EJ.*

План решения

1. Разбиваем систему на части по шарнирам. Внешние силы, приложенные к шарнирам, относим к любой из частей. Действие отброшенных частей и опор заменяем их реакциями. Реакции частей, соединенных шарниром, взаимно противоположны по направлению и равны по модулю.
2. Составляем три уравнения равновесия для каждой из частей.
3. Решаем систему. Находим реакции опор и внутренние реакции.
4. Строим эпюру моментов от действия нагрузки.
5. Прикладываем к точке рамы, перемещение которой разыскивается единичную силу по направлению искомого перемещения.
6. Составляем уравнения равновесия для каждой из частей.
7. Решаем систему. Находим реакции опор и внутренние реакции от действия единичной силы.
8. Строим эпюру моментов от действия единичной силы.
9. Перемножаем эпюры M_P и m_1. Пользуясь правилом Верещагина, вычисляем интеграл Максвелла-Мора

$$\delta_y = \frac{1}{EJ}\int\limits_L M_P m_1 ds. \tag{5.1}$$

Пример. Построить эпюры M, Q, N в раме. Найти или вертикальное смещение Δy_C шарнира C. Все стержни имеют одинаковую жесткость EJ. Даны нагрузки $q_1 = 5$кН/м, $q_2 = 4$кН/м, $P = 10$кН.

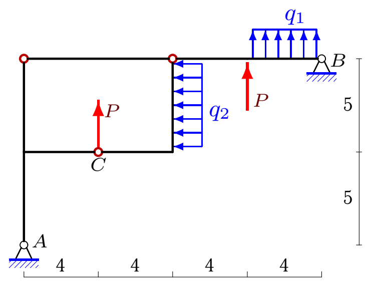


Рис. 22

Решение

1. Разбиваем систему на части по шарнирам. Силу, приложенную к шарниру C, относим к части CD. Действие отброшенных частей и опор заменяем их реакциями. Реакции частей, соединенных шарниром, взаимно противоположны по направлению и равны по модулю (рис. 23).

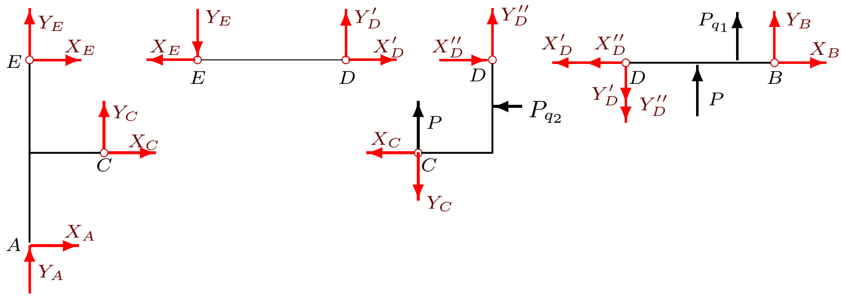


Рис. 23

2. Составляем три уравнения равновесия для каждой из частей. Равнодействующие распределенных нагрузок равны $P_{q_1} = 4q_1 = 20$ кН, $P_{q_2} = 5q_2 = 20$ кН.

Равновесие части AE

$$\begin{aligned} \sum X_i &= X_A + X_C + X_E = 0, \\ \sum Y_i &= Y_A + Y_C + Y_E = 0, \\ \sum M_A &= -10X_E - 5X_C + 4Y_C = 0, \end{aligned} \tag{5.2}$$

Равновесие части DE

$$\begin{aligned} \sum X_i &= -X_E + X_D = 0, \\ \sum Y_i &= -Y_E + Y'_D = 0, \\ \sum M_E &= 8Y'_D = 0. \end{aligned} \tag{5.3}$$

Равновесие части CD

$$\begin{aligned} \sum X_i &= -X_C + X''_D - P_{q2} = 0, \\ \sum Y_i &= -Y_C + Y''_D + P = 0, \\ \sum M_C &= -5X''_D + 4Y''_D + 2.5P_{q2} = 0. \end{aligned} \tag{5.4}$$

Равновесие части DB

$$\begin{aligned}\sum X_i &= -X'_D - X''_D + X_B = 0,\\ \sum Y_i &= -Y'_D - Y''_D + Y_B + P + P_{q1} = 0,\\ \sum M_D &= 8Y_B + 6P_{q1} + 4P = 0.\end{aligned} \tag{5.5}$$

3. Решаем систему [1]. Находим реакции опор и внутренние реакции. Имеем следующие значения реакций (в кН): $Y'_D = 0$, $Y_E = 0$, $Y_B = -20$, $Y''_D = 10$, $Y_C = 20$, $X_C = -2$, $X_A = -7$, $X_B = 27$, $X'_D = 9$, $X''_D = 18$, $X_E = 9$, $Y_A = -20$.

Замечание. 1. Система (5.2-5.5) записана в расчете на произвольную нагрузку, но в данном случае систему можно сократить, воспользовавшись тем, что прямолинейный стержень ED ненагружен и его реакции по концам направлены вдоль стержня и равны по модулю, $X_E = X'_D$. Так как для этого стержня, фактически выполняющего роль связи, не надо писать уравнения равновесия, то система становится на три уравнения меньше. Исчезают и неизвестные $Y_E = 0$, $Y'_D = 0$, $X_E = X'_D$.

4. Строим эпюру моментов от действия нагрузки.

Используем правило, согласно которому положительные значения ординат эпюры откладываются на *сжатом* волокне [2]. Построенная эпюра M_P изображена на рис. 26.

5. Прикладываем к точке рамы, перемещение которой разыскивается единичную силу по направлению искомого перемещения. В данном случае вертикальная сила 1 прикладывается к шарниру C (рис. 24).

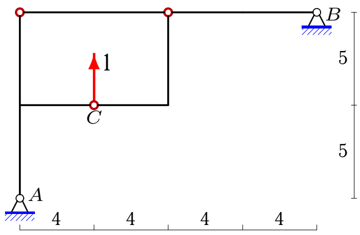


Рис. 24

6. Определяем реакции опор рамы от действия единичной силы. Разбиваем по шарнирам раму на части, прикладываем вместо отброшенных тел их реакции. С учетом замечания 5.4., реакции ненагруженных стержней направляем вдоль их оси.

---

[1] Для решения рекомендуется использовать какую-нибудь программу: Maple, Mathematica[2], MATLAB[3], MathCad[8]. Решение в системе Maple см. на с.113.

[2] В архитектурно-строительных вузах принято обратное правило — эпюры моментов строятся на *растянутом* волокне.

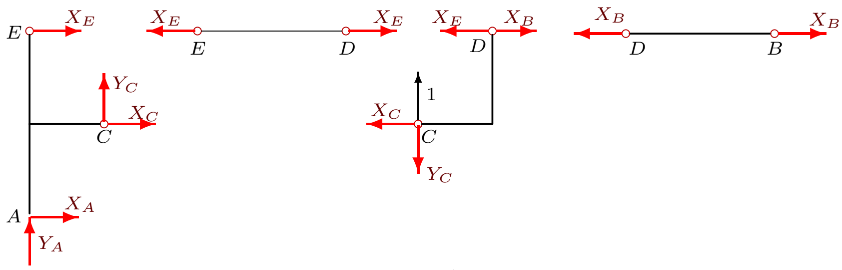


Рис. 25

6. Составляем уравнения равновесия для каждой из частей. С учетом замечания 1 в данном случае получаем систему шести уравнений [1].

Равновесие части AE описывается системой уравнений, совпадающей с 5.6 при $Y_E = 0$:

$$\begin{aligned} \sum X_i &= X_A + X_C + X_E = 0, \\ \sum Y_i &= Y_A + Y_C = 0, \\ \sum M_A &= -10X_E - 5X_C + 4Y_C = 0, \end{aligned} \tag{5.6}$$

Так как уравнения равновесия частей ED и DB удовлетворяются тождественно, запишем уравнения для CD:

$$\begin{aligned} \sum X_i &= -X_C - X_E + X_B = 0, \\ \sum Y_i &= -Y_C + 1 = 0, \\ \sum M_C &= 5X_E - 5X_B = 0. \end{aligned} \tag{5.7}$$

7. Решаем систему. Находим реакции опор и внутренние реакции от действия единичной силы: $X_C = 0$, $Y_C = 1$, $Y_A = -1$, $X_B = 0.4$, $X_A = -0.4$, $X_E = 0.4$. Так как к раме была приложена условная безразмерная сила, то и реакции также безразмерные.

8. Строим эпюру моментов m_1 от действия единичной силы (рис. 27).

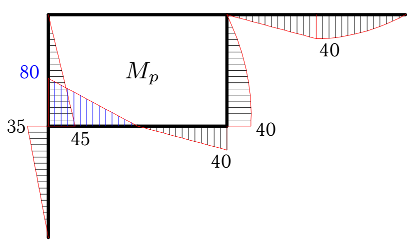


Рис. 26

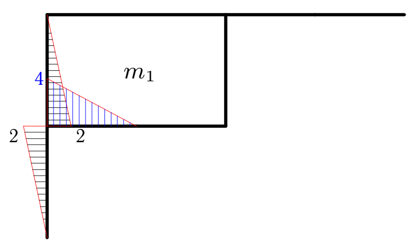


Рис. 27

[1] Если уравнения равновесия рамы и ее частей от действия внешней нагрузки записывать в матричной форме для последующего решения на компьютере, то составление аналогичной системы для единичной нагрузки сводится только к замене столбца правой части, куда входит только одна величина — единичная сила.

9. Перемножаем эпюры M_P и m_1. Пользуясь правилом Верещагина, вычисляем интеграл Максвелла-Мора

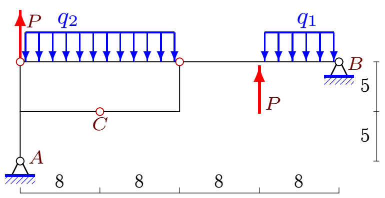
$$\delta_y = \frac{1}{EJ}\int\limits_L M_P m_1 ds = \frac{1}{EJ}\left(\frac{1}{2}\cdot 5\cdot 35\cdot\frac{2}{3}\cdot 2+ \right.$$
$$\left. +\frac{1}{2}\cdot 5\cdot 45\cdot\frac{2}{3}\cdot 2+\frac{1}{2}\cdot 4\cdot 80\cdot\frac{2}{3}\cdot 4\right) = \frac{693.333}{EJ}. \quad (5.8)$$

Так как M_P измеряется в кНм, момент m_1 от безразмерной нагрузки в м, то интеграл получается в кНм^3. Если модуль упругости, заданный обычно в МПа, перевести в кН/м^2, а момент инерции J задать в м^4, то получим, что знаменатель измеряется в кНм^2. Следовательно, перемещение измеряется в м. Например, для двутавра №30 ГОСТ 8239-89 с моментом инерции 7080 см^4 = = $7080\cdot 10^{-8}$м^4 из стали с модулем упругости $E = 2\cdot 10^5$МПа=$2\cdot 10^8$кН/м^2 получим перемещение 0.04896 м = 4.896 см.

Знак интеграла указывает направление перемещения относительно заданной единичной силы. Если интеграл меньше нуля, то перемещение точки направлено вниз.

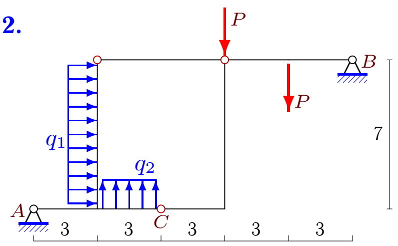
Условия задач. *Построить эпюры M, Q, N в раме. Найти горизонтальное (Δx_C) или вертикальное (Δy_C) смещение шарнира C. Все стержни имеют одинаковую жесткость EJ.*

1.



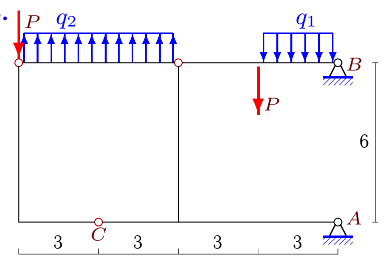
$q_1 = 3$кН/м, $q_2 = 9$кН/м, $P = 21$кН.
$\Delta y_C-?$

2.



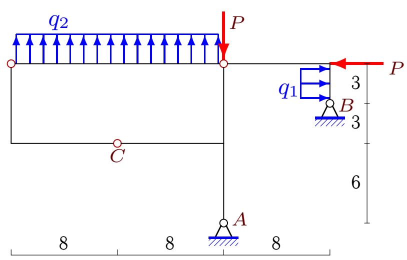
$q_1 = 6$кН/м, $q_2 = 12$кН/м, $P = 15$кН.
$\Delta y_C-?$

3.



$q_1 = 3$кН/м, $q_2 = 7$кН/м, $P = 18$кН.
$\Delta y_C-?$

4.



$q_1 = 17$кН/м, $q_2 = 9$кН/м, $P = 15$кН.
$\Delta x_C-?$