Содержание

1 Связи и ограничения на движение твердых тел

Определение. Связями называются ограничения, накладываемые на координаты и скорости точек механической системы, которые выполняются при любых действующих на систему силах.

Конструктивно связи реализуются при помощи шарниров, стержней, нитей, поверхностей и т.п. Математически связи выражаются в виде уравнений или неравенств, содержащих координаты и скорости точек системы и время:

$$f_i(\vec{r}_1, \vec{r}_2, ..., \vec{r}_n, \vec{v}_1, \vec{v}_2, ..., \vec{v}_n, t) \diamond F_i$$

Здесь i =1,2,... k (количество связей, наложенных на систему), знак $\diamond$ обозначает один из знаков: =,<,>; $\vec{r}_1, \vec{r}_2, ..., \vec{r}_n$ — радиусы-векторы, а $\vec{v}_1, \vec{v}_2, ..., \vec{v}_n$ - скорости точек системы.

Определение. Возможным перемещением точки называется бесконечно малое воображаемое перемещение точки, допускаемое связями в данный момент времени:

$$\delta\vec{r}_\eta = \delta x_\eta \vec{i} + \delta y_\eta \vec{j} + \delta z_\eta \vec{k}$$

Здесь $\delta x_\eta, \delta y_\eta, \delta z_\eta$ - проекции вектора $\delta\vec{r}_\eta$ на оси координат.

Определение. Возможной скоростью называется отношение возможного перемещения к некоторому мыслимому интервалу времени:

$$\vec{v}_\eta^E = \frac{\delta\vec{r}_\eta}{dt'}$$

Возможная скорость — это скорость, которую бы имела точка, если бы она совершала возможное перемещение за время dt'.

Определение. Если для любого возможного перемещения противоположное ему тоже является возможным, то связь называется удерживающей (неосвобождающейся или двусторонней).

1.1 Пример 1

Точка на невесомом абсолютно твердом стержне (маятник): $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$

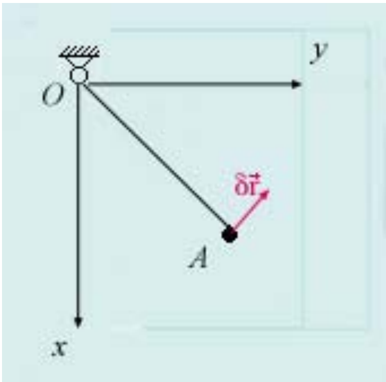

Рис. 1

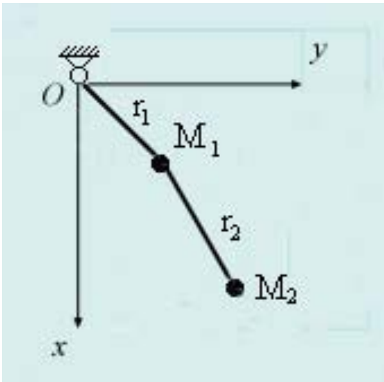

Рис. 2

Точки на двух невесомых абсолютно твердых стержнях:

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 = r_2^2$$

$$x_1^2 + y_1^2 = r_1^2$$

Кроме того, эти связи являются стационарными и голономными.

Определение. Если для некоторого возможного перемещения противоположное ему не является возможным, то связь называется неудерживающей (освобождающейся или односторонней). Удерживающие связи математически выражаются равенствами, а неудерживающие — неравенствами.

1.2 Пример 2

Точка на нерастяжимой нити:

$$x^2 + y^2 + z^2 \leq r^2$$

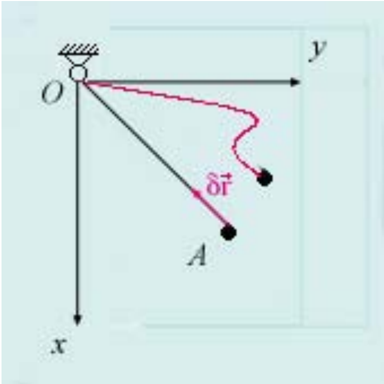

Рис. 3

Определение. Если в уравнение связи время не входит явно, то такая связь называется стационарной (склерономной):

$$f(x_\eta, y_\eta, z_\eta) = 0.$$

здесь x_η, y_η, z_η могут зависеть от t.

Определение. Если в уравнение связи время входит явно, то такая связь называется нестационарной (реономной):

$$f(x_\eta, y_\eta, z_\eta, t) = 0$$

При стационарных связях действительное перемещение совпадает с одним из возможных перемещений. При нестационарной связи действительное перемещение может не совпадать ни с одним из возможных перемещений.

1.3 Пример стационарной связи

Точка на поверхности

Рассмотрим точку (x, y, z) на поверхности:

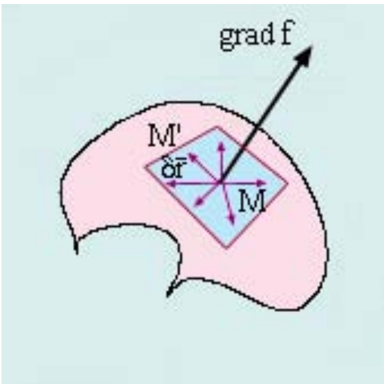

Рис. 4

$$f(x, y, z) = 0 \tag{1}$$

Пусть точка получила некоторое возможное перемещение:

$$M'(x + \delta x, y + \delta y, z + \delta z).$$

Так как точка должна оставаться на поверхности, то приращения координат удовлетворяют равенству:

$$f(x+\delta x, y+\delta y, z+\delta z)=0.$$

Разложим левую часть последнего уравнения в ряд Тейлора:

$$f(x,y,z)+\frac{\partial f}{\partial x}\delta x+\frac{\partial f}{\partial y}\delta y+\frac{\partial f}{\partial z}\delta z+...=0.$$

Здесь многоточием обозначены члены ряда, имеющие второй и более высокий порядок малости в сравнении с приращениями координат. С учетом выражения (1) получим:

$$\frac{\partial f}{\partial x}\delta x+\frac{\partial f}{\partial y}\delta y+\frac{\partial f}{\partial z}\delta z=0.$$

Так как возможным перемещением точки в данном случае является вектор $\delta\vec{r}$, проекциями которого на оси координат являются $\delta x, \delta y, \delta z$, то последнее выражение можно переписать:

$$\vec{\mathrm{grad}}\ f\cdot\delta\vec{r}=0.$$

Вектор $\vec{\mathrm{grad}}\ f$ направлен по нормали к рассматриваемой поверхности, а вектор возможного перемещения точки лежит в плоскости, касательной к поверхности в данной точке.
В случае стационарной связи действительное перемещение удовлетворяет уравнению:

$$df=\vec{\mathrm{grad}}\ f\cdot\delta\vec{r}=0.$$

А в случае нестационарной связи — уравнению:

$$df=\vec{\mathrm{grad}}\ f\cdot\delta\vec{r}+\frac{\partial f}{\partial t}dt=0$$

Т.о., при стационарных связях действительное перемещение $d\vec{r}$ совпадает с одним из возможных перемещений. При нестационарной связи действительное перемещение может не совпадать ни с одним из возможных перемещений.

1.4 Пример нестационарной связи

Точка на сфере переменного радиуса (нестационарная связь):

$$x^2+y^2+z^2=R^2(t).$$

Определение. Связь называется геометрической, если в уравнение связи входят только координаты точек:

$$f(x_\eta, y_\eta, z_\eta)=0$$

Определение. Связь называется кинематической, если в уравнение связи входят координаты и скорости точек механической системы:

$$f(x_\eta, y_\eta, z_\eta, v_{\eta x}, v_{\eta y}, v_{\eta z})=0$$

Определение. Связь называется голономной, если она выражается интегрируемым дифференциальным уравнением для координат и скоростей точек механической системы.

Замечание: Уравнение

$$f(x_\eta, y_\eta, z_\eta, v_{\eta x}, v_{\eta y}, v_{\eta z}, t)=0 \tag{2}$$

называется интегрируемым, если существует функция $F = F(x_\eta, y_\eta, z_\eta, t)$, такая что уравнение (2) может быть записано в виде

$$\frac{dF}{dt}(x_\eta, y_\eta, z_\eta, t) \equiv f(x_\eta, y_\eta, z_\eta, v_{\eta x}, v_{\eta y}, v_{\eta z}, t) = 0$$

Определение. Связь называется неголономной, если она выражается неинтегрируемым дифференциальным уравнением для координат и скоростей точек механической системы.

Определение. Связи, наложенные на механическую систему, называются идеальными, если сумма элементарных работ сил реакций этих связей на любом возможном перемещении равна нулю:

$$\sum_{\eta=1}^{n} \vec{R}_\eta \cdot \delta\vec{r}_\eta = 0 \tag{3}$$

Здесь

$$\vec{R}_\eta = R_{\eta x}\vec{i} + R_{\eta y}\vec{j} + R_{\eta z}\vec{k}$$

$$\delta\vec{r}_\eta = \delta r_{\eta x}\vec{i} + \delta r_{\eta y}\vec{j} + \delta r_{\eta z}\vec{k}$$

Согласно определению скалярного произведения двух векторов выражение (3) можно переписать в виде:

$$\sum_{\eta=1}^{n}(R_{\eta x}\delta x_\eta + R_{\eta y}\delta y_\eta + R_{\eta z}\delta z_\eta) = 0$$

или

$$\sum_{\eta=1}^{n} |\vec{R}_\eta||\delta\vec{r}_\eta| cos\alpha_\eta = 0$$

где α_η — угол между векторами $\vec{R}_\eta$ и $\delta\vec{r}_\eta$.

Определение идеальных связей можно дать с использованием понятия мощности.

Определение. Связи, наложенные на механическую систему, называются идеальными, если сумма мощностей сил реакций этих связей равна нулю:

$$\sum_{\eta=1}^{n} \vec{R}_\eta \cdot \delta\vec{r}^{\,E}_\eta = 0 \tag{4}$$

Согласно определению скалярного произведения двух векторов выражение (4) можно переписать в виде:

$$\sum_{\eta=1}^{n}(R_{\eta x}\delta r^E_{\eta x} + R_{\eta y}\delta r^E_{\eta y} + R_{\eta z}\delta r^E_{\eta z}) = 0$$

или

$$\sum_{\eta=1}^{n} |\vec{R}_\eta||\delta\vec{r}^{\,E}_\eta| \cos\beta_\eta = 0$$

2 Принцип Даламбера-Лагранжа (общее уравнение динамики)

Для системы с идеальными связями в любой момент времени сумма элементарных работ активных сил и даламберовых сил инерции равняется нулю:

$$\sum_{\eta=1}^{n} \vec{F}_\eta \cdot \delta\vec{r}_\eta + \sum_{\eta=1}^{n} \vec{\Phi}^{\text{ин}}_\eta \cdot \delta\vec{r}_\eta = 0 \tag{5}$$

здесь

$\vec{F}_\eta$ — активная сила, приложенная к точке с массой m_η

$\vec{\Phi}_\eta^{\text{ин}} = m_\eta \vec{w}_\eta$
Принцип Даламбера-Лагранжа можно сформулировать и с использованием понятия мощности:

$$\sum_{\eta=1}^{n} \vec{F}_\eta \cdot \vec{v}_\eta^E + \sum_{\eta=1}^{n} \vec{\Phi}_\eta^{\text{ин}} \cdot \vec{v}_\eta^E = 0 \tag{6}$$

Уравнения (5) и (6) называются общими уравнениями динамики

В случае равновесия механической системы ускорения всех точек системы равны нулю. Поэтому уравнения (5) и (6) принимают вид:

$$\sum_{\eta=1}^{n} \vec{F}_\eta \cdot \delta\vec{r}_\eta = 0 \tag{7}$$

$$\sum_{\eta=1}^{n} \vec{F} \cdot \vec{v}_\eta^E = 0 \tag{8}$$

Уравнения (7) и (8) являются математическим выражение ***принципа возможных перемещений*** (возможных мощностей):
Для того, чтобы механическая система с идеальными (удерживающими) стационарными связями находилась в равновесии, необходимо и достаточно, чтобы сумма элементарных работ всех активных сил на любом возможном перемещении из предполагаемого состояния равновесия равнялась нулю.

3 Обобщенные координаты механической системы

Рассмотрим механическую систему из n точек, на которую наложены k удерживающих голономных связей. Тогда для $3n$ координат системы выполняются следующие условия:

$$f_1(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, ..., x_n, y_n, z_n, t) = 0,$$

$$f_2(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, ..., x_n, y_n, z_n, t) = 0,$$

$$...$$

$$f_k(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, ..., x_n, y_n, z_n, t) = 0.$$

Выберем первые k координаты и перенесем оставшиеся $s = 3 \cdot n - k$ в правые части уравнений. Далее разрешим полученные уравнения относительно первых k координат, а остальные s — переобозначим:

$$x_1 = x_1(q_1, q_2, ..., q_s, t),$$

$$y_1 = y_1(q_1, q_2, ..., q_s, t),$$

$$z_1 = z_1(q_1, q_2, ..., q_s, t),$$

$$x_2 = x_2(q_1, q_2, ..., q_s, t),$$

$$...$$

$$...$$

$$x_n = q_{s-2},$$

$$y_n = q_{s-1},$$

$$z_n = q_s.$$

Таким образом, координаты всех точек системы будут функциями s независимых параметров системы и времени.

Определение. Независимые параметры, однозначно определяющие положение всех точек механической системы, называются обобщенными координатами этой системы. Число обобщенных координат является числом степеней свободы.

Систему можно записать в векторном виде:

$$\vec{r}_\eta = r_\eta(q_1, q_2, ..., q_s, t); \eta = 1, 2, ..., n \tag{9}$$

Примеры:

Пример 1: Плоский математический маятник:

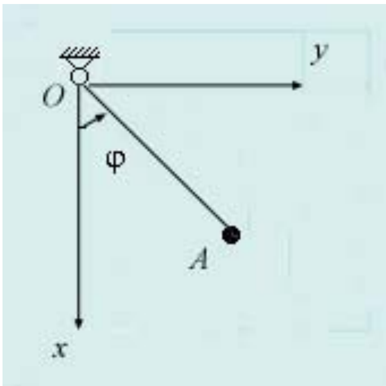

Рис. 5

OA — невесомый абсолютно твердый стержень, O — цилиндрический шарнир.

$n = 1$

Уравнения связей:

$x_A^2 + y_A^2 + z_A^2 = R^2; z_A = 0 (k = 2)$

$S = 3 \cdot n - k = 1$

Если за обобщенную координату выбрать, то имеем следующие уравнения:

$x_A = R\cos\varphi; y_A = R\sin\varphi; z_A = 0$

Пример 1: Точка M на поверхности сферы:

$n = 1,\ k = 1.$

Уравнение связи:

$x^2 + y^2 + z^2 = R^2$

$S = 3 \cdot n - k = 2$

Если за обобщенные координаты выбрать γ (широту) и φ (долготу), то имеем следующие уравнения:

$$x_M = R\cos\varphi\cos\gamma; y_M = R\cos\varphi\sin\gamma; z_M = R\sin\gamma$$

Если закон изменения обобщенных координат известен

$$q_1 = q_1(t); q_2 = q_2(t); ...; q_s = q_s(t), \tag{10}$$

то, подставив (10) в (9), можно найти траектории движения точек системы.

Уравнения (10) определяют траекторию некоторой точки в s-мерном пространстве. Пространство $q_1, q_2, ..., q_s$ называется конфигурационным пространством механической системы. Изучение движения механической системы можно свести к нахождению траектории изображающей точки в конфигурационном пространстве.

Рассмотрим точку M', положение которой определяется как

$$M'(q_1 + \delta q_1, q_2 + \delta q_2, ..., q_s + \delta q_s)$$

$\delta q_1, \delta q_2, ..., \delta q_s$ — вариации обобщенных координат

Положению точки M' соответствует радиус-вектор

$$\vec{r}\,'_\eta = \vec{r}\,'_\eta(q_1 + \delta q_1, q_2 + \delta q_2, ..., q_s + \delta q_s, t); \eta = 1, 2, ..., n$$

При перемещении изображающей точки в точку $'$ (в конфигурационном пространстве) точка с массой m_η механической системы совершает перемещение

$$\delta\vec{r}_\eta = \vec{r}\,'_\eta - \vec{r}_\eta = \vec{r}\,'_\eta(q_1 + \delta q_1, q_2 + \delta q_2, ..., q_s + \delta q_s, t) - \vec{r}_\eta(q_1, q_2, ..., q_s, t)$$

Разложим это выражение в ряд Тейлора:

$$\delta\vec{r}_\eta = \vec{r}_\eta(q_1, q_2, ..., q_s, t) + \frac{\partial\vec{r}_\eta}{\partial q_1}\delta q_1 + \frac{\partial\vec{r}_\eta}{\partial q_2}\delta q_2 + ... + \frac{\partial\vec{r}_\eta}{\partial q_s}\delta q_s - \vec{r}_\eta(q_1, q_2, ..., q_s, t),$$

или

$$\delta\vec{r}_\eta = \sum_{i=1}^{s}\frac{\partial\vec{r}_\eta}{\partial q_i}\delta q_i \qquad (11)$$

Выражение (11) устанавливает связь между возможными перемещениями точек механической системы и вариациями обобщенных координат.

Вычислим элементарную работу активных сил на возможном перемещении, определяемом выражением (11) :

$$\delta A = \sum_{\eta=1}^{n}\vec{F}_\eta\cdot\delta\vec{r}_\eta = \sum_{\eta=1}^{n}\vec{F}_\eta\cdot\sum_{i=1}^{s}\frac{\partial\vec{r}_\eta}{\partial q_i}\delta q_i = \sum_{i=1}^{s}\sum_{\eta=1}^{n}\vec{F}_\eta\cdot\frac{\partial\vec{r}_\eta}{\partial q_i}\delta q_i$$

или

$$\delta A = \sum_{i=1}^{s} Q_i\delta q_i, \qquad (12)$$

где

$$Q_i = \sum_{\eta=1}^{n}\vec{F}_\eta\cdot\frac{\partial\vec{r}_\eta}{\partial q_i} = \sum_{\eta=1}^{n} F_{\eta x}\frac{\partial x_\eta}{\partial q_i} + F_{\eta y}\frac{\partial y_\eta}{\partial q_i} + F_{\eta y}\frac{\partial y_\eta}{\partial q_i} \qquad (13)$$

называется ***обобщенной силой***; $F_{\eta x}, F_{\eta y}, F_{\eta y}$ — проекции вектора $\vec{F}_\eta$ на оси координат, а x_η, x_η, z_η — координаты точки с массой m_η

Определение. Обобщенной силой называется коэффициент перед вариацией обобщенной координаты в выражении для сумм элементарных работ всех активных сил.

Если использовать понятие мощности

$$N = \sum_{\eta=1}^{n}\vec{F}_\eta\cdot\vec{V}_\eta^E = \sum_{i=1}^{s} Q_i\dot{q}_i^E \qquad (14)$$

где $\dot{q}_i^E = \frac{dq_i^E}{dt}$ — возможная обобщенная скорость, то обобщенную силу можно определить так:

Определение. Обобщенной силой называется коэффициент перед возможной обобщенной скоростью в выражении для суммы мощностей всех активных сил.

Размерность обобщенной силы:

$$[Q] = \frac{[F][r]}{q} = \frac{Hm}{[q]} \text{ (согласно выражению (13))}$$

Пример 1

Пусть обобщенная координата — декартова координата точки.
$[q] = m$, следовательно, $[Q] = \frac{Hm}{m} = H$(размерность силы)

Пример 2

Пусть обобщенная координата — угол.
$[q] = rad$, следовательно, $[Q] = \frac{Hm}{rad} =$ (размерность момента).

4 Тождества Лагранжа

Вывод вспомогательных тождеств Лагранжа :

Найдем *скорость точки с массой* m_η. Для этого продифференцируем по времени уравнение

$$\vec{r}_\eta = \vec{r}_\eta(q_1, q_2, ..., q_s, t), \tag{15}$$

где η=1,2,3,...,n (см. Обобщённые координаты механической системы, с. 6)

$$\vec{V}_\eta = \frac{d\vec{r}_\eta}{dt} = \frac{d}{dt}\vec{r}_\eta(q_1, q_2, ..., q_s, t) \tag{16}$$

или

$$\vec{V}_\eta = \frac{\partial \vec{r}_\eta}{\partial q_1}\frac{dq_1}{dt} + \frac{\partial \vec{r}_\eta}{\partial q_2}\frac{dq_2}{dt} + ... + \frac{\partial \vec{r}_\eta}{\partial q_s}\frac{dq_s}{dt} + \frac{\partial \vec{r}_\eta}{\partial t} = \sum_{i=1}^{s}\frac{\partial \vec{r}_\eta}{\partial q_i}\dot{q}_i + \frac{\partial \vec{r}_\eta}{\partial t}, \tag{17}$$

наконец

$$\vec{V}_\eta = \sum_{i=1}^{s}\frac{\partial \vec{r}_\eta}{\partial q_i}\dot{q}_i + \frac{\partial \vec{r}_\eta}{\partial t}, \tag{18}$$

где $\dot{q}_i = \frac{dq_i}{dt}$ — обобщённая скорость

$$\vec{V}_\eta = \vec{V}_\eta(q_i, \dot{q}_i, t) \tag{19}$$

Таким образом, скорость точки является функцией обобщенных координат, скоростей и времени.

Ускорение точки с массой m_η.

$$\vec{a}_\eta = \frac{d\vec{V}_\eta}{dt} = \frac{\partial \vec{V}_\eta}{\partial q_1}\frac{dq_1}{dt} + \frac{\partial \vec{V}_\eta}{\partial q_2}\frac{dq_2}{dt} + ... + \frac{\partial \vec{V}_\eta}{\partial q_s}\frac{dq_s}{dt} + \frac{\partial \vec{V}_\eta}{\partial \dot{q}_1}\frac{d\dot{q}_1}{dt} + \frac{\partial \vec{V}_\eta}{\partial \dot{q}_2}\frac{d\dot{q}_2}{dt} + ... + \frac{\partial \vec{V}_\eta}{\partial \dot{q}_s}\frac{d\dot{q}_s}{dt} + \frac{\partial \vec{V}_\eta}{\partial t} \tag{20}$$

или

$$\vec{a}_\eta = \sum_{i=1}^{s}\frac{\partial \vec{V}_\eta}{\partial q_i}\dot{q}_i + \sum_{i=1}^{s}\frac{\partial \vec{V}_\eta}{\partial \dot{q}_i}\ddot{q}_i + \frac{\partial \vec{V}_\eta}{\partial t} \tag{21}$$

Дифференцируя по времени выражение (18), получаем:

$$\vec{a}_\eta = \frac{d\vec{V}_\eta}{dt} = \sum_{i=1}^{s}\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \vec{r}_\eta}{\partial q_i}\right)\dot{q}_i + \frac{\partial \vec{r}_\eta}{\partial q_i}\frac{d\dot{q}_i}{dt}\right] + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \vec{r}_\eta}{\partial t}\right) \tag{22}$$

или

$$\vec{a}_\eta = \frac{d\vec{V}_\eta}{dt} = \sum_{i=1}^{s}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \vec{r}_\eta}{\partial q_i}\right)\dot{q}_i + \sum_{i=1}^{s}\frac{\partial \vec{r}_\eta}{\partial q_i}\ddot{q}_i + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \vec{r}_\eta}{\partial t}\right) \tag{23}$$

Сравнивая выражения (21) и (23), получим

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \vec{r}_\eta}{\partial q_i}\right) = \frac{\partial \vec{V}_\eta}{\partial q_i} \tag{24}$$

$$\frac{\partial \vec{r}_\eta}{\partial q_i} = \frac{\partial \vec{V}_\eta}{\partial \dot{q}_i} \tag{25}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \vec{r}_\eta}{\partial t}\right) = \frac{\partial \vec{V}_\eta}{\partial t} \tag{26}$$

Выражения (24), (25) и (26) называются **тождествами Лагранжа**

5 Уравнения Лагранжа

Чтобы найти уравнения движения механической системы в обобщенных координатах, обратимся к общему уравнению динамики

$$\sum \delta A_k^{\text{а}} + \sum \delta A_k^{\text{и}} = 0 \tag{27}$$

Для общности не будем предполагать, что все наложенные на систему связи являются идеальными. Поэтому в первую сумму могут входить как работы активных сил, так и, например, работы сил трения.

Пусть система имеет s степеней свободы и ее положение определяется обобщенными координатами $q_1, q_2, ...q_s$. Тогда

$$\sum \delta A_k = Q_1 \delta q_1 + Q_2 \delta q_2 + ... + Q_s \delta q_s. \tag{28}$$

Очевидно следующее преобразование

$$\sum \delta A_k^{\text{и}} = Q_1^{\text{и}} \delta q_1 + Q_2^{\text{и}} \delta q_2 + ... + Q_s^{\text{и}} \delta q_s, \tag{29}$$

где $Q_1^{\text{и}}, Q_2^{\text{и}}, ..., Q_s^{\text{и}}$ — обобщённые силы инерции, которые равны

$$Q_i^{\text{и}} = \sum \vec{F}_k^{\text{и}} \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_i} \tag{30}$$

Подставляя величины (28) и (29) в уравнение (27), найдем

$$(Q_1 + Q_1^{\text{и}})\delta q_1 + ... + (Q_s + Q_s^{\text{и}})\delta q_s = 0.$$

Так как все $\delta q_1, \delta q_2, ..., \delta q_s$ между собой независимы, то полученное равенство может выполняться тогда и только тогда, когда каждый из коэффициентов при $\delta q_1, \delta q_2, ..., \delta q_s$ в отдельности равен нулю. Следовательно, должно быть

$$(Q_1 + Q_1^{\text{и}}) = 0, ..., (Q_s + Q_s^{\text{и}}) = 0. \tag{31}$$

Полученными уравнениями можно непосредственно пользоваться для решения задач динамики. Преобразуем сначала соответствующим образом величину $Q_1^{\text{и}}$. Поскольку сила инерции любой из точек системы

$$\vec{F}_k^{\text{и}} = -m_k \vec{a}_k = -m_k \frac{d\vec{V}_k}{dt}$$

то первая из формул (30) дает

$$-Q_1^{\text{и}} = \sum \frac{m_k d\vec{V}_k}{dt} \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_1}. \tag{32}$$

Чтобы выразить $Q_1^{\text{и}}$ через кинетическую энергию системы, надо преобразовать правую часть равенства (32) так, чтобы она содержала только скорости V_k точек системы. С этой целью заметим прежде всего, что

$$\frac{d\vec{V}_k}{dt} \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_1} = \frac{d}{dt}\left(\vec{V}_k \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_1}\right) - \vec{V}_k \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_1}\right). \tag{33}$$

Дальнейшее преобразование осуществляется с помощью следующих двух равенств:

$$\frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_1} = \frac{\partial \vec{V}_k}{\partial \dot{q}_1}, \qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_1} = \frac{d\vec{V}_k}{dq_1}. \tag{34}$$

Докажем сначала справедливость первого из них. Так как согласно

$$\vec{r}_k = \vec{r}_k(q_1, q_2, ..., q_s),$$

то

$$\vec{V}_k = \frac{d\vec{r}_k}{dq_1} = \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_1}\dot{q}_1 + ... + \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_s}\dot{q}_s$$

и

$$\frac{\partial \vec{V}_k}{\partial \dot{q}_1} = \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_1}.$$

Справедливость второго из равенств (34) следует из того, что операции полного дифференцирования по t и частного по q_1 переместимы, т.е.

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_1} = \frac{\partial}{\partial q_1}\frac{d\vec{r}_k}{dt} = \frac{d\vec{V}_k}{dq_1}.$$

Подставив теперь величины (34) в (33), получим

$$\frac{d\vec{V}_k}{dt}\frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_1} = \frac{d}{dt}\left(\vec{V}_k\frac{\partial \vec{V}_k}{\partial \dot{q}_1}\right) - \vec{V}_k\frac{\partial \vec{V}_k}{\partial q_1} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\frac{\partial \vec{V}_k^2}{\partial \dot{q}_1}\right) - \frac{1}{2}\frac{\partial \vec{V}_k^2}{\partial q_1}$$

и формула (32), если учесть, что сумма производных равна производной от суммы, а $\vec{V}_k^2 = V_k^2$, примет вид

$$Q_1^{\text{ц}} = \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial}{\partial \dot{q}_1}\left(\sum \frac{m_k V_k^2}{2}\right)\right] - \frac{\partial}{\partial q_1}\left(\sum \frac{m_k V_k^2}{2}\right) = \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} - \frac{\partial T}{\partial q_1},$$

где $T = \sum m_k V_k^2/2$ — кинетическая энергия системы.

Аналогичные выражения получатся для всех остальных обобщенных сил инерции. В результате равенства (31) дадут окончательно

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_1} = Q_1,$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_2}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_2} = Q_2,$$

$$\dots\dots\dots\dots$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_s} = Q_s.$$

Эти уравнения и представляют собой дифференциальные уравнения движения системы в обобщенных координатах или уравнения Лагранжа 2-го рода.