6.2. Свободное твердое тело на упругих стержнях

Постановка задачи. *Жесткая пластина весом закреплена $n > 3$ упругими стержнями. К пластине приложены известные нагрузки. Найти усилия в стержнях.*

Так как пластина имеет $n - 3$ лишний опорный стержень, то для решения задачи помимо трех уравнений статики необходимо привлечь еще $n - 3$ дополнительное уравнение — уравнения совместности деформаций. Как и в предыдущей задаче возможны два способа решения: метод сил и метод деформаций. В этой задаче, с $n - 3$ степенью статической неопределимости, метод сил в данном случае не отличается от рассмотренного. Используя метод Максвелла–Мора, требуется получить коэффициенты δ_{ij} и Δ_{ip}.

Геометрический же метод отыскания уравнений совместности деформаций здесь трудно применим. Если в предыдущей задаче с шарнирным телом картина деформации сводится лишь к повороту, и совместность деформаций следует из простого подобия треугольников, то в данном случае при плоском движении пластины, вызванном деформацией стержней, получить аналогичный результат затруднительно. Предлагаем поэтому универсальный *кинематический метод*. Этот метод свободен от утомительных геометрических построений треугольников, с обязательными в таких случаях допущениями о замене малых дуг отрезками прямых, визуальным определением знака деформации и всего того, что делает в общем-то несложную задачу одной из самой запутанной в курсе сопротивления материалов. Для решения задачи потребуется привлечь кинематические соотношения для скоростей при плоском движении.

План решения

1. Освобождаем пластину от связей (упругих стержней), заменяя их действие реакциями, направленными по направлению стержней (от опоры на пластине к стержню). Составляем три уравнения равновесия для всех сил, действующих на пластину.

2. Задаем пластине возможное перемещение, определяемое тремя неопределенными параметрами — двумя компонентами скорости какой-либо точки пластины и угловой скоростью поворота.

3. Выражаем скорости шарниров стержней на пластине через заданные параметры.

4. Находим проекции скоростей шарниров на направления стержней. Для стержней выбираем условное направление, например, от точки на пластине к опорной точке.

5. Исключая из n проекций три заданных параметра, получаем $n - 3$ соотношения между скоростями.

6. Выражаем скорости шарниров через продольные деформации.

7. Используем закон Гука $\Delta l_k = S_k l_k/(E_k F_k)$, где S_k — усилие в k-м стержне, $E_k F_k$ — жесткость стержня, а l_k — его длина. Получаем $n-3$ дополнительное уравнение для усилий S_k, $k = 1, ..., n$.

8. Решаем систему n уравнений, три из которых — уравнения статики, а $n-3$ — соотношения совместности деформаций. Находим усилия в стержнях.

Пример.

Однородная пластина весом $P = 5$ Н удерживается в вертикальной плоскости четырьмя стержнями одинаковой жесткости (рис. 49). На пластину действует момент $m = 0.1$ Нм. Размеры даны в сантиметрах. Найти усилия в стержнях.

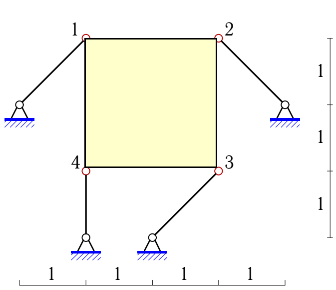

Рис. 49

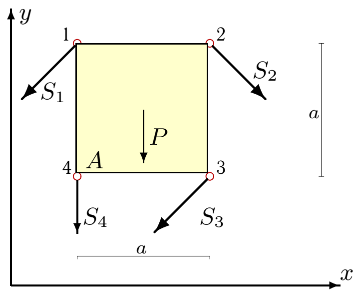

Рис. 50

Решение

1. Освобождаем пластину от связей (упругих стержней), заменяя их действие реакциями, направленными по линиям стержней от опоры на пластине к стержню (рис. 50). Прикладываем силу тяжести пластины P к ее центру.

Составляем три уравнения равновесия для всех сил, действующих на пластину.

$$\begin{aligned}
&\sum X_i = -S_1 \cos 45^\circ + S_2 \cos 45^\circ - S_3 \cos 45^\circ = 0,\\
&\sum Y_i = -S_1 \cos 45^\circ - S_2 \cos 45^\circ - S_3 \cos 45^\circ - P - S_4 = 0,\\
&\sum M_A = S_1 a \cos 45^\circ - S_2 a\sqrt{2} - S_3 a \cos 45^\circ - Pa/2 + m = 0,
\end{aligned} \tag{6.10}$$

где $a = 2$ см.

2. Задаем пластине возможное перемещение, определяемое тремя неопределенными параметрами — двумя компонентами v_{4x}, v_{4y} скорости точки 4 пластины и угловой скоростью поворота ω_z.

3. Выражаем скорости точек 1, 2, 3 на пластине через заданные параметры:

$$\begin{aligned}
\bar{v}_1 &= \bar{v}_4 + \bar{v}_{1,4} = \bar{v}_4 + \bar{\omega} \times \bar{r}_1,\\
\bar{v}_2 &= \bar{v}_4 + \bar{v}_{2,4} = \bar{v}_4 + \bar{\omega} \times \bar{r}_2,\\
\bar{v}_3 &= \bar{v}_4 + \bar{v}_{3,4} = \bar{v}_4 + \bar{\omega} \times \bar{r}_3.
\end{aligned} \tag{6.11}$$

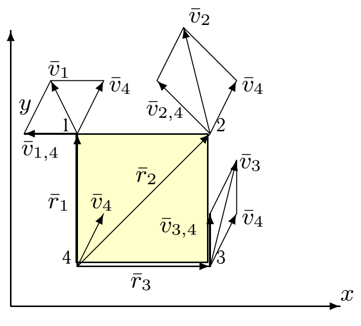

Рис. 51

В проекциях на оси x и y получаем

$$
\begin{aligned}
&v_{1x} = v_{4x} - \omega_z a,\\
&v_{1y} = v_{4y},\\
&v_{2x} = v_{4x} - \omega_z a,\\
&v_{2y} = v_{4y} + \omega_z a,\\
&v_{3x} = v_{4x},\\
&v_{3y} = v_{4y} + \omega_z a.
\end{aligned}
\tag{6.12}
$$

4. Находим проекции скоростей шарниров на направления стержней (от точки на пластине к опорной точке).

$$
\begin{aligned}
&v_{1\tau} = -v_{1x}\cos 45^\circ - v_{1y}\cos 45^\circ = -\sqrt{2}/2(v_{4x} + v_{4y} - \omega_z a),\\
&v_{2\tau} = v_{2x}\cos 45^\circ - v_{2y}\cos 45^\circ = \sqrt{2}/2(v_{4x} - v_{4y} - 2\omega_z a),\\
&v_{3\tau} = -v_{3x}\cos 45^\circ - v_{3y}\cos 45^\circ = -\sqrt{2}/2(v_{4x} + v_{4y} + \omega_z a),\\
&v_{4\tau} = -v_{4y}.
\end{aligned}
\tag{6.13}
$$

5. Исключая из четырех проекций три заданных параметра v_{4x}, v_{4y} и ω_z, получаем соотношение между скоростями

$$3v_{1\tau} + 2v_{2\tau} - v_{3\tau} - 2\sqrt{2}v_{4\tau} = 0.$$

Процедуру исключения лучше поручить системе Maple, в которой предусмотрен удобный оператор `eliminate`. Программа может иметь, например, следующий вид

```
> eq1:=v1=-sqrt(2)/2*(vx+vy-wa):
> eq2:=v2= sqrt(2)/2*(vx-vy-2*wa):
> eq3:=v3=-sqrt(2)/2*(vx+vy+wa):
> eq4:=v4=-vy:
> eliminate({eq1,eq2,eq3,eq4},{vx,vy,wa});
```

$$[\{vy = -v4,\, wa = -\frac{\sqrt{2}\,v2}{3} - \frac{\sqrt{2}\,v3}{3} + \frac{2\,v4}{3},\, vx = -\frac{2\sqrt{2}\,v3}{3} + \frac{v4}{3} + \frac{\sqrt{2}\,v2}{3}\},$$
$$\{-v3 + 2\,v2 - 2\sqrt{2}\,v4 + 3\,v1\}]$$

6. Выражаем скорости шарниров через продольные деформации. Так как для малых промежутков времени $v_{k\tau} = -\Delta l_k/\Delta t$, то отсюда

следует [1] уравнение совместности деформаций

$$3\Delta l_1 + 2\Delta l_2 - \Delta l_3 - 2\sqrt{2}\Delta l_4 = 0. \qquad (6.14)$$

7. Используем закон Гука

$$\Delta l_k = S_k l_k/(E_k F_k). \qquad (6.15)$$

По условию задачи все стержни имеют одинаковую жесткость $E_k F_k = EF$. Длины стержней (в сантиметрах):

$$l_1 = l_2 = l_3 = \sqrt{2},\ l_4 = 1$$

В результате получаем искомое уравнение для усилий

$$3S_1 + 2S_2 - S_3 - 2S_4 = 0. \qquad (6.16)$$

8. Это уравнение вместе с (6.10) образует систему, решение которой (в ньютонах) имеет вид

$$S_1 = -2.215,\ S_2 = -0.298,\ S_3 = 1.917,\ S_4 = -4.578. \qquad (6.17)$$

Замечание. Если в условии задачи сказано, что деформируемые стержни нагреваются, то для учета температурного фактора в уравнениях (6.15) достаточно добавить дополнительные слагаемые:

$$\Delta l_k = S_k l_k/(E_k F_k) + \Delta T_k l_k \alpha, \qquad (6.18)$$

где α — коэффициент температурного расширения, ΔT_k — температура нагрева стержня в градусах.

Материал	α, 1/град
Сталь легированная	$11 - 14 \cdot 10^{-6}$
Сталь жаропрочная	$10 - 18 \cdot 10^{-6}$
Вольфрам	$4.45 \cdot 10^{-6}$
Алюминиевые сплавы Д16	$22.7 \cdot 10^{-6}$
Латунь	$19 \cdot 10^{-6}$
Магниевые сплавы	$20 - 30 \cdot 10^{-6}$
Текстолит	$3 - 4 \cdot 10^{-6}$
Лед	$50.7 \cdot 10^{-6}$
Стекло	$0.5 - 15 \cdot 10^{-6}$
Сосна (15% влажности) вдоль волокон	$3.7 \cdot 10^{-6}$
Сосна (15% влажности) поперек волокон	$63.6 \cdot 10^{-6}$
Липа (15% влажности) вдоль волокон	$5.4 \cdot 10^{-6}$
Липа (15% влажности) поперек волокон	$44.1 \cdot 10^{-6}$

[1] Минус в соотношении возник из-за того, что орты стержней взяты по направлению сжатия, а правило знаков для усилий предполагает, что сжимающие усилия меньше нуля.