Задача 40. Найти максимальный и минимальный моменты инерции плоской фигуры (рис. 126) и угол наклона главной оси инерции к оси x. Размеры даны в сантиметрах.

Решение

1. Вводим систему координат. Разбиваем фигуру на пять частей: один квадрат размером 7×7см (фигура №1) и четыре вырезанных из него фигуры — два треугольника (№2, №3), прямоугольник №4, и четверть круга №5 радиусом $R = 2$ см (рис. 127) [1]. Определяем координаты центров тяжести фигур:

$$\begin{aligned}
&x_1 = 7/2 = 3.5 \text{ см}, && y_1 = 7/2 = 3.5 \text{ см},\\
&x_2 = 4/3 = 1.33 \text{ см}, && y_2 = 2/3 = 0.67 \text{ см},\\
&x_3 = 5 + 4/3 = 6.33 \text{ см}, && y_3 = (2/3)\cdot 4 = 2.67 \text{ см},\\
&x_4 = 5/2 = 2.5 \text{ см}, && y_4 = 6 + 0.5 = 6.5 \text{ см},\\
&x_5 = 4R/(3\pi) = 0.85 \text{ см}, && y_5 = 4 + 4R/(3\pi) = 4.85 \text{ см}.
\end{aligned}$$

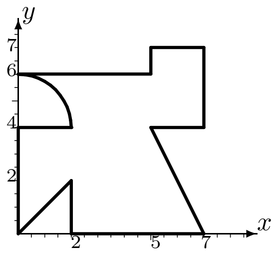

Рис. 126

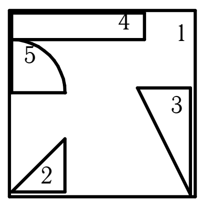

Рис. 127

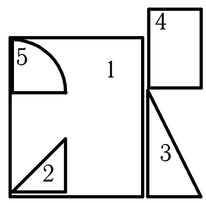

Рис. 128

2. Вычисляем площадь всей фигуры. Вычисляем площади составляющих, приписывая знак минус вырезанным частям:

$$\begin{aligned}
&F_1 = 7\cdot 7 = 49 \text{ см}^2,\\
&F_2 = -(1/2)\cdot 2\cdot 2 = -2 \text{ см}^2,\\
&F_3 = -(1/2)\cdot 4\cdot 2 = -4 \text{ см}^2,\\
&F_4 = -5\cdot 1 = -5 \text{ см}^2,\\
&F_5 = -\pi R^2/4 = -3.14 \text{ см}^2.
\end{aligned}$$

В сумме имеем $F = \sum\limits_i F_i = 49 - 2 - 4 - 5 - 3.14 = 34.86$ см^2.

[1] Возможно и другое разбиение на части (рис. 128). Здесь из прямоугольника №1 вырезаны четверть круга №5 и треугольник №2. К полученной фигуре добавлен треугольник №3 и прямоугольник №4.

3. Определяем координаты центра тяжести фигуры

$$x_c = \frac{49 \cdot 3.5 - 2 \cdot 1.33 - 4 \cdot 6.33 - 5 \cdot 2.5 - 3.14 \cdot 0.85}{34.86} = 3.68 \text{ см},$$
$$y_c = \frac{49 \cdot 3.5 - 2 \cdot 0.67 - 4 \cdot 2.67 - 5 \cdot 6.5 - 3.14 \cdot 4.85}{34.86} = 3.2 \text{ см}.$$

4. Определяем осевые J_{xc}, J_{yc} и центробежный J_{xyc} моменты инерции сечения относительно центральных осей.

Сначала записываем моменты инерции составляющих фигур относительно их центральных осей. Моменты инерции прямоугольника № 1 (квадрат $h = b = 7$ см) имеют вид (табл. 2, с. 240):

$$J_{xc1} = J_{yc1} = bh^3/12 = 70 \cdot 70^3/12 = 200.08 \text{ см}^4, \quad J_{xy1} = 0.$$

Вырезанный прямоугольный равнобедренный треугольник № 2 ($h = b = 2$ см) имеет отрицательные осевые моменты инерции относительно собственных центральных осей (табл. 3, с. 241):

$$J_{xc2} = -bh^3/36 = -2 \cdot 2^3/36 = -0.44 \text{ см}^4, \;\; J_{yc2} = -hb^3/36 = -0.44 \text{ см}^4.$$

Знак центробежного момента инерции прямоугольного треугольника зависит от его ориентации. Если внешняя нормаль к гипотенузе направлена в 1-ю или 3-четверть декартовых координат (правая ориентация осей), то знак минус, как в табл. 3: $J_{xy} = -b^2h^2/72$, в случае, если нормаль направлена во 2-ю или 4-четверть — знак плюс: $J_{xy} = b^2h^2/72$. В нашем случае у треугольника 2 нормаль направлена во 2-ю четверть, но так как он вырезан, меняем знак момента инерции и получаем $J_{xy2} = -b^2h^2/72 = -0.22$ см^4.

Рассуждая аналогично, получаем моменты инерции вырезанного прямоугольного треугольника № 3 ($h = 4$ см, $b = 2$ см)

$$J_{xc3} = -bh^3/36 = -2 \cdot 4^3/36 = -3.56 \text{ см}^4,$$
$$J_{yc3} = -hb^3/36 = -4 \cdot 2^3/36 = -0.89 \text{ см}^4,$$
$$J_{xy3} = b^2h^2/72 = 0.89 \text{ см}^4.$$

Моменты инерции прямоугольника № 4 ($h = 1$ см, $b = 5$ см) имеют:

$$J_{xc4} = bh^3/12 = 5 \cdot 1^3/12 = 0.42 \text{ см}^4,$$
$$J_{yc4} = hb^3/12 = 1 \cdot 5^3/12 = 10.42 \text{ см}^4,$$
$$J_{xy4} = 0.$$

Сектор (четверть круга) №5 радиусом $R = 2$ см имеет следующие моменты инерции относительно собственных центральных осей (табл. 3, с. 241):

$$J_{xc5} = -R^4\left(\frac{\pi}{16} - \frac{4}{9\pi}\right) = -2^4 \cdot 0.0548 = -0.88 \text{ см}^4,$$
$$J_{yc5} = J_{xc5} = -0.88 \text{ см}^4,$$
$$J_{xy5} = -R^4\left(\frac{1}{8} - \frac{4}{9\pi}\right) = 2^4 \cdot 0.0165 \text{ см}^4 = 0.26 \text{ см}^4.$$

Моменты инерции всей фигуры относительно центральных осей получаем по формулам (4.3):

$$\begin{aligned}
J_{xc} &= 200.08 + 49(3.5 - 3.2)^2 - 0.44 - 2(0.67 - 3.2)^2 - 3.56- \\
&\quad -4(2.67 - 3.2)^2 - 0.42 - 5(6.5 - 3.2)^2 - 0.88- \\
&\quad -3.14(4.85 - 3.2)^2 = 122.23 \text{ см}^4, \\
J_{yc} &= 200.08 + 49(3.5 - 3.68)^2 - 0.44 - 2(1.33 - 3.68)^2 - 0.89- \\
&\quad -4(6.33 - 3.68)^2 - 10.42 - 5(2.5 - 3.68)^2- \\
&\quad -0.88 - 3.14(0.85 - 3.68)^2 = 117.72 \text{ см}^4, \qquad (4.6) \\
J_{xyc} &= 49(3.2 - 3.5)(3.68 - 3.5) - 0.22- \\
&\quad -2(3.2 - 0.67)(3.68 - 1.33)+ \\
&\quad +0.89 - 4(3.2 - 2.67)(3.68 - 6.33)- \\
&\quad -5(3.2 - 6.5)(3.68 - 2.5) + 0.27- \\
&\quad -3.14(3.2 - 4.85)(3.68 - 0.85) = 26.2 \text{ см}^4,
\end{aligned}$$

5. Находим главные моменты инерции:

$$\begin{aligned}
J_{max} &= \frac{117.72 + 122.23}{2} + \sqrt{\frac{(117.72 - 122.23)^2}{4} + 26.2^2} = \\
&= 119.98 + 26.3 = 146.27 \text{ см}^4,
\end{aligned} \qquad (4.7)$$

$$J_{min} = 119.98 - 26.3 = 93.69 \text{ см}^4.$$

6. Вычисляем главные радиусы инерции

$$i_{max} = \sqrt{J_{max}/F} = \sqrt{146.27/34.86} = 2.05 \text{ см},$$
$$i_{min} = \sqrt{J_{min}/F} = \sqrt{93.69/34.86} = 1.64 \text{ см}.$$

7. Находим направление главных осей

$$\operatorname{tg}\alpha_{max} = \frac{J_{xyc}}{J_{yc} - J_{max}} = \frac{26.2}{117.72 - 146.27} = -0.92.$$

Ось v (рис. 129), относительно которой момент инерции фигуры максимальный, направлен под углом $\alpha_{max} = -42.54^\circ$ к оси x.

8. Выполняем проверку. Находим тригонометрические функции

$$\cos\alpha_{max} = 0.74,\ \sin\alpha_{max} = -0.68,\ \sin 2\alpha_{max} = -0.99,$$

Проверим соотношение (4.5). Имеем

$$J_{max} = 122.23\cdot 0.74^2 + 117.72\cdot 0.68^2 + 26.2\cdot 0.99 = 146.27\ \text{см}^4,$$
$$J_{min} = 122.23\cdot 0.68^2 + 117.72\cdot 0.74^2 - 26.2\cdot 0.99 = 93.69\ \text{см}^4.$$

Эти же значения получены в п. 5. Проверка выполнена.

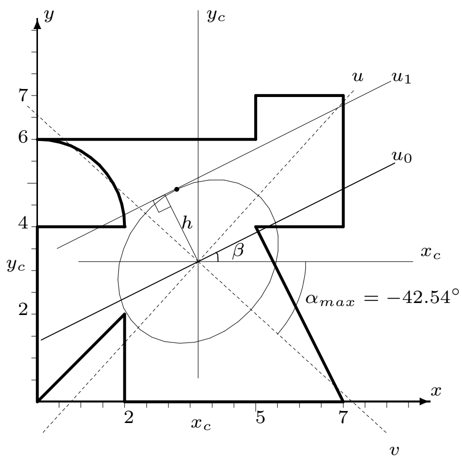

Рис. 129

Замечание. Эллипс инерции обладает свойством, позволяющим получать моменты инерции относительно центральных осей, наклоненных под произвольным углом. Для того, чтобы найти момент инерции фигуры относительно центральной оси u_0, наклоненной под углом β к оси x, достаточно провести касательную u_1 к эллипсу параллельно оси u_0 и найти расстояние h между u_0 и u_1. Это расстояние является радиусом инерции фигуры относительно u_0. Таким образом $J_{u0} = h^2 F$. Другое аналитическое выражение для этого момента инерции имеет вид $J_{u0} = J_{xc}\cos^2\beta + J_{yc}\sin^2\beta$.

4.3. Кручение

Задача 41. К стальному валу кусочно-постоянного круглого сечения приложены моменты $M_1 = 30$ кНм, $M_2 = 10$ кНм, $M_3 =$