ФГАОУ ВПО «Казанский (Приволжский) Федеральный Университет»
Институт математики и механики им. Н.И. Лобачевского
Кафедра высшей математики и математического моделирования

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ. Часть II.

АФФИННЫЕ И ЕВКЛИДОВЫ ПРОСТРАНСТВА

Учебное пособие. II семестр

Курс лекций для студентов математического факультета профессора Ю.Г.Игнатьева

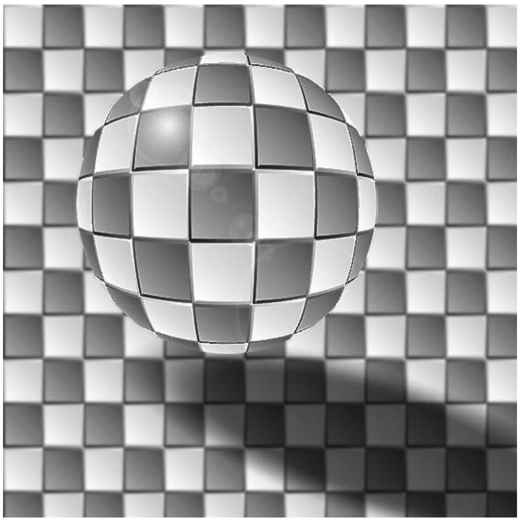
(Специальности: математика и информатика, математика и английский язык)

Большое количество примеров по всем разделам!
Примеры решения задач в пакете Maple

Около 100 конкретных примеров!

По просьбе студентов издание дополнено рядом примеров, выполненных с применением системы компьютерной математики Maple!

Лаборатория НИЛИТМО КФУ



Казанский университет
2013

Печатается по рекомендации учебно-методической комиссии Института математики и механики им. Н.И. Лобачевского

УДК 513

Игнатьев Ю.Г. Аналитическая геометрия. Часть II.

Аффинные и евклидовы пространства. Учебное пособие. II семестр. - Казань: КФУ, 2013, - 192 с.

Учебное пособие является приложением к Курсу лекций Автора по аналитической геометрии и посвящено изложению аналитической геометрии аффинных и евклидовых пространств на основе аксиоматики Вейля. Курс лекций снабжен большим количеством примеров решений основных геометрических задач аналитической геометрии, в том числе и примеров решения задач аналитической геометрии средствами пакета программ Maple.

Материалы пособия предназначены для студентов математических факультетов педагогических институтов по специальностям «Математика», «Математика и информатика», «Математика и иностранный язык».

Рецензенты: **Аминова А.В.,** д-р. физ.-мат. наук, проф., (КФУ);
Мухлисов Ф.Г.., д-р. физ.-мат. наук, проф., (КФУ)

Оглавление

Введение

Курс лекций является продолжением книги Автора “Аналитическая геометрия. Курс лекций. Часть I.” [1]. В ней также нашли отражение основные идеи более ранней книги Автора [2]. Курс лекций построен таким образом, чтобы к концу первого курса материал аналитической геометрии в соответствие с требованиями нового Госстандарта Российской Федерации был полностью изложен.

В данном Курсе лекций излагаются вопросы аффинной и евклидовой геометрии n-мерных пространств, группы преобразований и их инварианты, теория квадратичных форм и квадрик. Часть материала посвящена векторным пространствам и носит, в основном, справочный характер. Теория квадрик изложена на языке самосопряженных операторов. В значительной мере Курс лекций сложился под влиянием идей прекрасного Курса лекций по линейной алгебре и аналитической геометрии учителя Автора, профессора Кайгородова Владимира Романовича, блестящие и лаконичные лекции которого с удовольствием вспоминают все выпускники физического факультета Казанского университета. Ему Автор и выражает свою благодарность.

Сокращение часов, отводимое в новом Госстандарте Российской Федерации на геометрию, при сохранении[1] числа и качества вопросов, выносимых на Государственную аттестацию, потребовало существенной переработки Курса геометрии. Известна тесная связь Курсов алгебры и геометрии и зависимость последнего от прочитанного материала по первому из них. В данной же ситуации Курс геометрии неизбежно вынужден отрываться от Курса алгебры. Поэтому мы были вынуждены пойти на несколько упрощенное изложение ряда вопросов Курса алгебры с учетом того, что эти вопросы в свое время найдут должное освещение в указанном Курсе. К таковым вопросам относятся: векторные пространства, действия над матрицами, теория линейных операторов (в частности, самосопряженных), группы преобразований.Решение ряда задач Курса представлено в пакете символьной математики Maple. Возможно, это и несколько ранее знакомство студентов I-го курса с пакетом символьной математики, выходящее за рамки стандартного курса, как надеется Автор, позволит во-время открыть двери к научным исследованиям молодым талантливым математикам.

Следует заметить, что в первом семестре начала Аналитической геометрии излагались на основе понятий геометрических векторов и по - сути дела на основе Гильбертовской аксиоматики (точнее, школьной аксиоматики Атанасяна, Базылева, Погорелова и др.). Во втором семестре аналитическая геометрия излагается на основе более современной аксиоматики - аксиоматики Вейля, в которой множество векторов (векторное пространство) является базовым множеством. Вследствие этого возникает видимость как - бы некоторого повторения вопросов, изученных в первом семестре. Однако, это - обманчивое впечатление. Одной из основных задач курса Автор как раз и считает научение четкого различения между различными аксиоматиками.

Автор

[1] И даже некотором увеличении.

Основные обозначения

$\{a, b, \ldots\}$ - множество, состоящее из элементов $a, b, \ldots$;
$a \in A$ - "a" принадлежит множеству A ;
$a \notin A$ - "a" не принадлежит множеству A ;
$B \subset A$ - множество A включает в себя множество B ;
$B \not\subset A$ - множество A не включает в себя множество B ;
$A \cup B$ - объединение множеств A и B ;
$A \cap B$ - пересечение множеств A и B ;
$\alpha = \overline{1, n}$ - α пробегает значения от 1 до n на множестве натуральных чисел $\mathbb{N}$;
$\mathbb{R}$ - множество действительных чисел ;
$\mathbb{R}_+$ - множество неотрицательных чисел ;
$\mathbb{N}$ - множество натуральных чисел (включая 0) ;
$\mathbb{Z}$ - множество целых чисел ;
$\exists x \in X | x + a = b, \ (\forall a, b \in X)$ - "для любых a, b, принадлежащих множеству X существует элемент x, принадлежащий множеству X, такой, что $x + a = b$ " ;
$a \Longrightarrow b$ - "из a следует b" ;
$a \Longleftrightarrow$ - "b имеет место тогда и только тогда, когда имеет место a".
$\emptyset$ - пустое множество;
$[a, b]$ - замкнутый промежуток;
(a, b) - открытый промежуток, интервал;
$(a, b]\,, [a, b)$ - полуоткрытые промежутки;
$\vec{0}$ - нуль-вектор;
$A \backslash B$ - дополнение множества B до множества A, т.е.: $A = B \cup A \backslash B$;
$A \overset{def}{=} B$ - "A по определению равно B".
$\{a\} \overset{\rightrightarrows}{=} A$ - "элемент a пробегает все множество A".

Часть I

Векторные пространства

Глава I

Векторные пространства

I.1 Определение векторного пространства

Пусть V- некоторое множество, элементы которого $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \ldots$ будем называть *векторами* независимо от природы последних. Наряду с этим множеством рассмотрим поле над множеством действительных чисел $\mathbb{R}$, элементами которого являются действительные числа $\alpha, \beta, \lambda, \mu, \ldots$.

Зададим на V операцию, ставящую в соответствие любым двум векторам $\vec{a}, \vec{b} \in V$ элемент этого же множества: $\vec{c} \in V$, обозначая эту операцию символом "+" ($\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$) и называя ее *операцией сложения векторов* $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

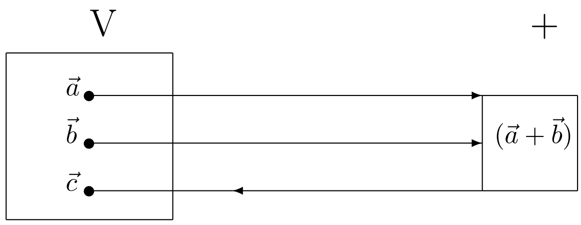


Рис.I.1. *Сложение векторов*

Предположим, что эта операция обладает следующими свойствами:

Аксиомы сложения векторов: $\vec{a} + \vec{b}$

Аксиома AI.1.

$$\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} \ ; \qquad \forall \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in V \ , \tag{I.1}$$

Аксиома AI.2.

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a} \ ; \qquad \forall \vec{a}, \vec{b} \in V \ , \tag{I.2}$$

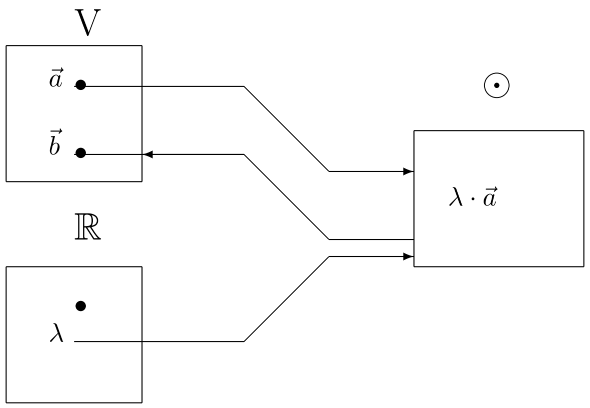


Рис.I.2. *Произведение вектора на число*

Аксиома AI.3.

$$\exists \vec{0} \in V \mid \vec{O} + \vec{a} = \vec{a}\ ; \qquad \forall \vec{a} \in V\ , \quad \text{(I.3)}$$

Аксиома AI.4.

$$\exists(-\vec{a}) \in V \mid \vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}\ ; \qquad \forall \vec{a} \in V\ . \quad \text{(I.4)}$$

Зададим на $\{V, \mathbb{R}\}$ операцию, ставящую в соответствие любому вектору $\vec{a} \in V$ и любому числу $\lambda \in \mathbb{R}$ новый вектор $\vec{b} \in V$, обозначая эту операцию символом $\lambda\vec{a}$ и называя ее *произведением вектора $\vec{a}$ на число λ.*

Предположим, что эта операция обладает следующими свойствами:

Аксиомы умножения вектора на число: $\lambda \cdot \vec{a}$

Аксиома AI.5.

$$(\lambda + \mu)\vec{a} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{a}\ , \qquad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \quad \forall \vec{a} \in V; \tag{I.5}$$

Аксиома AI.6.

$$(\lambda\mu)\vec{a} = \lambda(\mu\vec{a})\ , \qquad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}\,, \quad \forall \vec{a} \in V; \tag{I.6}$$

Аксиома AI.7.

$$\lambda(\vec{a} + \vec{b}) = \lambda\vec{a} + \lambda\vec{b}\ , \qquad \forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \forall \vec{a}, \vec{b} \in V; \tag{I.7}$$

Аксиома AI.8.

$$1 \cdot \vec{a} = \vec{a}\ , \qquad \forall \vec{a} \in V. \tag{I.8}$$

Определение OI.1. *Множество V, на котором заданы операции сложения векторов и умножения векторов на действительные числа, удовлетворяющие аксиомам [AI.1 - AI.8], называется вещественным векторным пространством (или просто — векторным пространством).*

Иногда векторные пространства называют *линейными пространствами*, или *линеалами*. В случае, если операция умножения, удовлетворяющая аксиомам [AI.1 -AI.8], определена на поле комплексных чисел $\mathcal{C}$, векторное пространство называется *комплексным векторным пространством.*

Следствиями перечисленной группы аксиом, доказываемыми в курсе линейной алгебры, являются:

Следствие CI.1. *Нуль-вектор единственен.*

Следствие CI.2. *Противоположный вектор единственен.*

Следствие CI.3. $(-1)\cdot\vec{a} = -\vec{a}, \quad \forall\vec{a}\in V.$

Следствие CI.4. $0\cdot\vec{a} = \vec{0}, \quad \forall\vec{a}\in V.$

Следствие CI.5. *Для* $\forall\vec{a},\vec{b}\in V$ *уравнение* $\vec{a}+\vec{x}=\vec{b}$ *имеет единственное решение:* $\vec{x}=\vec{b}-\vec{a}.$

Следствие CI.6. $\lambda\cdot\vec{0}=\vec{0}, \forall\lambda\in\mathbb{R}.$

Непосредственно можно увидеть, что введенные аксиомы сложения и умножения [AI.1]—[AI.8] совпадают со свойствами *геометрических векторов*, доказанными в предыдущей лекции. Тем самым мы можем сказать, что множество всех геометрических векторов, введенных нами в разделе I как направленные отрезки, образует векторное пространство. На самом деле понятие векторного пространства гораздо шире понятия множества геометрических векторов. Заметим также, что аксиоматика векторного пространства *нигде* не использует понятий длины и направления.

I.2 Линейная зависимость векторов

Определение OI.2. *Линейной комбинацией векторов*

$$\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_m \in V$$

с коэффициентами $\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_m\in\mathbb{R}$ *называется вектор* $\vec{a}\in V$*:*

$$\vec{a} = \lambda_1\vec{a}_1 + \lambda_2\vec{a}_2 + \dots + \lambda_m\vec{a}_m \qquad \left(\equiv\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\vec{a}_i\right). \tag{I.9}$$

Определение OI.3. *Система векторов* $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_m\}$ *называется линейно зависимой, если существуют числа* $\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_m$*, среди которых хотя бы одно отлично от нуля, при которых линейная комбинация (I.9) обращается в нуль-вектор.*

Теорема TI.1. *Для того, чтобы система $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_m\}$ была линейно зависимой, необходимо и достаточно, чтобы хотя бы один из векторов этой системы являлся линейной комбинацией остальных.*

Доказательство: $\langle\langle$ **Необходимость**. Дано: система $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_m\}$ линейно зависима, тогда [OI.3] $\Rightarrow \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \vec{a}_i = \vec{0}$, причем $\{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m\} \neq \{0, 0, \ldots, 0\}$. Предположим для определенности, что $\lambda_1 \neq 0 \Rightarrow$

$$\vec{a}_1 = -\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\vec{a}_2 - \ldots - \frac{\lambda_m}{\lambda_1}\vec{a}_m \left(\vec{a}_1 = \sum_{j=2}^{m}\left(-\frac{\lambda_j}{\lambda_1}\right)\vec{a}_j\right).$$

Достаточность. Пусть для определенности $\vec{a}_1$ есть линейная комбинация остальных векторов:

$$\vec{a}_1 = \sum_{j=2}^{m} \beta_j \vec{a}_j, \qquad \beta_j \in \mathbb{R}; j = \overline{2, m}.$$

Это равенство эквивалентно следующему:

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i \vec{a}_i = \vec{0},$$

где $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = \beta_2, \ldots, \lambda_m = \beta_m$. $\rangle\rangle$

Определение OI.4. *Система векторов $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_m\}$ называется линейно независимой, если их линейная комбинация (I.9) обращается в нуль-вектор тогда и только тогда, когда все $\lambda_i = 0$:*

$$\sum_{i=2}^{m} \lambda_i \vec{a}_i = \vec{0} \Leftrightarrow \lambda_i = 0 \quad (i = \overline{1, m}). \tag{I.10}$$

Понятие линейной независимости является фундаментальным понятием линейной алгебры и аналитической геометрии. Поэтому здесь уместно сделать замечание. Многие студенты путаются на экзаменах, пытаясь дать формулировку линейной независимости векторов. Часто их ответы выглядят примерно так: " система векторов называется линейно независимой, если их линейная комбинация обращается в нуль, когда все $\lambda_i = 0$". Такой и подобный ему ответ является грубейшей ошибкой. Если все $\lambda_i = 0$, то любая линейная комбинация обратится в нуль-вектор. В определении [OI.4] важны именно слова "**тогда и только тогда**", т.е., **ни при каких других λ_i, кроме как при** $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0, \ldots, \lambda_m = 0$ линейная комбинация (I.9) не обращается в нуль.

Определение OI.5. *Два линейно зависимых вектора $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$ называются коллинеарными.*

Пусть, например, $\vec{a}_1 \neq \vec{0}$, тогда из [TI.1] сразу следует

$$\vec{a}_2 = \lambda \vec{a}_1. \tag{I.11}$$

Обратно, если имеет место (I.11), то $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$ линейно зависимы, т.е., коллинеарны. *Таким образом,* (I.11) *-необходимое и достаточное условие коллинеарности двух векторов.* Из (I.11) также следует, что $\vec{0}$ *коллинеарен любому вектору.* При $\lambda > 0$ коллинеарные векторы называются сонаправленными, при $\lambda < 0$ - противоположно направленными.

Определение OI.6. *Три линейно зависимых вектора называются компланарными.*

Из [TI.1] сразу следует, что если, например, $\vec{a}_1, \vec{a}_2$ - одновременно не нулевые векторы, то необходимое и достаточное условие компланарности векторов $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3\}$ можно записать в виде

$$\vec{a}_3 = \lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2. \tag{I.12}$$

Отметим, что три коллинеарных вектора заведомо являются и компланарными. Нам еще предстоит выяснить в дальнейшем, как соотносятся между собой определения коллинеарности и компланарности векторов в аксиоматике Гильберта (раздел 1.1) и аксиоматике Вейля (раздел 1.2).

I.3 Размерность и базис векторного пространства. Координаты вектора в базисе

Определение OI.7. *Если в V существует n линейно независимых векторов, а любая система из $(n+1)$ вектора линейно зависима, то натуральное число n называется размерностью векторного пространства $V : \dim V = n$. В этом случае принято обозначение : V_n.*

Таким образом, полное определение V_n включает помимо аксиом [AI.1] —[AI.8] указание размерности.

Определение OI.8. *Упорядоченная система векторов $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n\}$ называется базисом пространства V, если*

1. *система $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n\}$ линейно независима;*
2. $$\forall \vec{x} \in V \exists x^i \in \mathbb{R} \;\; (i = \overline{1,n}) \,|\, \vec{x} = \sum_{i=1}^{n} x^i \vec{e}_i \; . \tag{I.13}$$

Упорядоченная система чисел x^i называется координатами вектора $\vec{x}$ в базисе $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n\}$. Натуральное число n называется размерностью базиса.

Теорема TI.2. *Координаты вектора в заданном базисе определены однозначно.*

Доказательство: $\langle\langle$ Предположим обратное, т.е., в одном и том же базисе вектор $\vec{x}$ может иметь различные координаты, $\Longrightarrow$

$$\vec{x} = \sum_{i=1}^{n} x^i \vec{e}_i \; ;$$

$$\vec{x} = \sum_{i=1}^{n} y^i \vec{e}_i \; .$$

Вычитая левые и правые части этих векторных равенств, получим:

$$\vec{0} = \sum_{i=1}^{n} (x^i - y^i) \vec{e}_i \; .$$

Тогда из [OI.4] вследствие линейной независимости векторов базиса следует:

$$(x^i - y^i) = 0 \, , (i = \overline{1,n}) \Longrightarrow x^i = y^i \, .$$

$\rangle\rangle$

Справедливы следующие теоремы, доказательство которых проводится в курсе линейной алгебры:

Теорема TI.3. *В V_n любая совокупность из n линейно независимых векторов образует базис.*

Теорема TI.4. *Если в V существует базис из n векторов, то $\dim V = n$.*

Вследствие [TI.4] размерностью V можно называть размерность базиса.

I.4 Замечания об обозначениях

Для упрощения записи в дальнейшем введем следующие обозначения. Упорядоченную совокупность векторов $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n\}$ будем обозначать как $\{\vec{a}_i\}_n$. Таким образом, базис V_n будем обозначать как $\{\vec{e}_i\}_n$. Далее для сокращения записи сумм введем так называемые *обозначения Эйнштейна.* Всюду в формулах по дважды встречающимся одинаковым индексам, один из которых - верхний, другой - нижний, проводится суммирование. Например:

$$x^i\vec{e}_i \overset{def}{=} x^1\vec{e}_1 + x^2\vec{e}_2 + \cdots x^n\vec{e}_n \ ;$$

$$a_{ij}x^iy^j \overset{def}{=} \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x^iy^j =$$

$$a_{11}x^1y^1 + a_{12}x^1y^2 + \cdots + a_{1n}x^1y^n$$
$$+a_{21}x^2y^1 + a_{22}x^2y^2 + \cdots + a_{2n}x^2y^n$$
$$+\cdots\cdots\cdots+$$
$$+a_{n1}x^ny^1 + a_{n2}x^ny^2 + \cdots + a_{nn}x^ny^n \ .$$

Индексы, по которым проводится суммирование, называются *немыми.* Эти индексы можно заменять на любые другие, руководствуясь при этом лишь соображениями удобства, например,

$$x^i\vec{e}_i = x^j\vec{e}_j = x^k\vec{e}_k \ ,$$

если $i = \overline{1,n}\,;\, j = \overline{1,n}\,;\, k = \overline{1,n}$. Операцию суммирования по дважды повторяющимся индексам будем для краткости называть *сверткой.* Единожды встречающиеся индексы называются *свободными.* Например, в выражении

$$\vec{e'}_i = C_i^k\vec{e}_k \qquad (= \sum_{k=1}^{n} C_i^k\vec{e}_k\,)$$

индекс i - свободный, k - немой. Нужно помнить основное правило, согласно которому *свободные индексы должны быть одинаковыми в левых и правых частях равенства и в одинаковых позициях* (либо вверху, либо внизу). В случае, когда свободный индекс не фиксирован, например, $i = \overline{1,n}$, его также можно заменить на любой другой, твердо придерживаясь указанного правила. Если же свободный индекс фиксирован, например, $i = 2$, изменять его нельзя.

Глава II

Изоморфизм векторных пространств

II.1 Отношения в множествах

Будем обозначать множества большими буквами латинского алфавита: $X, Y, \ldots$, а их элементы - малыми : $x \in X\,, y \in Y\ \ldots$.[1]

Определение OII.1. *Пусть $X_1, \ldots X_n$ - непустые множества ($X_i \neq \emptyset$). Построим множество*

$$Z = X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n\,,$$

каждый элемент которого $z = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ является упорядоченным множеством n элементов $x_i \in X_i\,(i = \overline{1,n})$. Множество Z называется декартовым произведением[2] *множеств $X_i \quad (i = \overline{1,n})$, а подмножества $X_i - i$ - ми проекциями множества Z.*

Определение OII.2. *Если $X_1 = X_2 = \cdots X_n = X$, декартово произведение $X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n$ называется декартовой степенью множества X и обозначается X^n.*

Рассмотрим непустое подмножество $\Sigma \neq \emptyset$ декартова произведения $Z = X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n \quad : \Sigma \subset Z$. Такое подмножество называется n - *арным отношением*, и говорят, что элементы $x(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *находятся в отношении* Σ, если $x \in \Sigma$.

Приняты следующие специальные названия:

1. $n = 2$ -*бинарное* : $\quad \Sigma \subset X_1 \times X_2$.
   Если $x = (x_1, x_2) \in \Sigma$, то говорят, что *элементу $x_1 \in X_1$ соответствует элемент $x_2 \in X_2$ относительно отношения* Σ. Тройка $f = \{\Sigma, X_1, X_2\}$ называется *соответствием между X_1 и* X_2.

2. $n = 3$ -*тернарное отношение*: $\Sigma \subset X_1 \times X_2 \times X_3$.

3. $n = 4$ -*тетрарное отношение*: $\Sigma \subset X_1 \times X_2 \times X_3 \times X_4$.

Если $Z = X^n$, говорят, что n-арное отношение $\Sigma \subset X^n$ *определено в множестве* X. В случае бинарного отношения $(n = 2\,; Z = X^2)$ вместо $(x_1, x_2) \in \Sigma$ пишут: $x_1 \sigma x_2$.

Определение OII.3. *Бинарное отношение Σ, определенное в множестве X, называется отношением эквивалентности, если:*

1. $x \sigma x, \forall x \in X \qquad$ (рефлексивность);

2. $x_1 \sigma x_2 \Rightarrow x_2 \sigma x_1 \qquad$ (симметричность);

[1] Примерно половину этой лекции занимает справочный материал из курса алгебры. Если этот материал уже пройден в соответствующем курсе, его можно опустить при чтении.

[2] Говорят еще “прямое произведение”.

3. $(x_1\sigma x_2, x_2\sigma x_3) \Rightarrow x_1\sigma x_3$ *(транзитивность).*

Если в множестве X задано отношение эквивалентности σ, то, как известно из алгебры, мы можем разбить множество X на непересекающиеся классы K_α : $X = K_1 \cup K_2 \cup \cdots$, состоящие из эквивалентных между собой элементов.

Пример ПI.1. *Операцию сложения векторов $\vec{a}+\vec{b}=\vec{c}$, определенную в 1.2, можно рассматривать как тернарное отношение ($n=3$), определенное в множестве V при помощи подмножества $\Sigma \subset V^3$, где $\Sigma = \{\{\vec{a},\vec{b},\vec{c}\} \in V^3 \,|\, \vec{a}+\vec{b}=\vec{c}\}$.*

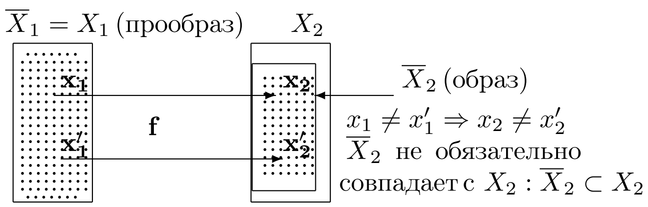
Пример ПI.2. *Операцию умножения вектора на число $\lambda\vec{a}=\vec{b}$ можно рассматривать как тернарное отношение, определенное в множествах $\mathbb{R}, V$ при помощи подмножества $\Sigma \subset \mathbb{R}\times V^2$: $\Sigma = \{\{\lambda,\vec{a},\vec{b}\} \in \mathbb{R}\times V^2 | \lambda\vec{a}=\vec{b}\}$.*

В основу всякой математической теории кладутся, во - первых, некоторые *базовые множества* : $X_1, X_2, \ldots$, затем определяются отношения на базовых множествах : $\Sigma_1, \Sigma_2, \ldots$ и указываются их свойства (аксиомы) $A_1, A_2, \ldots$. Так мы приходим к понятию *математической структуры.* Простейшей математической структурой является структура (теория) векторных пространств, в которой базу составляют два множества $\mathbb{R}$ и V и определены два вышеуказанных тернарных отношения, удовлетворяющие 8 - ми аксиомам [AI.1] — [AI.8].

II.2 Отображения и преобразования множеств

Обратимся к бинарным отношениям, которые ранее мы назвали соответствием. Частным случаем соответствия является *функция.* Обозначим через $\overline{X}_1 \times \overline{X}_2$ множество всех $x_1, x_2 | \{x_1, x_2\} \in \Sigma$, (т.е., $\overline{X}_1 \times \overline{X}_2 = \Sigma$).

Определение OII.4. *Соответствие $f = \{\Sigma, X_1, X_2\}$ называется функцией, если для каждого $x_1 \in \overline{X}_1$ существует единственный элемент $x_2 \in \overline{X}_2$. Этот элемент x_2 называется значением функции f и обозначается $x_2 = f(x_1)$. Множество $\overline{X}_1$ называется областью определения функции f, множество $\overline{X}_2$ - областью значений функции f, множество $\Sigma(x_1,x_2)$ - графиком функции f.*



Определение OII.5. *Если область определения функции $\overline{X}_1$ совпадает с множеством X_1, говорят, что f есть отображение множества X_1* **в** *множество X_2, и пишут $f : X_1 \longrightarrow X_2$.*

Рис.II.3. *Инъекция*

Таким образом, каждую функцию $f = \{\Sigma, X_1, X_2\}$ можно рассматривать как отображение области определения $\overline{X}_1$ в множество X_2. Элемент $x_2 = f(x_1)$ называют *образом элемента* x_1, а x_1 - *прообразом элемента* x_2 *в отображении* f.

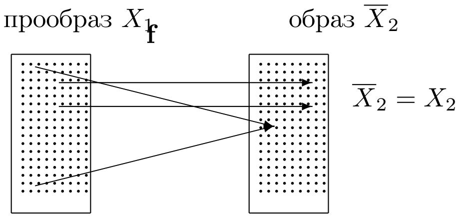


Рис.II.4. *Сюръекция*

Определение OII.6. *Если в отображении $f\ :\ X_1 \longrightarrow X_2$ образ множества X_1 (т.е., $f(X_1) = \overline{X}_2$) совпадает с множеством $X_2\overline{X}_2 = X_2$), отображение f называется отображением множества X_1* **на** *множество X_2, или* **сюръекцией**.

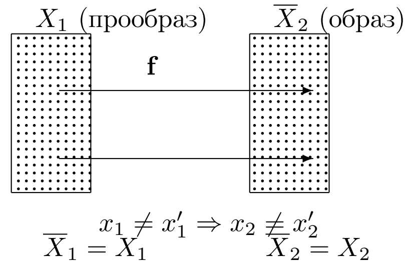


Рис.II.5. *Биекция*

Определение OII.7. *Если отображение $f\ :\ X_1 \longrightarrow X_2$ одновременно инъективно и сюръективно, оно называется взаимнооднозначным отображением X_1* **на** *X_2, или* **биекцией**.

Определение OII.8. *Если в отображении $f\ :\ X_1 \longrightarrow X_2$ из $x_1 \neq x_1' \Rightarrow x_2 \neq x_2'\ \ \forall x_1, x_1' \in X_1$, то f называется взаимнооднозначным отображением X_1* **в** *X_2, или* **инъекцией**.

Пример ПII.3. *Рассмотрим функцию $y = x^2$. Множество $\overline{X} = \mathbb{R}$ -область определения функции $f(x) = x^2$; множество $\overline{Y} = \mathbb{R}_+$ - область значений f. График функции есть множество значений $\overline{X}, \overline{Y}\,|\,\Sigma = \{x, x^2\}$ - т.е., это точки, лежащие на параболе $y = x^2$.*

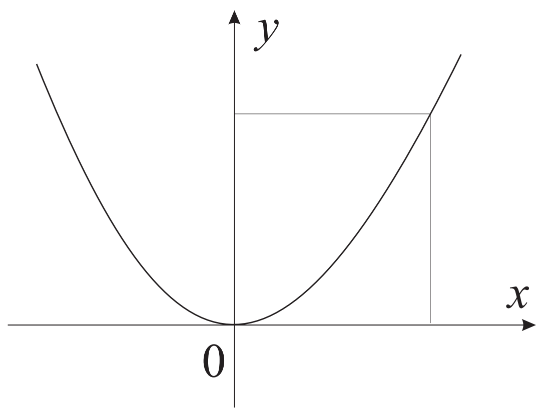


Рис.II.6. *Парабола*

Эта функция не будет являться отображением $f\ :\ X \longrightarrow Y$, если мы положим $X = \mathbb{R}, Y = \mathbb{R}_-$. Если же $X = \mathbb{R}, Y = \mathbb{R}_+$, то функция f задает отображение $f\ :\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+$. Это отображение множества $\mathbb{R}$ **на** *$\mathbb{R}_+$ не является инъекцией, так как $f(-x) = f(x)$, но при этом является сюръекцией: $\overline{Y} = Y = \mathbb{R}_+$. Однако, если в качестве исходного множества X мы рассмотрим множество $\mathbb{R}_+$, то отображение $f\ :\mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ станет и инъекцией, а значит и биекцией.*

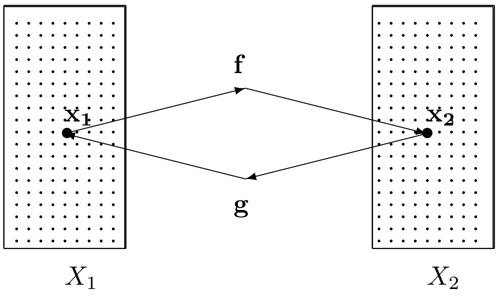
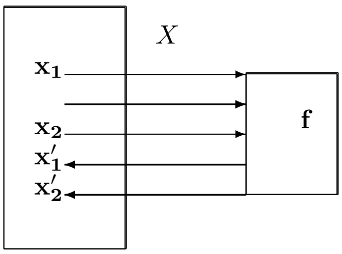


Рис.II.7. *Обратное отображение*

Определение OII.9. *Пусть задана биекция $f\ :X_1 \longrightarrow X_2$ по закону $x_2 = f(x_1)$. Биективное отображение X_2 на X_1 $\quad g\ :X_2 \longrightarrow X_1$ по закону $x_1 = g(x_2)$ $\quad (x_1 = g(f(x_1)))$ называется отображением, обратным к f, и обозначается $x_1 = f^{-1}(x_2)$.*



$f(X) = X\,;$
$x_1 \neq x_2 \Rightarrow x'_1 \neq x'_2$

Рис.II.8. *Преобразование множества*

Преобразование множества

Определение OII.10. *Всякая биекция f непустого множества X на себя: $f\ :X \longrightarrow X$ называется преобразованием множества X.*

II.3 Изоморфизм векторных пространств

Определение OII.11. *Пусть V и V' - векторные пространства. Биективное отображение*

$$f\ :V \longrightarrow V'$$

пространства V **на** *пространство V' называется изоморфизмом, если:*

1.
$$f(\vec{a}+\vec{b}) = f(\vec{a}) + f(\vec{b})\,, \qquad \forall \vec{a}\,,\vec{b} \in V\,; \tag{II.1}$$

2.
$$f(\lambda\vec{a}) = \lambda f(\vec{a})\,, \qquad \forall \vec{a} \in V\,; \forall \lambda \in \mathbb{R}\,; \tag{II.2}$$

где $f(\vec{a}) \stackrel{def}{=} \vec{a}\,' \in V'\,; \qquad f(\vec{b}) \stackrel{def}{=} \vec{b}' \in V'\,.$

Определение OII.12. *Векторные пространства V и V' называются изоморфными, если существует хотя бы один изоморфизм $f\ :V \longrightarrow V'$. В этом случае пишут:*

$$V \approx V'\,.$$

Можно показать (см. курс алгебры), что отношение изоморфности является отношением эквивалентности. Вследствие этого все множество векторных пространств распадается на непересекающиеся классы этих пространств. Поскольку все свойства изоморфных пространств по отношению к операциям сложения и умножения на число ([AI.1] — [AI.8]) одинаковы, мы можем рассматривать изоморфные векторные пространства как одинаковые, не вдаваясь в изучение природы их элементов (об этом см. в следующей лекции). При этом изоморфизм $f\ :V \longrightarrow V'$ можно рассматривать как преобразование $f\ :V \longrightarrow V$.

II.4 Метод координат и арифметическое векторное пространство

На указанном выше обстоятельстве и основан *метод координат*, являющийся ядром аналитической геометрии. В соответствии с [OI.8] координаты вектора $\vec{a} \in V$ в данном базисе $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n\} \stackrel{def}{=} \{\vec{e}_i\}_n$ составляют упорядоченную последовательность действительных чисел $(a^1, a^2, \dots, a^n)$, являющуюся элементом множества

$$\mathbb{R}^n = \underbrace{\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}}_{n} : \quad \vec{a} = a^i \vec{e}_i \ .$$

Таким образом, -

Теорема TII.1. *Формула:*

$$f(\vec{a}) = (a^1, a^2, \dots, a^n) \tag{II.3}$$

устанавливает отображение:

$$f : V \longrightarrow \mathbb{R}^n \,. \tag{II.4}$$

Доказательство: $\langle\langle$ Действительно, согласно определению базиса [OI.8] по данному базису разлагается любой вектор ($\forall \vec{a} \in V$), следовательно, областью определения соответствия (II.3) является все множество $V \Longrightarrow$ соответствие (II.3) есть отображение. $\rangle\rangle$

Теорема TII.2. *Отображение (II.4) по закону (II.3) является биекцией.*

Доказательство: $\langle\langle$ Действительно, в соответствие с [TI.2] двум различным векторам соответствуют различные координаты, т.е., (II.4) - инъекция. Так как не существует такого упорядоченного множества чисел $(c^1, c^2, \dots, c^n)$, $c^i \in \mathbb{R}$, которому не соответствует никакой вектор, то (II.4) - сюръекция. $\rangle\rangle$

Рассмотрим свойства биекции (II.4). Пусть $\vec{a} = a^i \vec{e}_i$ и $\vec{b} = b^i \vec{e}_i$ - два произвольных вектора V. Тогда

$$\vec{a} + \vec{b} = a^i \vec{e}_i + b^i \vec{e}_i \ .$$

Из аксиомы [AI.5] следует:

$$(\vec{a} + \vec{b}) = (a^i + b^i)\vec{e}_i \ . \tag{II.5}$$

Отсюда получаем известное правило:

Теорема TII.3. *При сложении векторов их соответствующие координаты складываются:*

$$(\vec{a} + \vec{b}) = (a^1 + b^1, a^2 + b^2, \dots, a^n + b^n) \quad \forall \vec{a}, \vec{b} \in V \,, \tag{II.6}$$

где

$$\vec{a} = (a^1, a^2, \dots, a^n) \,; \qquad \vec{b} = (b^1, b^2, \dots, b^n) \,.$$

Пусть $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, тогда $\lambda \vec{a} = \lambda(a^i \vec{e}_i)$. Из аксиомы [AI.6] следует:

$$\lambda \vec{a} = (\lambda a^i \vec{e}_i) \,, \tag{II.7}$$

откуда получается второе правило:

Теорема TII.4. *При умножении вектора на число его координаты умножаются на это же число:*

$$\lambda \vec{a} = (\lambda a^1, \lambda a^2, \dots, \lambda a^n) \,, \qquad \forall \lambda \in \mathbb{R} \,, \quad \forall \vec{a} \in V \,, \tag{II.8}$$

где

$$\vec{a} = (a^1, a^2, \ldots, a^n)\,.$$

Таким образом, биекция (II.4) по закону (II.3) удовлетворяет условиям (II.1), (II.2), т.е., является изоморфизмом.

Определение OII.13. *Изоморфизм, задаваемый формулой (II.3), называется координатным изоморфизмом, определенным базисом* $\{\vec{e}_i\}_n$.

Рассмотрим упорядоченный набор векторов в пространстве $\mathbb{R}^n$:

$$(1,0,0,\ldots,0)\,;(0,1,0,\ldots,0)\,;(0,0,1,\ldots,0)\,;\ldots;(0,0,0,\ldots,1)\,. \tag{II.9}$$

Очевидно, что эти векторы составляют базис пространства $\mathbb{R}^n$ (называемый *стандартным базисом*), причем координатами произвольного вектора $(a^1, a^2, \ldots, a^n) \in \mathbb{R}^n$ в этом базисе согласно (II.6) и (II.7) как раз и являются компоненты a^i:

$$(a^1, a^2, \ldots, a^n) = a^1(1,0,0,\ldots,0) + a^2(0,1,0,\ldots,0) + \cdots + a^n(0,0,0,\ldots,1)\,.$$

Таким образом, координатный изоморфизм (II.3) есть изоморфизм $V \to \mathbb{R}^n$, переводящий базис $\{\vec{e}_i\}_n \in V$ в стандартный базис (II.9) пространства $\mathbb{R}^n$. Будем называть $\mathbb{R}^n$ с такой структурой *арифметическим векторным пространством и обозначать* $V_n(\mathbb{R})$. Поскольку существует изоморфизм $V \to \mathbb{R}^n$, справедлива следующая теорема.

Теорема TII.5. *Каждое n-мерное векторное пространство изоморфно пространству* $\mathbb{R}^n$ *(или* $V_n(\mathbb{R})$*).*

Поскольку два различных векторных пространства одинаковой размерности изоморфны $\mathbb{R}^n$ и всегда существует обратное биективное отображение $f^{-1} : \mathbb{R}^n \longrightarrow V_n$, то отсюда следует важная теорема:

Теорема TII.6. *Все векторные пространства одинаковой размерности изоморфны друг другу*

. Таким образом, с помощью изоморфизма все векторные пространства распадаются на счетное число классов, каждый из которых полностью характеризуется натуральным числом n — размерностью пространства. Каждый изоморфизм $\phi : V_n \longrightarrow V'_n$ двух векторных пространств определяется двумя базисами: $\{\vec{e}_i\}_n \in V_n$ и $\{\vec{e'}_k\}_n \in V'_n$ и переводит произвольный вектор $\vec{x} = x^i\vec{e}_i \in V_n$ в вектор $\vec{x}' = x^k\vec{e'}_k \in V'_n$, имеющий в базисе $\{\vec{e'}_k\}_n$ те же координаты, что и вектор $\vec{x}$ в базисе $\{\vec{e}_i\}_n$. Таким образом:

> Изоморфизм двух векторных пространств устанавливается по равенству координат векторов.

Определение OII.14. *Изоморфизм векторных пространств на себя* $\phi : V_n \longrightarrow V_n$ *(автоморфизм) называется преобразованием векторного пространства и задается упорядоченной парой базисов* $\{\vec{e}_i\}_n \in V_n$ *и* $\{\vec{e'}_k\}_n \in V_n$.

Координатный метод аналитической геометрии применительно к векторным пространствам заключается в том, что с помощью изоморфизма (II.3) изучаемое векторное пространство заменяется конкретным пространством $\mathbb{R}^n$. При этом все операции над векторами с помощью (TII.3), (TII.4), (TII.5) сводятся к арифметическим операциям, а доказательство теорем — к вычислениям. Однако *окончательные геометрические выводы должны не зависеть от выбора конкретного базиса и формулироваться в* V_n *после обратного изоморфизма* $f^{-1} : \mathbb{R}^n \longrightarrow V_n$. В отличие от координатного, или аналитического, метода существует синтетический метод, основанный на аксиоматическом подходе, не затрагивающем применение базиса.

Глава III

Матрица перехода и ориентация V_n

III.1 Матрица перехода. Произведение матриц.

Пусть $\{\vec{e}_i\}_n$ - базис V_n. Как следует из (TI.3), любая совокупность n линейно независимых векторов также образует базис V_n. Наряду с $\{\vec{e}_i\}_n$ рассмотрим другую систему из n векторов: $\{\vec{e}_{'k}\}_n$. Выясним, является ли эта система линейно независимой. Пусть $C^i_{'k}$ - координаты вектора $\vec{e}_{'k}$ в базисе $\{\vec{e}_i\}_n$, т.е.:

$$\vec{e}_{'1} = C_1^{'1}\vec{e}_1 + C_1^{'2}\vec{e}_2 + \cdots + C_1^{'n}\vec{e}_n \;;$$

$$\vec{e}_{'2} = C_2^{'1}\vec{e}_1 + C_2^{'2}\vec{e}_2 + \cdots + C_2^{'n}\vec{e}_n \;;$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots \;\cdots$$

$$\vec{e}_{'n} = C_n^{'1}\vec{e}_1 + C_n^{'2}\vec{e}_2 + \cdots + C_n^{'n}\vec{e}_{'n} \;,$$

или кратко;

$$\vec{e}_{'k} = C_k^{'i}\vec{e}_i \;. \tag{III.1}$$

Сопоставим упорядоченной системе векторов $\{\vec{e}_{'i}\}_n$ - *матрицу-строку*[1] :

$$[\vec{e}\,'] = [\vec{e}_{'1}\,, \vec{e}_{'2}, , \ldots, \vec{e}_{'n}\,]\,, \tag{III.2}$$

аналогично -

$$[\vec{e}] = [\vec{e}_1\,, \vec{e}_2\,, \ldots, \vec{e}_n\,]\,, \tag{III.3}$$

а координатам каждого вектора $\vec{e}_{'k}$ в базисе $\{\vec{e}_i\}_n$ - *матрицу-столбец*:

$$[\vec{e}_{'k}\,] = \begin{bmatrix} C^k_{'1} \\ C^k_{'2} \\ \ldots \\ C^k_{'n} \end{bmatrix} \tag{III.4}$$

и скомпонуем из этих столбцов квадратную матрицу:

$$C = \begin{bmatrix} C_1^{'1} & C_2^{'1} & \ldots & C_n^{'1} \\ C_1^{'2} & C_2^{'2} & \ldots & C_n^{'2} \\ . & . & \ldots & . \\ C_1^{'n} & C_2^{'n} & \ldots & C_n^{'n} \end{bmatrix}\,, \tag{III.5}$$

в которой номер столбца соответствует номеру вектора $\vec{e}_{'k}$, а номер строки — номеру координаты этого вектора. Как известно из курса линейной алгебры, ранг матрицы равен максимальному числу ее линейно независимых столбцов (или строк). С другой стороны, определения линейной независимости столбцов и векторов полностью совпадают. Отсюда можно сделать вывод:

[1] Под матрицей здесь и в дальнейшем будем подразумевать прямоугольную таблицу “шириной” n (число столбцов) и “высотой”m (число строк)

> Число линейно независимых векторов в системе $\{\vec{e}_{\prime 1}, \vec{e}_{\prime 2}, \ldots, \vec{e}_{\prime n}\}$ равно рангу матрицы C.

Для того, чтобы все n векторов $\{\vec{e}_{\prime 1}, \vec{e}_{\prime 2}, \ldots, \vec{e}_{\prime n}\}$ составляли линейно независимую систему, необходимо и достаточно, чтобы

$$\mathrm{rang} C = n \quad \Leftrightarrow \quad \{\vec{e}_{\prime k}\}_n \text{— линейно независима.} \tag{III.6}$$

Но требование (III.6) означает, что минор порядка n матрицы C (т.е., $\det C$) отличен от нуля. Таким образом:

Теорема TIII.1. *Система векторов $\{\vec{e}_{\prime 1}, \vec{e}_{\prime 2}, \ldots, \vec{e}_{\prime n}\}$ с координатами $C^i_{\prime k}$ (согласно (III.1)) образует базис V_n тогда и только тогда, если:*

$$\det C \neq 0\,. \tag{III.7}$$

В этом случае матрица C называется матрицей перехода от старого базиса $\{\vec{e}_i\}_n$ к новому $\{\vec{e}_{\prime k}\}_n$.

Таким образом, согласно (III.7) матрица перехода является невырожденной квадратной матрицей.

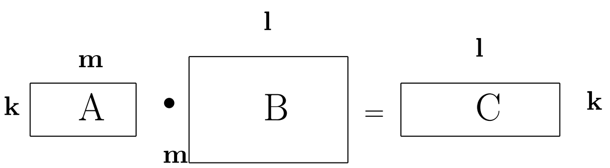


Рис.III.9. *Операция произведения матриц*

Введем операцию *умножения* прямоугольных матриц "размерами" $k \times m$ и $m \times l$, в результате которой получается прямоугольная матрица с "размерами" $k \times l \to (C = AB)$: по закону:

$$C^\alpha_\beta = A^\alpha_i B^i_\beta\,, \qquad \begin{array}{l}\alpha = \overline{1,l}\\ \beta = \overline{1,k}\end{array}; \quad i = \overline{1,m}\,. \tag{III.8}$$

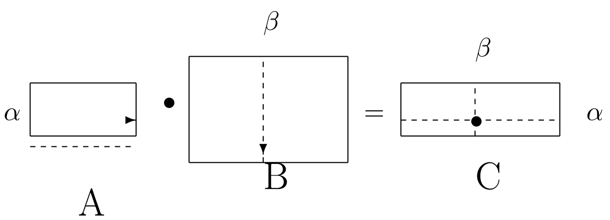


Рис.III.10. *Символическое правило умножения матриц*

Символически правило (III.8) можно записать в виде схемы:
согласно которой элемент матрицы C^α_β, находящийся на перекрестие "α" - той строки и "β"-го столбца, получается перемножением соответствующих элементов α - той строки матрицы A и β - го столбца матрицы B с последующим их суммированием.

Согласно этим правилам соотношения (III.1) в матричной записи принимают вид:

$$[\vec{e}^{\,'}] = [\vec{e}]C\,. \tag{III.9}$$

Вследствие (III.7) матрица перехода C всегда имеет *обратную матрицу* C^{-1}, связанную с C соотношением:

$$C^{-1}C = CC^{-1} = E\,, \tag{III.10}$$

где E - *единичная матрица* (размером $n \times n$):

$$E = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ . & . & \dots & . \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}}_{\text{n}} n\ , \tag{III.11}$$

элементы которой

$$E^i_k = \delta^i_k \stackrel{def}{=} \begin{matrix} 1\,, & i = k\,; \\ 0\,, & i \neq k\,. \end{matrix} \tag{III.12}$$

Символ δ^i_k (или δ_{ik}) называется *символом Кронекера*. Элементы обратной матрицы C^{-1} будем обозначать C'^i_k (штрих вверху). Вследствие (III.10) имеют место соотношения:

$$C^i_{'k} C'^l_i = \delta^l_k\,;$$

$$C'^l_i C^k_{'l} = \delta^k_i\,. \tag{III.13}$$

Элементы обратной матрицы $C^i_{'k}$ вычисляются по правилу[2]:

$$C^i_{'k} = \frac{A^k_{'i}}{\det C}\,, \tag{III.14}$$

где $A^k_{'i}$ - алгебраическое дополнение элемента C'^k_i в матрице C:

$$A^k_{'i} = (-1)^{i+k} M^k_i\,;$$

M^k_i - соответствующий минор.

Умножая соотношение (III.9) слева на C^{-1} (что соответствует свертке (III.1) с $C^k_{'l}$), получим с помощью (III.10) *формулы перехода от нового базиса к старому*:

$$[\vec{e}\,] = [\vec{e}\,']C^{-1}\,, \tag{III.15}$$

или:

$$\vec{e}_l\ = C^k_{'l} \vec{e}_{'k}\ . \tag{III.16}$$

III.2 Одноименные базисы

Вследствие (III.7) возможны два случая: $\det C > 0$ и $\det C < 0$.

Определение OIII.1. *Базис $\{\vec{e}_{'k}\}_n$ называется одноименным с базисом $\{\vec{e}_i\}_n$, если он связан с ним матрицей перехода C с $\det C > 0$, в противном случае ($\det C < 0$) базис $\{\vec{e}_{'k}\}_n$ называется разноименным с базисом $\{\vec{e}_i\}_n$.*

Из курса алгебры известна теорема о произведении определителей *квадратных матриц*, которую мы приведем без доказательства.

Теорема TIII.2. *Детерминант произведения квадратных матриц равен произведению детерминантов сомножителей, т.е.*

$$\det(AB) = \det A \cdot \det B. \tag{III.17}$$

[2] см. курс линейной алгебры

[3]

Применяя это правило к (III.10), получим:

$$\det C \det C^{-1} = 1\,, \tag{III.18}$$

откуда вытекает следствие:

Теорема TIII.3. *Если базис $\{\vec{e}\,'\}$ одноименен с базисом $\{\vec{e}\}$, то и базис $\{\vec{e}\}$ одноименен с $\{\vec{e}\,'\}$ и, наоборот, если $\{\vec{e}\,'\}$ разноименен с $\{\vec{e}\}$, то и $\{\vec{e}\}$ разноименен с $\{\vec{e}\,'\}$.*

Наряду с базисами $\{\vec{e}\}$ и $\{\vec{e}\,'\}$ рассмотрим базис $\{\vec{e}\,''\}$, причем:

$$[\vec{e}\,''] = [\vec{e}\,']C'\,. \tag{III.19}$$

Тогда, используя (III.9), получим:

$$[\vec{e}\,''] = [\vec{e}\,]CC'\,, \tag{III.20}$$

т.е., матрица перехода от базиса $\{\vec{e}\,\}$ к базису $\{\vec{e}\,''\}$ равна произведению матриц перехода $\vec{e} \to \vec{e}\,'$ и $\vec{e}\,' \to \vec{e}\,''$:

$$C'' = CC'\,. \tag{III.21}$$

Применяя правило (III.17) в (III.21), получим:

$$\det C'' = \det C \cdot \det C'\,, \tag{III.22}$$

что приводит к следствию :

Теорема TIII.4. *Если базис $\{\vec{e}\,'\}$ одноименен с базисом $\{\vec{e}\}$, то и базис $\{\vec{e}\}$ одноименен с $\{\vec{e}\,'\}$ и, наоборот, если $\{\vec{e}\,'\}$ разноименен с $\{\vec{e}\}$, то и $\{\vec{e}\}$ разноименен с $\{\vec{e}\,'\}$.*

Наряду с базисами $\{\vec{e}\}$ и $\{\vec{e}\,'\}$ рассмотрим базис $\{\vec{e}\,''\}$, причем:

$$[\vec{e}\,''] = [\vec{e}\,']C'\,. \tag{III.23}$$

Тогда, используя (III.9), получим:

$$[\vec{e}\,''] = [\vec{e}\,]CC'\,, \tag{III.24}$$

т.е., матрица перехода от базиса $\{\vec{e}\,\}$ к базису $\{\vec{e}\,''\}$ равна произведению матриц перехода $\vec{e} \to \vec{e}\,'$ и $\vec{e}\,' \to \vec{e}\,''$:

$$C'' = CC'\,. \tag{III.25}$$

Применяя правило (III.17) в (III.21), получим:

$$\det C'' = \det C \cdot \det C'\,, \tag{III.26}$$

что приводит к следствию :

Теорема TIII.5. *Если базисы $\{\vec{e}\,''\}$ и $\{\vec{e}\,'\}$ порознь одноименны с базисом $\{\vec{e}\}$, то они одноименны и между собой ($\det C' > 0$); если базисы $\{\vec{e}\,''\}$ и $\{\vec{e}\,'\}$ разноименны с базисом $\{\vec{e}\}$, то они одноименны между собой.*

Теорема TIII.6. *Отношение одноименности базисов является отношением эквивалентности.*

Доказательство: $\langle\langle$ Действительно, выполнены все три свойства отношения эквивалентности [OII.3]: симметричность - [TIII.4]; транзитивность - [TIII.5]; рефлексивность — тождественное преобразование $\{\vec{e}\,'\} = \{\vec{e}\}$ связывает одноименные базисы, так как в этом случае $C = E \Rightarrow \det C = 1 > 0$. $\rangle\rangle$

Таким образом:

[3] Доказательство приведено, например, в книге Дьедонне Ж. [5].

> Все множество базисов V_n распадается на 2 непересекающихся класса, каждый из которых состоит из одноименных между собой базисов.

Из свойств определителей следует, что при перестановке любых двух векторов базиса вновь полученный базис будет разноименен с исходным.

Определение OIII.2. *Квадратная матрица C, определитель которой равен $+1$:*

$$\det C = +1\,, \tag{III.27}$$

называется унимодулярной.

Определение OIII.3. *Базисы, связанные унимодулярной матрицей перехода, называются унимодулярными по отношению друг к другу.*

Вследствие (III.17), (III.18) легко доказать теорему:

Теорема TIII.7. *Отношение унимодулярности базисов является отношением эквивалентности.*

Таким образом:

> Каждый класс одноименности распадается на множество классов базисов, унимодулярных по отношению друг к другу.

Определение OIII.4. *Класс одноименных между собой базисов называется ориентацией векторного пространства. Пространство, в котором задана ориентация, называется ориентированным.*

Таким образом, возможны две и только две ориентации векторного пространства. Одна из этих ориентаций называется *положительной*, другая - *отрицательной*. Чисто внутренним геометрическим путем нельзя выделить какую-либо определенную ориентацию — для этого необходимо прибегать к соображениям, внешним по отношению к математике. К этому вопросу мы вернемся позднее.

Пример ПIII.1. *В V_3 в базисе $\{\vec{e}_1\,, \vec{e}_2\,, \vec{e}_3\,\}$ заданы своими координатами упорядоченные тройки векторов:*

$$\begin{array}{lll}
\{\vec{a}_1 = (1,-1,1); & \vec{a}_2 = (0,1,1); & \vec{a}_3 = (-1,2,1)\};\\
\{\vec{b}_1 = (-1,1,0); & \vec{b}_2 = (2,2,1); & \vec{b}_3 = (0,4,1)\};\\
\{\vec{c}_1 = (0,1,1); & \vec{c}_2 = (1,-1,1); & \vec{c}_3 = (-1,2,1)\};\\
\{\vec{d}_1 = (0,0,-1); & \vec{d}_2 = (1,1,0); & \vec{d}_3 = (-2,-1,1)\}.
\end{array}$$

Выяснить, какие из этих троек векторов могут служить базисами V_3, и разбить все базисы на классы одноименности.

Выпишем согласно (III.1), (III.2) матрицы перехода:

$$C_a = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1\\ -1 & 1 & 2\\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}; \qquad C_b = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0\\ 1 & 2 & 4\\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix};$$

$$C_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1\\ 1 & -1 & 2\\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}; \qquad C_d = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2\\ 0 & 1 & -1\\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Вычислим определители матриц перехода:

$$\det C_a = +1\,; \qquad \det C_b = 0\,;$$

$$\det C_c = -1\,; \qquad \det C_d = -1\,.$$

Поэтому согласно (III.7) базисами V_3 наряду с $\{\vec{e}_i\}_3$ могут служить $\{\vec{a}_i\}_3\,, \{\vec{c}_i\}_3\,, \{\vec{d}_i\}_3$. Они распадаются на два класса одноименности:

$$I.\{\vec{e}_i\}_3\,, \{\vec{a}_i\}_3\,; \qquad II.\{\vec{c}_i\}_3\,, \{\vec{d}_i\}_3\,,$$

причем кроме того каждый класс состоит из унимодулярных по отношению друг к другу базисов. За положительную ориентацию, например, мы можем выбрать ориентацию, связанную с базисом $\{\vec{e}_i\}_3$, тогда ориентация II -го класса будет отрицательной. Но мы можем поступить и наоборот.

Глава IV

Преобразование V_n

IV.1 Преобразование векторного пространства (автоморфизм)

Согласно [OII.14] преобразование V_n:

$$\phi : V_n \longrightarrow V_n \tag{IV.1}$$

задается парой базисов : $\{\vec{e}_i\}_n$ и $\{\vec{e}'_k\}_n$, причем произвольному вектору

$$\vec{x} = x^i \vec{e}_i \tag{IV.2}$$

соответствует образ $\vec{x}\,' = \phi(\vec{x}) \in V_n$, имеющий в новом базисе $\{\vec{e}'_k\}_n$ те же координаты x^i:

$$\vec{x}\,' \stackrel{def}{=} \phi(\vec{x}) = x^i \vec{e}'_i \ . \tag{IV.3}$$

Выясним, каковы координаты образа $\vec{x}\,'$ в старом базисе, для чего воспользуемся соотношением (III.1):

$$\vec{x}\,' = x^k C'^i_k \vec{e}_i \ . \tag{IV.4}$$

С другой стороны, по определению координат вектора $\vec{x}\,'$ в базисе $\{\vec{e}_i\}_n$:

$$\vec{x}\,' = x'^i \vec{e}_i \ . \tag{IV.5}$$

Приравнивая правые части (IV.4) и (IV.5) с учетом линейной независимости векторов базиса, найдем:

$$x'^i = x^k C'^i_k \ . \tag{IV.6}$$

Сопоставляя, как мы условились, векторам $\vec{x}\,'$ и $\vec{x}$ матрицы - столбцы:

$$[\vec{x}] = \begin{bmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x^n \end{bmatrix} ; \qquad [\vec{x}\,'] = \begin{bmatrix} x'^1 \\ x'^2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x'^n \end{bmatrix} , \tag{IV.7}$$

запишем (IV.6) в матричном виде:

$$[\vec{x}\,'] = C[\vec{x}] \qquad (= \phi([\vec{x}])) \ . \tag{IV.8}$$

Рассмотрим теперь другую задачу: каковы координаты вектора $\vec{x}$ в новом базисе? Обозначим эти координаты посредством $x^{k'}$, т.е.,

$$\vec{x} = x^{k'} \vec{e}_{k'} \ . \tag{IV.9}$$

Разлагая векторы нового базиса, $\vec{e}_{k'}$ по старому базису согласно (III.1), получим:

$$\vec{x} = x^{k'} C'^i_{k'} \vec{e}_i \ . \tag{IV.10}$$

Приравнивая правые части (IV.2) и (IV.10), найдем:

$$x^i = C'^{\,i}_{k'} x^{k'}\,. \tag{IV.11}$$

Сопоставим вектору $\vec{x}$ в базисе $\{\vec{e}_{k'}\}$ матрицу - столбец $[\vec{x}]\,'$; тогда в матричной записи (IV.11) примет вид:

$$[\vec{x}] = C[\vec{x}]\,'\,. \tag{IV.12}$$

Умножая (IV.12) слева на обратную матрицу C^{-1}, получим окончательно:

$$[\vec{x}]\,' = C^{-1}[\vec{x}]\,, \tag{IV.13}$$

или в координатной записи:

$$x^{i'} = C^{i'}_{\,'k} x^k\,.$$

Следует различать формулы (IV.6), (IV.8) с одной стороны и (IV.11) — (IV.13) - с другой. В первом случае речь идет о преобразовании векторного пространства $\{\vec{x}\} = V_n$ и о выражении координат образа $\phi([\vec{x}])$ в старом базисе. Во втором же случае множество $\{\vec{x}\}$ сохраняется, и речь идет о выражении координат *тех же самых векторов* $\vec{x}$ в новом базисе, т.е., *о преобразовании координат.* Отличие этих двух ситуаций: преобразования векторного пространства и преобразование координат вектора проиллюстрировано на рисунке.

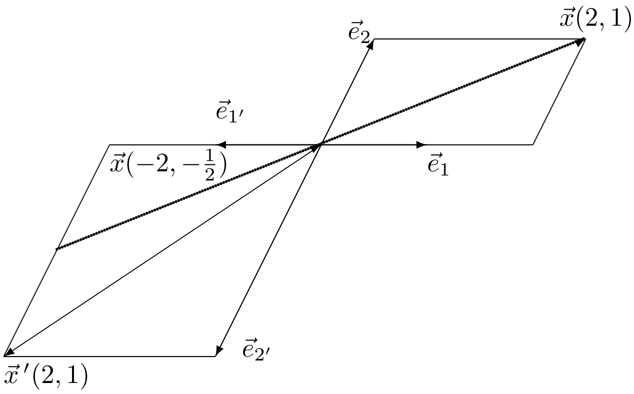


Рис.IV.11. *Преобразование векторного пространства*

Пример ПIV.1. *Рассмотрим преобразование вектора $\vec{x} = (2,1) \in V_2$ в вектор $\vec{x}\,'$ по формулам (IV.3), (IV.8) при переходе к новому базису:*

$$\vec{e}_{1'} = -\vec{e}_1\ ; \qquad \vec{e}_{2'} = -2\vec{e}_2\ .$$

Соответствующая матрица перехода C равна:

$$C = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

В старом базисе $\{\vec{e}_1\,, \vec{e}_2\}$ вектор $\vec{x}\,'$ имеет координаты (по формуле (IV.8)): $\vec{x}\,' = (-2,-2)$. На рисунке также показано преобразование координат вектора $\vec{x} = (2,1)$ при переходе к новому базису (формулы (IV.11), (IV.13)). Обратная матрица перехода равна:

$$C^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix};$$

в новом базисе вектор $\vec{x}$ имеет координаты $\vec{x}(-2\,,-\frac{1}{2})$.

IV.2 Подпространства векторного пространства и линейные оболочки

Определение OIV.1. *Множество векторов $U \subset V$, для которых при любых $\vec{x}\,,\vec{y} \in U$ и любых $\alpha\,,\beta \in \mathbb{R}$ выполняется условие: $\alpha\vec{x} + \beta\vec{y} \in U$, называется подпространством векторного пространства V. Или короче:*

$$U \subset V | \alpha\vec{x} + \beta\vec{y} \in U\,, \quad \forall \vec{x}\,,\vec{y} \in U\,; \quad \forall \alpha\,,\beta \in \mathbb{R}\,. \tag{IV.14}$$

Очевидно, что $\vec{0}$ - вектор всегда принадлежит подпространству U ($\alpha = 0\,, \beta = 0 \Rightarrow \vec{0} \in U$), как и противоположный вектор ($(-\vec{x}) \Rightarrow (\alpha = -1\,, \beta = 0)$). Легко проверить, что:

1. $\vec{0}$ - вектор образует подпространство V (тривиальное подпространство);
2. Множество коллинеарных между собой векторов образует подпространство V.

Согласно [OIV.1] *подпространство само является векторным пространством*, так как для него выполняются все аксиомы векторного пространства [AI.1] — [AI.8]. Однако размерность подпространства U меньше размерности пространства V.

Определение OIV.2. *Множество всех векторов вида:*

$$\vec{x} = \sum_{p=1}^{p=k} \alpha_p \vec{q}_p\,, \tag{IV.15}$$

где k - любое натуральное число, а $\alpha_1\,, \alpha_2\,, \ldots, \alpha_k$ - числа, пробегающие независимо все числовое поле $\mathbb{R}$ (т.е., $\{\alpha_1\,, \alpha_2\,, \ldots, \alpha_k\} = \mathbb{R}^k$), называется линейной оболочкой, натянутой на совокупность векторов $\{\vec{q}_1\,, \vec{q}_2\,, \ldots, \vec{q}_k\,\} \in V$ и обозначается:

$$\mathbb{L}(\{\vec{q}_1\,, \vec{q}_2\,, \ldots, \vec{q}_k\,\})$$

Теорема TIV.1. *Линейная оболочка, $\mathbb{L}(\{\vec{q}_1\,, \vec{q}_2\,, \ldots, \vec{q}_k\,\})$, натянутая на векторы $\{\vec{q}_1\,, \vec{q}_2\,, \ldots, \vec{q}_k\,\} \in V$, является подпространством V.*

Доказательство: $\langle\langle$ Для доказательства рассмотрим два произвольных вектора $\vec{x}_1\,, \vec{x}_2$, принадлежащих оболочке $\mathbb{L}(\{\vec{q}_1\,, \vec{q}_2\,, \ldots, \vec{q}_k\,\})$:

$$\vec{x}_1 = \sum_{p=1}^{p=k} \alpha_p \vec{q}_p\ \in U\,; \quad \vec{x}_2 = \sum_{p=1}^{p=k} \beta_p \vec{q}_p\ \in U\,.$$

Тогда вектор

$$\vec{y} = \lambda \vec{x}_1 + \mu \vec{x}_2 = \sum_{p=1}^{p=k} (\lambda \alpha_p + \mu \beta_p) \vec{q}_p\ =$$

$$= \sum_{p=1}^{p=k} \gamma_p \vec{q}_p\ \in U \qquad \forall\, \lambda\,, \mu\, \in \mathbb{R}\,.$$

$\rangle\rangle$

Размерность линейной оболочки определяется рангом матрицы

$$Q = \underbrace{\begin{bmatrix} q_1^1 & q_2^1 & \ldots & q_3^1 \\ q_1^2 & q_2^2 & \ldots & q_k^2 \\ . & . & \ldots & . \\ q_1^n & q_2^n & \ldots & q_k^n \end{bmatrix}}_{k} n\,,$$

составленной из координат векторов $\vec{q}_i\ = q_i^j \vec{e}_j\,, (i = \overline{1,n}\,; j = \overline{1,k})$. Векторы, входящие в базисный минор этой матрицы, образуют базис подпространства U_s, $(s \le n)$.

Поскольку, согласно [TII.5], все векторные пространства одинаковой размерности изоморфны, то *все подпространства V одинаковой размерности s, U_s, изоморфны s - мерной линейной оболочке этого* *пространства и с помощью подходящего координатного изоморфизма вида (IV.8) переводятся в нее; при этом базисы U_s переводятся в базис линейной оболочки.*

Определение OIV.3. *Множество всех векторов, одновременно принадлежащих подпространствам U и W векторного пространства V, называется пересечением подпространств и обозначается символом $U \cap W$.*

Теорема TIV.2. [1] *Пересечение подпространств пространства V само является подпространством V.*

Определение OIV.4. *Множество всех векторов вида $\vec{x} = \vec{x}_1 + \vec{x}_2$, где $\vec{x}_1 \in U$, $\vec{x}_2 \in W$, а U и W - подпространства V, называется суммой подпространств и обозначается $U + W$. Если пересечение $U \cap W$ состоит лишь из $\vec{0}$ - вектора, то сумма $U + W$ называется прямой и обозначается $U \oplus W$.*

Теорема TIV.3. *Сумма $U + W$ подпространств $U \subset V$, $W \subset V$ векторного пространства V сама является подпространством V.*

Теорема TIV.4. *Размерности подпространств, их пересечения и суммы связаны соотношением:*

$$\dim(U + W) = \dim U + \dim V - \dim(U \cap W)\,. \tag{IV.16}$$

IV.2.1 Пример

Пример ПIV.2. *Установить, что линейные оболочки, натянутые на системы векторов:*

$$\begin{array}{ll} \quad U & \quad W \\ \\ \vec{a}_1 = (1,0,-1,1) & \vec{b}_1 = (0,1,-1,0) \\ \vec{a}_2 = (0,-1,2,1) & \vec{b}_2 = (-1,1,1,0) \\ \vec{a}_3 = (1,1,-3,0) & \vec{b}_3 = (1,0,-2,0) \\ & \vec{b}_4 = (2,-1,-3,0) \end{array}$$

имеют одинаковые размерности. Построить пересечение и сумму этих подпространств, базисы U и W и указать какой - либо изоморфизм V_4, переводящий U в W.

Решение

Из координат векторов построим матрицы A и B:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}; \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

[1] За несложным доказательством этой и последующих теорем мы отсылаем читателя к курсу линейной алгебры.

С помощью эквивалентных преобразований вычислим ранги матриц и определим их базисные миноры:

$$A \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow r(A) = 2 \ :$$

$\Rightarrow$ базисные векторы:

$$\{\vec{a}_1 \ , \vec{a}_2 \} \ ; \qquad \dim U = 2 \, .$$

$$B \sim \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow r(B) = 2 \, ;$$

$\Rightarrow$ базисные векторы:

$$\{\vec{b}_1 \ , \vec{b}_2 \} \ ; \qquad \dim W = 2 \, .$$

Определим размерность суммы $U + W$, для чего составим матрицу из базисных векторов U и W:

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} ! & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow r(C) = 3 \, ,$$

$\Rightarrow$ базисные векторы суммы $U + W$:

$$\{\vec{a}_1 \ , \vec{a}_2 \ , \vec{b}_1 \} \Rightarrow \dim(U + W) = 3 \, .$$

По теореме [TIV.4] найдем размерность пересечения:

$$\dim(U \cap W) = \dim U + \dim W - \dim(U + W) = 2 + 2 - 3 = 1 \, .$$

Как найти базисный вектор пересечения? По определению пересечение - множество векторов, одновременно принадлежащих U_2 и W_2. Таким образом, если $\vec{x} \in U_2$ и $\vec{x} \in W_2 \, , \Rightarrow$

$$\vec{x} = \alpha\vec{a}_1 \ + \beta\vec{a}_2 \ = \gamma\vec{b}_1 \ + \delta\vec{b}_2 \ . \tag{IV.17}$$

Если рассматривать коэффициенты этого векторного равенства α, β, γ, δ как неизвестные, то в базисе $\{\vec{e}_i \} \in V_4$ (IV.17) будет представлять однородную систему алгебраических уравнений с матрицей системы:

$$A'^T = \begin{bmatrix} a_1^1 & a_1^2 & a_1^3 & a_1^4 \\ a_2^1 & a_2^2 & a_2^3 & a_2^4 \\ -b_1^1 & -b_1^2 & -b_1^3 & -b_1^4 \\ -b_2^1 & -b_2^2 & -b_2^3 & -b_2^4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \ \sim C \, .$$

Для того, чтобы система (IV.17) имела нетривиальное решение, необходимо и достаточно, чтобы ранг матрицы A' был меньше числа неизвестных (m), причем число линейно независимых решений равно разности $m - r(A')$. Но ранг матрицы A' совпадает с рангом матрицы C, т.е., равен 3. Поэтому имеется всего одно линейно независимое решение, соответствующее множеству коллинеарных между собой векторов, образующих одномерное векторное пересечение $U \cap W = Z_1$. Итак, найдем ($\alpha = -\beta$):

$$\vec{x} = \alpha(1, 1, -3, 0)\,; \qquad \forall\alpha \in \mathbb{R}\backslash 0\,.$$

Это и есть базисный вектор Z_1, т.е., базисный вектор пересечения совпадает с $\vec{a}_3$.

Перейдем теперь к нахождению какого - либо изоморфизма V_4, переводящего U_2 в W_2. Очевидно, что таких изоморфизмов бесконечно много. Нашей задачей является указание хотя бы одного. Указанный изоморфизм должен быть таким, чтобы линейная оболочка $\mathcal{L}(\{\vec{a}_1\,, \vec{a}_2\,\})$ перешла бы в линейную оболочку $\mathcal{L}(\{\vec{b}_1\,, \vec{b}_2\,\})$. Но мы наложим для определенности еще более жесткое условие:

$$\phi : V_n \to V_n | \vec{a}_1 \to \vec{b}_1\ ; \quad \vec{a}_2 \to \vec{b}_2\ .$$

Тогда формулы (IV.6) дают:

$$\begin{array}{llll}
I. & 0 = C^1_{1'} - C^1_{3'} + C^1_{4'}\,; & V. & -1 = C^1_{2'} + 2C^1_{3'} + C^1_{4'}\,; \\
II. & 1 = C^2_{1'} - C^2_{3'} + C^2_{4'}\,; & VI. & 1 = c^2_{2'} + 2C^2_{3'} + C^2_{4'}\,; \\
III. & -1 = C^3_{1'} - C^3_{3'} + C^3_{4'}\,; & VII. & 1 = -C^3_{2'} + 2C^3_{3'} + C^3_{4'}\,; \\
IV. & 0 = C^4_{1'} - C^4_{3'} + C^4_{4'}\,; & VIII. & 0 = -C^4_{2'} + 2C^4_{3'} + C^4_{4'}\,.
\end{array}$$

Это - неоднородная система 8-ми линейных алгебраических уравнений относительно 16-ти неизвестных $C^i_{k'}$. В данной системе выделяются 4 автономные подсистемы: 3 неоднородных - (I; V), (II; VI), (III; VII) и одна однородная - (IV; VIII). *Одним из решений* последней является: $C^4_{3'} = 0\,; C^4_{1'} = C^4_{2'} = C^4_{4'} = 1$. Нетрудно указать *одно из возможных решений* системы (I - VIII), удовлетворяющих условию $\det C \neq 0$:

$$||C^i_{k'}|| = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}\ .$$

При этом $\det C = -1$, т.е., стандартный базис $\{\vec{e}_i\,\}_4$ и изоморфный ему $\{\vec{e}_{k'}\,\}_4$ оказались разноименными.

Часть II

Аффинные пространства

Глава V

Определение аффинного пространства

V.1 Аксиомы Вейля аффинного пространства

Пусть $\mathbf{A} \neq \emptyset$ - множество элементов произвольной природы, называемых *точками* и обозначаемых $A, B, C, \ldots$. Наряду с этим множеством рассмотрим векторное пространство V.

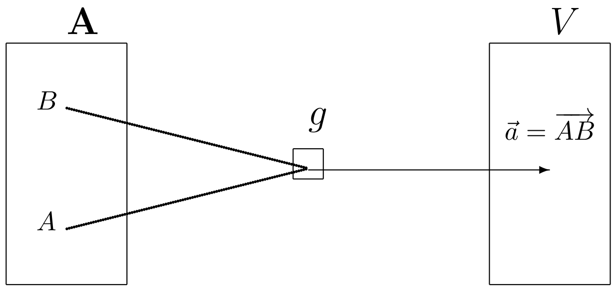


Рис.V.12. *Структура аффинного пространства*

Определение OV.1. *Множество $\mathbf{A} \neq \emptyset$ называется аффинным пространством над векторным пространством V, если задано отображение, сопоставляющее любой упорядоченной паре точек из $\mathbf{A}$ некоторый вектор из V:*

$$g : \mathbf{A} \times \mathbf{A} \longrightarrow V \tag{V.1}$$

и удовлетворяющее двум аксиомам (аксиомам Вейля):

Аксиома AV.1. 1 аксиома Вейля *Для любой точки $A \in \mathbf{A}$ и любого вектора $\vec{a} \in V$ существует единственная точка $B \in \mathbf{A}$, для которой:*

$$g(A, B) = \vec{a}; \tag{V.2}$$

(в дальнейшем будем обозначать $g(a, B) = \overrightarrow{AB}$);

Аксиома AV.2. 2 аксиома Вейля *Для любых трех точек $A, B, C \in \mathbf{A}$ имеет место равенство:*[1]

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}; \qquad (\forall A, B, C \in \mathbf{A}). \tag{V.3}$$

Векторное пространство V называется направляющим пространством аффинного пространства $\mathbf{A}$, или - пространством переносов аффинного пространства $\mathbf{A}$.

Заметим во избежание недоразумений, что отображение принадлежит векторному пространству: $g(A, B) \equiv \overrightarrow{AB} \in V$, а не аффинному пространству $\mathbf{A}$ - пространству точек.

[1] Правило треугольника.

V.2 Следствия аксиом Вейля

Следствие CV.1.

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \Rightarrow \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}\,. \tag{V.4}$$

Доказательство: $\langle\langle$ (V.3)

$$\Rightarrow \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD}\,; \quad \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD}\,; \Rightarrow$$

$$\left[\begin{array}{rcl} \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} & = & \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} \\ \overrightarrow{AB} & = & \overrightarrow{CD} \end{array}\right] \Rightarrow (\text{V.4})\,.$$

$\rangle\rangle$

Следствие CV.2.

$$\overrightarrow{AA} = \vec{0}\,, \qquad \forall A \in \mathbf{A}\,. \tag{V.5}$$

Доказательство: $\langle\langle$

$$(\text{V.3}) \Rightarrow \overrightarrow{AA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB}\,, \quad (\forall A, B \in \mathbf{A}) \Rightarrow (V.5)\,.$$

$\rangle\rangle$

Следствие CV.3.

$$\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}\,, \qquad \forall A, B \in \mathbf{A}\,. \tag{V.6}$$

Доказательство: $\langle\langle$

$$(\text{V.3}) \Rightarrow \overrightarrow{AA} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA}\,, \qquad \forall A, B \in \mathbf{A}\,;$$

$$(\text{V.5}) \Rightarrow \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \vec{0} \Rightarrow (V.6)\,.$$

$\rangle\rangle$

Следствие CV.4.

$$\overrightarrow{AB} = \vec{0} \Rightarrow A = B\,. \tag{V.7}$$

Доказательство: $\langle\langle$

$$(\text{V.3}) \Rightarrow \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}\,;$$

$$\overrightarrow{AB} = \vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} \Rightarrow$$

$$\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CA}\,; \qquad [V.1] \Rightarrow B = A\,.$$

$\rangle\rangle$

Определение OV.2. *Размерностью аффинного пространства* $\mathbf{A}$ *называется размерность его ассоциированного векторного пространства* V*:*

$$\dim \mathbf{A} \overset{def}{=} \dim V\,. \tag{V.8}$$

Аффинное пространство размерности n обозначается $\mathbf{A}_n$. Раздел математики, изучающий аффинные пространства, называется *аффинной геометрией.* Как видно из предыдущего, базой аксиоматики аффинной геометрии является множество точек $\{\mathbf{A}\}$ (основное множество), множество векторов $\{V\}$ и множество чисел $\{\mathbb{R}\}$ (вспомогательные множества). На множествах $V\,,\mathbb{R}$ заданы тернарные отношения сложения векторов и умножения векторов на числа, удовлетворяющие аксиомам векторного пространства [AI.1] — [AI.8]; на множествах $\mathbf{A}\,,V$ задано тернарное отношение (V.1), удовлетворяющее аксиомам аффинного пространства [AV.1], [AV.2]. К этим аксиомам необходимо еще добавить аксиомы сложения и умножения чисел на множестве $\mathbb{R}$, которые образуют структуру *арифметики* и которую мы не рассматриваем в курсе геометрии.

V.3 Изоморфизм аффинных пространств

Пусть $\mathbf{A}$ и $\mathbf{A}'$ - аффинные пространства, а V и V' - соответствующие пространства переносов и пусть существует изоморфизм $f\,:V\longrightarrow V'$.

Определение OV.3. *Изоморфизмом пространства* $\mathbf{A}$ *на пространство* $\mathbf{A}'$ *называется биективное отображение:*

$$\Psi\,:\mathbf{A}\longrightarrow\mathbf{A}'\,|\,f(\overrightarrow{A'B'})=\overrightarrow{AB}\,,\quad\forall A,B\in\mathbf{A}\,,\tag{V.9}$$

где $A'=\Psi(A)\in\mathbf{A}$, $B'=\Psi(B)\in af$ *- образы точек* $A\,,B$.

Пространства $\mathbf{A}$ *и* $\mathbf{A}'$ *называются изоморфными, если существует хотя бы один изоморфизм (V.9).*

V.4 Векторная модель аффинного пространства $\mathbf{A}(V_n)$

В качестве аффинного пространства $\mathbf{A}$ можно рассматривать произвольное векторное пространство V, определяя точки $\mathbf{A}$ как векторы: $A=\vec{a}$, $B=\vec{b}\,,\ldots$ и выбирая в качестве пространства переносов это же самое векторное пространство. Для того, чтобы как-то отличать точки аффинного пространства $\mathbf{A}=V$ и векторы пространства переносов V, будем обозначать аффинное пространство символом $\mathbf{A}(V)$. Итак, $A=\vec{a}\,,B=\vec{b}\in\mathbf{A}(V)\ \ (=V)$. Определим отображение (V.1) следующим образом:

$$\overrightarrow{AB}=\vec{b}-\vec{a}\qquad(=\vec{c}\in V)\,.$$

При таком определении отображения автоматически выполняются аксиомы [AV.1], [AV.2]. Действительно, для каждой точки $A(=\vec{a})\in\mathbf{A}(V)$ и любого вектора $\vec{c}\in V$ существует точка $B(=\vec{b}\in af(V)$ такая, что:

$$\overrightarrow{AB}=\vec{c}\quad(\Leftrightarrow\vec{b}-\vec{a}=\vec{c})\,,\forall A\in\mathbf{A}(V)\,,\ \forall\vec{c}\in V\,,\tag{V.10}$$

причем эта точка единственная, так как согласно (CCI.5) уравнение (V.10) единственным образом разрешается относительно $\vec{b}$: $(\vec{b}=\vec{a}+\vec{c})$ для любых $\vec{a}$, $\vec{c}$. Далее:

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=(\vec{b}-\vec{a})+(\vec{c}-\vec{b})=\vec{c}-\vec{a}\Rightarrow(V.2)\,.$$

Поскольку все векторные пространства одинаковой размерности n изоморфны, то:

> Любое n-мерное аффинное пространство $\mathbf{A}_n$ изоморфно своему пространству переносов V_n: $\phi\,:\mathbf{A}_n\longrightarrow\mathbf{A}(V_n)$.

Чтобы задать такой изоморфизм, выберем в $\mathbf{A}_n$ произвольную (но фиксированную!) точку O и положим: $\phi(A) = \overrightarrow{OA} \in V_n$. Здесь следует сделать замечание. Согласно [AV.2] отображение (V.1) по закону (V.2) является биекцией. Отметим, однако, что это отображение биективно при произвольной, но *фиксированной точке* A. Если же A не фиксирована, то существует бесконечное множество упорядоченных пар точек (A,B), (A',B'), (A'',B''), ..., таких, что $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{A''B''} = \ldots$. Отсюда видно, как появляется понятие о геометрических *свободно плавающих векторах*, на котором строится векторная алгебра в школьных курсах геометрии (см. [1]).

V.5 Арифметическая модель аффинного пространства $\mathbf{A}(\mathbb{R}_n)$

Согласно [TII.5] пространство переносов V_n изоморфно пространству $\mathbb{R}^n$ (соответствующую модель V_n мы обозначили $V(\mathbb{R}^n)$. Но $\mathbb{R}^n$ можно рассматривать и как аффинное пространство $\mathbf{A}_n$ с пространством переносов $V(\mathbb{R}^n)$, определяя точки $\mathbf{A}$ как элементы $\mathbb{R}^n$:

$$A(a^1, a^2, \ldots, a^n), \quad B(b^1, b^2, \ldots, b^n)$$

и вектор $\overrightarrow{AB} \in V(\mathbb{R}^n)$ как:

$$\overrightarrow{AB} = (b^1 - a^1, b^2 - a^2, \ldots, b^n - a^n). \tag{V.11}$$

Легко проверить выполнение аксиом [AV.1], [AV.2]. Таким образом, множество $\mathbb{R}^n$ можно рассматривать как аффинное пространство $\mathbf{A}(\mathbb{R}_n)$, пространством переносов которого является то же множество $\mathbb{R}^n$. Соответствующую модель аффинного пространства будем называть *арифметической*.

Таким образом, мы имеем цепочку изоморфизмов:

$$V_n \approx V(\mathbb{R}^n), \qquad \mathbf{A}_n \approx \mathbf{A}(V_n).$$

Кроме того, как мы видели, существует изоморфизм $\Psi : \mathbf{A}(V_n) \longrightarrow \mathbf{A}(\mathbb{R}_n)$, соответствующий *координатному изоморфизму* $f : V_n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ в пространстве переносов. Вследствие этого имеет место теорема:

Теорема TV.1. *Каждое n-мерное аффинное пространство $\mathbf{A}_n$ изоморфно аффинному пространству $\mathbf{A}(\mathbb{R}_n)$:*

$$\mathbf{A}_n \approx \mathbf{A}(\mathbb{R}_n), \qquad \forall \mathbf{A}_n | \mathbf{A}_n \in \{\mathbf{A}\}([V.2]). \tag{V.12}$$

Отсюда следует:

> Все аффинные пространства одинаковой размерности изоморфны, следовательно их можно изучать на основе арифметической модели $\mathbf{A}(\mathbb{R}_n)$.

Для задания конкретного изоморфизма $\mathbf{A}_n \longrightarrow \mathbf{A}(\mathbb{R}_n)$:

1. Фиксируется точка $O \in \mathbf{A}_n$ таким образом, что для любой точки $A \in \mathbf{A}_n$: $\Psi(A) = \overrightarrow{OA} \in V_n$, т.е., задается изоморфизм: $\Psi : \mathbf{A}_n \longrightarrow \mathbf{A}(V_n)$;
2. Фиксируется базис $\{\vec{e}_i\}_n \in V_n$, т.е., задается изоморфизм $f : V_n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ и одновременно - $\Psi : \mathbf{A}(V_n) \longrightarrow \mathbf{A}(\mathbb{R}_n)$.

Определение OV.4. *Упорядоченное множество $n+1$ точек $\Re\{O, A_1, A_2, \ldots, A_n\} \in \mathbf{A}_n$, таких, что векторы*

$$\overrightarrow{OA_i} = \vec{e}_i \in V_n \qquad (i = \overline{1,n}) \tag{V.13}$$

образуют базис пространства переносов V_n, называется аффинной системой координат, или аффинным репером. Точка O называется началом координат.

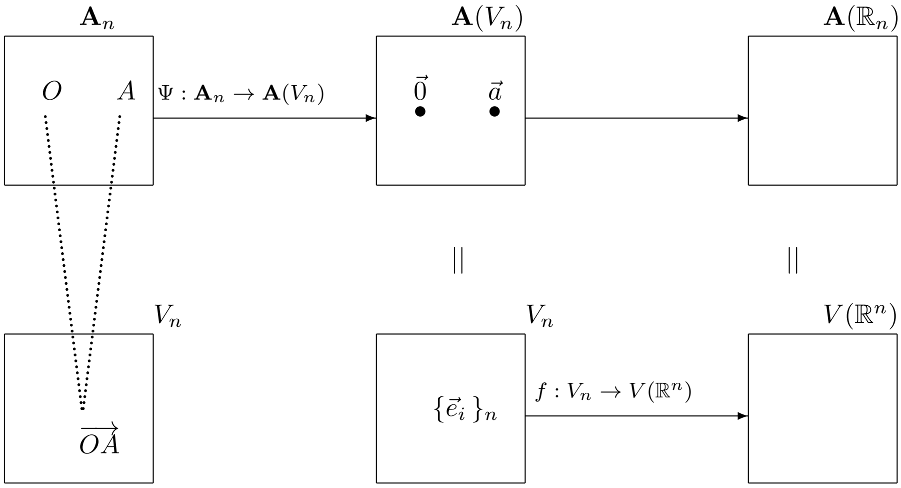


Рис.V.13. *Координатный изоморфизм*

Определение OV.5. *Система из* $n+1$ *точек* $A_0, A_1, \ldots, A_n \in \mathbf{A}_n$ *называется точками общего положения, если векторы* $\overrightarrow{A_0A_1}, \overrightarrow{A_0A_2}, \ldots, \overrightarrow{A_0A_n}$ *образуют базис* V_n.

Под аффинным репером можно понимать и совокупность начала координат $O \in \mathbf{A}_n$ и базиса $\{\vec{e}_i\}_n \in V_n$: $\Re\{O; \vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n\}$. Выбор координатной системы в $\mathbf{A}_n$ - это выбор изоморфизма $\Psi : \mathbf{A}_n \longrightarrow \mathbf{A}(\mathbb{R}_n)$.

Определение OV.6. *Вектор* $\overrightarrow{OM} \in V_n$ *называется радиусом-вектором точки* $M \in \mathbf{A}_n$ *относительно начала координат* $O \in \mathbf{A}$.

Определение OV.7. *Аффинными координатами точки* M *в репере* $\Re\{O; \vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n\}$ *называют координаты ее радиуса-вектора:*

$$\overrightarrow{OM} = x^i \vec{e}_i \tag{V.14}$$

и пишут: $M(x^1, x^2, \ldots, x^n)$.

Пусть аффинными координатами точек A и B в репере $\Re\{O; \vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n\}$ будут $A(a^1, a^2, \ldots, a^n)$ и $B(b^1, b^2, \ldots, b^n)$, т.е., согласно [OV.7] имеет место соотношения:

$$\overrightarrow{OA} = a^i \vec{e}_i\ ; \qquad \overrightarrow{OB} = b^i \vec{e}_i\ . \tag{V.15}$$

С другой стороны, согласно [AV.2], упорядоченной паре точек (A, B) в пространстве переносов V_n соответствует вектор $\overrightarrow{AB}$. Из правила треугольника (V.3) найдем:

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} \Rightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}\,.$$

Используя здесь соотношения (V.15), получим:

$$\overrightarrow{AB} = (b^i - a^i)\vec{e}_i\ . \tag{V.16}$$

Таким образом, согласно [OV.2], имеет место теорема, известная из школьного курса геометрии:

Теорема TV.2. *Аффинные координаты вектора* $\overrightarrow{AB}$ *равны разности аффинных координат точек, соответствующих концу и началу вектора:*

$$\overrightarrow{AB} = (x^1_B - x^1_A, x^2_B - x^2_A, \ldots, x^n_B - x^n_A)\,. \tag{V.17}$$

Глава VI

Аффинные преобразования и прямая $\mathbf{A}_n$

VI.1 Аффинные преобразования

Определение OVI.1. *Изоморфизм $f : \mathbf{A}_n \longrightarrow \mathbf{A}_n$ аффинного пространства $\mathbf{A}_n$ на себя называется автоморфизмом, или аффинным преобразованием этого пространства.*

Как мы отмечали в разделе IV для задания автоморфизма в $\mathbf{A}_n$ достаточно задать два репера $\Re\{O;\vec{e}_1,\ldots,\vec{e}_n\}$ и $\Re\{O';\vec{e'}_1,\ldots,\vec{e'}_n\}$ и каждой точке $M\in\mathbf{A}_n$, имеющей координаты $\{x^i\}$ в репере $\Re$, поставить в соответствие точку M' с теми же координатами в репере $\Re'$:

$$f : M \longrightarrow M' \,|\, \overrightarrow{OM} = x^i\vec{e}_i \longrightarrow \overrightarrow{O'M'} = x^i\vec{e'}_i\,, \quad \forall M\in\mathbf{A}_n\,. \tag{VI.1}$$

Таким образом, с учетом определения координат точки (XII.7) аффинное преобразование определяется аналогично автоморфизму пространства переносов: (IV.1) - (IV.2).

Найдем координаты точки $M' = f(M)$ в старом репере $\Re$. Пусть $\{x^i_{O'}\}$ - координаты точки O' в репере $\Re$:

$$\overrightarrow{OO'} = x^k_{O'}\vec{e}_k\ . \tag{VI.2}$$

Произведя в (VI.1) преобразование базиса $\{\vec{e'}_i\}_n$ согласно (III.1), найдем:

$$\overrightarrow{O'M'} = x^i C'^k_i\vec{e}_k\ . \tag{VI.3}$$

Согласно правилу треугольника (V.3):

$$\overrightarrow{O'M'} = -\overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{OM'}\,.$$

Пусть x'^k - координаты точки M' в репере $\Re$, т.е., -

$$\overrightarrow{OM'} = x'^k\vec{e}_k\ . \tag{VI.4}$$

Таким образом, с учетом (VI.2) - (VI.4) получим:

$$x^i C'^k_i\vec{e}_k = -x^k_{O'}\vec{e}_k + x'^k\vec{e}_k\ .$$

Вследствие линейной независимости векторов базиса получаем формулу для аффинных координат точки $M' = f(M)$ *в старом базисе* $\Re$:

$$x'^k = x^i C'^k_i + x^k_{O'}\,, \tag{VI.5}$$

или в матричном виде согласно обозначениям разделов 1.5 - 1.6:

$$[\vec{x}]\,' = C^{-1}[\vec{x}] + [\vec{x}_{O'}]\,. \tag{VI.6}$$

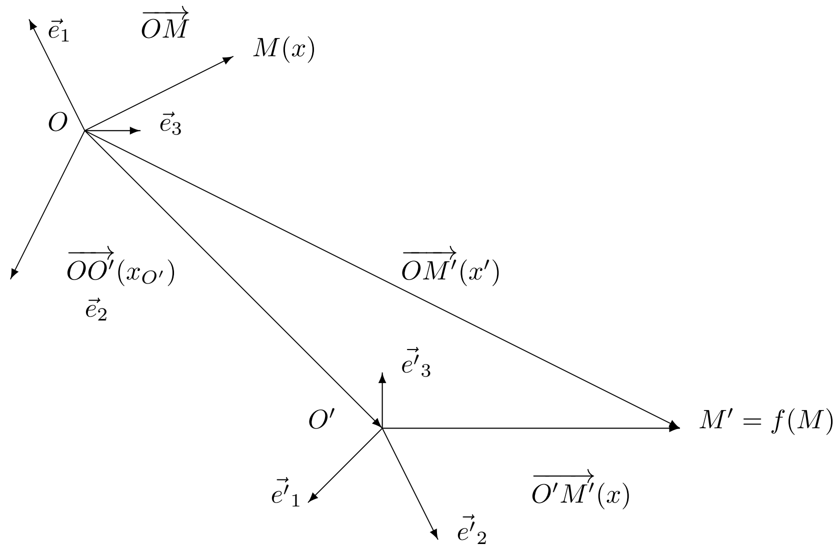


Рис.VI.14. *Аффинное преобразование*

Полезно выписать также и обратные к (VI.5), (VI.6) аффинные преобразования, которые всегда существуют вследствие невырожденности матрицы перехода C:

$$x^k = x'^{\,i} C^k_{\prime i} + x^k_O\,, \tag{VI.7}$$

$$[\vec{x}] = C[\vec{x}]\,' + [\vec{x}_O]\,. \tag{VI.8}$$

Аффинное преобразование

> Как и в случае автоморфизмов векторного пространства, аффинные преобразования $\mathbf{A}_n$, при котором сдвигаются точки $\mathbf{A}_n$, необходимо отличать от преобразований координат одной и той же точки M.

Пусть M имеет координаты $\{x^i\}$ в репере $\Re$ и координаты $\{x^{i'}\}$ в репере $\Re\,'$, т.е.:

$$\overrightarrow{OM} = x^i \vec{e}_i \;;$$

$$\overrightarrow{O'M} = x^{i'} \vec{e}_{i'} \;.$$

Используя правило треугольника (V.3) и формулы преобразования базиса (III.1), получим:

$$x^{j'} C'^{k}_{j'} = x^k - x^k_{0'}\,, \tag{VI.9}$$

или в матричной записи:

$$C[\vec{x}\;'] = [\vec{x} - \vec{x}_{0'}]\,. \tag{VI.10}$$

Свертывая (VI.9) с $C^{i'}_{\prime k}$ или умножая (VI.10) слева на C^{-1}, получим с учетом (III.9), (III.11):

$$x^{i'} = C^{i'}_{\prime k} x^k + x^{i'}_0\;; \tag{VI.11}$$

$$[\vec{x}\;'] = C^{-1}[\vec{x}] + [\vec{x}\;'_0]\,, \tag{VI.12}$$

где вектор

$$[\vec{x}\;'_0] = -C^{-1}[\vec{x}_{0'}] \tag{VI.13}$$

составлен из координат вектора $(-\overrightarrow{OO'})$ в базисе $\{\vec{e}_{i'}\}_n$, т.е., $x'^{i'}_0$ - координаты точки O в репере $\Re\,'$.

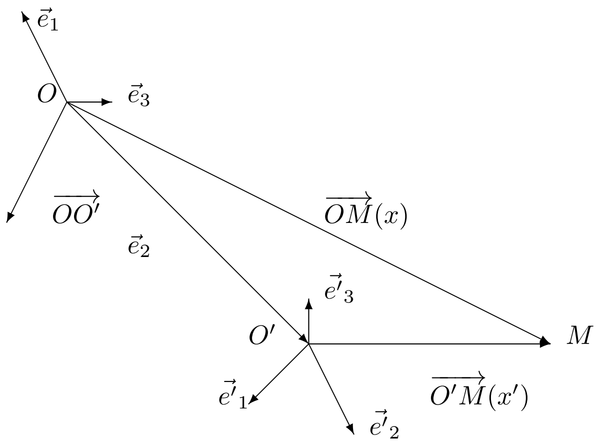


Рис.VI.15. *Преобразование координат точки*

Преобразование координат точки M

Подстановка вместо $[\vec{x}]$ в формулу (VI.10) вектора $[\vec{x}\,']$ из (VI.12) с учетом (VI.13) дает: $[\vec{x}]\,' = [\vec{x}]$, т.е., приводит к определению автоморфизма $f\,:\mathbf{A}_n \longrightarrow \mathbf{A}_n$, при котором координаты точек M в репере $\Re$ и M' в репере $\Re\,'$ совпадают. В связи с этим необходимо отличать *преобразование аффинного пространства* $f(M)$ *и преобразование аффинных координат точки* M.

Определение OVI.2. *Аффинное пространство называется ориентированным, если ориентировано его пространство переносов. Ориентация аффинного пространства определяется ориентацией пространства переносов, т.е., классом одноименных между собой базисов.*

VI.2 Примечание

Для того, чтобы наглядно представить различие между аффинным преобразованием и преобразованием координат точки, построим следующую модель. Возьмем чистый лист бумаги и на нем произвольно отметим точки O, O', M,... - это будет модель аффинной плоскости $\mathbf{A}_2$. Возьмем также лист прозрачной пленки и на ней изобразим векторы базиса $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ - это будет модель пространства переносов V_2. Совместим эти два листа так, чтобы "вершина" базиса $\{\vec{e}_1\ ,\vec{e}_2\,\}$ совместилась с точкой O. Тем самым мы получим изображение аффинного репера $\Re\{O;\vec{e}_1,\vec{e}_2\}$. Отложим на пленке геометрические векторы $\overrightarrow{OM}$,...

Сдвинем теперь пленку так, чтобы "вершина" базиса совместилась с точкой O' и затем произвольно повернем пленку вокруг этой точки. Тем самым мы получим репер $\Re\{O';\vec{e}\,'_1,\vec{e}\,'_2\}$. В конце вектора $\overrightarrow{OM}$ сделаем прокол и отметим на аффинной плоскости $M' = f(M)$. Точка M при этом осталась неподвижной, но ее координаты в новом репере изменились в согласии с (VI.11).

VI.3 Определение прямой линии в $\mathbf{A}_n$

Интуитивное определение прямой линии связано с нашими зрительными образами. Зрение является нашим важнейшим каналом информации, поэтому свойства распространения света в зрительном диапазоне длин волн (геометрическая оптика) и дают нам образы простейших геометрических фигур. Вспомним солнечный луч, пробивающийся сквозь щели в темном пыльном помещении, луч прожектора или киноаппарата, луч лазера и т.п. В каждом случае прямая линия полностью определяется направлением и точкой, через которую проходит луч света.

Вспомним, как "на глазок" провешивается прямая линия при сооружении забора, или более точно - с помощью теодолита при строительных работах. При этом двумя колышками задается некоторое нуж-

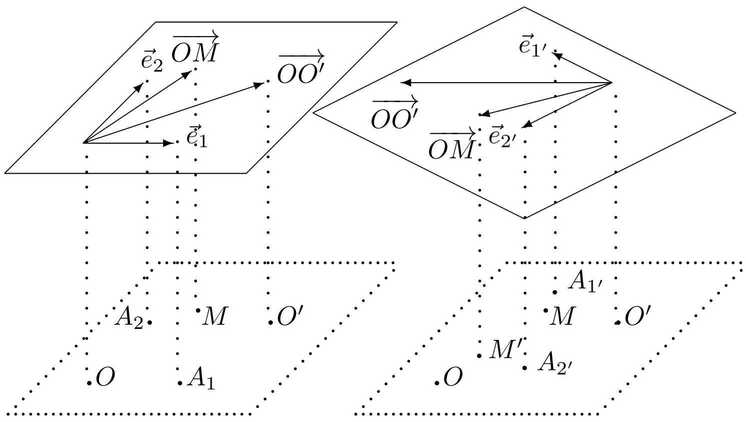


Рис.VI.16. *Модель аффинного преобразования*

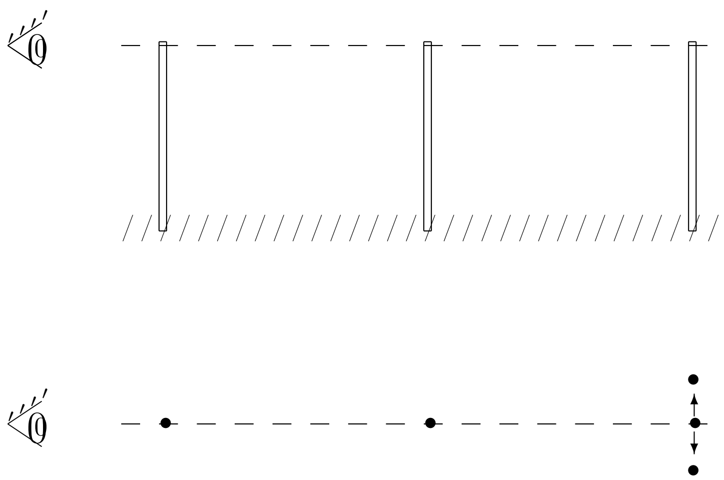


Рис.VI.17. *Интуитивное определение прямой основано на свойствах света*

ное направление, а остальные колышки (или кирпичи в стене) устанавливаются так, чтобы затенялись первыми двумя.
Это интуитивное определение прямой линии полностью переносится в геометрию.

Определение OVI.3. *Прямой линией* $d \in \mathbf{A}$*, проходящей через точку* $M_0 \in \mathbf{A}$ *параллельно ненулевому вектору* $\vec{q} \in V$*, называется множество всех точек* $M \in \mathbf{A}$*, таких, что:*

$$\overrightarrow{M_0M} = \lambda\vec{q}, \qquad \{\lambda\} = \mathbb{R}\,. \tag{VI.14}$$

Точка M_0 *называется опорной точкой прямой, вектор* $\vec{q}$ *- направляющим вектором этой прямой,* λ *- параметром, пробегающим все множество* $\mathbb{R}$*.*

Опорной точке M_0 соответствует значение параметра $\lambda = 0$. Прямую d, проходящую через точку M_0 параллельно вектору $\vec{q}$, будем обозначать $d(M_0;\ \overrightarrow{q})$.
Возникает вопрос: любая ли точка, лежащая на прямой, может быть взята в качестве опорной, и любой ли ненулевой вектор, коллинеарный данному, может быть взят в качестве направляющего? На этот вопрос отвечает следующая теорема.

Теорема TVI.1. *Пусть* M_1 *- произвольная точка прямой* $d(M_0;\ \overrightarrow{q})$ *и* $\vec{q}_1$ *- произвольный ненулевой вектор, коллинеарный вектору* $\vec{q}$*. Тогда точка* M_1 *и вектор* $\vec{q}_1$ *задают ту же прямую:*

$$d(M_1;\ \overrightarrow{q_1}) = d(M_0;\ \overrightarrow{q})\,.$$

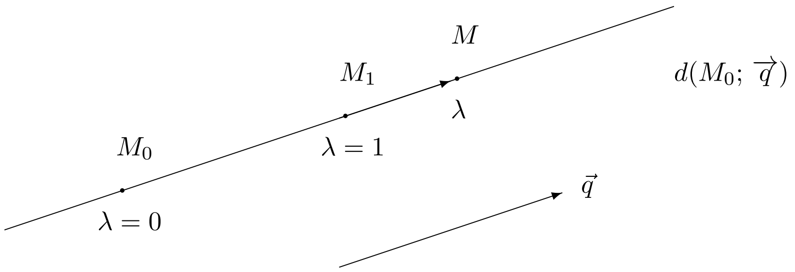


Рис.VI.18. *Прямая в аффинном пространстве*

Доказательство: $\langle\langle$ По условию [TVI.1]:

$$\exists \lambda_1 \in \mathbb{R}\,|\overrightarrow{M_0M_1} = \lambda_1 \vec{q}$$

и

$$\exists \mu \in \mathbb{R}\backslash 0\,|\vec{q}_1 = \mu\vec{q}\,.$$

Но тогда:

$$(\text{VI.14}) \Rightarrow \overrightarrow{M_0M} = \lambda\vec{q} \Rightarrow (\overrightarrow{M_0M_1} + \overrightarrow{M_1M}) = \lambda\vec{q}$$
$$\Rightarrow \lambda_1\vec{q} + \overrightarrow{M_1M} = \lambda\vec{q} \Rightarrow \overrightarrow{M_1M} = (\lambda - \lambda_1)\vec{q}\,.$$

Таким образом, точка M_1 может быть выбрана в качестве опорной.
Далее:

$$\vec{q} = \frac{1}{\mu}\vec{q}_1 \Rightarrow \overrightarrow{M_1M} = \frac{\lambda'}{\mu'}\vec{q}_1$$
$$\Rightarrow \overrightarrow{M_1M} = \lambda''\vec{q}_1\ |\,\lambda'' \in \mathbb{R}\,.$$

Таким образом, вектор $\vec{q}_1$ может быть взят в качестве направляющего вектора прямой $d(M_0;\ \overrightarrow{q})$. $\rangle\rangle$

Из [OVI.3] следует также, что (сравни с [OI.2]):

Следствие CVI.1. *Коллинеарные векторы параллельны одной и той же прямой или лежат на одной прямой.*

Теорема TVI.2. *Через две различные точки* M_0 *и* $M_1 \in \mathbf{A}$ *проходит одна и только одна прямая.*

Эта прямая обозначается символом (M_0M_1).
Доказательство: $\langle\langle$ Пусть точки M_0 и M_1 принадлежат некоторой прямой $d(M_0;\ \overrightarrow{q})$. Тогда из [OVI.3] следует: $\exists\lambda_1 \in \mathbb{R}\backslash 0\,|\,\overrightarrow{M_0M_1} = \lambda_1\vec{q}$. Таким образом, вектор $\overrightarrow{M_0M_1}$ параллелен прямой $d(M_0;\ \overrightarrow{q})$. Поскольку прямая однозначно определяется точкой $M_0 \in d$ и любым вектором, параллельным d, данная прямая однозначно определяется любыми ее двумя различными точками M_0 и M_1:

$$d(M_0;\ \overrightarrow{q}) = d(M_0;\ \overrightarrow{M_0M_1})\ :$$
$$\overrightarrow{M_0M} = \lambda\overrightarrow{M_0M_1}\,, \qquad \lambda \in \mathbb{R}\,. \tag{VI.15}$$

С другой стороны, пусть справедливо равенство (VI.15), - тогда оно задает некоторую прямую $d(M_0;\ \overrightarrow{M_0M_1})$. Тогда при $M = M_0$ получим $\lambda = 0$, при $M = M_1$ - $\lambda = 1$, т.е., прямая (VI.15) проходит через точки M_0 и M_1. $\rangle\rangle$

Определение OVI.4. *В дальнейшем точки, лежащие на одной прямой, будем называть коллинеарными точками.*

VI.4 Условие принадлежности трех точек одной прямой (условие коллинеарности точек)

Пусть даны три точки $M_1\,, M_2\,, M_3\ \in \mathbf{A}$, причем две из них, например, M_1 и M_2 различны. Пара этих точек согласно (VI.15) однозначно определяет прямую $d(M_1;\ \overrightarrow{M_1M_2})$:

$$\overrightarrow{M_1M} = \lambda\overrightarrow{MM_2}\,, \quad \lambda \in \mathbb{R}\,.$$

Если $M_3 \in d(M_1;\ \overrightarrow{M_1M_2})$, то:

$$\exists\lambda_1 \in \mathbb{R}\,|\,\overrightarrow{M_1M_3} = \lambda_1\overrightarrow{M_1M_2}\,. \tag{VI.16}$$

Равенство (VI.16) и является условием принадлежности трех точек одной прямой. Поскольку в качестве опорной точки согласно [TVI.1] может быть взята и любая другая точка прямой: $_2$ или M_3, условие принадлежности трех точек $M_1\,, M_2\,, M_3$ одной прямой можно сформулировать в виде теоремы:[1]

Теорема TVI.3. *Для того, чтобы три точки $M_1\,, M_2\,.M_3$, из которых две не совпадают, принадлежали одной прямой, необходимо и достаточно, чтобы любые различные пары векторов, соответствующие этим точкам, были коллинеарны.*

Достаточность доказывается элементарно.

[1]Напомним, что нуль-вектор коллинеарен любому вектору.

Глава VII

Уравнения прямой в $\mathbf{A}_n$

VII.1 Определение отрезка и луча

Рассмотрим прямую (M_1M_2), и пусть точка $M \in (M_1M_2)$. Тогда из (VI.15) следует:

$$\overrightarrow{M_1M} = \mu\overrightarrow{M_1M_2} \qquad \mu \in \mathbb{R}\,. \tag{VII.1}$$

Если $\mu = 0 \Rightarrow \overrightarrow{M_1M} = \vec{0}$; [CCV.4] $\Rightarrow M = M_1$. Если $\mu = 1 \Rightarrow \overrightarrow{M_1M} = \overrightarrow{M_1M_2}$; [AV.2] $\Rightarrow M = M_2$. Таким образом, при $\mu = 0$ или $\mu = 1$ точка M совпадает с одной из двух точек прямой (M_1 или M_2). Предположим, что точки M_1, M_2 и M различны, т.е., параметр $\mu \neq 0$; 1.

Определение OVII.1. *Будем говорить, что точка M прямой (M_1M_2) лежит между точками M_1 и M_2, если в равенстве (VII.1) $\mu \in (0,1)$, и будем записывать в этом случае: $\mu(M_1\,M\,M_2)$:*

$$\mu(M_1\,M\,M_2) \Leftrightarrow \begin{array}{ccc} \overrightarrow{M_1M} & = & \mu\overrightarrow{M_1M_2}\,; \\ 0 < & \mu & < 1\,. \end{array} \tag{VII.2}$$

labelO1L8

Теорема TVII.1.

$$\mu(M_1\,M\,M_2) \Rightarrow \mu(M_2\,M\,M_1)\,, \tag{VII.3}$$

т.е., если M лежит между точками M_1 и M_2, то M лежит и между точками M_2 и M_1.

Доказательство: $\langle\langle$ Итак, пусть выполняется (VII.2). Тогда:

$$(V.2) \Rightarrow \overrightarrow{M_1M_2} + \overrightarrow{M_2M} = \overrightarrow{M_1M}\,;$$

$$(V.7) \Rightarrow \overrightarrow{M_2M} = -\overrightarrow{MM_2}\,.$$

Таким образом:

$$(VII.2) \Rightarrow \overrightarrow{M_1M_2} - \overrightarrow{MM_2} = \mu\overrightarrow{M_1M_2} \Rightarrow$$
$$-\overrightarrow{MM_2} = (\mu-1)\overrightarrow{M_1M_2} \Rightarrow \overrightarrow{MM_2} = (1-\mu)\overrightarrow{M_1M_2}\,.$$

Но согласно (VII.2) $0 < 1-\mu < 1$. Поэтому получаем:

$$\overrightarrow{MM_2} = \mu_1\overrightarrow{M_1M_2}\,; \quad 0 < \mu_1 < 1 \Rightarrow \mu(M_2\,M\,M_1)\,.$$

$\rangle\rangle$

Определение OVII.2. *Отрезком с концами в точках M_1 и M_2 $(M_1 \neq M_2)$ называется множество точек прямой (M_1M_2):*

$$[M_1M_2] = \{M_1\,, M_2\} \cup M \in \mathbf{A} \mid \mu(M_1MM_2)\,. \tag{VII.4}$$

Каждая из точек прямой (M_1M_2), лежащая между M_1 и M_2, называется внутренней точкой отрезка, а точки M_1 и M_2 называются концевыми точками (или началом и концом отрезка).

Другими словами, отрезком $[M_1M_2]$ называется множество точек прямой (M_1M_2), лежащих между точками M_1 и M_2, включая сами эти точки. Точки прямой (M_1M_2), не находящиеся в отношении $\mu(M_1\,M\,M_2)$, т.е., для которых $\mu < 0$ или $\mu > 1$, называются *внешними точками прямой* (M_1M_2) по отношению к отрезку $[M_1M_2]$.

Следствие CVII.1.

$$[M_1M_2] = [M_2M_1]\,. \tag{VII.5}$$

Доказательство: $\Big\langle\!\Big\langle$ Доказательство очевидно вследствие [OVII.2] и (VII.3). $\Big\rangle\!\Big\rangle$

Определение OVII.3. *Лучом $[M_1M_2)$ с началом в точке M_1 и проходящим через точку M_2 называется множество точек прямой (M_1M_2):*

$$[M_1M_2) = \{M \in \mathbf{A}\} \mid \overrightarrow{M_1M} = \mu\overrightarrow{M_1M_2}\,; \quad \{\mu\} = \mathbb{R}_+\}\,. \tag{VII.6}$$

Исходя из определения отрезка $[M_1M_2]$ [OVII.2] можно дать и другое эквивалентное определение луча $[M_1M_2)$:

Определение OVII.4.

$$[M_1M_2) = [M_1M_2] \cup \{M \in \mathbf{A} \mid \mu(M_1\,M_2\,M)\}\,. \tag{VII.7}$$

VII.2 Простое отношение трех точек

Снова рассмотрим прямую (M_1M_2), и пусть $M \in (M_1M_2)$, причем $M \neq M_2$. Из (V.2) следует: $\overrightarrow{M_1M_2} = \overrightarrow{M_1M} + \overrightarrow{MM_2}$. Тогда вследствие (VII.1) получим:

$$\overrightarrow{M_1M} = \mu\overrightarrow{M_1M_2} = \mu\overrightarrow{M_1M} + \mu\overrightarrow{MM_2} \Rightarrow (1-\mu)\overrightarrow{M_1M} = \mu\overrightarrow{MM_2}\,,$$

причем по условию $\mu \neq 1$. Таким образом, получим:

$$\overrightarrow{M_1M} = \lambda\overrightarrow{MM_2}\,, \tag{VII.8}$$

где:

$$\lambda \overset{def}{=} \frac{\mu}{1-\mu}\,, \qquad \mu \neq 1\,. \tag{VII.9}$$

Из (VII.9) следует:

$$\lambda \neq -1 \tag{VII.10}$$

ни при каких $\mu \in \mathbb{R}$.

Заметим, что при $\lambda = -1$ из (VII.8) следует: $\overrightarrow{M_1M_2} = \vec{0} \Rightarrow M_1 = M_2$, поэтому точки $M_1\,, M_2$ в этом случае не определяют прямую.

Определение OVII.5. *Говорят, что точка M делит отрезок $[M_1M_2]$ в отношении λ, если имеют место соотношения (VII.8) и (VII.9). Данное число $\lambda \neq -1$ называется простым отношением трех точек: $M_1\,, M\,, M_2$.*

VII.3 Параметрические уравнения прямой

Пусть в аффинном пространстве $\mathbf{A}_n$ выбрано начало отсчета - точка O. Пусть далее $\vec{r}_0 = \overrightarrow{OM_0}$; $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$.

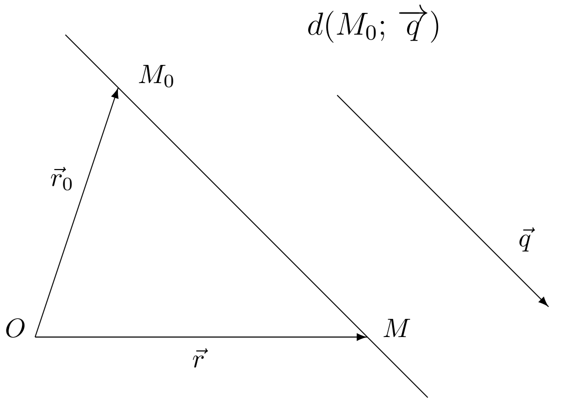


Рис.VII.19. *К выводу параметрического уравнения прямой*

Тогда из определения прямой [OVI.3] следует ($\overrightarrow{M_0M} = \overrightarrow{M_0O} + \overrightarrow{OM} \Rightarrow \overrightarrow{M_0M} = -\overrightarrow{OM_0} + \overrightarrow{OM} \Rightarrow \overrightarrow{M_0M} = \vec{r}_0 - \vec{r}$):

$$d(M_0;\ \overrightarrow{q}) : \quad \vec{r} = \vec{r}_0 + \lambda\vec{q}; \quad \{\lambda\} = \mathbb{R}. \tag{VII.11}$$

При изменении параметра λ на интервале $(-\infty, +\infty)$ точка M, задаваемая концом радиуса - вектора $\overrightarrow{OM} = \vec{r}$, пробегает всю прямую. Векторное равенство (VII.11) называется *векторным уравнением прямой линии.*

Пусть теперь $\Re\{O; \vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n\}$ - аффинный репер $\mathbf{A}_n$ (см. [OV.4], [OV.7]) и пусть $\{x_0^i\}$, $\{x^i\}$ и q^i - аффинные координаты точек M_0, M в этом репере и вектора $\vec{q}$ в базисе $\{\vec{e}_i\}_n$, соответственно. Таким образом, имеем:

$$\begin{cases} \overrightarrow{OM_0} & = & x_0^i\vec{e}_i\ ; \\ \overrightarrow{OM} & = & x^i\vec{e}_i\ ; \\ \vec{q} & = & q^i\vec{e}_i\ . \end{cases} \tag{VII.12}$$

Тогда на основании [TI.2] (вследствие линейной независимости векторов базиса) подстановка (VII.12) в (VII.11) приводит к *параметрическим уравнениям прямой линии*:

$$d(M_0;\ \overrightarrow{q}) : \qquad x^i = x_0^I + \lambda q^i, \qquad \begin{array}{c} i = \overline{1, n} \\ \{\lambda\} = \mathbb{R} \end{array}. \tag{VII.13}$$

Уравнения (VII.13) можно рассматривать как систему n алгебраических уравнений относительно координат x^i точки M прямой $d(M_0;\ \overrightarrow{q})$. Каждому *заданному* значению *параметра* λ соответствует один конкретный набор чисел $\{x^i\}$, т.е., одна точка. Так, например, значению $\lambda = 0$ соответствует набор $\{x_0^i\}$, т.е., $M = M_0$.

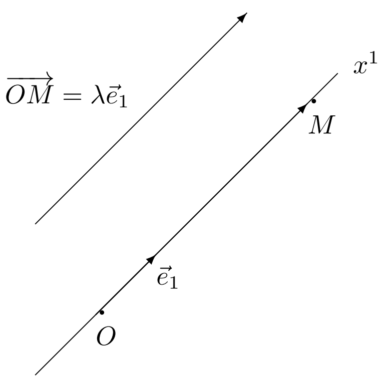


Рис.VII.20. *Числовая ось*

Определение OVII.6. *Прямая линия, на которой заданно определенное направление $\vec{q}$, называется осью.*

> В этом смысле любую прямую, задаваемую как $d(M_0;\ \overrightarrow{q})$, можно называть осью, при этом точку M_0 - началом отсчета на оси. Таким образом формируется понятие *числовой оси*, на которой каждой точке соответствует некоторое вещественное число. Частным случаем осей являются *координатные оси*: $d(O;\ \overrightarrow{e_i}) =$ “x^i”.

Так, например, полагая в (VII.13) $\vec{q}=(1,0,\ldots,0)$, $x^i_0=0$, получим уравнения координатной оси Ox^1:

$$\begin{cases} x^1 &= \lambda\,; \\ x^2 &= 0\,; \\ \cdot & \cdot\ \cdot\,; \\ x^n &= 0 \end{cases}$$

VII.4 Канонические уравнения прямой

Исключая параметр λ из уравнений (VII.13), т.е., производя следующие операции:

$$(VII.13) \Rightarrow x^i - x^i_0 = \lambda q^i \Rightarrow$$

$$\frac{x^i - x^i_0}{q^i} = \lambda\,, \qquad (q^i \neq 0\ i = \overline{1,n})\,,$$

получим *канонические уравнения прямой линии в* $\mathbf{A}_n$:

$$d(M_0;\ \overrightarrow{q}\,)\ :\qquad \frac{x^1-x^1_0}{q^1} = \frac{x^2-x^2_0}{q^2} = \cdots \frac{x^n-x^n_0}{q^n}\,. \tag{VII.14}$$

Примечание

Как понимать уравнения (VII.14) в том случае, если одна или несколько координат направляющего вектора $\vec{q}$ в данном базисе $\{\vec{e}_i\}_n$ оказываются равными нулю? Ведь делить на нуль нельзя. Для выяснения этого вопроса нам придется вернуться к уравнениям (VII.13). Допустим, что какая-то *фиксированная* координата $\vec{q}$, например, q^p равна нулю: $(q^p = 0)$. Тогда из (VII.13) следует: $x^p = x^p_0$. Но к такому же выводу мы могли бы придти и на основе (VII.14), если бы понимали соотношения типа:

$$\frac{x^1-x^1_0}{q^1} = \frac{x^p-x^p_0}{q^p}$$

в смысле умножения:

$$q^p(x^1-x^1_0) = q^1(x^p-x^p_0) \Rightarrow$$

$$0 = q^1(x^p-x^p_0) \Rightarrow x^p = x^p_0\,.$$

Договорившись о таком правиле, мы избежим в дальнейшем всевозможных недоразумений.

VII.5 Уравнение прямой, проходящей через две заданные точки

Как мы отмечали в VI, пара двух различных точек прямой однозначно определяет эту прямую. Пусть дана прямая $d = (M_0M_1)$. Рассматривая ее как прямую $d(M_0;\ \overrightarrow{M_0M_1})$ и задавая координаты точки $M_1(x^1_1, x^2_1, \ldots, x^n_1)$, получим из (VII.14) *уравнение прямой, проходящей через две заданные точки*:

$$d(M_0;\ \overrightarrow{M_0M_1})\ :\qquad \frac{x^1-x^1_0}{x^1_1-x^1_0} = \frac{x^2-x^2_0}{x^2_1-x^2_0} = \cdots = \frac{x^n-x^n_0}{x^n_1-x^n_0}\,. \tag{VII.15}$$

VII.6 Координаты точки, делящей отрезок в данном отношении

Пусть задан отрезок $[M_1M_2]$, причем $M_1(x^i_1)\,; M_2(x^i_2)$. Требуется найти аффинные координаты точки $M(x^i)$, делящей отрезок $[M_1M_2]$ в отношении λ (т.е., $\lambda : 1$). Обратимся к определению простого отношения трех точек (VII.8), которое и координатной записи имеет вид:

$$x^i - x^i_2 = \lambda(x^i_1 - x^i)\,; \qquad i = \overline{1,n}\,.$$

Разрешая эти соотношения относительно x^i с учетом (VII.10) ($\lambda \neq -1$), получим окончательно решение:

$$\overrightarrow{M_1M} = \lambda\overrightarrow{MM_2} \Leftrightarrow x^i = \frac{x_1^i + \lambda x_2^i}{1+\lambda}\,; \quad (i = \overline{1,n})\,. \tag{VII.16}$$

В частности, при $\lambda = 1$, т.е., *при делении отрезка пополам* $(1 : 1)$, получим аффинное обобщение известной из школы формулы:

$$[M_1M] = [MM_2] \Rightarrow x^i = \frac{x_1^i + x_2^i}{2}\,, \quad (i = \overline{1,n})\,, \tag{VII.17}$$

согласно которой координаты середины отрезка равны полусумме координат начала и конца отрезка.

VII.7 Другое определение прямой

Рассмотрим аффинное пространство $\mathbf{A}_n$ и в нем - начало отсчета $O \in \mathbf{A}_n$ и фиксированную точку M_0, а в его пространстве переносов V_n - фиксированный вектор $\vec{q}$. Наряду с $\mathbf{A}_n$ рассмотрим поле действительных чисел $\mathbb{R}$. Согласно определению прямой линии [OVII.3] каждому значению параметра $\lambda \in \mathbb{R}$ соответствует одна точка прямой $d(M_0; \overrightarrow{q})$, причем различным значениям λ соответствуют различные точки прямой. Для того, чтобы получить прямую линию, необходимо перебрать *все* значения λ на множестве $\mathbb{R}$. Все это говорит о том, что мы имеем дело с отображением множества в множество (сравни с определением отображения [OII.5]), а именно: с отображением множества действительных чисел в множество точек аффинного пространства. Это позволяет нам дать другое эквивалентное определение прямой.

Определение OVII.7. *Прямой $d(M_0; \overrightarrow{q}) \in \mathbf{A}_n$, проходящей через точку $M_0 \in \mathbf{A}_n$ в направлении $\vec{q} \in V_n$ называется образ множества действительных чисел $\mathbb{R}$ в отображении :*

$$f\,:\mathbb{R} \longrightarrow d \in \mathbf{A}_n \Rightarrow f(\lambda) = M \tag{VII.18}$$

по закону:

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM_0} + \lambda\vec{q}\,. \tag{VII.19}$$

При этом отрезок можно определить как образ закрытого интервала $[\alpha\,,\beta]$, а луч - полуоткрытого интервала $[\alpha, \infty)$ множества $\mathbb{R}$ в отображении (VII.18).

Глава VIII

Аффинные задачи планиметрии, решаемые в аксиоматике Вейля. Взаимное расположение прямых.

VIII.1 Аффинные задачи о прямых

К аффинным задачам о прямых относятся задачи, не связанные с применением понятий длин и углов. Это задачи: о пересечении либо непересечении прямых, принадлежности точек прямой, отрезку, делении отрезков в данном отношении. С точки зрения вейлевского подхода такие задачи решаются на аффинной плоскости $\mathbf{A}_2$. В дальнейшем координаты этой плоскости будем обозначать там, где это удобно, $x^1 = x\,; x^2 = y$. Как мы отмечали в I, II, базовые множества в аксиоматиках Гильберта и Вейля отличаются. В аксиоматике Гильберта базовыми множествами являются: множество точек (E), прямых (F) и плоскостей (G). В аксиоматике Гильберта векторы являются производными понятиями, определяемыми с помощью множеств E и F. Поэтому, например, понятия коллинеарности и компланарности векторов определяются через отношения параллельности и принадлежности на базовых множествах E, F и G (см., например, [1]): коллинеарными называются векторы, лежащие на одной прямой или на параллельных прямых, а компланарными - векторы, лежащие в одной плоскости или в параллельных плоскостях. Поэтому при рассмотрении школьных задач и теорем необходимо сначала переформулировать их в терминах базовых множеств аксиоматики Вейля , т.е., $\{E\,, V\,, \mathbb{R}\}$ (множества точек, векторов и действительных чисел). После правильной переформулировки доказательство теорем и решение задач сводится к алгебре, т.е., из "чисто геометрических" становится аналитическим и в конечном итоге сводится к арифметическим действиям. Сам же процесс переформулировки на "вейлевский язык" весьма полезен для лучшего понимания математической структуры геометрии.

VIII.2 Общее уравнение прямой на аффинной плоскости

Соответственно координатам $(x\,, y)$ точки M будем обозначать координаты направляющего вектора прямой $\vec{q}(l\,, m)$. Итак, канонические уравнения прямой $d(M_0;\ \overrightarrow{q}\,)$ (VII.14) на плоскости $\mathbf{A}_2$ сводятся к одному уравнению:

$$\left\{\begin{array}{c} M_0(x_0\,, y_0) \\ \vec{q}(l\,, m)\,; M(x, y) \end{array}\right\} : \qquad \frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m}\,. \tag{VIII.1}$$

Поскольку согласно примечанию, сделанному в VII, деление в (VIII.1) при равенстве нулю одной из координат направляющего вектора должно пониматься в смысле умножения, перепишем (VIII.1) в эквивалентной форме, справедливой для любых (одновременно не равных нулю) значений $l\, m$:

$$d(M_0;\ \overrightarrow{q}\,)\ : \qquad mx - ly + (ly_0 - mx_0) = 0\,, \tag{VIII.2}$$

или, с учетом [TVI.1] (произвольности выбора опорной точки и в качестве направляющего вектора любого, коллинеарного данному, - что эквивалентно умножению (VIII.2) на произвольный множитель $\alpha \neq 0$):

$$Ax + By + C = 0\,, \tag{VIII.3}$$

где A, B, C - некоторые числа, причем смысл чисел A, B согласно (VIII.2) следующий:

$$\vec{q} = (B\,, -A)\; - \tag{VIII.4}$$

из этих чисел составлены координаты направляющего вектора $\vec{q}$ [1];

$$C = -Ax_0 - By_0\,. \tag{VIII.5}$$

Определение OVIII.1. *Уравнение вида (VIII.3) называется общим уравнением прямой на аффинной плоскости. Числа A, B, C, из которых A, B одновременно не равны нулю, называются коэффициентами общего уравнения прямой.*

Теорема TVIII.1. *Любая прямая на аффинной плоскости определяется общим уравнением (VIII.3) и, наоборот, - любое уравнение вида (VIII.3) с коэффициентами A и B, одновременно не равными нулю, однозначно определяет некоторую прямую в заданном аффинном репере.*

Доказательство: $\langle\langle$ Действительно, пусть задано уравнение (VIII.3). Это значит, что известны его коэффициенты A, B, C. При A и B, одновременно не равных нулю, с помощью (VIII.4) можно определить ненулевой вектор $\vec{q}$, а взяв *любое частное решение* уравнения (VIII.3), найти опорную точку M_0.

Но опорная точка и направляющий вектор однозначно определяют прямую (см. VII). Пусть теперь, наоборот, прямая задана своей опорной точкой и направляющим вектором. Тогда с помощью соотношений (VIII.4), (VIII.5) мы определим коэффициенты общего уравнения прямой (VIII.3), причем A, B одновременно не равны нулю, так как по определению направляющий вектор прямой - ненулевой вектор. $\rangle\rangle$

При $C = 0$ частным решением (VIII.3) является тривиальное: $x = y = 0 \Rightarrow O(0,0) \in d$. Поэтому при $C = 0$ прямая проходит через начало координат. При $C \neq 0$ делением (VIII.3) на $(-C)$ получим:

$$C \neq 0\,, \qquad \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1\,, \tag{VIII.6}$$

где:

$$a = -C/A\,; \qquad b = -C/B\,. \tag{VIII.7}$$

Определение OVIII.2. *Уравнение (VIII.6) называется уравнением прямой в отрезках.*

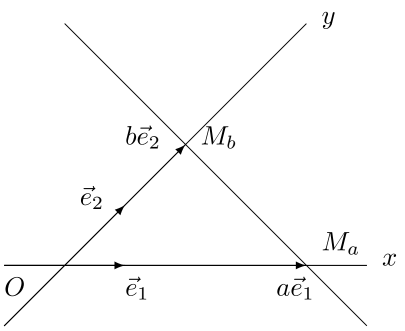


Рис.VIII.21. *Уравнение прямой в отрезках*

Геометрический смысл чисел a и b: $\overrightarrow{OM_a} = a\vec{e}_1$; $\overrightarrow{OM_b} = b\vec{e}_2$. Таким образом, фактически: $a = \mu(O\,A_1\,M_a)$; $b = \mu(O\,A_2\,M_b)$.

VIII.3 Другой вывод общего уравнения прямой

Существует и более непосредственный способ вывода общего уравнения прямой, основанный на ее определении и не использующий канонических уравнений. Обратимся поэтому к определению прямой [OVI.3], согласно которому прямая $d(M_0;\,\overrightarrow{q})$ определяется как множество точек $M \in \mathbf{A}_2$:

$$d(M_0;\,\overrightarrow{q})\;:\quad \overrightarrow{M_0M} = \lambda\vec{q}\,. \tag{VIII.8}$$

[1] или коллинеарного ему вектора

Смысл уравнения (VIII.8) заключается в утверждении, что два вектора $\overrightarrow{M_0M}$ и $\vec{q}$ коллинеарны, т.е., согласно [OI.5] система этих двух векторов линейно зависима. Зададим на $\mathbf{A}_2$ аффинный репер $\Re\{O;\vec{e}_1,\vec{e}_2\}$ и пусть точки M_0 и M имеют в нем координаты: $M_0(x_0\,,y_0)$, $M(x\,,y)$, а направляющий вектор $\vec{q}$ — координаты $(q^1\,,q^2)$ в векторном базисе $\{\vec{e}_1\,,\vec{e}_2\}$ пространства переносов V_2. Таким образом, согласно (V.17) найдем координаты вектора $\overrightarrow{M_0M}$ в этом базисе: $\overrightarrow{M_0M}=(x-x_0\,;y-y_0)$.

Согласно [TIII.1] необходимым и достаточным условием линейной зависимости двух векторов в двумерном векторном пространстве V_2 является равенство нулю определителя матрицы, составленной из координат этих векторов. Таким образом, векторное равенство (VIII.8) эквивалентно следующему координатному условию:

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & q^1 \\ y-y_0 & q^2 \end{vmatrix} = 0\,. \tag{VIII.9}$$

Раскрывая определитель в (VIII.9), получим общее уравнение прямой (VIII.3) с определениями его коэффициентов (VIII.4) и (VIII.5). Пусть теперь прямая d задана двумя точками (M_1M_2): $M_1(x_1\,,y_1)$, $M_2(x_2\,,y_2)$. Тогда направляющий вектор прямой $\overrightarrow{M_1M_2}$ имеет координаты $(x_2-x_1\,,y_2-y_1)$. Подставляя эти координаты в (VIII.9), получим уравнение прямой, проходящей через две точки на плоскости $\mathbf{A}_2$ (сравни с (VII.15)):

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & x_2-x_1 \\ y-y_1 & y_2-y_1 \end{vmatrix} = 0\,. \tag{VIII.10}$$

VIII.4 Взаимное расположение двух прямых на аффинной плоскости

Рассмотрим на аффинной плоскости $\mathbf{A}_2$ две прямые d_1 и d_2, заданные в репере $\Re\{O;\vec{e}_1,\vec{e}_2\}$ своими общими уравнениями:

$$d_1\ :\qquad A_1x+B_1y+C_1=0\,; \tag{VIII.11}$$

$$d_2\ :\qquad A_2x+B_2y+C_2=0\,. \tag{VIII.12}$$

Уравнения (VIII.11), (VIII.12) можно рассматривать как систему линейных неоднородных алгебраических уравнений относительно переменных $x\,,y$. Как следует из теории систем линейных алгебраических уравнений, эта система может либо:

1. не иметь решений;
2. иметь одно решение;
3. иметь бесчисленное множество решений.

Каждому решению системы (VIII.11) - (VIII.12) $x=x^*\,,y=y^*$ соответствует точка $M_*(x^*\,,y^*)\in\mathbf{A}_2$, общая для обеих прямых. Отсутствие решений (VIII.11) - (VIII.12) свидетельствует об отсутствии общих точек, т.е., о непересечении прямых d_1 и d_2. Напомним, что прямые, лежащие в одной плоскости и не имеющие общих точек, в аксиоматике Гильберта называются *параллельными прямыми.*

Для того, чтобы система уравнений (VIII.11) - (VIII.12) имела единственное решение, необходимо и достаточно [2], чтобы:

$$\Delta \stackrel{def}{=} \det\begin{bmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{bmatrix} \neq 0\,, \tag{VIII.13}$$

что эквивалентно условию:

$$A_1B_2-A_2B_1\neq 0\,. \tag{VIII.14}$$

В этом случае это указанное единственное решение находится по правилу Крамера. Сюда же можно отнести и случай $C_1=C_2=0$: тогда при выполнении (VIII.14) система (VIII.11) - (VIII.12) имеет единственное тривиальное решение $x=0\,,y=0$, т.е., прямые пересекаются в начале координат - точке O. Если же $\Delta=0$, а ранг расширенной матрицы системы (VIII.11) - (VIII.12) равен 2, т.е., -

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{bmatrix}=1\,;\quad \operatorname{rank}\begin{bmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{bmatrix}=2\,, \tag{VIII.15}$$

[2]См. курс линейной алгебры

система (VIII.11) - (VIII.12) не имеет решений, т.е., прямые не пересекаются. Наконец, в третьем случае :

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{bmatrix} = \operatorname{rank}\begin{bmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{bmatrix} = 1\,, \tag{VIII.16}$$

т.е., при

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}\,, \tag{VIII.17}$$

система (VIII.11) - (VIII.12) имеет бесчисленное множество решений. Однако, (VIII.16) показывает, что в этом случае уравнение (VIII.12) получается из (VIII.11) умножением последнего на множитель $\alpha = A_1/A_2$, поэтому прямые d_1 и d_2 в этом случае совпадают. Тем самым мы доказали теорему:

Теорема TVIII.2. *Две прямые d_1 и d_2 на аффинной плоскости $\mathbf{A}_2$*

1. *либо имеют одну точку пересечения (условия (VIII.14));*
2. *либо не имеют ни одной точки пересечения, т.е., параллельны (условия (VIII.15));*
3. *либо совпадают (условия (VIII.17)).*

В дальнейшем параллельные прямые будем обозначать значком $\|$. Проанализируем условия параллельности прямых. Из (VIII.15) следует, что при $d_1 \parallel d_2$ и $d_1 \neq d_2$:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2}\,. \tag{VIII.18}$$

Вспоминая связь координат направляющего вектора прямой с коэффициентами общего уравнения прямой (VIII.4), найдем, что (VIII.18) эквивалентно следующим условиям на направляющие векторы прямых:

Теорема TVIII.3.

$$d_1(M_1;\,\vec{q_1}) \parallel d_2(M_2;\,\vec{q_2}) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} \vec{q}_1 & = & \lambda\vec{q}_2\,, \\ \overrightarrow{M_1M_2} & \neq & \gamma\vec{q}_1 \end{array}\right.\,, \tag{VIII.19}$$

$$d_1(M_1;\,\vec{q_1}) = d_2(M_2;\,\vec{q_2}) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} \vec{q}_1 & = & \lambda\vec{q}_2\,, \\ \overrightarrow{M_1M_2} & = & \gamma\vec{q}_1 \end{array}\right.\,, \tag{VIII.20}$$

где $\lambda\,,\gamma \in \mathbb{R}$.

Доказательство: $\langle\langle$ **Необходимость.** Пусть $d_1 \parallel d_2$, - тогда выполняется условие (VIII.18):

$$(VIII.18) \Rightarrow A_1 = \lambda A_2\,; B_1 = \lambda B_2\,; C_1 \neq \lambda C_2\,.$$

С другой стороны (VIII.4) дает:

$$\vec{q}_1 = (B_1\,, -A_1)\,; \qquad \vec{q}_2 = (B_2\,, -A_2)\,.$$

Объединяя эти соотношения, получим:

$$\vec{q}_1 = \lambda\vec{q}_2\,,$$

откуда следует первое из условий (VIII.19), (VIII.20). Если

$$d_1 \cap d_2 = \varnothing \Rightarrow M_2 \notin d_1 \Rightarrow \overrightarrow{M_1M_2} \neq \gamma\vec{q}_1\,.$$

Если же $d_1 = d_2$, то $M_2 \in d_1 \Rightarrow$

$$\overrightarrow{M_1M_2} = \gamma\vec{q}_1\,,$$

т.е., следует второе условие (VIII.20).

Достаточность. Пусть выполняется (VIII.19). Из первых условий (VIII.19), (VIII.20) и (VIII.4) следует:

$$C_1 - \lambda C_2 = \lambda[A_2(x_2 - x_1) + B(y_2 - y_1)]\,.$$

Тогда второе условие (VIII.19) дает:

$$(x_2 - x_1) \neq -\frac{B_1}{A_1}(y_2 - y_1) \Rightarrow C_1 - \lambda C_2 \neq \frac{\lambda}{A_1}(y_2 - y_1)(B_1 A_2 - B_2 A_1) \Rightarrow$$

$$C_1 - \lambda C_2 \neq 0 \Rightarrow C_1 \neq \lambda C_2\,,$$

откуда следует (VIII.18). Если же вместо (VIII.19) выполняются условия (VIII.20), вместо (VIII.18) получим (VIII.17). $\rangle\rangle$

> Таким образом, из [TVIII.3] следует, что коллинеарные векторы лежат на параллельных или совпадающих прямых.

В гильбертовской аксиоматике коллинеарные векторы так и определялись, как векторы, лежащие на одной прямой или на параллельных прямых. При этом параллельные прямые определялись как непересекающиеся прямые, лежащие в одной плоскости. В аксиоматике же Вейля коллинеарные векторы определяются как линейно зависимые, а параллельные прямые *логически неизбежно должны* определяться как прямые с коллинеарными направляющими векторами. Это последнее определение применимо не только к аффинной плоскости, но и к аффинному пространству любой размерности.

Определение OVIII.3. *Две несовпадающие прямые* $d_1(M_1;\,\overrightarrow{q_1})$ *и* $d_2(M_2;\,\overrightarrow{q_2})$ *в аффинном пространстве* $\mathbf{A}_n$ *называются параллельными, если их направляющие векторы коллинеарны* ($\vec{q}_1 = \lambda\vec{q}_2$ *).*

Примечание

При этом *следствием определения* будет тот факт, что параллельные прямые не пересекаются [TVIII.3] и лежат в одной плоскости (об этом речь пойдет в дальнейшем).

Глава IX

Аффинные задачи планиметрии, решаемые в аксиоматике Вейля. Фигуры на аффинной плоскости

IX.1 Ломаная линия

Всякое множество точек называется *фигурой*. Некоторые простейшие фигуры как в аффинном пространстве так и на аффинной плоскости $\mathbf{A}_2$ (точка, прямая, отрезок, луч, пара параллельных прямых, пара пересекающихся прямых) мы рассмотрели в разделах V - ??. В этом разделе мы рассмотрим более сложные фигуры на аффинной плоскости $\mathbf{A}_2$, образованные прямыми, отрезками, лучами и *ломаными линиями.*

Определение OIX.1. *Рассмотрим в* $\mathbf{A}_n$ *упорядоченное множество точек* $(A^1, A^2, \ldots, A^m)$ $(m \geq 3)$, *таких, что никакие три соседние (по порядку нумерации) не лежат на одной прямой.*

Объединение отрезков :

$$[A_1A_2] \cup [A_2A_3] \cup \ldots \cup [A_{m-1}A_m]$$

называется ломаной линией $[A_1A_2 \ldots A_m]$ *(или просто - ломаной), соединяющей точки* A_1 *и* A_m, *называемые концами этой ломаной.*

Если все точки $A_1\,, A_2\,, \ldots, A_m$ *принадлежат одной плоскости, то ломаная линия называется плоской.*

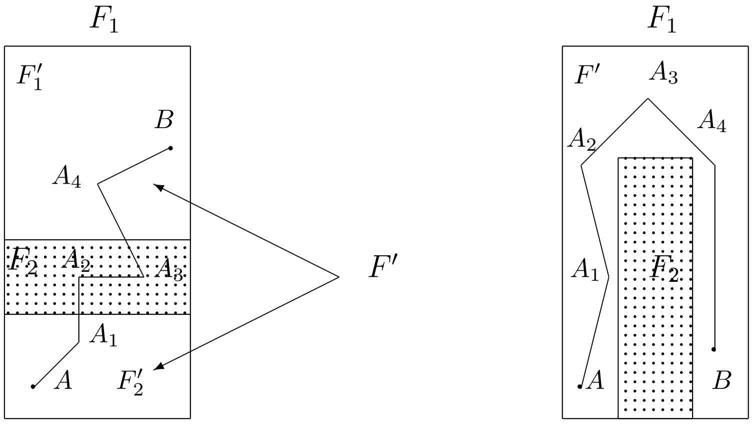
Пусть две точки A и B фигуры F_1 можно соединить содержащейся в ней ломаной $[AA_1 \ldots A_mB] \subset F_1$ и пусть $F_2 \subset F_1$. Рассмотрим фигуру $F' = F_1 \backslash F_2$ - *дополнение фигуры* F_2 *до фигуры* F_1:

$$F_1 = F_2 \cup F' \;=\; F_2 \cup F_1 \backslash F_2\,. \tag{IX.1}$$

Определение OIX.2. *Пусть даны фигуры* F_1 *и* $F_2 \subset F_1$. *Говорят, что фигура* F_2 *разбивает фигуру* $F' = F_1 \backslash F_2$ *на две части* F_1' *и* F_2', *если:*

$$F_1' \cup F_2' = F'\,, \quad F_1' \cap F_2' = \emptyset\,. \tag{IX.2}$$

Определение OIX.3. *Пусть фигура* F_2 *разбивает фигуру* $F' = F_1 \backslash F_2$ *на две части* F_1' *и* F_2'. *Если найдется хотя бы пара точек* $A\,, B \in F'$, *которые нельзя соединить никакой ломаной* $[AA_1 \ldots A_mB] \in F_1$ *и не пересекающей* F_2, *то говорят, что фигура* F_2 *делит фигуру* F' *на две части* F_1' *и* F_2'.



$[AA_1A_2A_3A_4B] \cap F_2 \neq \emptyset$ $\quad$ $[AA_1A_2A_3A_4B] \cap F_2 = \emptyset$

F_2 F' $\quad$ F_2 F'

F_1' F_2'

Рис.IX.22. *Разбиение и деление на части*

Определение OIX.4. *Фигура F называется выпуклой, если любые ее две точки A и B можно соединить отрезком $[AB]$, полностью принадлежащим фигуре F. Если же найдется хотя бы пара точек $A\,, B \in F$ таких, что отрезок $[AB]$ целиком не принадлежит F, то фигура F называется невыпуклой.*

IX.2 Полуплоскость

Рассмотрим прямую d на плоскости $\mathbf{A}_2 \stackrel{def}{=} \Pi$. Очевидно, что d разбивает Π на две фигуры Π_1' и Π_2' такие, что $\Pi_1' \cup \Pi_2' \cup d = \Pi$, т.е., $\Pi' = \Pi_1' \cup \Pi_2'$, или проще: $\Pi' = \Pi \backslash d$. Докажем, что фигуры Π_1' и Π_2' - выпуклые.

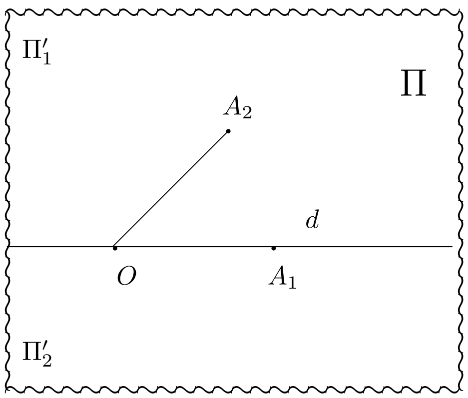


Рис.IX.24. *Полуплоскость*

Доказательство: $\langle\langle$ Зададим на Π аффинную систему координат: $\Re\{O, A_1, A_2\}$, где $O\,, A_1 \in d$, $A_2 \in \Pi_1'$. Тогда:

$$\Pi_1' = \{M(x,y) \mid y > 0\}; \quad \Pi_2' = \{M(x,y) \mid y < 0\};$$

$$d = \{M(x,y) \mid y = 0\}.$$

Рассмотрим две произвольные точки A и B, принадлежащие, для определенности, Π_1'. Тогда $(x_A\,, y_A)$, $B(x_B\,, y_B)$, причем $y_A > 0$, $y_B > 0$.
Пусть $M(x,y) \in [AB]$ и $M \neq A$, $M \neq B$, и пусть точка M делит отрезок $[AB]$ в отношении λ. Так как M - внутренняя точка отрезка $[AB]$, то $\lambda > 0$.

Тогда координаты этой точки согласно (VII.15) есть:

$$x = \frac{x_A + \lambda x_B}{1+\lambda}; \qquad y = \frac{y_A + \lambda y_B}{1+\lambda}\,.$$

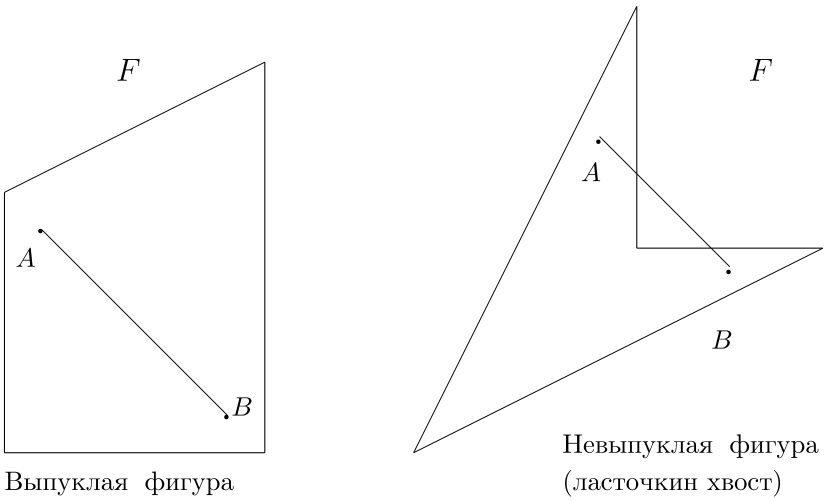


Рис.IX.23. *Выпуклые и невыпуклые фигуры*

Так как $y_A > 0\,, y_B > 0\,, \lambda > 0 \Rightarrow y > 0$, т.е., $M \in \Pi'_1$. $\rangle\rangle$

Докажем теперь, что d не только разбивает Π на две выпуклые фигуры Π'_1 и Π'_2, но и *разделяет плоскость* на эти фигуры.

Доказательство: $\langle\langle$ Для этого достаточно доказать, что $\forall A \in \Pi'_1$ и $\forall B \in \Pi'_2$ нельзя соединить ломаной, принадлежащей Π и не пересекающей d. Предположим, что такая ломаная $[AA_1 \ldots A_m B]$ существует. Тогда ни одна из точек $A_1\,, \ldots, A_m$ не лежит на прямой d. Если ломаная не пересекает d, то, в частности, $[AA_1]$ не пересекает d. Пусть $A_1(x_1\,, y_1)$. Если $A_1 \in \Pi'_1$, т.е., если $y_1 > 0$, то, как мы видели выше, отрезок $[AA_1]$ целиком лежит в Π'_1. Если же $A_1 \in \Pi'_2$, то $y_1 < 0$. С другой стороны координата y точки $M(x, y)$, делящей отрезок $[AA_1]$ в отношении λ, согласно (VII.15) есть:

$$y = \frac{y_A + \lambda y_B}{1+\lambda}\,.$$

Очевидно, что в этом случае всегда найдется такое $\lambda > 0$ ($\lambda = -y_A/y_1 > 0$), при котором $y = 0$. Но это означает, что внутренняя точка отрезка $[AA_1]$ лежит на прямой d, т.е., $[AA_1] \cap d = M \neq \emptyset$, что противоречит сделанному предположению. Следовательно: $y_1 > 0$, т.е., $A_1 \in \Pi'_1$. Таким же образом докажем, что $[A_1 A_2]$ не пересекает d и т.д. $\rangle\rangle$

Итак, мы доказали теорему:

Теорема TIX.1. *Всякая прямая d, лежащая на аффинной плоскости Π, делит фигуру $\Pi' = \Pi \backslash d$ на две части Π'_1 и Π'_2. Каждая из фигур $\Pi_1 = \Pi'_1 \cup d$ и $\Pi_2 = \Pi'_2 \cup d$ является выпуклой.*

Определение OIX.5. *Каждая из выпуклых фигур аффинной плоскости Π: $\Pi_1 = \Pi'_1 \cup d$ и $\Pi_2 = \Pi'_2 \cup d$ называется полуплоскостью, сами фигуры Π'_1 и Π'_2 — внутренними областями соответствующих плоскостей, а прямая d - ее границей.*

Для задания полуплоскости достаточно указать ее границу (прямую d) и любую ее внутреннюю точку M, т.е, точку принадлежащую полуплоскости, но не принадлежащую ее границе ($M \in \Pi'_1$ или $M \in \Pi'_2$), например, $\Pi_1(d; M) \in \Pi$, если $M \in \Pi'_1$. Точка M при этом будет являться *внутренней точкой соответствующей полуплоскости.*

IX.3 Плоские углы

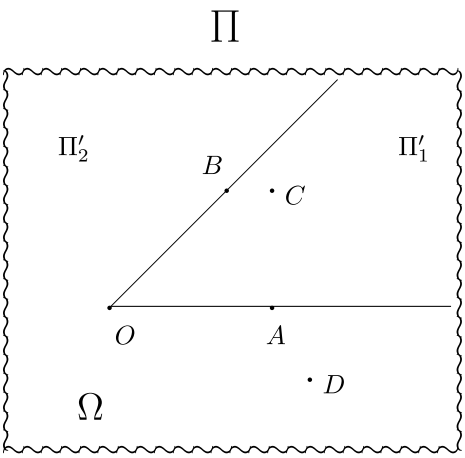


Рис.IX.25. *Плоский угол*

Рассмотрим на аффинной плоскости $\mathbf{A}_2 \stackrel{def}{=} \Pi$ фигуру Ω, образованную двумя лучами $[OA)$, $[OB) \in \Pi$ с общей вершиной в точке O: $\Omega = [OA) \cup [OB)$. Очевидно, что Ω разбивает фигуру $\Pi' = \Pi \backslash \Omega$ на две части Π_1' и Π_2' такие, что $\Pi_1' \cup \Pi_2' \cup \Omega = \Pi$, т.е., $\Pi' = \Pi_1' \cup \Pi_2'$. Докажем, что Ω и делит фигуру Π' на две фигуры Π_1' и Π_2'.

Доказательство: $\langle\langle$ Полагая, что лучи $[OA)$ и $[OB)$ не лежат на одной прямой, введем на Π аффинный репер: $\Re\{O, A, B\}$. Тогда:

$$\Pi_1' = \{M(x,y) \mid x > 0\,, y > 0\}\,;$$

$$\Pi_2' = \{M(x,y) \mid x \geq 0\,, y < 0\,;$$

$$x < 0\,, y \geq 0\,;\ x < 0\,, y < 0\}\,.$$

Затем необходимо рассмотреть две точки $C \in \Pi_1'$ и $D \in \Pi_2'$ и составить ломаную $[CA_1 \ldots A_m D]$. Доказательство полностью аналогично доказательству предыдущей теоремы [TIX.1] [1] Аналогично можно доказать, что одна из этих фигур (в данном случае Π_1') - выпуклая. Если же лучи $[OA)$ и $[OB)$ лежат на одной прямой, возможны два случая:

1. Векторы $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$ сонаправлены, т.е., $\overrightarrow{OA} = \lambda \overrightarrow{OB}$, $\lambda > 0$. В этом случае лучи $[OA)$ и $[OB)$ совпадают, т.е., Ω - луч и $\Pi_1' = \emptyset\,, \Pi_2' = \Pi \backslash [OA)$;
2. Векторы $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$ противоположно направлены, т.е., $\overrightarrow{OA} = \lambda \overrightarrow{OB}$, $\lambda < 0$. В этом случае $\Omega = (AB)$ - прямая, которая, как это следует из [TIX.1], делит Π' на две части.

$\rangle\rangle$

Таким образом, имеет место следующая теорема:

Теорема TIX.2. *Всякая фигура Ω на плоскости Π, состоящая из двух лучей с общей вершиной, делит фигуру $\Pi' = \Pi \backslash \Omega$ на две части Π_1' и Π_2', по крайней мере одна из которых является выпуклой фигурой.*

Определение OIX.6. *Каждая из фигур аффинной плоскости, $\Gamma_1 = \Pi_1' \cup \Omega$ и $\Gamma_2 = \Pi_2' \cup \Omega$, называется плоским углом (или просто — углом). При этом лучи называются сторонами угла, а их вершина - вершиной угла, а фигуры Π_1' и Π_2' - внутренними областями соответствующих углов.*

Для задания конкретного угла необходимо задать два луча $[OA)$ и $[OB)$ и указать *произвольную точку плоскости*, принадлежащей одной из ее частей $M \in \Pi_1'$ или $M \in \Pi_2'$, т.е.: $\Gamma\{[OA)\,, [OB)\,, M\}$. При этом сама точка M будет называться *внутренней точкой угла* Γ_1 или Γ_2, соответственно.

Определение OIX.7. *В случае, когда два луча $[OA)$ и $[OB)$ совпадают, говорят, что эти лучи образуют два угла, один из которых не имеет внутренней области ($\Pi_1' = \emptyset$) и называется нулевым углом, а второй имеет внутреннюю область $\Pi_2' = \Pi \backslash [OA)$ и называется полным углом. Углы, образованные*

[1] Доказательство провести самостоятельно. Указание: необходимо перебрать всевозможные значения пары координат x, y.

двумя лучами с противоположно направленными векторами $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$, совпадают с полуплоскостями и называются развернутыми углами.

IX.4 Примечание

При использовании аффинного репера всякий раз возникает вопрос: *в какой мере полученные при решении задачи результаты зависят от выбора аффинной системы координат?*

Более четкая его формулировка такова: *каковы инварианты* [2] *аффинных преобразований?* Ответ на этот вопрос будет дан в следующем разделе, а пока проиллюстрируем сказанное на примере.

Рассмотрим на Π угол $\Gamma\{[OA)\,,[OB)\,,M\}$, меньший развернутого[3]. Выберем аффинный репер на Π следующим образом: $\Re\{O\,,\overrightarrow{OA}\,,\overrightarrow{OB}\}$ и зададим точку $M\in\Gamma$ аффинными координатами $M(1,1)$. Произвольное аффинное преобразование задается новым репером $\Re'\{O'\,,\overrightarrow{O'A'}\,,\overrightarrow{O'B'}\}$, в котором образ точки M будет иметь те же координаты, что и прообраз: $M'(1,1)$.

Точка M' снова оказалась внутри выпуклой фигуры, помеченной на рисунке пунктиром. Однако если бы мы, как обычно, отсчитывали угол от луча $[O'A')$ против часовой стрелки, то получили бы угол, больший развернутого, т.е., невыпуклую фигуру. При этом точка M' оказалась бы лежащей вне этого угла. Этого, однако, не случилось. Что же произошло? Базисы $\{\vec{e}_1\,,\vec{e}_2\}$ и $\{\vec{e}_{1'}\,,\vec{e}_{2'}\}$ оказались разноименными по отношению друг к другу. Вместе с ними оказалась различной и ориентация плоскостей Π и Π', что привносит путаницу в задачу. Приведенный пример обнаруживает существование *аффинного инварианта*: оказалось, что принадлежность точки выпуклой фигуре не зависит от выбора аффинной системы координат. Вместе с тем этот пример показывает, что в задачах с применением аффинного репера нужно, по крайней мере, быть осторожным, не слишком полагаясь на "здравый смысл".

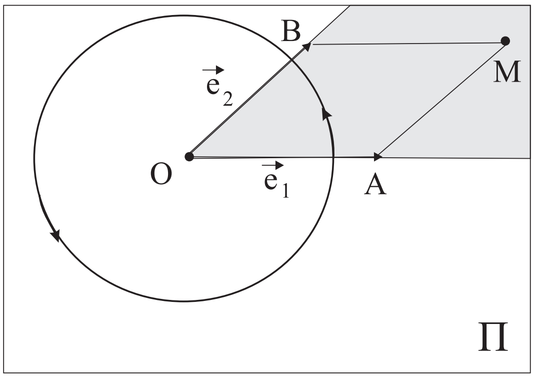


Рис.IX.26a.

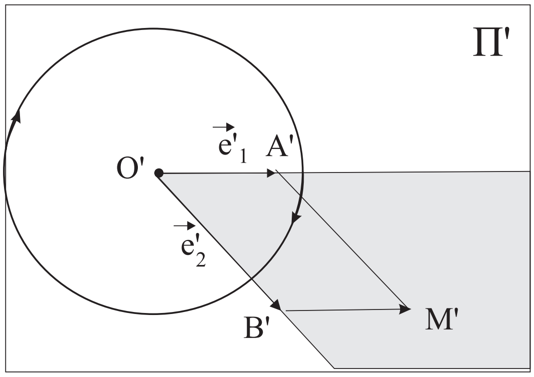


Рис.IX.26b.

[2]От латинского "invarians" - неизменность, - соответствует греческому "$\kappa\omega\nu\sigma\tau\alpha\nu\tau\epsilon$" (константа) - постоянный, неизменный, хотя и употребляются в разных случаях.

[3]Т.е., содержащийся в развернутом.

Глава X

Инварианты аффинных преобразований

X.1 Простейшие аффинные инварианты

В соответствии с поставленным в конце предыдущего раздела IX вопросом исследуем простейшие инварианты аффинных преобразований, т.е., свойства фигур и отношения, не зависящие от выбора аффинного репера. Как мы отмечали в разделе VI, аффинное преобразование задается упорядоченной парой аффинных реперов $\Re\{O\,;\{\vec{e}_i\,\}_n\}$ и $\Re'\{O'\,;\{\vec{e}_{'k}\,\}_n\}$, причем каждая точка M, имеющая в репере $\Re$ координаты $(x^1, x^2, \ldots, x^n)$, переходит в точку $M' = f(M)$, имеющую в новом репере $\Re$ те же координаты $\{x^i\}$: $M'(x^i)$.

В то же время аффинное преобразование порождает автоморфизм пространства переносов V, задаваемый упорядоченной парой базисов $\{\vec{e}_i\,\}_n$ и $\{\vec{e}_{'k}\,\}_n$: $f\;:\{\vec{e}_i\,\}_n \longrightarrow \{\vec{e}_{'k}\,\}_n$. При этом автоморфизме вектор $\vec{x}$, имеющий в базисе $\{\vec{e}_i\,\}_n$ координаты $\{x^i\}$, переходит в вектор $\vec{x}\,'$, имеющий в базисе $\{\vec{e}_{'k}\,\}_n$ те же координаты $\{x^i\}$ (см. раздел IV). Отсюда сразу следует, что *при аффинных преобразованиях коллинеарные векторы в пространстве переносов переводятся в коллинеарные, а компланарные - в компланарные.*

Теорема TX.1. *При аффинных преобразованиях прямая переходит в прямую.*

Доказательство: $\langle\langle$ Пусть прямая $d(M_0;\,\overrightarrow{q})$ в репере $\Re$ определяется параметрическими уравнениями (VII.13):

$$x^i = x_0^i + \lambda q^i\,, \qquad (i = \overline{1,n})\,, \tag{X.1}$$

где x^i - координаты произвольной точки M прямой d: $M(x^i) \in d$, x_0^i - координаты опорной точки $M(x_0^i)$ прямой, q^i - координаты направляющего вектора $\vec{q}$. При аффинном преобразовании $f\;:\Re \longrightarrow \Re'$ точки перейдут в свои образы: $f(M) = M'$, $f(M_0) = M_0'$, имеющие в репере $\Re'$ те же самые координаты $\{x^i\}$ и $\{x_0^i\}$, соответственно.

Поэтому координаты точки $M' = f(M)$ в репере $\Re'$ автоматически будут удовлетворять той же системе уравнений (X.1), что и координаты ее прообраза - точки M в репере $\Re$. Геометрическое же место точек, описываемое уравнениями (X.1), есть прямая $d'(M_0';\,\vec{q}/,')$:

$$f(d) = d\,'(M_0'\,, \vec{q}\,')\,,$$

причем:

$$f(M_0) = M_0'(x_0^i)\,; \qquad \overrightarrow{O'M_0'} = x_0^i\vec{e}_{'i}\;;$$
$$\vec{q}\,' = q^i\vec{e}_{'i}\;. \tag{X.2}$$

Таким образом, если $M \in d$, то образ этой точки $M' = f(M) \in d\,'$. Если же $M \notin d$, то и $f(M) \notin d\,'$. $\rangle\rangle$

Теорема TX.2. *При аффинных преобразованиях пара параллельных прямых переходит в пару параллельных прямых.*

Доказательство: $\langle\langle$ Итак, пусть $d_1(M_1;\, \vec{q_1}) \parallel d_2(M_2;\, \vec{q_2})$, тогда согласно [OIX.3] коллинеарны направляющие векторы этих прямых, т.е., $\vec{q}_2 = \lambda \vec{q}_1$, и прямые не имеют общих точек: $d_1 \cap d_2 = \varnothing$. При аффинном преобразовании каждая из этих прямых перейдет в прямую:

$$d_1(M_1;\, \vec{q_1}) \longrightarrow d\,'_1(M'_1;\, \vec{q'_1})\,;$$

$$d_2(M_2;\, \vec{q_2}) \longrightarrow d\,'_2(M'_2;\, \vec{q'_2})\,,$$

где M'_p и $\vec{q}\,'_p$ определяются с помощью соотношений (X.2). Поскольку направляющие векторы $\vec{q}\,'_1$ и $\vec{q}\,'_2$ имеют в новом базисе те же координаты, что и векторы $\vec{q}_1$ и $\vec{q}_2$ в старом базисе, то из соотношения $\vec{q}_2 = \lambda \vec{q}_1$ следует: $\vec{q}\,'_2 = \lambda \vec{q}\,'_1$. Так как $d_1 \cap d_2 = \varnothing$, то и $d\,'_1 \cap d\,'_2 = \varnothing$, т.е., $d\,'_1 \parallel d\,'_2$. $\rangle\rangle$

Теорема TX.3. *При аффинных преобразованиях пара пересекающихся прямых переходит в пару пересекающихся прямых.*

Доказательство: $\langle\langle$ Пусть $d_1(M_1;\, \vec{q_1}) \cap d_2(M_2;\, \vec{q_2}) = A$;

$$\Rightarrow A \in d_1\,;\; A \in d_2 \Rightarrow f(A) = A' \in d\,'_1\,, A' \in d_2\,.$$

Пусть: $M \in d_1$ и $M \notin d_2 \Rightarrow M' \in d\,'_1$, $M' \notin d'_2$. Пусть теперь, наоборот, - $M \notin d_1$ и $M \in d_2 \Rightarrow M' \notin d\,'_1$, $M' \in d'_2$. Таким образом, $d\,'_1 \cap d\,'_2 = A'$. $\rangle\rangle$

Теорема TX.4. *При аффинных преобразованиях сохраняется простое отношение трех точек.*

Доказательство: $\langle\langle$ Пусть $A, B, C \in d$ и $\mu(ABC) = \lambda \Rightarrow \overrightarrow{AB} = \lambda\overrightarrow{BC}$. Пусть: $A' = f(A)$, $B' = f(B)$, $C' = f(C)$ $d\,' = f(d) \Rightarrow A', B', C' \in d\,'$. Так как образы точек $A, B, C \to A', B', C'$ в репере $\Re'$ имеют те же координаты, что и точки A, B, C в репере $\Re \Rightarrow \overrightarrow{A'B'} = \lambda\overrightarrow{B'C'} \Rightarrow \mu(A', B', C') = \lambda$, т.е.:

$$\mu'(A'B'C') = \mu(ABC)\,. \tag{X.3}$$

$\rangle\rangle$

Теорема TX.5. *При аффинных преобразованиях отрезок переходит в отрезок, а луч - в луч.*

Доказательство: $\langle\langle$ Согласно [OVII.2], [OVII.3] отрезки и лучи определяются как множества точек прямой с помощью простого отношения трех точек. Но прямая при аффинных преобразованиях согласно [TX.1] переходит в прямую, а простое отношение трех точек согласно [TI.4] сохраняется. $\rangle\rangle$

Вследствие указанных инвариантов аффинных преобразований плоский угол (как фигура, образованная двумя лучами с общей вершиной) при аффинных преобразованиях переходит в плоский угол. Возникает вопрос: является ли выпуклость (невыпуклость) угла инвариантом аффинных преобразований?

Рассмотрим на плоскости Π два угла Γ_1 и Γ_2, образованные двумя лучами $[OA)$, $[OB) \in \Pi$, не лежащими на одной прямой, так что: $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \Omega = [OA) \cup [OB)$. Выберем аффинный репер $\Re\{O, A, B\}$, так что координаты внутренних точек $M_1(x_1, y_1)\,, M_2(x_2\,, y_2)$ углов Γ_1, Γ_2 удовлетворяют условиям (раздел IX):

$$M_1(x_1\,, y_1)\;|\; x_1 > 0\,;\;\; y_1 > 0\,;$$

$$M_2(x_2\,, y_2)\left|\begin{array}{ll} x_2 > 0\,; & y_2 < 0\,; \\ x_2 < 0\,; & y_2 \geq 0\,; \\ x_2 < 0\,; & y_2 < 0\,. \end{array}\right\} \tag{X.4}$$

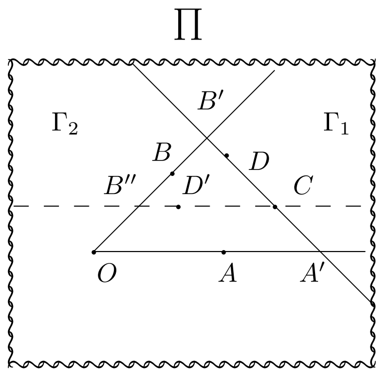


Рис.X.27. *К доказательству теоремы TX.5*

Докажем, что угол Γ_1 - выпуклый, а Γ_2 - невыпуклый. **Доказательство:** $\langle\langle$ Рассмотрим две произвольные внутренние точки угла Γ_1: $C(x_C\,, y_C)$, $D(x_D\,, y_D)$; координаты этих точек согласно (X.4) удовлетворяют соотношениям:

$$C \mid x_C > 0\,, \quad y_C > 0\,; \tag{X.5}$$

$$D \mid x_D > 0\,, \quad y_D > 0\,. \tag{X.6}$$

Построим прямую (CD):

$$\frac{x - x_C}{x_D - x_C} = \frac{y - y_C}{y_D - y_C}\,. \tag{X.7}$$

Пусть сначала $x_D - x_C \neq 0$ и $y_D - y_C \neq 0$. Тогда прямая (CD) пересекается с прямыми (OA) и (OB). Найдем координаты точек пересечения:

$$A' = (OA) \cap (CD) \mid y_{A'} = 0\,;\; x_{A'} = x_C - y_C \frac{x_D - x_C}{y_D - y_C}\,;$$

$$B' = (OB) \cap (CD) \mid x_{B'} = 0\,;\; y_{B'} = y_C - x_C \frac{y_D - y_C}{x_D - x_C}\,.$$

Таким образом,

$$\overrightarrow{CA'} = \left(-y_C \frac{x_D - x_C}{y_D - y_C}\,; y_C\right)\,;$$

$$\overrightarrow{CD} = (x_D - x_C\,; y_D - y_C)\,,$$

т.е.:

$$\overrightarrow{CA'} = \lambda_{A'} \overrightarrow{CD}\,, \qquad \lambda_{A'} = -\frac{y_C}{y_D - y_C}\,. \tag{X.8}$$

Возможны два случая:

1. $\lambda_{A'} < 0$. Тогда согласно (X.5), (X.6) $y_D > y_C$.

2. $\lambda_{A'} > 0$. Тогда $y_D < y_C$. Но в этом случае согласно (X.8) $\lambda_{A'} > 1$. Действительно: $\lambda_{A'} = y_C/(y_C - y_D) > 1$.

Итак, либо $\lambda_{A'} < 0$, либо $\lambda_{A'} > 1$, т.е., точка A' - внешняя по отношению к отрезку $[CD]$. Аналогично можно доказать, что точка B' - внешняя по отношению к отрезку $[CD]$.

Рассмотрим теперь случай, когда прямая (CD) параллельна одной из сторон угла, например, $(CD) \parallel (OA)$. В этом случае $y_C = y_D$, и уравнение прямой (CD) есть $y = y_C$. Прямая (CD) пересекает лишь одну сторону угла - $[OB)$ в точке $B'(0, y_C)$. Тогда: $\overrightarrow{CD} = (x_D - x_C\,; 0)$; $\overrightarrow{CB'} = (-x_C\,; 0)$, т.е.:

$$\overrightarrow{CB'} = \lambda_{B'} \overrightarrow{CD}\,, \qquad \lambda_{B'} = -\frac{x_C}{x_D - x_C}\,. \tag{X.9}$$

Опять, как и в случае (X.8), возможны два варианта: либо $\lambda_{B'} < 0$, либо $\lambda_{B'} > 1$, т.е., точка B' - внешняя по отношению к отрезку $[CD]$. Таким образом, любые две внутренние точки угла Γ_1 можно соединить отрезком прямой, не пересекающим сторон этого угла, т.е., угол Γ_1 - выпуклый. $\rangle\rangle$

Поскольку факт выпуклости угла Γ_1 установлен нами только лишь на основе простых отношений трех точек, а при аффинных преобразованиях угол переходит в угол, пара точек - в пару точек и сохраняется простое отношение трех точек, то тем самым мы доказали теорему:[1]

Теорема TX.6. *При аффинных преобразованиях выпуклый угол переходит в выпуклый угол, а невыпуклый угол - в невыпуклый.*

Эта теорема отвечает на вопрос, поставленный в конце предыдущего раздела IX.

X.2 Принадлежность двух точек одной полуплоскости

Рассмотрим теперь решение практически важных задач. Пусть на плоскости Π в некотором аффинном репере $\Re$ задана прямая d своим общим уравнением:

$$d: \quad Ax + By + C = 0\,, \tag{X.10}$$

и пусть указана одна из полуплоскостей Π_1 своей внутренней точкой $A(x_A\,, y_A)$. Пусть также задана своими аффинными координатами в репере $\Re$ другая точка $B(x_B\,, y_B)$, не лежащая на прямой d. *Требуется определить, какой полуплоскости принадлежит точка B?*
Построим прямую (AB):

$$(AB): \quad \frac{x - x_A}{x_B - x_A} = \frac{y - y_A}{y_B - y_A} = \mu\,. \tag{X.11}$$

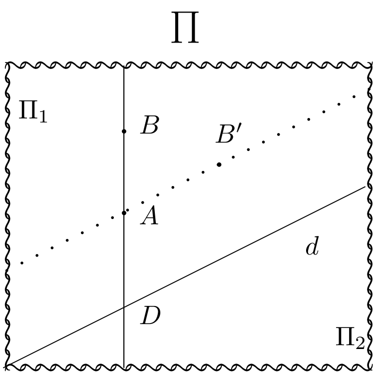


Рис.X.28. *Принадлежность двух точек одной полуплоскости*

Как следует из смысла канонического уравнения прямой (раздел VII), (X.11) представляет координатную запись векторного уравнения $\overrightarrow{AM} = \mu\overrightarrow{AB}$, причем простое отношение трех точек A, M, B (λ) выражается через μ с помощью соотношения (VII.9): $\lambda = \mu/(1-\mu)$. Допустим, что прямые (AB) и d пересекаются и $D = d \cap (AB)$.

Из (X.10), (X.11) найдем значение μ_D, соответствующее точке D:

$$\mu_D = -\frac{Ax_A + By_A + C}{A(x_B - x_A) + B(y_B - y_A)}\,. \tag{X.12}$$

Из (X.12) следует, что прямые (AB) и d параллельны, если:

$$A(x_B - x_A) + B(y_B - y_A) = 0\,, \tag{X.13}$$

(при этом $\mu = \pm\infty$). В этом случае точки A и B заведомо лежат в одной полуплоскости Π_1. Предположим, что прямые (AB) и d не параллельны, т.е., (X.13) не выполняется. Тогда с помощью (X.12) вычислим простое отношение трех точек A, D, B $(\overrightarrow{AD} = \lambda\overrightarrow{DB})$:

$$\xi_{A/B} \stackrel{def}{=} \lambda_D = -\frac{Ax_A + By_A + C}{Ax_B + By_B + C}\,. \tag{X.14}$$

[1]Невыпуклость угла устанавливается аналогичным способом, - для этого надо перебрать все возможные комбинации координат точки M согласно (X.4).

Очевидно, что если точка D является внутренней точкой отрезка $[AB]$, то точки A и B принадлежат разным полуплоскостям Π_1 и Π_2. Этому случаю отвечает $\lambda_D > 0$. Если же D - внешняя точка отрезка $[AB]$, то точки A и B принадлежат одной полуплоскости (в данном случае по условию Π_1). Этому случаю соответствует $\lambda < 0$. Заметим, что вследствие аффинной инвариантности простого отношения трех точек определение (X.14) также инвариантно. Заметим также, что вследствие (X.10) ни числитель, ни знаменатель дроби (X.14) не обращается в нуль, так как ни одна из точек A и B не лежит на прямой d. Итог можно оформить в виде теоремы:

Теорема TX.7. *Пусть плоскость Π делится прямой d, заданной в произвольном аффинном репере $\Re$ общим уравнением (X.10), на части Π_1' и Π_2' ($\Pi_a = \Pi_a' \cup d$ - соответствующие полуплоскости) и пусть $A(x_A\,, y_A)$ и $B(x_B\,, y_B)$ - произвольные точки плоскости Π, не лежащие на прямой d. Определим для произвольной точки плоскости $M_*(x_*\,, y_*)$ число $\delta_{M_*} = Ax_* + By_* + C$ и для пары точек A и B -*

$$\xi_{A/B} = \frac{\delta_A}{\delta_B} = \frac{Ax_A + By_B + C}{Ax_B + By_B + C}\,. \qquad \text{(X.15)}$$

Тогда необходимым и достаточным условием принадлежности точек A и B одной полуплоскости является:

$$\xi_{A/B} > 0 \Leftrightarrow A\,, B \in \Pi_1\,, \qquad \text{(X.16)}$$

а разным полуплоскостям -

$$\xi_{A/B} < 0 \Leftrightarrow (A \in \Pi_1\,,\ B \in \Pi_2)\,. \qquad \text{(X.17)}$$

Число $\xi_{A/B}$ является инвариантом аффинных преобразований для любой пары точек.

Необходимость мы доказали; достаточность доказывается элементарно с учетом инвариантности простого отношения трех точек специальным выбором аффинного репера, в котором уравнение прямой d имеет вид: $y = 0$. Необходимо также дополнительно рассмотреть и случай (X.13), соответствующий значению $\xi_{A/B} = 1$.

Определение OX.1. *Говорят, что две точки лежат по одну сторону от прямой, если они лежат в одной полуплоскости, определяемой этой прямой. Если же две точки лежат в разных полуплоскостях, говорят, что они лежат по разные стороны от прямой.*

X.3 Принадлежность двух точек одному углу

Пусть на плоскости Π двумя лучами $[CA)$ и $[CB)$ с общей вершиной C, не лежащими на одной прямой, заданы два угла Γ_1 и Γ_2, из которых Γ_1 - выпуклый, а Γ_2 - невыпуклый. Пусть далее в некотором аффинном репере $\Re\{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ на плоскости Π заданы координаты точек: $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$, $C(x_C, y_C)$.

Как определить, какому из углов, - Γ_1 или Γ_2, принадлежит точка $P(x_P, y_P)$?

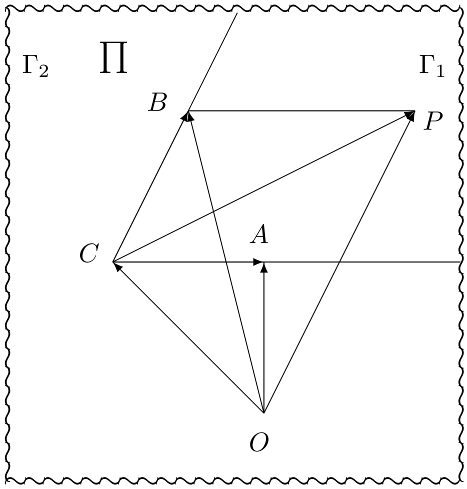


Рис.X.29. *Принадлежность двух точек одному углу*

Поскольку точки $A\,,B\,,C$ не лежат на одной прямой, они могут быть использованы для построения нового аффинного репера $\Re'$ на плоскости Π : $\Re'\{C\,,A\,,B\}\equiv\Re'\{C\,;\overrightarrow{CA}\,,\overrightarrow{CB}\}$. Разложим вектор $\overrightarrow{CP}$ по векторам базиса пространства переносов V_2 $\{\overrightarrow{CA}\,,\overrightarrow{CB}\}$:

$$\overrightarrow{CP}=\lambda\overrightarrow{CA}+\mu\overrightarrow{CB}\,. \qquad \text{(X.18)}$$

Упорядоченная пара чисел $(\lambda\,,\mu)$ является координатами точки P в репере $\Re'$. Как мы видели выше, условием принадлежности точки P выпуклому углу в репере $\Re'$, построенном на его сторонах, является:

$$P(\lambda\,,\mu)\mid\lambda>0\,,\mu>0\,.$$

Если $\lambda=0\,,\mu>0$ или $\lambda>0\,,\mu=0$, - точка P лежит на одной из сторон угла; значение $\lambda=0$, $\mu=0$ соответствует вершине угла - точке C. Любые другие случаи означают, что точка P принадлежит невыпуклому углу Γ_2. Используя правило треугольника ($\overrightarrow{CP}=\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OC}$; $\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OC}$; $\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC}$) и определение аффинных координат точек $A\,,B\,,C$, перепишем (X.18) относительно репера $\Re$:

$$x_P-x_C=\lambda(x_A-x_C)+\mu(x_B-x_C)\,;$$

$$y_P-y_C=\lambda(y_A-y_C)+\mu(y_B-y_C)\,. \qquad \text{(X.19)}$$

Разрешая систему (X.19) относительно λ и μ по правилу Крамера, найдем :

$$\lambda=\frac{\Delta(P,B\,;C)}{\Delta(A,B\,;C)}\;;\qquad \mu=\frac{\Delta(A,P\,;C)}{\Delta(A,B\,;C)}\;, \qquad \text{(X.20)}$$

где введено обозначение:

$$\Delta(A,B\,;C)\stackrel{def}{=}\begin{vmatrix} x_A-x_C & x_B-x_C \\ y_A-y_C & y_B-y_C \end{vmatrix}. \qquad \text{(X.21)}$$

Числа $\Delta(A,B\,;C)$ обладают следующими свойствами:

Свойство $\bar{\text{С}}$X.1. *Числа $\Delta(A,B\,;C)$ обращаются в нуль тогда и только тогда, когда 3 точки $A\,,B\,,C$ лежат на одной прямой (сюда относится и случай, когда 2 точки совпадают).*

Свойство $\bar{\text{С}}$X.2. *Числа $\Delta(A,B\,;C)$ изменяют знак при перестановке первых двух точек:*

$$\Delta(A,B\,;C)=-\Delta(B,A\,;C)\,. \qquad \text{(X.22)}$$

Вычисляя выражения (X.20) и определяя знаки λ и μ, получим решение поставленной задачи, инвариантное по отношению к аффинным преобразованиям.

Указанную выше задачу можно решить и другим способом.

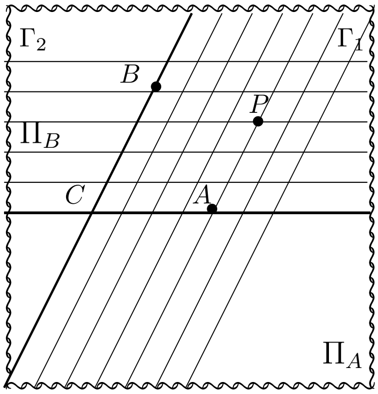


Рис.X.30. *Принадлежность двух точек одному углу. 2-й подход.*

Выпуклый угол Γ_1 можно представить как пересечение двух полуплоскостей: $\Gamma_1 = \Pi_A \cap \Pi_B$, первая из которых, Π_A определяется прямой (CB) и содержит точку A: $\Pi_A = \Pi_1((CB), A)$, а вторая, Π_B, определяется прямой (CA) и содержит точку B: $\Pi_B = \Pi_2((CA), B)$. Уравнения прямых (CA) и (CB) согласно (VIII.9) имеют вид:

$$(CA)\ : \Delta(M, A\,; C) = \begin{vmatrix} x - x_C & x_A - x_C \\ y - y_C & y_A - y_C \end{vmatrix} = 0\,;$$

$$(CB)\ : \Delta(M, B\,; C) = \begin{vmatrix} x - x_C & x_B - x_C \\ y - y_C & y_B - y_C \end{vmatrix} = 0\,.$$

Соответствующие общие уравнения прямых имеют коэффициенты:

$$(CA)\ : \quad A = y_A - y_C\,;\ B = -(x_A - x_C)\,;$$
$$C = -x_C(y_A - y_C) + y_C(x_A - x_C)\,;$$
$$(CB)\ : \quad A' = y_B - y_C\,;\ B' = -(x_B - x_C)\,;$$
$$C' = -x_C(y_B - y_C) + y_C(x_B - x_C)\,.$$

Составляя в соответствие с [TX.7] инварианты $\xi_{P/A}\,, \xi_{P/B}$, получим:

$$\xi_{P/A} = \lambda\,, \qquad \xi_{P/B} = \mu\,, \tag{X.23}$$

и, таким образом, получим критерий принадлежности точки P выпуклому углу Γ_1.

Теорема TX.8. *Для того, чтобы точка P принадлежала выпуклому углу Γ_1, необходимо и достаточно, чтобы ее координаты удовлетворяли условиям:*

$$P \in \Gamma_1 \quad \Leftrightarrow \quad \xi_{P/A} > 0\,; \quad \xi_{P/B} > 0\,. \tag{X.24}$$

X.3.1 Примеры

Пример ПX.1. *Выяснить, лежат ли точки $A(1,1)$ и $B(-3,4)$ по одну сторону от прямой d :* $x - y + 1 = 0$.

Решение

Найдем: $\delta_A = 1$; $\delta_B = -6$; $\xi_{A/B} = -1/6 < 0$.

Точки A и B лежат по разные стороны от прямой d.

Пример ПX.2. *2*

Выяснить, лежат ли точка $A(1,1)$ и начало аффинного репера по одну сторону от указанной прямой.

Решение

Началом аффинного репера является точка $O(0,0)$, для которой найдем: $\delta_O = C = 1$. Таким образом, $\xi_{O/A} = 1 > 0$.

Начало аффинного репера и точка A лежат по одну сторону от прямой d.

Пример ПX.3. *На плоскости заданы два луча* $[CA)$ *и* $[CB)$ *с общей вершиной* C, *причем* $A(2,2)$, $B(3,4)$, $C(1,-1)$. *Определить, какому из углов принадлежит точка* $P(5,6)$.

Решение

Итак, согласно (X.20), (X.21) найдем:

$$\Delta(A,B\,;C) = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = -1\,; \quad \Delta(P,B\,;C) = \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 7 & 5 \end{vmatrix} = 6\,;$$

$$\Delta(A,P\,;C) = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} = -5\,.$$

Таким образом: $\lambda = 6 : (-1) = -6$, $\mu = (-5) : (-1) = +5$, *т.е., точка* P *принадлежит невыпуклому углу* Γ_2.

Глава XI

Стандартные аффинные теоремы школьного курса планиметрии

XI.1 Многоугольники

Определение OXI.1. *Замкнутая несамопересекающаяся ломаная линия* $[A_1A_2\dots A_nA_1]$ *(*$n \geq 3$*) на плоскости* Π *называется n-угольником. Точки* $A_1, A_2, \dots, A_n$ *называются вершинами n-угольника, отрезки* $[A_1A_2]$, $[A_2A_3]$, ...,$[A_nA_1]$ *- его сторонами. Стороны n-угольника, имеющие общую вершину, называются смежными сторонами. Многоугольник обозначается последовательным перечислением его вершин, говорят: " n-угольник* $A_1A_2\dots A_n$*".*

Многоугольник $A_1A_2\dots A_n$ можно дополнить отрезками $[A_1A_3]$, ...,$[A_1A_{n-1}]$, $[A_2A_n]$,..., которые называются *диагоналями многоугольника.* Таким образом, у n-угольника n вершин и n сторон. Тогда из [TX.1] — [TX.5] следует теорема.

Теорема TXI.1. *При аффинных преобразованиях n-угольник переходит в n-угольник.*

Доказательство: $\Big\langle\Big\langle$ Действительно, вершины n-угольника образованы парами пересекающихся прямых, поэтому при аффинных преобразованиях вершины переходят в вершины. Новых вершин не появляется, так как они соответствовали бы дополнительным пересечениям сторон прообраза. Стороны же, как отрезки прямых, переходят в стороны же. Таким образом, свойство n-угольника быть n-угольником является аффинным инвариантом. $\Big\rangle\Big\rangle$

Итак, n-угольник в значительной степени определяется натуральным числом $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$. Из приведенного ниже примера становится ясным, для чего в [OXI.1] используется уточнение - "несамопересекающаяся".

В первом случае имеем четырехугольник, а во втором - два треугольника с общей вершиной O.

Примечание 1

В принципе, можно расширить класс многоугольников, включая в него и многоугольники, построенные на самопересекающихся и нескольких замкнутых ломаных. Такие многоугольники называются непростыми, или - звездчатыми, в отличие от определенных выше, которые в этом случае называются простыми. Для полной характеристики таких многоугольников недостаточно задания числа вершин n, необходимо задавать упорядоченную тройку натуральных чисел $Z = (n; p; s) \in \mathbb{N}^3$, где n - число вершин, p - число сторон, s - число взаимопересечений сторон. Очевидно, что характеристика $Z = (n; p; s)$ звездчатых многоугольников также является аффинным инвариантом. С этой точки зрения все простые многоугольники имеют характеристику $(n; n; 0)$. Если при этом наложить ограничение, чтобы из каждой вершины выходило две и только две стороны, т.е., ограничиться непростыми многоугольниками с характеристикой вида $(n; n; s)$, достаточно легко провести классификацию возможных типов многоугольников по числу вершин.

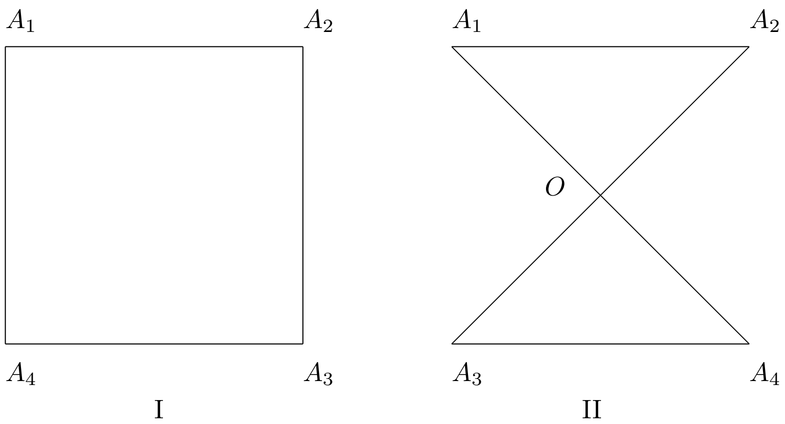


Рис.XI.31. *Простой и самопересекающийся четырехугольники*

1. n = 3. Возможен всего один тип: $Z = (3; 3; 0)$ - простой треугольник;
2. n = 4. Возможны два типа: 1. $Z = (4; 4; 0)$ - простой четырехугольник; 2. $Z = (4; 4; 1)$ (оба эти случаи показаны на приведенном выше рисунке);
3. n = 5. Возможны три типа: 1. $Z = (5; 5; 0)$ - простой пятиугольник; 2. $Z = (5; 5; 2)$; 3. $Z = (5; 5; 5)$ - пятиугольная звезда;
4. n = 6. Возможны пять типов: 1. $Z = (6; 6; 0)$; 2. $Z = (6; 6; 2)$; 3. $Z = (6; 6; 4)$; 4-5. два типа с одной аффинной характеристикой $Z = (6; 6; 6)$;
5. и т.д. ....

Читатель может поупражняться в рисовании многоугольников по их аффинной характеристике Z и попытаться продолжить классификацию. Заметим, что среди приведенных типов многоугольников есть вырожденные, подобные четырехугольнику $(4; 4; 1)$, показанному на рисунке. Эти вырожденные многоугольники сводятся к объединению многоугольников с меньшим числом вершин и имеющих конечное число общих точек. Если исключить из рассмотрения такие вырожденные многоугольники, то классификация многоугольников по их аффинной характеристике Z упростится:

1. n = 3. Один тип: (3;3;0);
2. n = 4. Один тип: (4;4;0);
3. n = 5. Два типа: (5;5;0) и (5;5;5);
4. n = 6. Два типа: (6;6;0) и (6;6;6);
5. и т.д.............

В дальнейшем мы будем рассматривать, в основном, простые многоугольники.

Примечание 2

При вейлевском подходе к решению задач о многоугольниках сторонам многоугольника как отрезкам сопоставляются векторы
$[A_iA_k] \to \overrightarrow{A_iA_k}$. При этом используется правило треугольника (AV.2) и его следствие (V.4). В дальнейшем мы будем помечать задачи, решаемые без применения аффинного репера, символом $\boxed{\text{БК}}$ (бескоординатный метод), а решаемые с помощью специального выбора аффинного репера, - символом $\boxed{\text{АР}}$ (аффинный репер). В этом последнем случае мы должны всякий раз обосновывать использование аффинного репера, т.е., доказывать, что исследуемые в задаче свойства являются аффинными инвариантами. Напомним, что к аффинным относятся задачи, не связанные с применением *меры* угла

и длины. Сравниваться могут лишь параллельные отрезки, или углы, образованные параллельными лучами.[1] Поэтому мы, например, не можем дать определение биссектрисы угла или высоты треугольника, но зато можем определить его медиану и среднюю линию. Говоря же о соотношении параллельных сторон, мы, если быть строгими, понимаем это соотношение не как соотношение длин, а в смысле простого отношения трех точек.

XI.2 Теорема о средней линии треугольника

Определение OXI.2. *Средней линией треугольника называется отрезок, соединяющий середины двух его сторон.*

Теорема TXI.2. *Средняя линия треугольника, соединяющая середины двух данных сторон, параллельна его третьей стороне и равна ее половине.*

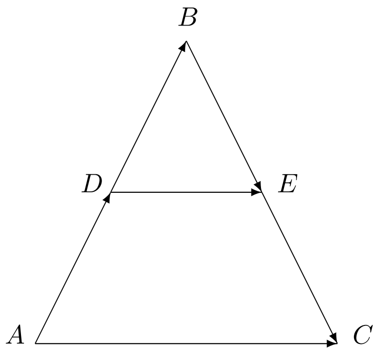


Рис.XI.32. *К теореме о средней линии треугольника*

$\boxed{\text{БК}}$ Переложим условия теоремы [2] на векторный язык.

Дано:
$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{DB}$; $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{EC}$. Требуется доказать, что: $\overrightarrow{DE} = 1/2\overrightarrow{AC}$.

Доказательство: $\langle\langle$ По правилу треугольника (AV.2) имеем: $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{BE}$, но $\overrightarrow{DB} = 1/2\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{BE} = 1/2\overrightarrow{BC} \Rightarrow \overrightarrow{DE} = 1/2(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) \Rightarrow \overrightarrow{DE} = 1/2\overrightarrow{AC}$. $\rangle\rangle$

XI.3 Теорема о средней линии трапеции

Определение OXI.3. *Трапецией называется четырехугольник, у которого две и только две стороны параллельны. Эти параллельные стороны называются основаниями трапеции, а две другие - боковыми сторонами.*

Из [TX.2] следует, что при аффинных преобразованиях трапеция переходит в трапецию.

Определение OXI.4. *Средней линией трапеции называется отрезок, соединяющий середины боковых сторон.*

Отметим, что вследствие инвариантности простого отношения трех точек средние линии треугольника и трапеции при аффинных преобразованиях переходят в средние линии образов этих фигур.

Теорема TXI.3. *Средняя линия трапеции параллельна основаниям и равна их полусумме.*

[1] Можно также говорить о выпуклости и невыпуклости угла.

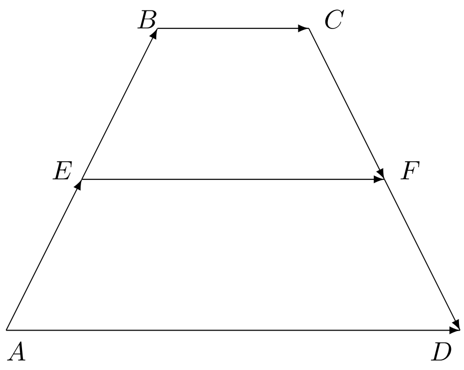


Рис.XI.33. *К теореме о средней линии трапеции*

$\boxed{\text{БК}}$ Переложим условия теоремы [3] на векторный язык.
Дано:
$\overrightarrow{BC} = \lambda\overrightarrow{AD}$; $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{EB} = 1/2\overrightarrow{AB}$. $\overrightarrow{CF} = \overrightarrow{FD} = 1/2\overrightarrow{CD}$. Требуется доказать, что:
$\overrightarrow{EF} = 1/2(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC})$.
Доказательство: $\langle\langle$ Из $EBCF$ имеем:
$\overrightarrow{EB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CF} + \overrightarrow{FE} = \vec{0} \Rightarrow$:

$$\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{EB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CF} = 1/2(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}) + \overrightarrow{BC}\,. \tag{XI.1}$$

Из $ABCD$ имеем:

$$\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{BC}\,. \tag{XI.2}$$

$$(XI.1), (XI.2) \Rightarrow \overrightarrow{EF} = 1/2(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{BC}) + \overrightarrow{BC} = 1/2(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC})\,.$$

Но $\overrightarrow{BC} = \lambda\overrightarrow{AD} \Rightarrow$

$$\overrightarrow{EF} = 1/2(1+\lambda)\overrightarrow{AD} \Rightarrow (EF) \parallel (AD)\,.$$

$\rangle\rangle$

XI.4 Теоремы о параллелограммах

Определение OXI.5. *Сторона простого четырехугольника, не смежная с данной стороной, называется противолежащей этой стороне.*

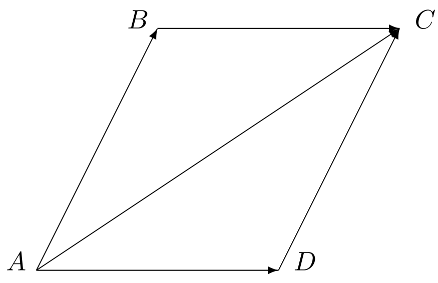


Рис.XI.34. *Параллелограмм ABCD*

Определение OXI.6. *Четырехугольник, у которого пары противолежащих сторон параллельны, называется параллелограммом.*

Очевидно, что вследствие [TX.2] при аффинных преобразованиях параллелограмм переходит в параллелограмм.
Таким образом, вейлевское определение параллелограмма будет следующим:

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{DC} = \lambda\overrightarrow{AB}\,; \quad \forall\lambda \in \mathbb{R}\backslash 0 \\ \overrightarrow{AD} = \mu\overrightarrow{BC}\,; \quad \forall\mu \in \mathbb{R}\backslash 0 \end{array}\right\} \tag{XI.3}$$

Теорема TXI.4. *Противолежащие стороны параллелограмма равны.*

Доказательство: $\langle\langle$ $\boxed{\text{БК}}$ Из правила треугольника следует: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AC}$ $\Rightarrow \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}$. Таким образом, из (XI.3) следует:

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\mu\overrightarrow{BC}+\lambda\overrightarrow{AB}\Rightarrow$$

$$(1-\lambda)\overrightarrow{AB}+(1-\mu)\overrightarrow{BC}=\vec{0}\,.$$

Вследствие линейной независимости (т.е., в данном случае неколлинеарности) векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BC}$ (иначе нарушилось бы определение [OIX.1] ломаной линии [ABC]) последнее векторное равенство может выполняться лишь при условии [OI.4]: $(1-\lambda)=0$; $(1-\mu)=0$, $\Rightarrow \lambda=\mu=1\Rightarrow$

$$\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AB}\,;\qquad \overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}\,. \tag{XI.4}$$

$\rangle\rangle$

Заметим попутно, что аффинного определения ромба мы дать не можем, так как для его определения необходимо сравнивать неколлинеарные векторы.

Теорема TXI.5. *Диагонали параллелограмма пересекаются и точкой пересечения делятся пополам.*

Эту известную теорему мы можем доказывать с помощью произвольного выбора аффинного репера, так как предметом теоремы является выяснение наличия пересечения двух прямых и определение простого отношения трех точек $\mu(BOD)$. И то и другое являются аффинными инвариантами.

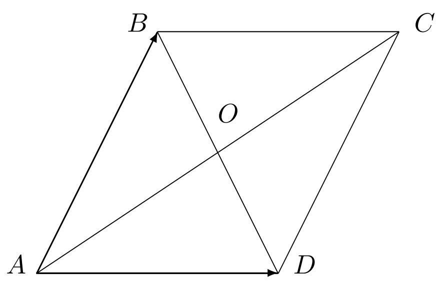


Рис.XI.35. *К доказательству теоремы о диагоналях параллелограмма*

Доказательство: $\langle\langle$ $\boxed{\text{АР}}$ Введем аффинный репер $\Re\{A\,,\overrightarrow{AD}\,,\overrightarrow{AB}\}$. В этом репере вершины $ABCD$ имеют следующие координаты:

$$A(0,0)\,;\ B(0,1)\,;\ C(1,1)\,;\ D(1,0)\,.$$

Воспользуемся уравнением прямой, проходящей через две заданные точки, (VII.15), для определения диагоналей (AC) и (BD).

$$(AC)\ :\quad \frac{x}{1}=\frac{y}{1}\,;\qquad (BD)\ :\quad \frac{x}{1}=\frac{y-1}{-1}\Rightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & y\\ x & = & 1-y\end{array}\right.\Rightarrow \exists\, O=(AC)\cap(BD)\mid O\left(\frac{1}{2}\,,\frac{1}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AO}=\left(\frac{1}{2}\,,\frac{1}{2}\right)\Rightarrow \overrightarrow{AO}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\,.$$

$\rangle\rangle$

Теорема TXI.6. *(Обратная). Если диагонали четырехугольника пересекаются и точкой пересечения делятся пополам, то этот четырехугольник - параллелограмм.*

Дано:

$$ABCD\,;\ \exists O=[AC]\cap[BD]\mid$$

$$\overrightarrow{AO} = 1/2\overrightarrow{AC}\,;$$

$$\overrightarrow{BO} = 1/2\overrightarrow{BD}\,.$$

Доказать, что $ABCD$ - параллелограмм.

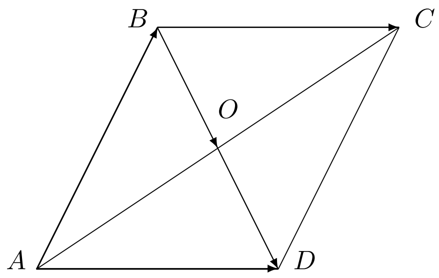


Рис.XI.36. *К доказательству обратной теоремы о параллелограмме*

Доказательство: $\langle\langle$ $\boxed{\text{БК}}$

$$\overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{BC} \Rightarrow 1/2\overrightarrow{BD} + 1/2\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BC}\,; \tag{XI.5}$$

$$\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{AD} \Rightarrow 1/2\overrightarrow{AC} + 1/2\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD}\,. \tag{XI.6}$$

$$(XI.5)\,,(XI.6) \Rightarrow \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}\,,$$

и т.д. $\rangle\rangle$

XI.5 Теорема о медианах треугольника

Определение OXI.7. *Медианой треугольника, проведенной из вершины на противолежащую сторону, называется отрезок, соединяющий эту вершину с серединой противолежащей стороны.*

Очевидно, что при аффинных преобразованиях медиана треугольника переходит в медиану его образа.

Теорема TXI.7. *Медианы треугольника пересекаются в одной точке и точкой пересечения делятся в отношении 1 : 2.*

Независимость вывода этой теоремы[4] от выбора аффинного репера обеспечивается [TX.3], [TX.4].

$\boxed{\text{АР}}$ Итак, дано:

$$\overrightarrow{AE} = 1/2\overrightarrow{AB}\,;$$

$$\overrightarrow{BF} = 1/2\overrightarrow{BC}\,.$$

$$\overrightarrow{AG} = 1/2\overrightarrow{AC}\,.$$

Доказать, что $\exists O = [AF] \cap [BG] = [AF] \cap [CE] \mid \overrightarrow{OF} = 1/2\overrightarrow{AO};\ \overrightarrow{OE} = 1/2\overrightarrow{CO};\ \overrightarrow{OG} = 1/2\overrightarrow{BO}$.

[4]Эта важная и обязательная в прошлом теорема часто вообще опускается из курса школьной геометрии.

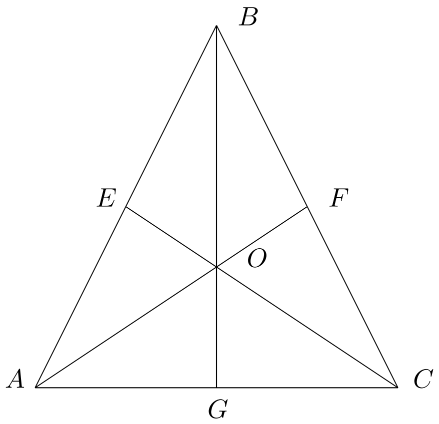


Рис.XI.37. *К теореме о медианах треугольника*

Доказательство: $\langle\langle$ Введем аффинный репер: $\Re\{A;\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AB}\}$. Координаты вершин A,B,C в этом репере: $A(0,0)$, $B(0,1)$, $C(1,0)$. Координаты точек E,F,G находятся по формулам (VII.16) или (VII.17) как координаты точек, делящих отрезок в данном отношении: $E(0,1/2)$, $F(1/2,1/2)$, $G(1/2,0)$.
Уравнения медиан:

$$(AF)\ :\quad \frac{x}{1/2}=\frac{y}{1/2}\Rightarrow x-y=0\,; \tag{XI.7}$$

$$(BG)\ :\quad \frac{x}{1/2}=\frac{y-1}{-1}\Rightarrow 2x+y=1\,; \tag{XI.8}$$

$$(CE)\ :\quad \frac{x-1}{-1}=\frac{y}{1/2}\Rightarrow x+2y=1\,. \tag{XI.9}$$

Выпишем основную и расширенную матрицы системы (XI.7) — (XI.8) и проведем эквивалентные преобразования:

$$\left[\begin{array}{rr|r} 1 & -1 & 0\\ 2 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 1\end{array}\right]\sim\left[\begin{array}{rr|r} 1 & -1 & 0\\ 1 & -1 & 0\\ 1 & 2 & 1\end{array}\right]\sim\left[\begin{array}{rr|r} 1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 1\end{array}\right],$$

откуда видно, что ранги основной и расширенной матриц совпадают и равны 2. Из теории систем линейных алгебраических уравнений сразу следует, что существует единственное решение системы (XI.7) — (XI.9), соответствующее искомой точке O, в которой пересекаются три медианы. Решая любые два уравнения из системы (XI.7) — (XI.9), найдем: $O(1/3\,;1/3)$. Тогда $\overrightarrow{OA}=(1/3\,;1/3)$, но так как $\overrightarrow{AF}=(1/2\,;1/2)$, то отсюда сразу получим

$$\overrightarrow{OF}=\overrightarrow{AF}-\overrightarrow{AO}=(1/6\,;1/6)\,.$$

Таким образом:

$$\overrightarrow{OF}=1/2\overrightarrow{AO}\Rightarrow\lambda(AOF)=2:1\,.$$

$\rangle\rangle$

Глава XII

Аффинные теоремы об углах и пучках прямых

XII.1 Теорема Фалеса

Теорема TXII.1. *(теорема Фале́са). Если параллельные прямые, пересекающие стороны угла, отсекают на одной его стороне равные отрезки, то они отсекают равные отрезки и на другой его стороне.*

Мы дадим обобщение[1] этой теоремы.

Теорема TXII.2. *(теорема о пропорциональных отрезках). Параллельные прямые отсекают на сторонах угла пропорциональные отрезки.*

Итак, дано: $(A_3B_3) \parallel (A_1B_1) \Rightarrow$

$$\overrightarrow{A_3B_3} = \lambda \overrightarrow{A_1B_1}\,, \tag{XII.1}$$

аналогично:

$$\overrightarrow{A_2B_2} = \mu \overrightarrow{A_1B_1}\,, \tag{XII.2}$$

причем:

$$\lambda\,, \mu \in \mathbb{R}_+ \backslash \{0,1\}\,, \qquad \lambda \neq \mu\,. \tag{XII.3}$$

Доказать:

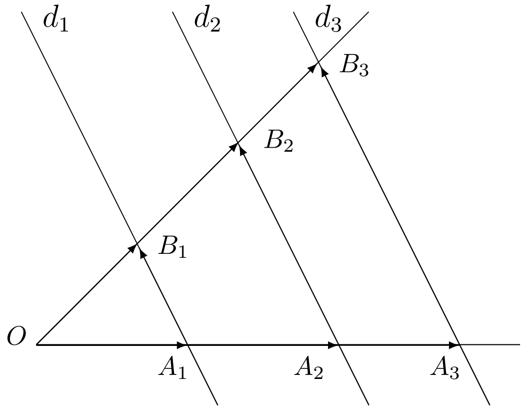
$$\frac{B_1B_2}{A_1A_2} = \frac{B_2B_3}{A_2A_3}\,. \tag{XII.4}$$

Доказательство: $\langle\langle$ $\boxed{\text{AP}}$ [2] Переформулируем сначала (XII.4) на язык вейлевской аксиоматики, чтобы иметь возможность сравнивать параллельные отрезки.

$$(XII.4) \Rightarrow \frac{A_1A_2}{A_2A_3} = \frac{B_1B_2}{B_2B_3} \Rightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \overrightarrow{B_2B_3} & = & \sigma \overrightarrow{B_1B_2}\,; \\ \overrightarrow{A_2A_3} & = & \sigma \overrightarrow{A_1A_2}\,, \end{array} \right. \qquad \sigma \in \mathbb{R} \backslash 0\,. \tag{XII.5}$$

[1]В последнее время во многих учебниках геометрии эта полезная теорема не приводится.
[2]Доказать самостоятельно, что теорему можно доказывать с помощью произвольного выбора аффинного репера.



Построим аффинный репер $\mathbb{R}\{O,\, A_1,\, B_1\}$. Координаты точек в этом репере:

$$O(0;0)\,;\; A_1(1;0)\,;\; B_1(0;1)\,;\; A_2(x_2;0)\,;$$

$$B_2(0;y_2)\,;\; A_3(x_3;0)\,;\; B_3(0;y_3)\,.$$

Найдем координаты векторов:

$$\overrightarrow{A_1B_1}=(-1;1)\,;\; \overrightarrow{A_2B_2}=(-x_2;y_2)\,;$$

$$\overrightarrow{A_3B_3}=(-x_3;y_3)\,.$$

Рис.XII.38. *К теореме Фалеса*

Учитывая условия (XII.1), (XII.2), получим:

$$y_3=\lambda\,;\quad x_3=\lambda\,;\quad x_2=\mu\,;\quad y_2=\mu\,.$$

Таким образом, определим координаты точек:

$$A_2(\mu;0)\,;\; B_2(0;\mu)\,;\; A_3(\lambda;0)\,;\; B_3(0;\lambda)\Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{ll}\overrightarrow{A_1A_2}=(\mu;0)\,; & \overrightarrow{A_2A_3}=(\lambda-\mu;0)\,;\\ \overrightarrow{B_1B_2}=(0,\mu-1)\,; & \overrightarrow{B_2B_3}=(0,\lambda-\mu)\,,\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\overrightarrow{A_2A_3}=\frac{\lambda-\mu}{\mu-1}\,\overrightarrow{A_1A_2}\,;\quad \overrightarrow{B_2B_3}=\frac{\lambda-\mu}{\mu-1}\,\overrightarrow{B_1B_2}\,.$$

$\Rightarrow$ (XII.5), причем:

$$\sigma=\frac{\lambda-\mu}{\mu-1}\in\mathbb{R}\backslash 0\,,$$

так как $\mu\neq 1\,,\lambda\neq\mu$. $\rangle\rangle$

Независимость вывода от выбора аффинного репера обеспечивается аффинной инвариантностью соотношения параллельности прямых, простого отношения 3-х точек и пересечения прямых. При $\sigma=1$ получим теорему Фалеса [TXII.1].

XII.2 Пучок прямых

Определение ОXII.1. *Множество всех прямых плоскости, проходящих через данную точку M_0, называется пучком прямых. Точка M_0 называется центром этого пучка $P(M_0)$.*

Пучок прямых $P(M_0)$ вполне определяется заданием его центра M_0. Пучок прямых также вполне определяется заданием двух различных прямых этого пучка. Пусть заданы две такие пересекающиеся прямые d_1 и d_2 своими общими уравнениями в некотором аффинном репере $\Re\{O;\vec{e}_1,\vec{e}_2\}$:

$$A_1x+B_1y+C_1=0\,; \tag{XII.6}$$

$$A_2x+B_2y+C_2=0\,. \tag{XII.7}$$

Пусть $M_0(x_0;y_0)$ - центр пучка, тогда координаты $x_0\,,y_0$ являются решением системы уравнений (XII.6) - (XII.7). Направляющие векторы прямых d_1 и d_2 неколлинеарны и определяются соотношениями (VIII.4):

$$\vec{q}_1\,=(B_1;-A_1)\,;\qquad \vec{q}_2\,=(B_2;-A_2)\,. \tag{XII.8}$$

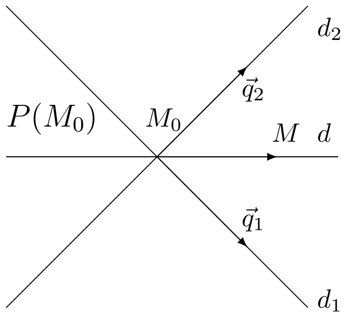


Рис.XII.39. *Пучок прямых*

Рассмотрим любую прямую пучка $d \in P(M_0)$. Поскольку векторы $\vec{q}_1$ и $\vec{q}_2$ (XII.8) неколлинеарны, они образуют базис направляющего пространства плоскости V_2. Пусть общее уравнение прямой d имеет вид:

$$Ax + By + C = 0\,, \qquad \text{(XII.9)}$$

тогда направляющий вектор этой прямой есть:

$$\vec{q} = (B; -A)\,. \qquad \text{(XII.10)}$$

Представим этот вектор в виде линейной комбинации двух *линейно независимых векторов*:

$$\vec{q} = \lambda_1\vec{q}_1 + \lambda_2\vec{q}_2\ ; \qquad \lambda_1\,, \lambda_2 \in \mathbb{R}\,. \qquad \text{(XII.11)}$$

Числа λ_1 и λ_2 имеют простой геометрический смысл - они совпадают с координатами вектора $\vec{q}$ в базисе $\{\vec{q}_1\ , \vec{q}_2\,\}$. Сравнивая (XII.8), (XII.10) и (XII.11), найдем:

$$A = \lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2\,; \quad B = B_1\lambda_1 + B_2\lambda_2\,. \qquad \text{(XII.12)}$$

Подставляя теперь (XII.12) в (XII.9) и производя простые преобразования, получим:

$$\lambda_1(A_1x + B_1y + C_1) + \lambda_2(A_2x + B_2y + C_2) + (C - \lambda_1C_1 - \lambda_2C_2) = 0\,. \qquad \text{(XII.13)}$$

Используем соотношение (VIII.5) и учтем, что точка M_0 - общая точка всех прямых пучка $P(M_0)$:

$$\left.\begin{array}{lcl} C & = & -Ax_0 - By_0 \\ C_1 & = & -A_1x_0 - B_1y_0 \\ C_2 & = & -A_2x_0 - B_2y_0 \end{array}\right\} \Rightarrow \lambda_1C_1 + \lambda_2C_2 - C = 0\,. \qquad \text{(XII.14)}$$

Таким образом, уравнение (XII.13) приводится к виду:

$$\lambda_1(A_1x + B_1y + C_1) + \lambda_2(A_2x + B_2y + C_2) = 0, \quad \forall\{\lambda_1\,, \lambda_2\} \in \mathbb{R}^2\backslash\{0, 0\}\,. \qquad \text{(XII.15)}$$

При $\lambda_1 = 0$ получаем из (XII.15) прямую d_2, при $\lambda_2 = 0$ — прямую d_1. Поскольку координаты точки $M_0(x_0, y_0)$ удовлетворяют каждому из уравнений (XII.6), (XII.7), справедлива следующая теорема:[3]

Теорема TXII.3. *Пусть d_1 и d_2 — две различные прямые пучка, заданные общими уравнениями (XII.6), (XII.7). Тогда общее уравнение любой прямой пучка можно записать в виде (XII.15), где λ_1 и λ_2 одновременно не равны нулю.*

Обратно, уравнение вида (XII.15), в котором хотя бы одно из чисел λ_1, λ_2 не равны нулю, определяет прямую, проходящую через точку пересечения прямых d_1 и d_2.

Определение OXII.2. *Пучком параллельных прямых $P(d_0)$ называется множество всех прямых плоскости, параллельных данной прямой d_0.*

Поскольку, согласно [OVIII.1], параллельные прямые имеют коллинеарные направляющие векторы, справедлива следующая теорема:

Теорема TXII.4. *Уравнение произвольной прямой d пучка $P(d_0)$, в котором прямая d_0 задается общим уравнением:*

$$d_0\ : \qquad A_0x + B_0y + C_0 = 0\,, \qquad \text{(XII.16)}$$

[3]Доказательство обратного утверждения элементарно с учетом [TVIII.1].

имеет вид:

$$P(d_0):\quad A_0x+B_0y+C=0\,, \tag{XII.17}$$

где $C\in\mathbb{R}$ *- произвольное число.*

Обратно, уравнение (XII.17) определяет прямую, параллельную d_0.

Теорему о пропорциональных отрезках [TXII.2] можно рассматривать как теорему о пересечении сторон угла пучком параллельных прямых. Можно рассмотреть и другую подобную задачу — о пересечении двух параллельных прямых пучком прямых с центром $P(M_0)$. Очевидно, что эту задачу также можно решать с помощью произвольного выбора аффинного репера[4].

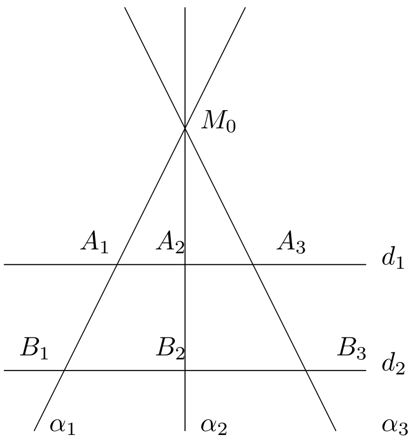


Рис.XII.40.

Выберем аффинный репер следующим образом: $\Re\{M_0;A_1,A_2\}$. В этом репере координаты точек равны:

$$M_0(0;0)\,,A_1(1;0)\,,A_3(0;1)\,,B_1(x_1;0)\,,B_3(0;y_1)\,.$$

Уравнение прямой d_1:

$$d_1:\ \frac{x-1}{-1}=\frac{y}{1}\Rightarrow x+y-1=0\,.$$

Согласно [TXII.4] уравнение прямой d_2 есть:

$$d_2:\ x+y+C=0\,.$$

Найдем координаты точек B_1, B_3 пересечения пучка прямых $d\in P(M_0)$ с прямыми d_1, d_2: $x_1=-C$, $y_1=-C$. Таким образом, $B_1(-C;0)$, $B_3(0;-C)$. Любая прямая пучка $\alpha\in P(M_0)$ в указанном репере задается общим уравнением с нулевым свободным членом, поэтому:

$$\alpha_2:\ y=kx\,.$$

Найдем координаты точек A_2, B_2:

$$A_2\left(-\frac{1}{k+1};-\frac{k}{k+1}\right);\quad B_2\left(-\frac{C}{k+1};-\frac{kC}{k+1}\right)\,.$$

Найдем простые отношения точек A_1, A_2, A_3 и B_1, B_2, B_3:

$$\overrightarrow{A_1A_2}=-\left(\frac{1}{k+1}+1;\frac{k}{k+1}\right);\quad \overrightarrow{A_2A_3}=\left(\frac{1}{k+1};\frac{k}{k+1}+1\right);$$

$$\overrightarrow{B_1B_2}=-C\left(\frac{1}{k+1}+1;\frac{k}{k+1}\right);\quad \overrightarrow{B_2B_3}=C\left(\frac{1}{k+1};\frac{k}{k+1}+1\right)\,.$$

Таким образом, из соотношения $\overrightarrow{A_1A_2}=\lambda\overrightarrow{A_2A_3}$ следует соотношение $\overrightarrow{B_1B_2}=\lambda\overrightarrow{B_2B_3}$.

В итоге мы доказали теорему:

Теорема TXII.5. *Прямые пучка* $P(M_0)$ *отсекают на параллельных прямых пропорциональные отрезки.*

[4]Инварианты: пересечение прямых, параллельные прямые, простое отношение 3-х точек.

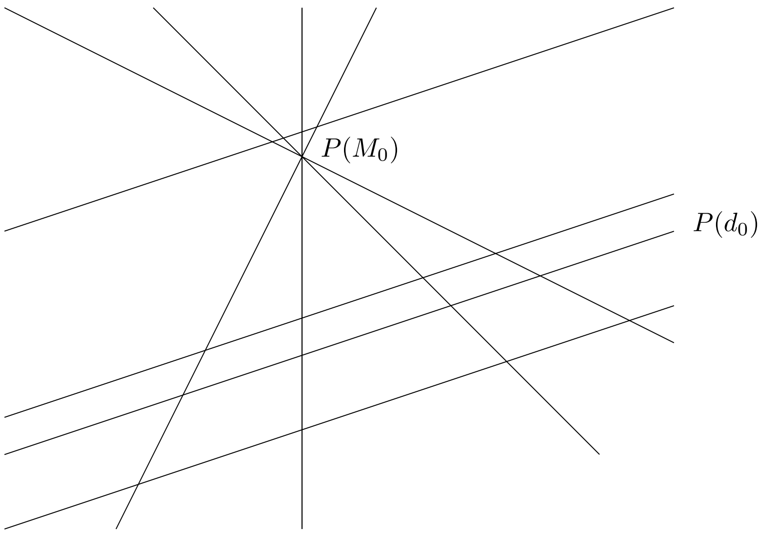


Рис.XII.41. *Пересечение пучков прямых*

Эта теорема является аналогом теоремы [TXII.2]. Обобщая эти две теоремы, сформулируем следующую:

Теорема TXII.6. *Пересечения пучков $P(M_0)$ и $P(d_0)$ отсекают пропорциональные отрезки на прямых каждого пучка.*

Примеры

Рассмотрим некоторые задачи, в которых используется понятие пучка прямых.

Пример ПXII.1. *Через точку пересечения двух прямых:*

$$d_1: \quad A_1x + B_1y + C_1 = 0\,;$$

$$d_2: \quad A_2x + B_2y + C_2 = 0$$

провести прямую d_3, параллельную прямой:

$$d: \qquad ax + by + c = 0\,.$$

Решение:

Из [TXII.4] следует, что уравнение такой прямой имеет вид:

$$d_3: \quad ax + by + c' = 0\,,$$

а из [TXII.3], с другой стороны, следует, что это же самое уравнение есть:

$$\lambda_1(A_1x + B_1y + C_1) + \lambda_2(A_2x + B_2y + C_2) = 0\,.$$

Приравнивая коэффициенты в этих уравнениях, получим систему уравнений относительно неизвестных λ_1, λ_2, c':

$$\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 = a\,;$$

$$\lambda_1 B_1 + \lambda_2 B_2 = b\,;$$

$$\lambda_1 C_1 + \lambda_2 C_2 = c' .$$

Для решения поставленной задачи достаточно найти λ_1 и λ_2 из первых двух уравнений.

Пример ПXII.2. *Пучок задан двумя прямыми:*

$$d_1 : \quad A_1 x + B_1 y + C_1 = 0 ;$$

$$d_2 : \quad A_2 x + B_2 y + C_2 = 0 .$$

Провести прямую пучка d, проходящую через точку $M_1(x_1; y_1)$.

Решение:

Подставляя координаты точки M_1 в уравнение пучка (XII.15), получим уравнение для определения параметров λ_1, λ_2:

$$\lambda_1 (A_1 x_1 + B_1 y_1 + C_1) + \lambda_2 (A_2 x_1 + B_2 y_1 + C_2) = 0 . \tag{XII.18}$$

Так как при умножении уравнения (XII.18) на любое число $\alpha \neq 0$ мы получим эквивалентное уравнение, один из коэффициентов λ_1 или λ_2 можно положить равным любому наперед заданному отличному от нуля числу (если только точка M_1 не лежит на соответствующей прямой d_1 или d_2). Полагая, например, $\lambda_1 = 1$, найдем из (XII.18) λ_2 и тем самым полностью решим поставленную задачу.

Глава XIII

Некоторые аффинные задачи планиметрии, не входящие в школьный курс

Как мы неоднократно отмечали выше, ряд аксиом гильбертовской (а также стандартной школьной) аксиоматики становится теоремами в аксиоматике Вейля. Рассмотрим некоторые такие примеры.

XIII.1 Аксиома параллельности

Эта аксиома является единственной аксиомой из V-й группы аксиом Гильберта. Сформулируем ее в виде теоремы, каковой она является в аксиоматике Вейля.

Теорема TXIII.1. *Пусть на плоскости* Π *дана прямая* d_0 *и точка* $A \notin d_0$. *Тогда существует единственная прямая, проходящая через точку* A *и не пересекающая прямую* d_0.

Доказательство: $\langle\langle$ $\boxed{\text{AP}}$ Поскольку задача связана с аффинными инвариантами[1], ее можно решать методом аффинного репера. Зададим на Π произвольный аффинный репер $\Re$ и пусть в этом репере точка A имеет координаты $A(x_0; y_0)$, а прямая d_0 задается общим уравнением (согласно [TVIII.1]):

$$d_0 : \quad ax + by + c = 0\,, \tag{XIII.1}$$

где a и b одновременно не равны нулю. Общее уравнение произвольной прямой плоскости d, проходящей через точку A, есть:

$$d : \quad \alpha(x - x_0) + \beta(y - y_0) = 0\,, \tag{XIII.2}$$

где α и β одновременно не равны нулю. Поскольку точка A не принадлежит прямой d_0, ее координаты не удовлетворяют уравнению (XV.1) этой прямой, т.е.:

$$ax_0 + by_0 + c \neq 0\,. \tag{XIII.3}$$

Построим основную и расширенную матрицы системы (XV.1) - (XIII.2):

$$(A|\tilde{A}) = \quad \left[\begin{array}{cc|c} a & b & -c \\ \alpha & \beta & \alpha x_0 + \beta y_0 \end{array}\right]. \tag{XIII.4}$$

Как следует из общей теории систем линейных алгебраических уравнений, система (XV.1) - (XIII.2) не имеет решения (т.е., прямые a и d не пересекаются) лишь в том случае, когда ранги основной и расширенной матриц системы не совпадают. Последнее же возможно лишь в том случае, когда ранг основной матрицы равен 1, а ранг расширенной 2. Из первого условия получаем:

$$\alpha = \lambda a\,; \quad \beta = \lambda b\,, \quad \lambda \in \mathbb{R}\backslash 0\,. \tag{XIII.5}$$

[1]Непринадлежность точек прямой и непересечение прямых.

Умножая вторую строку матрицы (XIII.4) на λ и вычитая из нее первую строку, получим с учетом (XIII.5):

$$(A|\tilde{A}) \sim \left[\begin{array}{cc|c} a & b & -c \\ 0 & 0 & ax_0 + by_0 + c \end{array}\right].$$

Вследствие (XIII.3) правый элемент во второй строке этой матрицы отличен от нуля, поэтому $r(A) = 1$; $r(\tilde{A}) = 2$. Таким образом, прямая, проходящая через точку A и не пересекающая прямую a существует. Коэффициенты общего уравнения этой прямой определяются соотношениями (XIII.5). Подставляя эти соотношения в (XIII.2), получим:

$$d: \quad \lambda[a(x - x_0) + b(y - y_0)] = 0\,.$$

Так как $\lambda \neq 0$, получим отсюда:

$$d: \quad a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0\,. \tag{XIII.6}$$

Вследствие [TVIII.1] это уравнение определяет единственную прямую, проходящую через A и не пересекающую d_0. $\rangle\rangle$

XIII.2 Аксиома Паша

Аксиома Паша́ входит во вторую группу аксиом Гильберта - *аксиом порядка.* Мы сформулируем ее в виде теоремы.[2]

Теорема TXIII.2. *Пусть точки A, B, C не лежат на одной прямой, и пусть a - прямая этой плоскости, не проходящая ни через одну из точек A, B, C. Тогда, если прямая a проходит через внутреннюю точку отрезка $[AB]$, то она проходит также через внутреннюю точку отрезка $[AC]$ или через внутреннюю точку отрезка $[BC]$.*

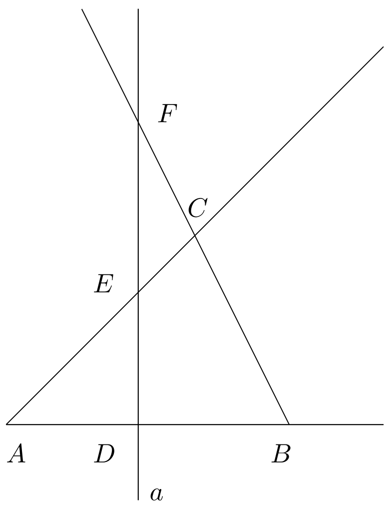


Рис.XIII.42. *К теореме Паша*

Доказательство: $\langle\langle$ $\boxed{\text{AP}}$ Доказательство можно проводить с помощью произвольного выбора аффинного репера, поскольку речь идет об аффинных инвариантах (простое отношение трех точек, пересечение прямых). Так как точки A, B, C - неколлинеарные, построим на них аффинный репер $\Re\{A, B, C\}$.

Тогда уравнения сторон треугольника будут:

$$(AB): \quad y = 0;$$

$$(AC): \quad x = 0;$$

$$(CB): \quad x + y - 1 = 0\,.$$

Пусть уравнение прямой a в этом репере есть:

$$a: \quad Ax + By + C = 0\,.$$

Найдем координаты точек пересечения этой прямой с прямыми (AB), (AC), (CB), предполагая сначала, что эти точки существуют:

$$D = (AB) \cap a: \quad Ax_D + C = 0\,, \quad y_D = 0\,; \tag{XIII.7}$$

[2]Фамилия Паша́ происходит от титула гражданских и военных сановников в Османской империи.

$$E = (AC) \cap a: \quad By_E + C = 0\,, \quad x_E = 0\,; \tag{XIII.8}$$

$$F = (CB) \cap a: \quad (A-B)x_F + B + C = 0\,,\ y_F = 1 - x_F\,. \tag{XIII.9}$$

Из условия теоремы известно, что D - внутренняя точка отрезка $[AB]$, т.е.:

$$\overrightarrow{AD} = \lambda \overrightarrow{DB}\,, \quad \lambda > 0\,.$$

Но $\overrightarrow{AD} = (x_D; 0)$; $\overrightarrow{DB} = (1 - x_D; 0) \Rightarrow x_D = \lambda(1 - x_D)$, $\lambda > 0 \Rightarrow$

$$x_D = \frac{\lambda}{1+\lambda}\,, \quad \lambda > 0\,. \tag{XIII.10}$$

Из сравнения (XIII.7) и (XIII.10) найдем:

$$C = -A\frac{\lambda}{1+\lambda}\,. \tag{XIII.11}$$

Подставляя теперь (XIII.11) в (XIII.8) и (XIII.9), получим:

$$y_E = \frac{A}{B}\frac{\lambda}{1+\lambda}\,;$$

$$(A-B)x_F = A\frac{\lambda}{1+\lambda} - B\,; \quad (A-B)y_F = \frac{A}{1+\lambda}\,. \tag{XIII.12}$$

Так как $A - B \neq 0$ (в противном случае, который будет рассмотрен ниже, прямые (CB) и a не пересекаются), найдем из (XIII.12):

$$x_F = 1 - \frac{A}{(1+\lambda)(A-B)}\,; \quad y_F = \frac{A}{(1+\lambda)(A-B)}\,. \tag{XIII.13}$$

Таким образом:

$$\overrightarrow{AE} = \frac{A}{B}\frac{\lambda}{1+\lambda}(0;1)\,; \quad \overrightarrow{EC} = \left(1 - \frac{A}{B}\frac{\lambda}{1+\lambda}\right)(0;1)\,;$$

$$\overrightarrow{BF} = \frac{1}{1+\lambda}\frac{A}{A-B}(-1;1) \quad \overrightarrow{FC} = \left(1 - \frac{1}{1+\lambda}\frac{A}{A-B}\right)(-1;1)\,,$$

откуда найдем:

$$\overrightarrow{AE} = \mu \overrightarrow{EC}\,,$$

$$\mu \stackrel{def}{=} \left[\frac{B}{A}\frac{1+\lambda}{\lambda} - 1\right]^{-1}\,; \tag{XIII.14}$$

$$\overrightarrow{BF} = \nu \overrightarrow{FG}\,,$$

$$\nu \stackrel{def}{=} \left[\lambda - \frac{B}{A}(1+\lambda)\right]^{-1}\,. \tag{XIII.15}$$

Предположим сначала, что

$$\mu > 0\,, \tag{XIII.16}$$

т.е., прямая a пересекает отрезок $[AC]$ (E - внутренняя точка $[AC]$). Тогда из (XIII.16) следует:

$$0 < \frac{A}{B}\frac{\lambda}{1+\lambda} < 1\,. \tag{XIII.17}$$

Следовательно, с учетом (XIII.17) получим из (XIII.14) и (XIII.15):

$$-\nu = \lambda\left[\frac{1+\lambda}{\lambda}\frac{B}{A} - 1\right] > 0 \Rightarrow \nu < 0\,,$$

откуда следует, что прямая a пересекает прямую (CB) *вне* отрезка $[CB]$. Наоборот, положим вместо (XIII.16) $\mu < 0$ (т.е., прямая a пересекает прямую (AC) вне отрезка $[AC]$). Тогда вместо (XIII.17) получим:

$$\frac{A}{B}\frac{\lambda}{1+\lambda} > 1 \text{ л } \frac{A}{B}\frac{\lambda}{1+\lambda} < 0\,,$$

откуда в обоих случаях следует $\nu > 0$, т.е., прямая a пересекает отрезок $[CB]$.

Нам осталось рассмотреть случай, когда прямая a параллельна одной из сторон треугольника - (AC) или (CB). Допустим, что $a \parallel (BC)$, но в этом случае справедлива теорема о пропорциональных отрезках [ТXII.2], согласно которой:

$$\overrightarrow{AD} = \lambda \overrightarrow{DB} \Rightarrow \overrightarrow{AE} = \lambda \overrightarrow{EC}\,.$$

Таким образом, прямая a в этом случае пересекает отрезок $[AC]$ и не пересекает отрезок $[CB]$. $\rangle\rangle$

По ходу доказательства теоремы мы установили еще один полезный факт, который в аксиоматике Гильберта является следствием аксиомы Паша:

Следствие CXIII.1. *Прямая не может пересечь одновременно все три стороны треугольника.*

XIII.3 Многоугольники с четным числом сторон

Рассмотрим выпуклые многоугольники с четным числом сторон $A_1A_2\ldots A_{2m}$. Для таких многоугольников можно ввести понятие *противолежащих вершин*: $A_k \leftrightarrow A_{m+k}$ и *противолежащих сторон*: $[A_kA_{k+1}] \leftrightarrow [A_{m+k}A_{m+k+1}]$. Из всего множества таких $2m$-угольников можно выделить подмножество многоугольников с попарно параллельными противолежащими сторонами. Введем также для таких многоугольников понятие *главных диагоналей* как отрезков, соединяющих противоположные вершины: $[A_kA_{m+k}]$. Простейшим случаем таких многоугольников является параллелограмм.[3] Ясно, что указанные многоугольники при аффинных преобразованиях переходят в такие же.

Теорема ТXIII.3. *Если все главные диагонали $2m$-угольника пересекаются в одной точкой и делятся этой точкой пополам, то противоположные стороны $2m$-угольника равны и параллельны.*

Доказательство: $\langle\langle$ $\boxed{\text{БК}}$ По условию теоремы существует такая точка O, что, например, $\overrightarrow{A_1O} = \overrightarrow{OA_{m+1}}$; $\overrightarrow{A_2O} = \overrightarrow{OA_{m+2}}$, и т.д. Таким образом, из правила треугольника сразу вытекает:

$$\overrightarrow{A_1A_2} = \overrightarrow{A_{m+2}A_{m+1}}$$

и т.д. $\rangle\rangle$

В качестве упражнения читатель может доказать следующую теорему:

Теорема ТXIII.4. *Если у двух треугольников ABC и $A'B'C'$ соответствующие стороны параллельны ($(AB) \parallel (A'B')$, $(BC) \parallel (B'C')$, $(AC) \parallel (A'C')$), то эти стороны пропорциональны:*

$$\frac{[AB]}{[A'B']} = \frac{[AC]}{[A'C']} = \frac{[BC]}{[B'C']}\,.$$

[3] У параллелограмма все диагонали - главные.

Глава XIV

Внутренние и внешние точки многоугольников. Выпуклые многоугольники

XIV.1 Внутренние и внешние точки многоугольников

Интуитивно мы понимаем, какие точки многоугольника являются внутренними, а какие - внешними. Так, например, нам понятно, что на представленном ниже рисунке точки A и B являются внешними по отношению к изображенному 22-угольнику, а точка C - - внутренней точкой этого многоугольника. На чем же основывается наша интуиция? Во - первых, на том, что весь многоугольник "у нас перед глазами", т.е., мы имеем план лабиринта. Если бы "у нас перед глазами" была только часть лабиринта, мы не смогли бы определить, какие точки являются внутренними, а какие внешними.

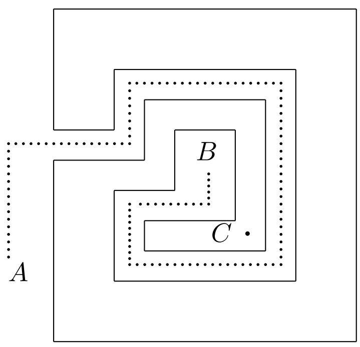


Рис.XIV.43. *Внутренние и внешние точки 22-угольника*

Во-вторых, подсознательно мы соединяем точки ломаной линией, т.е., совершаем обход лабиринта. И если нам, например, известно, что точка A - внешняя, то даже по плану части лабиринта мы можем установить, что и точка B - внешняя.
Приведем без доказательства теорему, которая подводит итог нашим интуитивным соображениям.

Теорема TXIV.1. *Любая замкнутая плоская несамопересекающаяся ломаная делит плоскость на две части.*

Согласно [TXIV.1], все точки плоскости делятся замкнутой несамопересекающейся ломаной на два множества, причем точки одного и того же множества можно соединить соединить ломаной, не пересекающей данную, а точки различных множеств - нельзя. Точки одного из этих множеств будем называть *внутренними точками многоугольников*, а точки другого множества - *внешними точками многоугольников*, сами же множества - внутренней и внешней областями многоугольника. Нетрудно показать, что отношение принадлежности точки к внутренней или внешней области многоугольника является отношением эквивалентности на плоскости[1].

Но какие из этих точек являются внутренними точками многоугольника, а какие - внешними? Яс-

[1] Доказать самостоятельно.

но, что для ответа на этот вопрос достаточно указать хотя бы одну внутреннюю или внешнюю точку многоугольника. В дальнейшем замкнутую несамопересекающуюся ломаную будем называть *границей многоугольника*[2].

Определение OXIV.1. *Назовем внешней по отношению к многоугольнику часть плоскости, содержащую хотя бы одну точку, через которую можно провести прямую, не пересекающую границу многоугольника.*

Очевидно, что принадлежность точки к внутренней или внешней области многоугольника является свойством, инвариантным по отношению к аффинным преобразованиям.

Теорема TXIV.2. *Луч, проведенный из любой внешней точки многоугольника, не проходящий через его вершины и не совпадающий с продолжением его сторон, пересекает границу многоугольника четное число раз. Луч, проведенный из любой внутренней точки многоугольника не проходящий через его его вершины, пересекает границу многоугольника нечетное число раз.*

В связи с этим можно дать и другое определение многоугольника:

Определение OXIV.2. *Назовем многоугольником часть плоскости, состоящей из несамопересекающейся ломаной (границы) и всех внутренних точек многоугольника.*

Мы будем также говорить: часть плоскости, *ограниченная* замкнутой несамопересекающейся ломаной.

Как практически определить, является ли данная точка плоскости внутренней или внешней по отношению к данному многоугольнику? Рассмотрим эту задачу на примере простейших многоугольников - параллелограмма и треугольника.

XIV.2 Параллелограмм

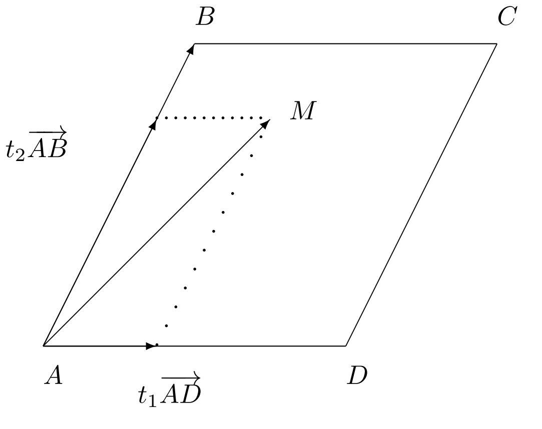


Рис.XIV.44. *Внутренние и внешние точки параллелограмма*

Рассмотрим на аффинной плоскости произвольный параллелограмм $ABCD$ и произвольную точку M, имеющую координаты (x, y) в аффинном репере $\Re_0$. Поскольку векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AD}$ неколлинеарны, построим на них новый репер $\Re\{A, B, D\}$ и разложим вектор $\overrightarrow{AM}$ по базису $\{\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AB}\}$:

$$\overrightarrow{AM} = t_1\overrightarrow{AD} + t_2\overrightarrow{AB}\,, \qquad \text{(XIV.1)}$$

где $(t_1\,; t_2)$ - координаты точки M в репере $\Re$. Внутренним точкам параллелограмма отвечают значения:

$$t_1 \in (0;1)\,; \qquad t_2 \in (0;1)\,. \qquad \text{(XIV.2)}$$

Значения $t_1 = 0,\ t_2 \in (0;1)$ отвечают внутренним точкам стороны AB; значения $t_2 = 0,\ t_1 \in (0;1)$ - внутренним точкам стороны AD; значения $t_1 = 1,\ t_2 \in (0;1)$ - внутренним точкам стороны CD. Весь же параллелограмм, как часть плоскости, задается множеством точек:

$$ABCD = \{\{M\} \mid \overrightarrow{AM} = t_1\overrightarrow{AD} + t_2\overrightarrow{AB}\,, \quad t_1 \in [0,1]\,, t_2 \in [0,1]\}\,. \qquad \text{(XIV.3)}$$

[2] Ранее в XIII [OXI.1] мы давали определение многоугольника как несамопересекающейся ломаной линии. Здесь мы отходим от этого определения и рассматриваем многоугольник, как часть плоскости.

Пусть координаты точек A, B, C, D в репере $\Re_0$ следующие: $A(a_1; a_2)$, $B(b_1; b_2)$, $C(c_1; c_2)$, $D(d_1; d_2)$. Подставляя эти координаты в (XIV.1), получим:

$$x - a_1 = t_1(d_1 - a_1) + t_2(b_1 - a_1)\,;$$

$$y - a_2 = t_1(d_2 - a_2) + t_2(b_2 - a_2)\,. \qquad \text{(XIV.4)}$$

Разрешая эту систему относительно t_α, найдем t_1, t_2 и проверим, выполняются ли условия (XIV.2).

Пример ПXIV.1. *Пусть $A(1;2)$, $B(2;1)$, $C(-1;3)$ - вершины параллелограмма $ABCD$. Выяснить, как расположены по отношению к этому параллелограмму точки $M_1(0;2)$ и $M_2(1;3)$.*

Решение

Составляя систему уравнений (XIV.4) относительно координат точки M_1, получим:

$$-1 = -2t_1 + t_2\,; \quad 0 = t_1 - t_2\,,$$

откуда найдем: $t_1 = 1\,;\ t_2 = 1$, таким образом, точка M_1 совпадает с вершиной параллелограмма C. Для координат точки M_2:

$$0 = -2t_1 + t_2\,; \quad 1 = t_1 - t_2\,,$$

откуда найдем: $t_1 = -1\,; t_2 = -2$, т.е., точка M_2 - внешняя по отношению к параллелограмму $ABCD$.

XIV.3 Треугольник

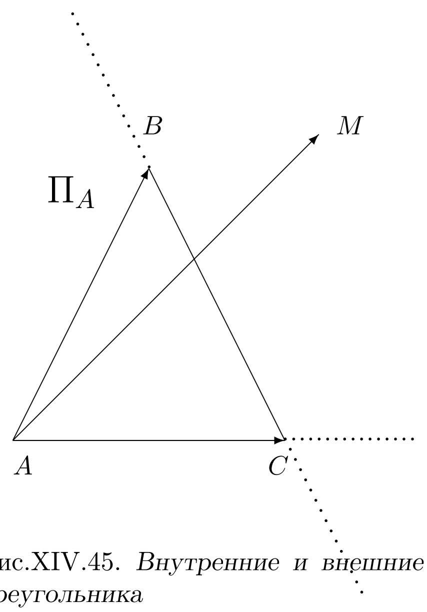


Рис.XIV.45. *Внутренние и внешние точки треугольника*

Построим репер на сторонах AB и AC треугольника ABC: $\Re\{A, B, C\}$ и разложим вектор $\overrightarrow{AM}$ по базису $\{\overrightarrow{AC}\,, \overrightarrow{AB}\}$:

$$\overrightarrow{AM} = t_1\overrightarrow{AC} + t_2\overrightarrow{AB}\,.$$

Для того, чтобы точка M принадлежала выпуклому углу $\angle BAC$, ($M \in \angle BAC$), необходимо и достаточно, чтобы

$$t_1 > 0\,; \quad t_2 > 0\,.$$

Для того же, чтобы при этом точка M оказалась внутренней точкой треугольника ABC, необходимо и достаточно, чтобы она принадлежала той же полуплоскости, определяемой прямой (BC), что и вершина A: $\Pi((BC), A)$ (см. IX).

Уравнение прямой (BC) в репере $\mathbb{R}$ есть:

$$(BC): \qquad x + y = 1\,. \qquad \text{(XIV.5)}$$

Координаты же точки M в этом репере есть $M(t_1; t_2)$. Определим инвариант ξ (X.14):

$$\xi_{A/M} = -\frac{1}{t_1 + t_2 - 1}\,.$$

Положительным значениям этого инварианта согласно (X.16) соответствует принадлежность точек A и M одной полуплоскости. Следовательно, необходимым и достаточным условием принадлежности точки M внутренней области треугольника ABC является:

$$M \in \triangle ABC \Leftrightarrow \left. \begin{array}{ll} t_1\,, t_2 & > 0; \\ t_1 + t_2 & < 1\,. \end{array} \right\} \tag{XIV.6}$$

Пример ПXIV.2. *Даны:* $A(1;2)$*;* $B(3;1)$*;* $C(1;4)$*;* $M(2;2)$*. Разложим вектор* $\overrightarrow{AM}$ *по базису* $\{\overrightarrow{AC}\,;\overrightarrow{AB}\}$*:*

$$\left. \begin{array}{rcl} 1 & = & 2t_2 \\ 0 & = & 2t_1 - t_2 \end{array} \right\} \Rightarrow t_1 = 1/4\,;\ t_2 = 1/2\,;$$

таким образом:

$$t_1 + t_2 = 3/4 < 1 \Rightarrow M \in \triangle ABC\,.$$

XIV.4 Выпуклые многоугольники

Ранее мы определяли выпуклые фигуры, как фигуры, любую пару точек которых можно соединить отрезком прямой, принадлежащей данной фигуре. Это определение, однако, не совсем удобно для практических целей, так как для его применения необходимо перебирать все пары точек фигуры. Для многоугольников справедлива теорема, которую мы приведем без доказательства[3].

Теорема ТXIV.3. *Для того, чтобы многоугольник был выпуклым, необходимо и достаточно, чтобы прямые, являющиеся продолжением его сторон, не пересекали его границы.*

Часто более удобной для практического использования оказывается другая теорема.

Теорема ТXIV.4. *Для того, чтобы многоугольник был выпуклым, необходимо и достаточно, чтобы все его вершины принадлежали одной полуплоскости, отсекаемой продолжением каждой его стороны.*

Покажем на примере параллелограмма, как пользоваться этой теоремой.

Теорема ТXIV.5. *Параллелограмм есть выпуклый четырехугольник.*

[3] Часто в качестве определения выпуклого многоугольника и используется эта или следующая за ней теорема.

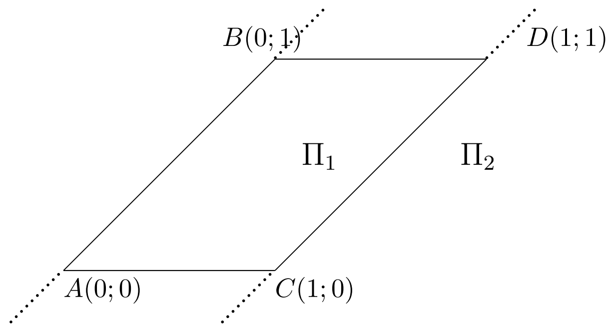


Рис.XIV.46. *Параллелограмм - выпуклая фигура*

Доказательство: $\langle\langle$ $\boxed{\text{AP}}$ Рассмотрим параллелограмм $ABCD$. Выберем стандартный репер $\Re\{A;\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AB}\}$ и покажем, например, что точки A и B принадлежат одной и той же полуплоскости, определяемой прямой (CD):

$$(CD):\qquad x-1=0\,.$$

Вычисляя инвариант $\xi_{A/B}$, найдем:

$$\xi_{A/B}=(-1)/(-1)=+1>0\,.$$

Таким образом, точки A и B принадлежат одной полуплоскости. Поступая так с другими парами точек, докажем теорему. $\rangle\rangle$

XIV.5 Упражнения и примеры

Упражнение 1

В параллелограмме $ABCD$ из вершины B проведена прямая (BE) к стороне AD, делящая эту сторону в отношении $1:2$. В каком отношении прямая (BE) делит диагональ AC?

Упражнение 2

Для указанного примера найти отношение, в котором делит точка D отрезок $[CH]$, где $H=(BE)\cap(CD)$, и отношение, в котором делит точка E отрезок $[BH]$.

Упражнение 3

Не производя построения четырехугольника $ABCD$: $A(-3;1)$, $B(0;3)$, $C(0;4)$, $D(-1;6)$ по координатам его вершин, выяснить его тип (выпуклый - невыпуклый, простой - звездчатый), вычислить его характеристику Z и дать его качественное изображение.

Упражнение 4

В треугольнике ABC AD - медиана стороны BC. На продолжении стороны BC задана точка E такая, что $BC=CE$, а на стороне AC - точка F такая, что $AF=FC$. В каком отношении прямая (EF) делит сторону AB и медиану AD?

Упражнение 5

Через внешнюю точку E треугольника ABC проведена прямая d, параллельная стороне AC и такая, что $CH:HB=2:1$, где $H=d\cap BC$. Известно также, что $AD:DB=1:3$, где $D=EC\cap AB$. Пусть $F=d\cap AB$. Найти отношения $EF:FH$, $AD:DF$, $ED:DC$.

Упражнение 6

Дан параллелограмм $ABCD$ и прямая $d\parallel AD$. Пусть далее: $E=d\cap AB$, $F=d\cap CD$, $G=d\cap BD$, $H=d\cap AC$, $O=AC\cap BD$, причем $AE:EB=2:1$. Найти отношения: $EG:GH$, $GH:HF$, $BG:GO$, $GO:OD$.

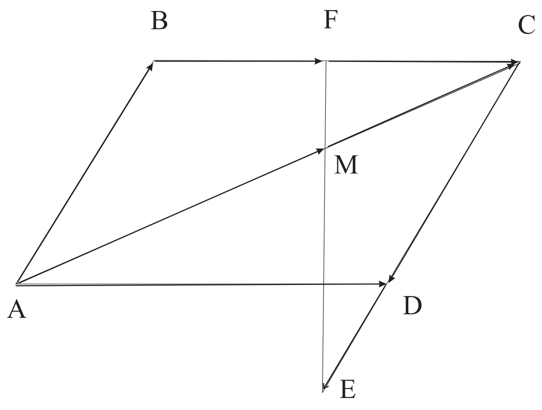


Рис.XIV.47. *Нахождение простого отношения трех точек* (AC, M)

Пример ПXIV.3. *Дан параллелограмм* $ABCD$ *и две точки,* E *и* F *на его сторонах, причем известно, что* $(CE, D) = 2$, $(BF, C) = -3$. *Найти отношение, в котором прямая* (EF) *делит диагональ* (AC).

Решение

Таким образом, раскрывая запись простого отношения

$$(AB, C) = \lambda \Longrightarrow \overrightarrow{AC} = \lambda\overrightarrow{CB}$$

из условий задачи находим:

$$\overrightarrow{CD} = 2\overrightarrow{DE}; \qquad \overrightarrow{BC} = -3\overrightarrow{CF}.$$

Поскольку задача аффинно -инвариантна, введем репер, ассоциированный с вершинами параллелограмма Рис.XIV.47:

$$\Re\{A, D, D\} \Longrightarrow A(0,0); D(0,1); D(1,0), C(1,1).$$

Учитывая, что точки E и F лежат, соответственно, на прямых $(BC) : y = 1$ и $(CD) : x = 1$, положим координаты этих точек равными:

$$E(1, y); \qquad F(x, 1).$$

Тогда получим из простых соотношений уравнения:

$$(1,0) = -3(x-1, 0) \Longrightarrow x = \frac{2}{3} \Longrightarrow F\left(\frac{2}{3}, 1\right);$$

$$(0,-1) = 2(0, y) \Longrightarrow y = -\frac{1}{2} \Longrightarrow E\left(1, -\frac{1}{2}\right).$$

Построим прямые (AC) и (EF) как прямые, проходящие через пару точек:

$$(AC): \quad \frac{x-0}{1-0} = \frac{y-0}{1-0} \Longrightarrow x = y;$$

$$(EF): \quad \frac{x-1}{2/3-1} = \frac{y+1/2}{1+1/2} \Longrightarrow 9x + 2y - 8 = 0.$$

Решая совместно эти уравнения, найдем координаты точки пересечения $M\left(\frac{8}{11}, \frac{8}{11}\right)$. Следовательно, векторы имеют координаты:

$$\overrightarrow{AM} = \left(\frac{8}{11}, \frac{8}{11}\right); \quad \overrightarrow{MC} = \left(\frac{3}{11}, \frac{3}{11}\right).$$

Таким образом:

$$\overrightarrow{AM} = \frac{8}{3}\overrightarrow{MC} \Longrightarrow (AC, M) = \frac{8}{3}.$$

Пример ПXIV.4. *Выяснить, лежат ли точки* $A(1,1)$ *и* $B(-3,4)$ *по одну сторону от прямой* d : $x - y + 1 = 0$.

Решение

Найдем: $\delta_A = 1$; $\delta_B = -6$; $\xi_{A/B} = -1/6 < 0$.

Точки A и B лежат по разные стороны от прямой d.

Пример ПXIV.5. *Выяснить, лежат ли точка $A(1,1)$ и начало аффинного репера по одну сторону от указанной прямой.*

Решение

Началом аффинного репера является точка $O(0,0)$, для которой найдем: $\delta_O = C = 1$. Таким образом, $\xi_{O/A} = 1 > 0$.

Начало аффинного репера и точка A лежат по одну сторону от прямой d.

Пример ПXIV.6. *На плоскости заданы два луча $[CA)$ и $[CB)$ с общей вершиной C, причем $A(2,2)$, $B(3,4)$, $C(1,-1)$. Определить, какому из углов принадлежит точка $P(5,6)$.*

Решение

Итак, согласно (X.20), (X.21) найдем:

$$\Delta(A,B\,;C) = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = -1\,; \quad \Delta(P,B\,;C) = \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 7 & 5 \end{vmatrix} = 6\,;$$

$$\Delta(A,P\,;C) = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} = -5\,.$$

Таким образом: $\lambda = 6 : (-1) = -6$, $\mu = (-5) : (-1) = +5$, т.е., точка P принадлежит невыпуклому углу Γ_2.

Пример ПXIV.7. *Дан параллелограмм $ABCD$ аффинными координатами своих вершин*

$$A(1,2);\ B(5,5);\ D(7,10).$$

Определить, является ли точка $P(4,5)$ внутренней точкой параллелограмма $ABCD$.

Решение

Найдем векторы, соответствующие сторонам параллелограмма:

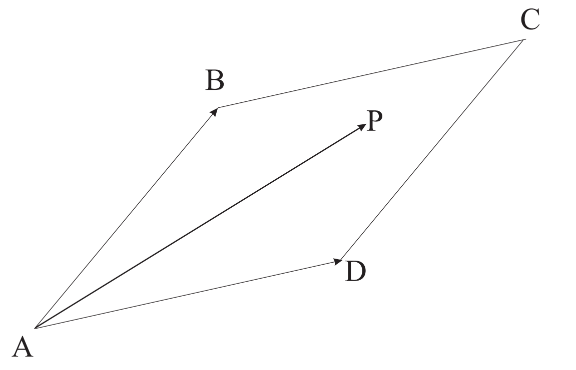


Рис.XIV.48. *Определение положения точки P по отношению к параллелограмму $ABCD$*

$$\overrightarrow{AD} = (6,8); \qquad \overrightarrow{AB} = (4,3)$$

а также вектор

$$\overrightarrow{AP} = (3,3)$$

и разложим этот вектор по базису $\{\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AB}\}$:

$$\overrightarrow{AP} = \lambda\overrightarrow{AD} + \mu\overrightarrow{AB} \Longrightarrow (3,3) = \lambda(6,8) + \mu(4,3).$$

Приравнивая соответствующие координаты векторов, получим систему уравнений относительно λ, μ:

$$\left.\begin{array}{l} 3 = 6\lambda + 4\mu \\ 3 = 8\lambda + 3\mu \end{array}\right\},$$

решая которую, получим:

$$\lambda = \frac{3}{14};\ \mu = \frac{6}{14}.$$

Таким образом

$$0 \le \lambda \le 1,\ 0 \le \mu \le 1, \Longrightarrow$$

точка P является внутренней точкой параллелограмма $ABCD$.

Пример ПXIV.8. *Дан треугольник ABC аффинными координатами своих вершин*

$$A(1,2);\ B(5,5);\ C(7,10).$$

- (координаты вершин совпадают с координатами вершин параллелограмма из предыдущей задачи). Определить, является ли точка $P(4,5)$ внутренней точкой треугольника $ABCD$.

<u>Решение</u>

Воспользуемся результатами предыдущей задачи:

$$\overrightarrow{AC} = (6,8); \qquad \overrightarrow{AB} = (4,3) \qquad \overrightarrow{AP} = (3,3)$$

и разложим вектор $\overrightarrow{AP}$ по базису $\{\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}\}$:

$$\overrightarrow{AP} = \lambda\overrightarrow{AC} + \mu\overrightarrow{AB} \Longrightarrow (3,3) = \lambda(6,8) + \mu(4,3) \Longrightarrow$$

$$\lambda = \frac{3}{14};\ \mu = \frac{6}{14}.$$

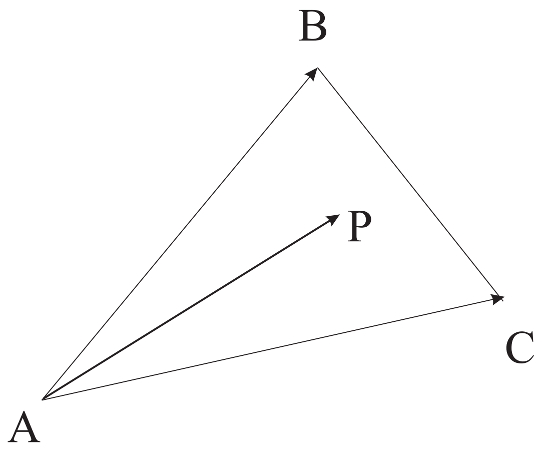


Рис.XIV.49. *Определение положения точки P по отношению к треугольнику ABC*

Уравнение прямой (BD) в репере $\Re\{A, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}\}$ имеет вид:

$$(BD): \ \frac{x}{1} = \frac{y-1}{-1} \Longrightarrow x + y - 1 = 0.$$

Находим:

$$\delta_P = \frac{3}{14} \cdot 1 + \frac{6}{14} \cdot (-1) - 1$$

$$= -\frac{17}{14} \leq 0; \delta_A = 0 \cdot 1 - 0 \cdot 1 - 1 = -1 \leq 0 \Longrightarrow$$

точки A и P находятся по одну сторону от прямой (AB), что с учетом предыдущего примера дает результат: точка P является внутренней точкой треугольника ABC.

Глава XV

k - мерные плоскости в аффинных пространствах

XV.1 Определение k - мерной плоскости

Плоскости в аффинном пространстве определяются аналогично прямой, $d(M_0, \vec{q})$, *проходящей через точку* M_0 *в направлении* $\vec{q}$ (см. [2]). Пусть $V_K \subset V_n$ - какое - либо k - мерное подпространство векторного пространства V_n - пространства переносов аффинного пространства $\mathbf{A}_n$, $(0 < k <= n-1)$, а $M_0 \in \mathbf{A}_n$ - какая - либо точка аффинного пространства $\mathbf{A}_n$.

Определение OXV.1. *k - мерной плоскостью $\Pi_k(M_0; V_k)$ в $\mathbf{A}_n$, проходящей через точку M_0 в направлении V_k, называется множество всех точек M аффинного пространства $\mathbf{A}_n$, таких что $\overrightarrow{M_0M} \in V_k$, т.е.,*

$$\Pi_k(M_0; V_k) = \left\{ M \,|M \in \mathbf{A}_n, \, \overrightarrow{M_0M} \in V_k \right\}. \tag{XV.1}$$

Векторное подпространство V_k называется направляющим пространством плоскости, а точка M_0 - опорной точкой плоскости.

Теорема TXV.1. *k - мерная плоскость сама является аффинным пространством.*

Доказательство: $\langle\langle$ Согласно определению аффинного пространства (OV.3):
множество $\mathbf{A} \neq \emptyset$ называется аффинным пространством над векторным пространством V, если задано отображение, $g(A, B) \overset{def}{=} \overrightarrow{AB}$, сопоставляющее любой упорядоченной паре точек из $\mathbf{A}$ некоторый вектор из V:

$$g : \mathbf{A} \times \mathbf{A} \longrightarrow V \tag{XV.2}$$

и удовлетворяющее двум аксиомам (аксиомам Вейля) (AV.1) и (AV.2):

Аксиома AXV.1. *Для любой точки $A \in \mathbf{A}$ и любого вектора $\vec{a} \in V$ существует единственная точка $B \in \mathbf{A}$, для которой:*

$$\overrightarrow{AB} = \vec{a}\,; \tag{XV.3}$$

Аксиома AXV.2. *Для любых трех точек $A, B, C \in \mathbf{A}$ имеет место равенство*[1]*:*

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}\,; \qquad (\forall A, B, C \in \mathbf{A})\,. \tag{XV.4}$$

[1] Правило треугольника.

Рассмотрим любые три точки A, B, C k-мерной плоскости $\Pi_k(M_0; V_k)$:

$$A, B, C \in \Pi_k(M_0; V_k).$$

Тогда из (**??**) следует:

$$\overrightarrow{M_0A} \in V_k; \quad \overrightarrow{M_0B} \in V_k; \quad \overrightarrow{M_0C} \in V_k. \tag{XV.5}$$

Так как точки A, B, C, M_0 с другой стороны принадлежат аффинному пространству $\mathbf{A}_n$:

$$A, B, C \in \mathbf{A}_n,$$

то для них справедливы аксиомы Вейля (AV.1) и (AV.2). Отсюда получаем вследствие (**??**), используя правило треугольника:

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{M_0B} - \overrightarrow{M_0A} \in V_k;$$

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{M_0C} - \overrightarrow{M_0A} \in V_k,$$

т.е., существует отображение, сопоставляющее любым двум точкам A и B плоскости Π_k вектор $\overrightarrow{AB} \in V_k$. Это отображение биективно, по определению аффинного пространства $\mathbf{A}_n$. Поэтому для любых трех точек Π_k выполняется аксиома (XV.4) (правило треугольника). Рассмотрим произвольную точку $A \in \Pi_k$ и произвольный вектор $\vec{a} \in V_k$. Определим вектор

$$\overrightarrow{M_0B} \stackrel{def}{=} \overrightarrow{M_0A} + \vec{a}.$$

По аксиоме (AV.1) аффинного пространства этот вектор однозначно определяет некоторую точку аффинного пространства $B \in \mathbf{A}_n$. Но с другой стороны $\overrightarrow{M_0B} \in V_k$, т.е., согласно (OXV.1) $B \in \Pi_k$. Таким образом, теорема доказана. $\rangle\rangle$

Очевидно, что пространством переносов этой плоскости является ее направляющее пространство V_k, так что плоскость $\Pi_k(M_0; V_k)$ является аффинным пространством $\mathbf{A}_k$ размерности k, причем V_k является ее пространством переносов.

В определении (OXV.1) k-мерной плоскости участвует точка M_0. Очевидно, что сама эта точка принадлежит плоскости через нее проходящей: $M_0 \in \Pi_k(M_0; V_k)$, так как $\overrightarrow{M_0M_0} = \vec{0} \in V_k$. Рассмотрим любую другую точку плоскости $M_1 \in \Pi_k$ $(M_1 \neq M_0)$. По правилу треугольника

$$\overrightarrow{M_0M} = \overrightarrow{M_0M_1} + \overrightarrow{M_1M},$$

откуда найдем:

$$\overrightarrow{M_1M} = \overrightarrow{M_0M} - \overrightarrow{M_0M_1}.$$

Вследствие (**??**) $M_1 \in \Pi_k \Leftrightarrow \overrightarrow{M_0M_1} \in V_k$, $M \in \Pi_k \Leftrightarrow \overrightarrow{M_0M} \in V_k$, поэтому $\overrightarrow{M_1M} \in V_k$. Таким образом, из $M_1 \in \Pi_k(M_0; V_k)$ и $M \in \Pi_k(M_0; V_k)$ следует $\Pi_k(M_1; V_k) = \Pi_k(M_0; V_k)$ и $M \in \Pi_k(M_1; V_k)$.

XV.2 Параметрические уравнения k - мерной плоскости

Зададим в $\mathbf{A}_n$ какой-либо репер $\Re\{O; \vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n\}$. Рассмотрим плоскость $\Pi_k(M_0; V_k) \subset \mathbf{A}_n$ и пусть $\{\vec{q}_1, \vec{q}_2, \ldots, \vec{q}_k\}$ - базис направляющего подпространства V_k (см. Рис.XV.50).

Согласно определению (XV.1)

$$M \in \Pi_k(()M_0; V_k) \Longleftrightarrow \overrightarrow{M_0M} \in V_k,$$

то есть:

$$M \in \Pi_k(()M_0; V_k) \Longleftrightarrow \overrightarrow{M_0M} = \lambda\alpha\vec{q}_\alpha\,. \tag{XV.6}$$

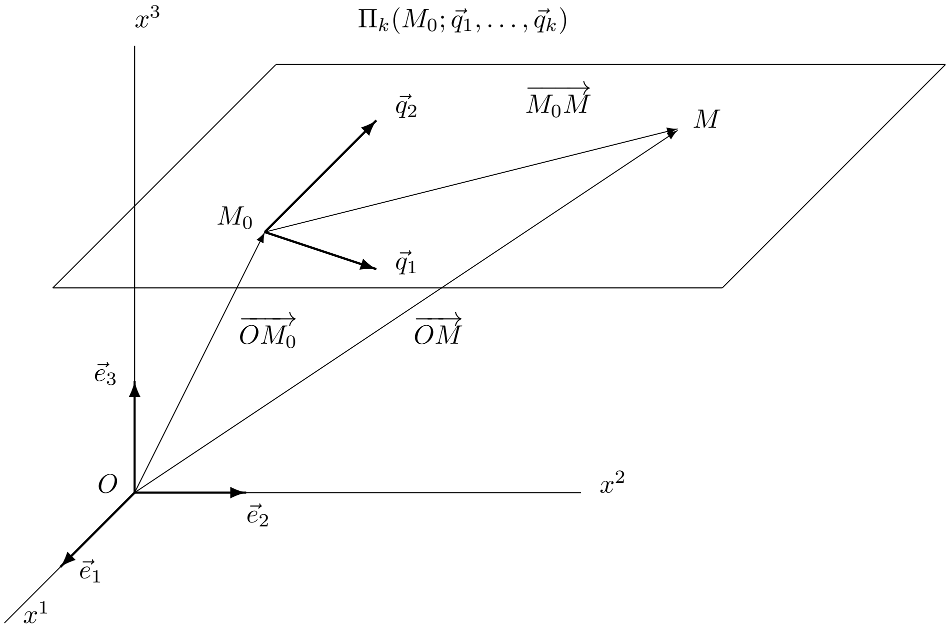


Рис.XV.50. *К выводу параметрического уравнения k - мерной плоскости*

Соотношение (XV.6) будем называть *векторным уравнением k - мерной плоскости, числа* $\lambda^\alpha \in \mathbb{R}$; $(\alpha = \overline{1,k})$ - *параметрами, а базисные векторы направляющего пространства плоскости,* $\vec{q}_\alpha$ - *направляющими векторами плоскости.*

В дальнейшем будем обозначать плоскость, проходящую через точку M_0 в направлении V_k с заданным базисом $\{\vec{q}_1, \vec{q}_2, \dots, \vec{q}_k\}$ направляющего пространства как $\Pi_k(M_0; \vec{q}_1, \vec{q}_2 \dots, \vec{q}_k)$. Таким образом, можно дать еще одно определение k-мерной плоскости:

$$\Pi_k(M_0; \vec{q}_1, \vec{q}_2 \dots, \vec{q}_k) = \left\{ M \in \mathbf{A}_n | \overrightarrow{M_0M} = \lambda^\alpha \vec{q}_\alpha \right\},$$

$$\left\{\lambda^1, \dots, \lambda^k\right\} \stackrel{\rightarrow}{=} \mathbb{R}^k. \tag{XV.7}$$

Важно подчеркнуть, что в этом определении плоскость есть множество *всех* точек M, таких что ..., и что параметры $\lambda^\alpha \in \mathbb{R}$; $(\alpha = \overline{1,k})$ *независимо* пробегают *все* множество действительных чисел. Конкретному набору параметров соответствует одна точка плоскости.

Пусть x^i - координаты точки M, x_0^i - координаты точки M_0 в репере $\Re\{O; \vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n\}$, а q_α^i - координаты векторов $\vec{q}_\alpha$ в базисе $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n\}$, т.е.:

$$\vec{q}_\alpha = q_\alpha^i \vec{e}_i\,.$$

Подставляя указанные координаты в векторное уравнение плоскости (**??**), получим *параметрические уравнения k - мерной плоскости*:

$$x^i = x_0^i + \lambda^\alpha q_\alpha^i, \qquad (i = \overline{1,n}; \quad \alpha = \overline{1,k}). \tag{XV.8}$$

Это - система n уравнений относительно n координат точки плоскости M, которые однозначно определяются заданием значений k параметров.

Заметим, что поскольку k-мерная плоскость $\Pi_k(M_0; \vec{q}_1, \vec{q}_2 \dots, \vec{q}_k)$ сама является k - мерным аффинным пространством, $\Re\{M_0; \vec{q}_1, \dots, \vec{q}_k\}$ есть ее внутренний аффинный репер.

> Таким образом, геометрический смысл параметров λ^α заключается в том, что они являются *внутренними координатами точки на плоскости.*

XV.3 Общие уравнения k - мерной плоскости

Общие уравнения k-мерной плоскости также, как и канонические уравнения прямой (см. [2]), получаются из параметрических уравнений исключением k параметров.

> Таким образом, k-мерная плоскость в аффинном пространстве $\mathbf{A}_n$ описывается $(n-k)$ общими уравнениями.

Так как векторы $\{\vec{q}_1, \vec{q}_2, \dots, \vec{q}_k\}$ являются базисными векторами k - мерного векторного пространства V_k, они линейно независимы, т.е.:

$$\operatorname{rank}(q^i_\alpha) = k.$$

Без ограничения общности можно предположить, что: [2]

$$\det ||q^\beta_\alpha|| \neq 0, \quad (\alpha, \beta = \overline{1,k}).$$

Разобьем систему n уравнений (XV.8) на две подсистемы: a) - систему k уравнений, соответствующих базисному минору матрицы $||q^i_\alpha||$, и b) - систему (n-k) оставшихся уравнений:

$$x^\alpha = x^\alpha_0 + \lambda^\beta q^\alpha_\beta, \quad (\alpha, \beta = \overline{1,k}); \tag{XV.9}$$

$$x^p = x^p_0 + \lambda^\beta q^p_\beta, \quad (p = \overline{k+1,n}). \tag{XV.10}$$

Систему (XV.9) можно рассматривать как систему k линейных неоднородных алгебраических уравнений относительно k неизвестных, λ^α, с определителем, отличным от нуля ($\det ||q^\alpha_\beta|| \neq 0$). Согласно теореме Кронекера - Капелли эта система имеет единственное решение, которое находится по правилу Крамера:

$$\lambda^\alpha = \underline{q}^{\,\alpha}_{\,\beta}\left(x^\beta - x^\beta_0\right) \Rightarrow$$

$$\lambda^\alpha = \underline{q}^{\,\alpha}_{\,\beta} x^\beta - \underline{q}^{\,\alpha}_{\,\beta} x^\beta_0, \tag{XV.11}$$

где матрица $||\underline{q}^{\,\alpha}_{\,\beta}||$ - обратная к матрице $||q^\alpha_\beta||$.

Подставляя найденные значения параметров из (XV.11) в оставшиеся $(n-k)$ уравнений (XV.10), получим:

$$x^p = x^p_0 + \underline{q}^{\,\beta}_{\,\gamma} q^p_\beta x^\gamma - \underline{q}^{\,\beta}_{\,\gamma} q^p_\beta x^\gamma_0,$$

или

$$\underline{q}^{\,\beta}_{\,\gamma} q^p_\beta x^\gamma - x^p + \left(x^p_0 - \underline{q}^{\,\beta}_{\,\gamma} q^p_\beta x^\gamma_0\right) = 0 \quad (p = \overline{k+1,n}). \tag{XV.12}$$

Обозначая

$$a^\sigma_i \stackrel{def}{=} \begin{cases} \underline{q}^{\,\beta}_{\,i} q^{\sigma+k}_\beta, & i = \overline{1,k}; \\ -\delta^{\sigma+k}_i, & i = \overline{k+1,n} \end{cases} \; ; \quad a^\sigma \stackrel{def}{=} \left(x^{\sigma+k}_0 - \underline{q}^{\,\beta}_{\,\gamma} q^{\sigma+k}_\beta x^\gamma_0\right), \tag{XV.13}$$

(где $\sigma = \overline{1,n-k}$), приведем общие уравнения k-мерной плоскости к окончательному виду:

$$a^\sigma_i x^i + a^\sigma = 0; \qquad (\sigma = \overline{1,n-k}, i = \overline{1,n}). \tag{XV.14}$$

Ранг основной матрицы системы (XV.14), $A = ||a^\sigma_i||$, равен $n-k$. Следовательно, (XV.14) - есть система $(n-k)$ независимых линейных неоднородных алгебраических уравнений относительно n неизвестных.

Теорема TXV.2. *Пусть в аффинном пространстве $\mathbf{A}_n$ задан репер $\Re\{O; \vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n\}$. Тогда всякая совместная система $(n-k)$ независимых линейных уравнений (XV.14) определяет некоторую k-мерную плоскость, $\Pi_k \subset \mathbf{A}_n$.*

[2] Если это не так, то переобозначим координаты векторов таким образом, чтобы первые k координат составляли базисный минор матрицы.

Доказательство: $\Big\langle\Big\langle$ Так как система (XV.14) совместна и ранг ее основной матрицы равен[3] $(n-k)$, фундаментальная система решений системы (XV.14) уравнений содержит k независимых решений. Пусть x_0^i - какое - либо частное решение системы (XV.14), т.е.:

$$a_i^\sigma x_0^i + a^\sigma = 0. \tag{XV.15}$$

Общее решение линейного неоднородного алгебраического уравнения (XV.14), x^i, есть сумма любого его частного решения и общего решения соответствующего ему однородного уравнения:

$$a_i^\sigma x^i = 0. \tag{XV.16}$$

Обозначим с помощью q_α^i; $(\alpha = \overline{1,k})$ - независимые решения однородной системы уравнений (XV.16), тогда общее решение (XV.14) есть сумма частного решения и линейной комбинации независимых решений однородного уравнения (XV.15):

$$x^i = x_0^i + \lambda^\alpha q_\alpha^i,$$

где λ^α - произвольные постоянные. Таким образом, решение системы общих уравнений плоскости (XV.14) дает параметрические уравнения k - мерной плоскости, проходящей через точку M_0 в направлении V_k, образованном линейной оболочкой, натянутой на векторы $\{\vec{q}_1, \vec{q}_2, \ldots, \vec{q}_k\}$. $\Big\rangle\Big\rangle$

В дальнейшем будем обозначать k-мерные плоскости в аффинном пространстве, заданные своими общими уравнениями в некотором аффинном репере, просто символом Π_k, памятуя о том, в качестве опорной точки k-мерной плоскости может быть выбрана любая точка $M_0(x_0^i)$, где x_0^i - любые частные решения общих уравнений (XV.14). В качестве базисных векторов направляющего пространства могут быть взяты любые k независимые решения однородной системы уравнений (XV.16).

XV.4 Гиперплоскости

Определение OXV.2. *Плоскость размерности на единицу меньшей размерности аффинного*

Из вышесказанного следует, что гиперплоскость описывается одним общим уравнением. Можно простым способом получить это уравнение, не прибегая к процедуре исключения параметров. Пусть, как и выше, в репере $\Re\{O; \vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n\}$ опорная точка плоскости M_0 имеет координаты x_0^i, текущая точка M - координаты x^i, и пусть базисные векторы $\vec{q}_\alpha$; $(\alpha = \overline{1, n-1})$ направляющего пространства V_{n-1} в базисе $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n\}$ есть q_α^i. Определение плоскости (OXV.1) выражает собой факт линейной зависимости системы направляющих векторов плоскости и геометрического вектора $\overrightarrow{M_0M}$, где M - произвольная точка плоскости. В случае гиперплоскости эта система содержит n векторов, но как известно из векторной алгебры[4], необходимым и достаточным условием линейной зависимости системы n векторов в V_n является равенство нулю определителя, составленного из координат этих векторов, т.е.:

$$\begin{vmatrix} x^1 - x_0^1 & x^2 - x_0^2 & \ldots & x^n - x_0^n \\ q_1^1 & q_1^2 & \ldots & q_1^n \\ . & . & \ldots & . \\ q_{n-1}^1 & q_{n-1}^2 & \ldots & q_{n-1}^n \end{vmatrix} = 0. \tag{XV.17}$$

Это уравнение и является искомым общим уравнением гиперплоскости.

XV.5 Взаимное расположение прямых и плоскостей в аффинном пространстве

Рассмотрим в аффинном пространстве $\mathbf{A}_n$ какие - либо две плоскости, Π_k и $\underline{\Pi}_m$ с направляющими пространствами V_k и $\underline{V}_m$, и пусть для определенности: $k \le m$. С точки зрения алгебры исследование взаимного расположения k-мерных плоскостей при заданном аффинном репере сводится к исследованию

[3] Напомним, что ранг основной матрицы системы равен числу независимых уравнений. Число же независимых решений равно разности числа переменных и ранга основной матрицы системы, т.е., n-(n-k) =k.

[4] См., например, [2].

совместных решений систем уравнений этих плоскостей. Зададим в $\mathbf{A}_n$ некоторый аффинный репер $\Re\{O;\vec{e}_1,\dots,\vec{e}_n\}$, и пусть $M_0(x_0^i)$ и $\underline{M}_0\left(\underline{x}_0^i\right)$ - опорные точки этих плоскостей, а

$$\vec{q}_\alpha=\vec{e}_i\,q_\alpha^i)\ \ \underline{\vec{q}}_\sigma=\vec{e}_i\,\underline{q}_\sigma^i$$

- базисные векторы направляющих пространств V_k и $\underline{V}_m$, соответственно, т.е.:

$$V_k,\ \{\vec{q}_1,\vec{q}_2,\dots,\vec{q}_k\};\qquad \underline{V}_m,\ \{\underline{\vec{q}}_1,\underline{\vec{q}}_2,\dots,\underline{\vec{q}}_m\}.$$

Составляя параметрические уравнения этих плоскостей и приравнивая соответствующие координаты, получим систему n линейных неоднородных алгебраических уравнений относительно $(k+m)$ параметров $\lambda^\alpha;\ \alpha=\overline{1,k}$ и $\underline{\lambda}^\sigma;\ \sigma=\overline{1,m}$:

$$\left\{\begin{array}{lcl} x_0^1+q_\alpha^1\lambda^\alpha &=& \underline{x}_0^1+\underline{q}_\sigma^1\underline{\lambda}^\sigma\\ x_0^2+q_\alpha^2\lambda^\alpha &=& \underline{x}_0^2+\underline{q}_\sigma^2\underline{\lambda}^\sigma\\ \dots\dots\dots & \dots & \dots\dots\dots\\ x_0^n+q_\alpha^n\lambda^\alpha &=& \underline{x}_0^n+\underline{q}_\sigma^n\underline{\lambda}^\sigma \end{array}\right.\qquad \left(\begin{array}{l}\alpha=\overline{1,k}\\ \sigma=\overline{1,m}\end{array}\right),\tag{XV.18}$$

Согласно определению плоскости (OXV.1) каждому частному решению системы (XV.18) соответствует одна общая точка неоднородных линейных алгебраических уравнений (XV.18) геометрически соответствует пересечение k-мерных плоскостей. Отсутствие же решений этой системы,т.е., ее несовместность означает непересечение этих плоскостей.

С точки зрения теории систем линейных алгебраических уравнений основная матрица системы (XV.18), A, получается объединением матриц Q и $\underline{Q}$, составленных из координат базисных векторов направляющих пространств V и $\underline{V}$:

$$Q=||q_\alpha^i||;\qquad \underline{Q}=||\underline{q}_\sigma^i||,\qquad (i=\overline{1,n};\alpha=\overline{1,k};\sigma=\overline{1,m}).$$

$$A=(Q\cup\underline{Q})\quad=\left\|\begin{array}{cccc|cccc} q_1^1 & q_2^1 & \dots & q_k^1 & \underline{q}_1^1 & \underline{q}_2^1 & \dots & \underline{q}_m^1\\ q_1^2 & q_2^2 & \dots & q_k^2 & \underline{q}_1^2 & \underline{q}_2^2 & \dots & \underline{q}_m^2\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ q_1^n & q_2^n & \dots & q_k^1 & \underline{q}_1^n & \underline{q}_2^n & \dots & \underline{q}_m^n \end{array}\right\|.\tag{XV.19}$$

Как известно, пересечение векторных подпространств само является векторным пространством. Пусть пересечение направляющих подпространств V_k и $\underline{V}_m$ имеет размерность $r\geq 0$[5]:

$$V_k\cap\underline{V}_m=V_r;\qquad (0\leq r\leq k).\tag{XV.20}$$

Напомним, что размерности пересечения и объединения векторных пространств согласно теореме о размерности связаны соотношением:

$$\dim(V_k\cap\underline{V}_m)=\dim(V_k)+\dim(\underline{V}_m)-\dim(V_k\cup\underline{V}_m).$$

т.е.:

$$r=k+m-\dim(V_k\cup\underline{V}_m).\tag{XV.21}$$

С другой стороны, размерность объединения векторных подпространств равна рангу матрицы A (XV.19):

$$\dim(V_k\cup\underline{V}_m)=\mathrm{rank}(A),\tag{XV.22}$$

а пересечение этих подпространств определяется векторами, одновременно входящими в левую и правую части этой матрицы. Таким образом, взаимное расположение плоскостей в аффинном пространстве определяется "взаимным расположением" их направляющих пространств.

Теорема TXV.3. *Возможны следующие случаи взаимного расположения двух плоскостей в $\mathbf{A}_n$:*

I.

$$\dim(V_k\cap\underline{V}_m)=r>0,\tag{XV.23}$$

[5] В том случае, когда $r=0$ пересечение состоит из одного нуль-вектора.

в этом случае будем говорить, что плоскости Π_k и $\underline{\Pi}_m$ имеют общее r-мерное направление.
I.1. *При этом, если плоскости* Π_k *и* $\underline{\Pi}_m$ *имеют хотя бы одну общую точку* M_0*, то они пересекаются по* r*-мерному направлению:*

$$\Pi_k \cap \underline{\Pi}_m \neq \varnothing \Longrightarrow \Pi_k \cap \underline{\Pi}_m = \Pi_r(M_0; V_r). \qquad \text{(XV.24)}$$

Если же при этом $k = r$*, то говорят, что плоскость* Π_k *лежит в плоскости* $\underline{\Pi}_m$*.*
I.2. *Если пересечение плоскостей пусто:*

$$\Pi_k \cap \underline{\Pi}_m = \varnothing,$$

в этом случае говорят, что плоскости параллельны в направлении V_r. *Если же* $k = r$*, то говорят просто, что плоскость* Π_k *параллельна плоскости* $\underline{\Pi}_m$*.*

II.

$$V_k \cap \underline{V}_m = \vec{0} \Longrightarrow \dim(V_k \cap \underline{V}_m) = 0, \qquad \text{(XV.25)}$$

- здесь возможны два подслучая:
II.1. *Если* $\Pi_k \cap \underline{\Pi}_m \neq \varnothing$*, то плоскости пересекаются в единственной точке (в нуль-мерном пространстве,* $\mathbf{A}_0$*).*
II.2. *Если* $\Pi_k \cap \underline{\Pi}_m = \varnothing$*,* в этом случае говорят, что плоскости Π_k и $\underline{\Pi}_m$ скрещиваются.

XV.6 Аффинные инварианты плоскостей

Напомним (см., например, [2]), что аффинным преобразованием называется изоморфное отображение:

$$f : \mathbf{A}_n \longrightarrow \mathbf{A}_n \qquad \text{(XV.26)}$$

аффинного пространства $\mathbf{A}_n$ самого на себя. Такой изоморфизм задается парой аффинных реперов[6] $\Re\{O; \vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n\}$ и $\Re\{O'; \vec{e}_{\prime 1}, \ldots, \vec{e}_{\prime n}\}$ и устанавливается по равенству координат точки M (прообраза) и точки M' (ее образа) в соответствующих реперах, $\Re$ и $\Re'$.

Пусть k-мерная плоскость Π_k задается в репере $\Re$ системой общих уравнений (XV.14):

$$a^\sigma_i x^i + a^\sigma = 0; \qquad (\sigma = \overline{1, n-k}, i = \overline{1, n}).$$

При аффинном преобразовании (XV.26) произвольная точка $M(x^i)$ с координатами x^i в репере $\Re$ перейдет в точку $M'(x^i)$ с теми же координатами в новом репере $\Re'$. Если точка $M(x^i)$ принадлежит плоскости Π_k, то ее координаты x^i удовлетворяют системе уравнений (XV.14), тогда и координаты ее образа $M(x^i)$ относительно нового репера также удовлетворяют системе уравнений (XV.14). Следовательно, согласно теореме (TXV.2) геометрическое место всех точек M' будет некоторой k-мерной плоскостью.

> Аффинное преобразование $f : \mathbf{A}_n \longrightarrow \mathbf{A}_n$ переводит каждую k-мерную аффинную плоскость в k-мерную аффинную плоскость.

Пусть теперь k-мерная плоскость Π_k задается опорной точкой M_0 и направляющими векторами $\vec{q}_i$ — $\Pi_k(M_0; \vec{q}_1, \vec{q}_2 \ldots, \vec{q}_k)$ и определяется параметрическими уравнениями (XV.8):

$$x^i = x^i_0 + \lambda^\alpha q^i_\alpha, \qquad (i = \overline{1, n}; \quad \alpha = \overline{1, k}).$$

Как мы знаем [2], аффинные преобразования пространства генерируют одновременные автоморфизмы пространства переносов $f : V_n \longrightarrow V_n$, при которых базис $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n\}$ переходит в базис $\{\vec{e}_{\prime 1}, \vec{e}_{\prime 2}, \ldots, \vec{e}_{\prime q}\}$, а произвольный вектор $\vec{x}$ переходит в вектор $\vec{x}\,'$, имеющий те же координаты в новом базисе. Таким образом, при аффинном преобразовании (XV.26) опорная точка M_0 перейдет в некоторую точку M'_0 с теми же координатами в новом репере, а направляющие векторы плоскости, $\{\vec{q}_1, \vec{q}_2, \ldots, \vec{q}_k\}$, перейдут

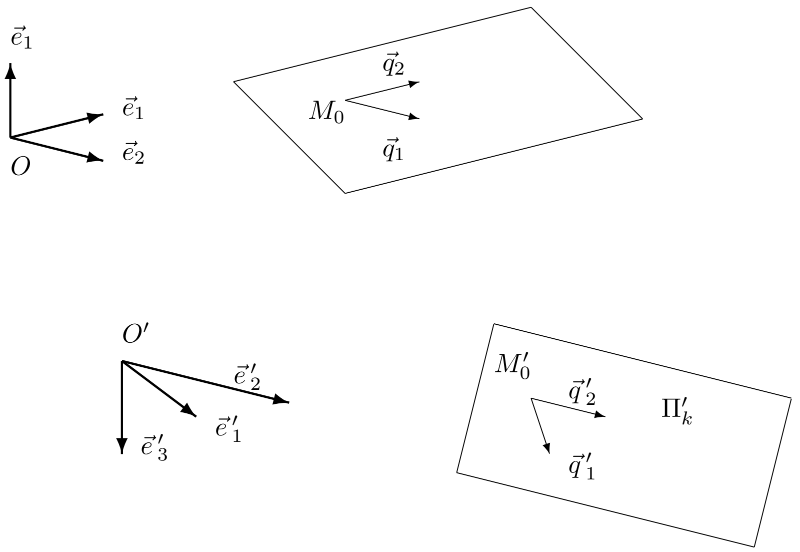


Рис.XV.51. *Аффинное преобразование k-мерной плоскости*

в векторы $\{\vec{q'}_1, \vec{q'}_2, \ldots, \vec{q'}_k\}$ с теми же самыми координатами в новом базисе. Параметрические уравнения образа плоскости при этом также не изменятся. Внутренний репер плоскости Π_k - $\Re\{M_0; \vec{q}_1, \ldots, \vec{q}_k\}$ перейдет во внутренний репер $\Re\{M'_0; \vec{q'}_1, \ldots, \vec{q'}_k\}$ плоскости Π'_k (см. Рис. ?).

Таким образом, что при аффинных преобразованиях (XV.26) направляющие пространства k-мерных плоскостей переходят в направляющие пространства k-мерных же плоскостей:

$$f : \mathbf{A}_n \longrightarrow \mathbf{A}_n \Longrightarrow g : V_n \longrightarrow V_n \Longrightarrow h : \Pi_k \longrightarrow \Pi'_k \Longrightarrow s : V_k \longrightarrow V'_k.$$

В частности,

$$s : V_k \cap \underline{V}_m \longrightarrow V'_k \cap \underline{V'}_m$$

- пересечение векторных подпространств переходит в пересечение векторных подпространств с той же размерностью. Общие точки двух плоскостей переходят в общие точки их образов. Таким образом, мы доказали теорему:

Теорема TXV.4. *Взаимное расположение k-мерных плоскостей в аффинном пространстве не изменяется при аффинных преобразованиях.*

Эта теорема обобщает теоремы об аффинных инвариантах прямых, рассмотренных в предыдущем курсе [2].

XV.7 Группа аффинных преобразований

XV.7.1 Определение группы преобразований

Рассмотрим теперь множество всех аффинных преобразований (XV.26):

$$f : \mathbf{A}_n \longrightarrow \mathbf{A}_n.$$

Это множество может быть задано множеством упорядоченных пар $(\Re, \Re')$ аффинных реперов $\Re\{O; \vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n\}$ и $\Re\{O'; \vec{e'}_1, \ldots, \vec{e'}_n\}$, или формулами преобразования, связывающими координаты образа (x^i) и прообраза (x'^i) произвольной точки по отношению к одному заданному реперу (см., например, [2]):

$$x'^{\,i} = C'^{\,i}_{k} x^k + x'^{\,i}_{0}\,, \qquad \text{(XV.27)}$$

[6] координатный изоморфизм

где C'^{i}_{k} - матрица, обратная к матрице перехода от старого базиса $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n\}$ пространства переноса V_n к новому, $\{\vec{e}_{'1}, \vec{e}_{'2}, \ldots, \vec{e}_{'n}\}$, - $C^k_{'i}$:

$$\vec{e}_{'k} = C^i_{'k}\vec{e}_i, \longrightarrow \vec{e}\,' = \vec{e}C; \qquad C^i_{'j}C'^{j}_{k} = \delta^i_k, \tag{XV.28}$$

которая по определению является невырожденной матрицей:

$$\det \|C\| \neq 0. \tag{XV.29}$$

Элементом α множества всех аффинных преобразований $\mathcal{A}$ ($\alpha \in \mathcal{A}$) является *конкретное* аффинное преобразование (XV.27). Каждое такое преобразование полностью определяется конкретными числами, а). элементами матрицы перехода $C^i_{'k}$ ($i, k = \overline{1, n}$); б). координатами *вектора параллельного переноса* $\vec{a}(x^i_0)$. Эти $n^2 + n = n(n+1)$ чисел совершенно произвольны и не связаны между собой никакими условиями. Точнее говоря, имеется лишь одно исключающее условие (XV.29), но оно не устанавливает никакой зависимости между элементами перехода. Поэтому можно говорить, что конкретное аффинное преобразование $\alpha \in \mathcal{A}$ определяется $n(n+1)$ *параметрами*, представляемыми парой (C'^{i}_{k}, x^J_0).

Напомним определение группы:

Определение OXV.3. *Множество $\{\alpha, \beta\, \gamma, \ldots\} \in \mathcal{G}$ называется группой по отношению к бинарной операции $\odot$ (умножения), если выполняются следующие четыре условия:*

1. Замкнутость*: Для любых $\alpha, \beta \in \mathcal{G}$*
$$\alpha \odot \beta \in \mathcal{G};$$
2. Ассоциативность*: Для $\forall \alpha, \beta, \sigma \in \mathcal{G}$:*
$$(\alpha \odot \beta) \odot \sigma = \alpha \odot (\beta \odot \sigma);$$
3. Существование нейтрального элемента*: Множество $\mathcal{G}$ содержит левую единицу E такую, что для каждого элемента $\alpha \in \mathcal{G}$:*
$$\varepsilon \odot \alpha = \alpha;$$
4. Существование симметричного элемента*: Для $\forall \alpha \in \mathcal{G}$ существует $\alpha^{-1} \in \mathcal{G}$ такой, что:*
$$\alpha^{-1} \odot \alpha = \varepsilon.$$

XV.7.2 Теорема о группе аффинных преобразований

Докажем теорему:

Теорема TXV.5. *Все множество аффинных преобразований $\mathcal{A}$ вида (XV.27) образует группу преобразований.*

Доказательство: $\langle\langle$ Элементом группы преобразований, как мы отмечали, является конкретное преобразование $\alpha \in \mathcal{A}$ такое что,

$$\alpha : \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{A}$$

по закону

$$\alpha(M(x^i)) = M'(x^i),$$

где x^i - координаты в каждом из соответствующих реперов $(\Re, \Re')$, упорядоченная пара которых задает и конкретное преобразование α. С другой стороны указанный элемент группы преобразований при заданном начальном репере полностью определяется упорядоченной системой $n(n+1)$ чисел $(C^i_{'k}, x^i_0)$ по закону (XV.27). Заметим, что аффинное преобразование (XV.27) линейной функцией самого общего вида с единственным условием невырожденности преобразования (XV.29). Применительно к группе преобразований бинарное отношение (умножение) является композицией двух преобразований. Поскольку результат действия преобразования на конкретную точку есть опять-таки точка того же самого аффинного пространства, то достаточно доказать существование тождественного преобразования среди элементов группы преобразований вместо того, чтобы доказывать, что композиция тождественного преобразования с любым дает исходное преобразование. Нетрудно также видеть, что закон ассоциативности для преобразований всегда выполняется по смыслу самих преобразований, так как $(\alpha\odot\beta)\odot\sigma = (\alpha(\beta))(\sigma)$, а $\alpha\odot(\beta\odot\sigma) = \alpha(\beta(\sigma))$. Эти соотношения всегда выполняются на множестве линейных функций. Таким образом, доказательство теоремы сводится к доказательству справедливости следующих трех утверждений:

1. Множество всех аффинных преобразований $\mathcal{A}$ содержит тождественное преобразование ε такое, что для
$$\forall M \in \mathbf{A} \qquad \varepsilon(M) = M;$$
2. Для $\forall\alpha \in \mathcal{A}$ и любой точки M существует $\alpha^{-1} \in \mathcal{A}$ такой, что:
$$\alpha^{-1}(\alpha(M)) = M.$$
3. Для любых $\alpha, \beta \in \mathcal{A}$
$$\alpha(\beta(M)) = \gamma(M); \qquad \gamma \in \mathcal{A}.$$

Полагая в (XV.27) $C'^{i}_{k} = \delta^i_k$; $x^i_0 = 0$, или в матричном виде
$$C^{-1} = E; \qquad \vec{a} = \vec{0}, \tag{XV.30}$$
мы получим тождественное преобразование
$$x'^{\,i} = x^i \quad \Longrightarrow M' = M.$$
(При этом, очевидно, $C = C^{-1} = E$). Поскольку $\det E = 1 \neq 0$, тождественное преобразование ε (XV.30) является аффинным преобразованием, т.е., $\varepsilon \in \mathcal{A}$.

Пусть теперь точка M аффинным преобразованием (XV.27) переводится в точку M, имеющую координаты $x'^{\,i}$ относительно старого репера $\Re$. Перепишем формулу (XV.27) в виде:
$$C'^{i}_{k} x^k = x'^{\,i} - x^i_0$$
и умножим обе части этого равенства на матрицу перехода $C^j_{'i}$:
$$x^j = C^j_{'i} x'^{\,i} + x'^{\,j}_{\,0}, \tag{XV.31}$$
где $x'^{\,j}_{\,0} = -C'^{j}_{i} x^i_0$ - координаты вектора $\overrightarrow{O'O} = -\vec{a}$ относительно нового базиса $\{\vec{e}_{'1}, \vec{e}_{'2}, \ldots, \vec{e}_{'n}\}$ (см. формулы (2.3.9) — (2.3.11) книги [2] и приведенные там коментарии). Поскольку
$$\det C \neq 0 \Longleftrightarrow \det C^{-1} \neq 0,$$
обратное к данному аффинному преобразованию также является аффинным преобразованием: $\alpha^{-1} \in \mathcal{A}$.

Рассмотрим теперь композицию преобразований. Пусть аффинное преобразование α переводит точку M в точку M', а аффинное преобразование α' переводит точку M' в точку M''. Необходимо доказать, что точка M' переводится в точку M'' также аффинным преобразованием. Итак, пусть:
$$\alpha\,:M \longrightarrow M': \quad x'^{\,i} = C'^{i}_{k} x^k + x'^{\,i}_{\,0}\,,$$
$$\alpha'\,:M' \longrightarrow M'': \quad x''^{\,i} = C''^{i}_{'k} x'^{\,k} + x''^{\,i}_{\,0}\,,$$
где $x'^{\,i}$ - координаты точки M', по отношению к реперу $\Re\{O; \vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n\}$, $x''^{\,i}$ - координаты точки M'' по отношению к реперу $\Re\{O'; \vec{e}_{'1}, \ldots, \vec{e}_{'n}\}$, $C^i_{'k}$ (C'), - матрица перехода от базиса $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n\}$ к базису $\{\vec{e}_{'1}, \vec{e}_{'2}, \ldots, \vec{e}_{'n}\}$, $C'^{i}_{''k}$ (C''), - матрица перехода от базиса $\{\vec{e}_{'1}, \vec{e}_{'2}, \ldots, \vec{e}_{'n}\}$ к базису $\{\vec{e}_{''1}, \vec{e}_{''2}, \ldots, \vec{e}_{''n}\}$, x^i_0 - координаты вектора параллельного переноса $\vec{a} = \overrightarrow{OO}'$, $x'^{\,i}_{\,0}$ - координаты вектора параллельного переноса $\vec{a}\,' = \overrightarrow{O'O}''$.

Подставляя во вторую формулу выражение для $x'^{\,i}$ из первой формулы, получим:
$$\alpha''\,:M \longrightarrow M'': \quad x''^{\,i} = C''^{i}_{'k} C'^{k}_{j} x^j + C''^{i}_{'k} x'^{\,k}_{\,0} + x''^{\,i}_{\,0}\,,$$

Положим:

$$\overline{C}''^{\,i}_{\,j} \stackrel{def}{=} C''^{i}_{k} C'^{k}_{j}; \quad \overline{x}''^{\,i}_{\,0} \stackrel{def}{=} C''^{i}_{k} x'^{\,k}_{\,0} + x''^{\,i}_{\,0}, \tag{XV.32}$$

и перепишем предыдущее выражение в виде (XV.27):

$$x''^{\,i} = \overline{C}''^{\,i}_{\,j} x^j + \overline{x}''^{\,i}_{\,0}.$$

Таким образом, матрица композиции преобразований, $\overline{C}$ равна:

$$\overline{C}'' = C''C'. \tag{XV.33}$$

Как известно, определитель произведения квадратных матриц равен произведению определителей умножаемых матриц, поэтому:

$$\det \left\|\overline{C}''\right\| = \det \|C''\| \det \|C'\| \neq 0.$$

Следовательно, композиция двух аффинных преобразований есть аффинное преобразование. $\rangle\rangle$

Согласно вышесказанному порядок группы аффинных преобразований равен $n(n{+}1)$, поэтому группу аффинных преобразований, $\mathcal{A}_n$, будем называть $n(n+1)$- *параметрической группой аффинных преобразований и обозначать ее* $\mathcal{A}_{n;n(n+1)}$.

XV.7.3 Подгруппы группы аффинных преобразований

Определение OXV.4. *Пусть множество $\mathcal{G}$ - группа. Подмножество $\mathcal{H} \subset \mathcal{G}$ называется подгруппой группы $\mathcal{G}$, если оно само образует группу.*

Таким образом, подгруппой группы аффинных преобразований будет являться подмножество всех аффинных преобразований, которое само образует группу. Перечислим наиболее важные подгруппы группы аффинных преобразований $\mathcal{A}_{n(n+1)}$.

Подгруппа центроаффинных преобразований

Центроаффинные преобразования f задаются упорядоченной парой реперов:

$$\Re\{O; \vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n\}, \Re'\{O, \vec{e'}_1, \ldots, \vec{e'}_n\}.$$

Таким образом, при центроаффинных преобразованиях сохраняется начало аффинного репера. Таким преобразованиям соответствует в формулах (XV.27) нулевой вектор параллельного переноса:

$$x'^{\,i}_{\,0} = 0; \qquad (i = \overline{1,n}),$$

поэтому формулы центроаффинных преобразований имеют следующий вид:

$$x'^{\,i} = C'^{i}_{k} x^k. \tag{XV.34}$$

Из предыдущего материала очевидно, что произведение центроаффинных преобразований, а также преобразование обратное к центроаффинному будут также центроаффинным преобразованием. Тождественное преобразование получаем, полагая $C = E$.

Таким образом, множество всех центроаффинных преобразований образует подгруппу $\mathcal{A}^0$ группы аффинных преобразований. Порядок этой подгруппы равен n^2.

Подгруппа эквиаффинных преобразований

Преобразование f называется эквиаффинным, если в формулах аффинного преобразования (XV.27):

$$\det \left\| C'^{i}_{k} \right\| = 1 \Longrightarrow \det C^{-1} = 1. \qquad \text{(XV.35)}$$

Докажем, что все множество эквиаффинных преобразований образует группу. Действительно, обратное преобразование определяется матрицей $C^{i}_{\prime k}$, т.е., матрицей перехода C. Вычисляя определитель от обеих частей матричного равенства:

$$CC^{-1} = E,$$

найдем: $\det C = 1$. Тождественное преобразование определяется единичной матрицей перехода E, определитель которой равен единице. Следовательно, тождественное преобразование также является эквиаффинным. Наконец, матрица композиции преобразований, как следует из (XV.33), определяется произведением матриц каждого из преобразований. Вычисляя определитель от обеих частей матричного равенства (XV.33) с учетом (XV.35), получим $\det \left\| \overline{C} \right\| = 1$. Таким образом, и композиция двух эквиаффинных преобразований также является эквиаффинным преобразованием. Подгруппа эквиаффинных преобразований, $\tilde{\mathcal{A}}$, имеет порядок $n(n+1)-1$, так как на параметры группы преобразований наложено одно условие (XV.35).

Возьмем в $\mathbf{A}_n$ произвольную точку M_0 и систему n линейно - независимых векторов $\vec{a}_i$ в пространстве переносов V_n. Назовем n-мерным параллелепипедом, построенным на векторах $\vec{a}_i$ множество всех точек $M \in \mathbf{A}_n$, таких что

$$\overrightarrow{M_0 M} = \sum_{i=1}^{n} \lambda^i \vec{a}_i, \quad \lambda^i \in [0,1].$$

Объем этого параллелепипеда равен определителю, составленному из координат векторов $\vec{a}_i$. Очевидно, что определенный таким образом объем является инвариантом эквиаффинных преобразований.

Подгруппа параллельных переносов

Преобразование параллельного переноса задается упорядоченной парой реперов:

$$\Re\{O; \vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n\}, \quad \Re\{O'; \vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n\}.$$

Таким образом, базис пространства переносов не изменяется, и формулы преобразования параллельного переноса имеют вид:

$$x'^{\,i} = x^i + x'^{\,i}_{\;0}. \qquad \text{(XV.36)}$$

Предоставляем Читателю возможность самостоятельно доказать тот факт, что все множество параллельных переносов образует группу преобразований. Порядок этой подгруппы равен n, а ее параметрами являются координаты вектора параллельного переноса.

Глава XVI

Аффинные теоремы и задачи стереометрии

XVI.1 Взаимное расположение плоскостей в трехмерном аффинном пространстве

Применим результаты Главы (XIV) к интересующему нас случаю - трехмерному аффинному пространству, $\mathbf{A}_3$. Итак, рассмотрим трехмерное аффинное пространство $\mathbf{A}_3$ над векторным пространством V_3. Поскольку размерность аффинного пространства равна $n = 3$, то его подпространствами могут быть лишь $\mathbf{A}_2$ и $\mathbf{A}_1$, т.е., аффинные плоскости $\Pi = \mathbf{A}_2 \subset \mathbf{A}_3$ и аффинные прямые $d = \mathbf{A}_1 \subset \mathbf{A}_3$, имеющими своими направляющими пространствами, соответственно, V_2 и V_1.

Выясним сначала, каково может может быть вообще взаимное расположение плоскостей, Π, и прямых , d, в трехмерном аффинном пространстве.

1. Теорема о взаимном расположении двух плоскостей в $\mathbf{A}_3$

Рассмотрим сначала взаимное расположение двух плоскостей , Π и $\overline{\Pi}$ в $\mathbf{A}_3$. Размерность соответствующих направляющих пространств плоскостей, V_2 и $\overline{V}_2$ равна 2. Следовательно, по теореме о размерности пересечения (TIV.4)имеем:

$$\dim V \cap \overline{V} = 2 + 2 - \dim V_2 \cup \overline{V}_2. \tag{XVI.1}$$

Но размерность объединения $\dim V_2 \cup \overline{V}_2$ с одной стороны не может превосходить размерности пространства переносов аффинного пространства, V_3, а с другой стороны не может быть меньше размерности направляющих пространств самих плоскостей:

$$2 \le \dim V_2 \cup \overline{V}_2 \le 3.$$

Таким образом, из (XV.21) сразу получаем:

$$1 \le \dim V_2 \cap \overline{V}_2 \le 2. \tag{XVI.2}$$

Поэтому согласно теореме (TXVI.2) возможны следующие случаи взаимного расположения двух плоскостей в $\mathbf{A}_3$:

Теорема TXVI.1. *В трехмерном аффинном пространстве две плоскости Π и $\overline{\Pi}$ могут:*

1. *пересекаться по прямой $d(M_0; \vec{q}) = \Pi \cap \overline{\Pi}$ при:*

$$\dim V_2 \cap \overline{V}_2 = 1, \tag{XVI.3}$$

где направляющий вектор прямой d есть любой вектор векторного пересечения:

$$\forall \vec{q} \in V_2 \cap \overline{V}_2,$$

а опорная точка прямой, M_0 есть любая общая точка плоскостей Π и $\overline{\Pi}$;

2. *быть параллельными друг другу,* $\Pi || \overline{\Pi}$ *при:*

$$V_2 = \overline{V}_2, \qquad \overrightarrow{M_1M_2} \notin V_2; \tag{XVI.4}$$

3. *совпадать,* $\Pi = \overline{\Pi}$ *при:*

$$V_2 = \overline{V}_2, \qquad \overrightarrow{M_1M_2} \in V_2. \tag{XVI.5}$$

Геометрические критерии взаимного расположения плоскостей в $\mathbf{A}_3$

Пусть плоскости Π и $\overline{\Pi}$ заданы своими опорными точками и парами парами неколлинеарных векторов, т.е., другими словами, парой своих внутренних реперов:

$$\Pi(M_1; \vec{q}_1, \vec{q}_2); \qquad \overline{\Pi}(M_2; \vec{q}_1^{\,*}, \vec{q}_2^{\,*}).$$

Пусть далее эти точки и векторы имеют следующие координаты в репере $\Re\{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ и соответствующем ему базисе $\mathbf{A}_3$ — $\{\vec{e}_i\}_3$:

$$\Pi: \quad M_1(x_1, y_1, z_1); \quad \vec{q}_1 = (l_1, m_1, n_1); \qquad \vec{q}_2 = (l_2, m_2, n_2);$$

$$\overline{\Pi}: \quad M_2(x_2, y_2, z_2); \quad \vec{q}_1^{\,*} = (l_1^*, m_1^*, n_1^*); \quad \vec{q}_2^{\,*} = (l_2^*, m_2^*, n_2^*);$$

В соответствие с теоремой (TXVI.1) составим матрицу из координат четырех направляющих векторов и вычислим ее ранг:

$$m \overset{def}{=} \operatorname{rank} A = \left(\begin{array}{cc|cc} l_1 & l_2 & l_1^* & l_2^* \\ m_1 & m_2 & m_1^* & m_2^* \\ n_1 & n_2 & n_1^* & n_2^* \end{array}\right)$$

Итак, возможны два случая: 1). $m = 3$; 2) $m = 2$. В первом случае плоскости пересекаются по прямой, во втором случае они либо а). параллельны, либо б). совпадают.

Рассмотрим первый случай, когда $m = 3$. Поскольку каждая пара направляющих векторов линейно независима, то в качестве трех линейно независимых векторов можно выбрать систему, состоящую из 2-х направляющих векторов любой из плоскостей, например, Π, и линейную комбинацию направляющих векторов второй плоскости, $\vec{q}^{\,*} = \alpha\vec{q}_1^{\,*} + \beta\vec{q}_2^{\,*}$, такую, чтобы система векторов $\{\vec{q}_1, \vec{q}_2, \vec{q}^{\,*}\}$, была бы линейно независимой.

Поставим следующую задачу: *найти направляющий вектор прямой пересечения плоскостей* , $\vec{q}_0^{\,*}$, такой что $\vec{q}_0^{\,*} \in V_1 = V_2 \cap \overline{V}_2$. Условием линейной зависимости трех векторов в трехмерном векторном пространстве является равенство нулю определителя, составленного из их координат. Так как по определению вектор $\vec{q}_0^{\,*}$ принадлежит одномерному пересечению подпространств V_2 и $\overline{V}_2$, (т.е., $\vec{q}^{\,*} = \alpha_0\vec{q}_1^{\,*} + \beta_0\vec{q}_2^{\,*}$), то система из трех векторов $\{\vec{q}_1, \vec{q}_2, \vec{q}_0^{\,*}\}$ должна являться линейно зависимой. Таким образом, имеем условие:

$$\begin{vmatrix} l_1 & l_2 & \alpha_0 l_1^* + \beta_0 l_2^* \\ m_1 & m_2 & \alpha_0 m_1^* + \beta_0 m_2^* \\ n_1 & n_2 & \alpha_0 n_1^* + \beta_0 n_2^* \end{vmatrix} = 0.$$

Разлагая определитель по элементам третьего столбца и группируя члены с общими коэффициентами α_0, β_0, получим условие:

$$\alpha_0 \begin{vmatrix} l_1 & l_2 & l_1^* \\ m_1 & m_2 & m_1^* \\ n_1 & n_2 & n_1^* \end{vmatrix} + \beta_0 \begin{vmatrix} l_1 & l_2 & l_2^* \\ m_1 & m_2 & m_2^* \\ n_1 & n_2 & n_2^* \end{vmatrix} = 0. \tag{XVI.6}$$

Решая уравнение (XVI.6) относительно α_0 или β_0, найдем вектор пересечения, $\vec{q}_0^{\,*}$. Он и будет искомым направляющим вектором прямой пересечения двух плоскостей, Π и $\overline{\Pi}$. Обозначим для краткости определители в уравнении (XVI.6) посредством Δ_1, Δ_2, соответственно. Предположим для определенности $\Delta_2 \neq 0$ (в противном случае $\alpha = 0|$, т.е., искомым вектором $\vec{q}_0^{\,*}$ является вектор $\vec{q}_2^{\,*}$). Итак, найдем:

$$\beta_0 = -\alpha_0 \frac{\Delta_1}{\Delta_2}.$$

Таким образом, опуская несущественный общий множитель в направляющем векторе, найдем :

$$\vec{q_0}^{\,*} = (\Delta_2 l_1^* - \Delta_1 l_2^*, \Delta_2 m_1^* - \Delta_1 m_2^*, \Delta_2 n_1^* - \Delta_1 n_2^*,)$$

Учитывая свойства определителей, запишем окончательно координаты направляющего вектора пересечения:

$$\left(\begin{vmatrix} l_1 & l_2 & 0 \\ m_1 & m_2 & m *_2 l_1^* - m_1^* l_2^* \\ m_1 & m_2 & n *_2 l_1^* - n_1^* l_2^* \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} l_1 & l_2 & m *_1 l_2^* - m_2^* l_1^* \\ m_1 & m_2 & 0 \\ m_1 & m_2 & m *_1 n_2^* - m_2^* n_1^* \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} l_1 & l_2 & l *_2 n_1^* - l_1^* n_2^* \\ m_1 & m_2 & m *_2 n_1^* - m_1^* n_2^* \\ n_1 & n_2 & 0 \end{vmatrix} \right) \qquad \text{(XVI.7)}$$

Рассмотрим теперь второй случай $V_2 = \overline{V}_2$, когда плоскости параллельны или совпадают. Как отличить эти две ситуации? Ответ очевиден: при совпадении плоскостей П и $\overline{Pi}$ вектор $\overrightarrow{M_1M_2}$ должен принадлежать направляющему пространству плоскости: $\overrightarrow{M_1M_2} \in V_2$, т.е., система трех векторов, $\vec{q_1}\,, \vec{q_2}\,, \overrightarrow{M_1M_2}$ должна быть линейно зависимой, а, значит, определитель, составленный из координат этих векторов, должен быть равен нулю:

$$\Pi_1 = \Pi_2 \Longleftrightarrow \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix} = 0. \qquad \text{(XVI.8)}$$

В противном случае плоскости параллельны.

Общее уравнение плоскости в $\mathbf{A}_3$

Воспользуемся результатами главы (XIV) применительно к двумерным плоскостям в трехмерном аффинном пространстве. Согласно материалу раздела (XV.3) плоскость Π_2 в трехмерном аффинном пространстве описывается одним общим уравнением, поскольку в этом пространстве она является гиперплоскостью. Пусть плоскость $\Pi \subset \mathbf{A}_3$ определяется опорной точкой M_0 и парой неколлинеарных направляющих векторов, $\vec{q_1}$ и $\vec{q_2}$: $\Pi(M_0; \vec{q_1}, \vec{q_2})$. Пусть далее M - произвольная текущая точка плоскости П. Уравнение гиперплоскости выражает собой простой факт компланарности трех векторов: $\vec{q_1}\,, \vec{q_2}$ и $\overrightarrow{M_0M}$. Пусть в $\mathbf{A}_3$ задан некоторый аффинный репер $\Re\{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$, в котором точки M_0, M и векторы $\vec{q_1}\,, \vec{q_2}$ имеют следующие координаты:

$$\Pi: \; M_0(x_0, y_0, z_0); \; M(x, y, z); \; \vec{q_1} = (l_1, m_1, n_1); \; \vec{q_2} = (l_2, m_2, n_2).$$

Записывая уравнение гиперплоскости (XV.17) применительно к нашему случаю, получим:

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & x - x_0 & x - x_0 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix} = 0. \qquad \text{(XVI.9)}$$

Разлагая определитель в (XVI.9) по элементам первой строки, получим уравнение:

$$(x - x_0) \begin{vmatrix} m_1 & n_1 \\ m_2 & n_2 \end{vmatrix} - (y - y_0) \begin{vmatrix} l_1 & n_1 \\ l_2 & n_2 \end{vmatrix} + (z - z_0) \begin{vmatrix} l_1 & m_1 \\ l_2 & m_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Введем обозначения:

$$A = \begin{vmatrix} m_1 & n_1 \\ m_2 & n_2 \end{vmatrix}; \; B = -\begin{vmatrix} l_1 & n_1 \\ l_2 & n_2 \end{vmatrix}; \; C = \begin{vmatrix} l_1 & m_1 \\ l_2 & m_2 \end{vmatrix}; \; D = -(Ax_0 + By_0 + Cz_0) \qquad \text{(XVI.10)}$$

и перепишем предыдущее общее уравнение плоскости в привычном нам виде:

$$Ax + By + Cz + D = 0. \qquad \text{(XVI.11)}$$

Аналитические критерии взаимного расположения плоскостей в $\mathbf{A}_3$

Рассмотрим две плоскости, Π_1 и Π_2, заданные в $\mathbf{A}_3$ своими общими уравнениями:

$$\Pi_1: \quad A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0. \tag{XVI.12}$$

$$\Pi_2: \quad A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \tag{XVI.13}$$

При аналитическом исследовании взаимного расположения плоскостей мы исследуем систему линейных неоднородных алгебраических уравнений (XVI.12), (XVI.13). во-первых, на их совместность, а, во-вторых, устанавливаем количество независимых решений и находим их. Поэтому составим расширенную матрицу системы (XVI.12)- (XVI.13):

$$\widetilde{A} = (A|D) = \left(\begin{array}{ccc|c} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \end{array}\right).$$

Ранг матрицы A не может быть больше 2 и меньше 1.

Рассмотрим случай, когда:

$$\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{pmatrix} = 2. \tag{XVI.14}$$

Это возможно только в том случае, когда строчки этой матрицы не пропорциональны, т.е:

$$(A_1, B_1, C_1) \neq \lambda(A_2, B_2, C_2).$$

Очевидно, что в этом случае и $\operatorname{rank} \widetilde{A} = 2$, так как ранг расширенной матрицы системы не может быть меньше ранга основной матрицы системы и в то же время не может быть больше двух (так как в матрице всего две строки). Поэтому при выполнении (XVI.14) система уравнений всегда совместна и имеет $m = n - r = 3 - 2 = 1$ одно линейно независимое решение. Это решение и описывает прямую пересечения плоскостей $d = \Pi_1 \cap \Pi_2$.

Для того, чтобы найти эту прямую, достаточно, например, найти ее любые две точки , P_1 и P_2, для чего достаточно в общем решении системы (XVI.12), (XVI.13)

$$\{x(C), y(C), z(C)\}$$

придать произвольной константе C два любых различных значения.

Рассмотрим теперь второй случай, когда:

$$\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{pmatrix} = 1. \tag{XVI.15}$$

Это означает, что строки основной матрицы системы совпадают, т.е. :

$$\operatorname{rank} A = 1 \Longleftrightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}. \tag{XVI.16}$$

В этом случае возникают два подслучая:

$$\mathbf{1}. \quad \operatorname{rank} \widetilde{A} = \operatorname{rank} A = 1, -$$

это возможно лишь при условии:

$$\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} \widetilde{A} = 1 \Longleftrightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = \frac{D_1}{D_2}. \tag{XVI.17}$$

Но последнее означает, что общие уравнения плоскостей (XVI.12) и (XVI.13) эквивалентны, т.е., плоскости Π_1 и Π_2 совпадают: $\Pi_1 = \Pi 2$.

$$\mathbf{2}. \quad \operatorname{rank} \widetilde{A} = \operatorname{rank} A = 2, -$$

это возможно лишь при условии:

$$\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} \widetilde{A} = 1 \Longleftrightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} \neq \frac{D_1}{D_2}. \tag{XVI.18}$$

тогда уравнений (XVI.12) и (XVI.13) несовместна, т.е., плоскости не имеют общих точек, стало быть, они параллельны.

Таким образом, мы доказали теорему:

Теорема TXVI.2. *Пусть в трехмерном аффинном пространстве* $\mathbf{A}_3$ *своими общими уравнениями (XVI.12) и (XVI.13) заданы две плоскости:* Π_1 *и* Π_2. *Тогда плоскости пересекаются по прямой, если соответствующие коэффициенты при координатах не пропорциональны, плоскости совпадают, если все соответствующие коэффициенты их общих уравнений пропорциональны, и плоскости параллельны, если соответствующие коэффициенты при координатах их общих уравнений пропорциональны, но не пропорциональны свободные члены.*

XVI.2 Взаимное расположение прямых и плоскостей в $\mathbf{A}_3$

Пусть теперь в аффинном пространстве $\mathbf{A}_3$ заданы прямая $d(M_0;\vec{q})$ и плоскость $\Pi(M_1;V_2)$. Линейная оболочка, натянутая на направляющий вектор $\vec{q}$, $\mathcal{L}\vec{q}$ образует одномерное векторное пространство, V_1. Применим теорему о размерности пересечения векторных подпространств (TIV.4) к нашему случаю:

$$\dim V_2 \cap V_1 = \dim V_2 + \dim V_1 - \dim V_2 \cup V_1.$$

Ясно, что минимальная размерность объединения V_2 и V_1 в V_3 может быть равна 2, а максимальная размерность равна 3, причем первый случай реализуется лишь тогда, когда $\vec{q} \in V_2$, а второй, когда $\vec{q} \notin V_2$. При этом в первом случае размерность пересечения равна $\dim V_2 \cap V_1 = 1$, а во втором — $\dim V_2 \cap V_1 = 0$. В каждом из этих случаев возникает законный вопрос: имеются ли точки пересечения прямой $d(M_0;\vec{q})$ и плоскости $\Pi(M_1;V_2)$?

Геометрические критерии взаимного расположения прямой и плоскости в $\mathbf{A}_3$

Введем геометрический вектор $\overrightarrow{M_0M_1}$ и рассмотрим первый случай, когда $\vec{q} \in V_2$. Очевидно, что если и этот вектор будет принадлежать направляющему пространству плоскости: $\overrightarrow{M_0M_1} \in V_2$, тогда прямая dбудет лежать в плоскости Π:

$$d(M_0;\vec{q}) \subset \Pi(M_1;V_2) \Longleftrightarrow \vec{q}, \overrightarrow{M_0M_1} \in V_2. \tag{XVI.19}$$

В противном случае прямая d будет параллельна плоскости Π:

$$d(M_0;\vec{q})||\Pi(M_1;V_2) \Longleftrightarrow \vec{q} \in V_2, \overrightarrow{M_0M_1} \notin V_2. \tag{XVI.20}$$

Рассмотрим теперь второй случай, когда $\vec{q} \notin V_2$, — в этом случае $V_2 \cup V_1 = V_3$, т.е., объединение направляющих векторных пространств плоскости и прямой совпадает с векторным пространством переносов $\mathbf{A}_3$. Этому же пространству принадлежит и вектор $\overrightarrow{M_0M_1}$. В этом случае прямая d будет пересекать плоскость Π в единственной точке, в чем мы убедимся ниже.

Аналитические критерии взаимного расположения прямой и плоскости в $\mathbf{A}_3$

Итак, пусть плоскость $\Pi(M_1;V_2) = \Pi(M_1;\vec{q}_1,\vec{q}_2)$ задана в некотором аффинном репере $\Re\{O;\vec{e}_1,\ldots,\vec{e}_3\}$ своим общим уравнением (XVI.11):

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$

а прямая $d(M_0;\vec{q})$ своими параметрическими уравнениями:

$$\begin{cases} x = x_0 + lt; \\ y = y_0 + mt; \\ z = z_0 + nt \end{cases}, \tag{XVI.21}$$

где вектор $\vec{q}$ имеет координаты (l,m,n) в базисе $\{\vec{e}_i\}_3$. Подставляя координаты текущей точки прямой $M(x,y,z)$ в общее уравнение плоскости и группируя коэффициенты при параметре t, получим уравнение:

$$t(Al + Bm + Cn) = -(Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D). \tag{XVI.22}$$

Заметим, что если опорная точка M_0 прямой d принадлежит плоскости, то $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0$, т.е., правая часть уравнения (XVI.22) обращается в нуль. Далее, если коэффициент $\Delta = Al + Bm + Cn$ не равен нулю, то уравнение (XVI.22) имеет одно и только одно решение:

$$t = -\frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{Al + Bm + Cn}, \tag{XVI.23}$$

которому соответствует единственная точка пересечения прямой и плоскости, $\Pi \cap d = M^*$. В случае, если точка M_0 принадлежит плоскости, то это и будет она: $M_0 = M^*$. Если же $\Delta = 0$, то возникает две возможности:

$$). \quad M_0 \in Pi \Longrightarrow Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0 -$$

тогда уравнение (XVI.23) имеет бесчисленное множество решений, и любое действительное число $t \in (-\infty, +\infty)$ является его решением. Это означает, что прямая d лежит в плоскости Π. Если же $\Delta \neq 0$, то уравнение (XVI.23) не имеет ни одного решения. Это означает, что прямая d параллельна плоскости Π: $d||\Pi$. Итак, мы доказали теорему:

Теорема TXVI.3. *Прямая d и плоскость Π в трехмерном аффинном пространстве $\mathbf{A}_3$ могут:*

1. *либо пересекаться в единственной точке при условии:*

$$Al + Bm + Cn \neq 0, \tag{XVI.24}$$

2. *либо быть параллельными при условии:*

$$Al + Bm + Cn = 0; \qquad Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D \neq 0, \tag{XVI.25}$$

3. *либо прямая d может лежать в плоскости Π при условии:*

$$Al + Bm + Cn = 0; \qquad Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0. \tag{XVI.26}$$

Проекция точки на плоскость в заданном направлении

Пусть в $\mathbf{A}_3$ даны плоскость $\Pi(M_0; V_2)$, Точка $M_1 \notin \Pi(M_0; V_2)$ и вектор $\vec{q} \notin V_2$.

Определение OXVI.1. *Проекцией точки $M_0 \in \mathbf{A}_3$ в направлении $\vec{q}$ на плоскость $\Pi \subset \mathbf{A}_3$ называется точка $\overline{M}$ пересечения прямой $d(M_1; \vec{q})$ с плоскостью $\Pi(M_1; V_2)$ — $\overline{M} = d(M_0; \vec{q}) \cap \Pi(M_1; V_2)$.*

Пусть, как и прежде, в некотором аффинном репере $\Re\{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ общее уравнение плоскости Π есть уравнение (XVI.11), координаты точек M_0, $\underline{M_1}$ и вектора $\vec{q}$ также заданы, как и прежде. Тогда координаты проекции точки M_1 на плоскость Π, $\overline{M}$, определяются формулами (XVI.21) с параметром t из решения (XVI.23).

Проекция прямой на плоскость в заданном направлении

Пусть теперь в $\mathbf{A}_3$ даны прямая$d(M_0; \vec{q}_0)$, плоскость $\Pi(M_1; V_2)$ и вектор $\vec{q} \neq V_2$.

Определение OXVI.2. *Проекцией прямой $d(M_0; \vec{q}_0) \subset \mathbf{A}_3$ на плоскость $\Pi(M_1; V_2) \subset \mathbf{A}_3$ в направлении $\vec{p} \notin V_2$ называется все множество проекций точек M прямой d на плоскость Π в направлении $\vec{q}$.*

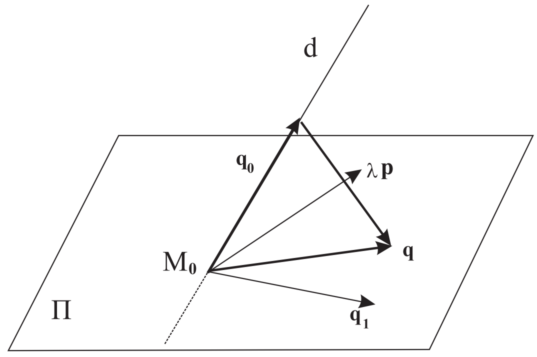


Рис.XVI.52. *Проекция прямой d на плоскость* П *в направлении* $\vec{p}$

Для того, чтобы найти проекцию прямой на плоскость, достаточно найти проекцию $\vec{q}$ на эту плоскость направляющего вектора этой прямой, $\vec{q}_0$ на эту плоскость. Разложим вектор $\vec{q}$ по направляющим векторам плоскости: $\vec{q} = \lambda_1\vec{q}_1 + \lambda_2\vec{q}_2$. Тогда по правилу треугольника найдем:

$$\vec{q} = \lambda_1\vec{q}_1 + \lambda_2\vec{q}_2 = \vec{q}_0 + \lambda\vec{p}.$$

Разрешая в координатах эти уравнения относительно $\lambda, \lambda_1, \lambda_2$ и находя координаты точки M_0 пересечения прямой с плоскостью, получим уравнение проекции: $d(M_0, \vec{p})$.

XVI.3 Взаимное расположение прямых в $\mathbf{A}_3$

Пусть теперь в трехмерном аффинном пространстве $\mathbf{A}_3$ заданы две прямые, $d(M_0; \vec{q})$ и $d^*(M_0^*; \vec{q}^*)$. Исследуем их взаимное расположение. Обозначим через V_1 и $V_1{}^*$ одномерные линейные оболочки, натянутые на векторы $\vec{q}$ и $\vec{q}^*$, соответственно. Теорема (TIV.4) применительно к нашему случаю дает:

$$dim V_1 \cap V_1{}^* = 1 + 1 - dim V_1 \cup V_1{}^*.$$

Размерность объединения будет равна 2, если векторы $\vec{q}$ и $\vec{q}^*$ неколлинеарны, и будет равна 1, если эти векторы будут коллинеарными. В первом случае размерность пересечения равна 0, во втором — 1. Рассмотрим также геометрический вектор $\overrightarrow{M_0M_0}^*$.

Геометрические критерии взаимного расположения прямых в $\mathbf{A}_3$

Возможны два основных соотношения между указанными тремя векторами:
I. Если три вектора, $\vec{q}, \vec{q}^*, \overrightarrow{M_0M_0}^*$, компланарны (т.е., линейно зависимы), то прямые $d(M_0; \vec{q})$ и $d^*(M_0^*; \vec{q}^*)$ лежат в одной плоскости, которую можно определить, например, как $\Pi(M_0; \vec{q}, \vec{q}^*)$. В этом случае есть три подслучая:

1. Векторы $\vec{q}$ и $\vec{q}^*$ неколлинеарны. Тогда прямые, будучи лежащими в одной плоскости, пересекаются в единственной точке;

2. Векторы $\vec{q}$ и $\vec{q}^*$ коллинеарны, но не коллинеарны вектору $\overrightarrow{M_0M_0}^*$ - в этом случае прямые лежат в одной плоскости и параллельны друг другу. Указанную плоскость можно определить, например, как $\Pi(M_0; \vec{q}, \overrightarrow{M_0M_0}^*)$;

3. Все три вектора, $\vec{q}, \vec{q}^*, \overrightarrow{M_0M_0}^*$, коллинеарны, - тогда прямые d и d^* совпадают.

II. Если три вектора , $\vec{q}, \vec{q}^*, \overrightarrow{M_0M_0}^*$, некомпланарны, то прямые $d(M_0; \vec{q})$ и $d^*(M_0^*; \vec{q}^*)$ не лежат в одной плоскости, т.е., они скрещиваются.

Таким образом, имеет место теорема:

Теорема TXVI.4. *Две прямые $d(M_0; \vec{q})$ и $d^*(M_0^*; \vec{q}^*)$ в трехмерном аффинном пространстве $\mathbf{A}_3$ могут:*

1. *совпадать, если три вектора, $\vec{q}, \vec{q}^*, \overrightarrow{M_0M_0}^*$, коллинеарны:*

$$\vec{q}^* = \lambda\vec{q}; \qquad \overrightarrow{M_0M_0}^* = \mu\vec{q}; \tag{XVI.27}$$

2. *быть параллельными, если два вектора, $\vec{q}$ и $\vec{q}^*$ коллинеарны, но не коллинеарны третьему вектору, $\overrightarrow{M_0M_0}^*$:*

$$\vec{q}^* = \lambda\vec{q}; \qquad \overrightarrow{M_0M_0}^* \neq \mu\vec{q}; \tag{XVI.28}$$

3. *пересекаться в одной точке, если три вектора, $\vec{q}, \vec{q}^*, \overrightarrow{M_0M_0}^*$, компланарны, но ни одна пара из них не коллинеарна:*
$$\overrightarrow{M_0M_0}^* = \lambda\vec{q} + \mu\vec{q}^*; \quad (\lambda, \mu \neq 0), \quad \vec{q}^* \neq \sigma\vec{q}; \tag{XVI.29}$$

4. *скрещиваться, если три вектора, $\vec{q}, \vec{q}^*, \overrightarrow{M_0M_0}^*$, некомпланарны:*
$$\overrightarrow{M_0M_0} * \neq \lambda\vec{q} + \mu\vec{q}^*. \tag{XVI.30}$$

Аналитическое исследование взаимного расположения прямых в $\mathbf{A}_3$

Пусть координаты опорных точек прямых, d, d^*, и их направляющих векторов в некотором аффинном репере $\Re\{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\} \in \mathbf{A}_3$ и соответствующем ему базисе $\{\vec{e}_i\}_3 \in V_3$ будут следующие:
$$\begin{array}{ll} M_0(x_0, y_0, z_0); & M_0^*(x_0^*, y_0^*, z_0^*); \\ \vec{q}(l, m, n); & \vec{q}^*(l^*, m^*, n^*0 \end{array}.$$

Составим определитель $\Delta(\vec{q}, \vec{q}^*, \overrightarrow{M_0M_0}^*)$:
$$\Delta(\vec{q}, \vec{q}^*, \overrightarrow{M_0M_0}^*) = \begin{vmatrix} x_0^* - x_0 & y_0^* - y_0 & z -_0^* \\ l & m & n \\ l^* & m^* & n^* \end{vmatrix}.$$

Тогда условием принадлежности прямых d и d^* одной плоскости (включая и возможные подслучаи) является равенство нулю этого определителя:
$$\begin{vmatrix} x_0^* - x_0 & y_0^* - y_0 & z -_0^* \\ l & m & n \\ l^* & m^* & n^* \end{vmatrix} = 0 \Longleftrightarrow d, d^* \in Pi_2. \tag{XVI.31}$$

В противном случае прямые скрещиваются. При выполнении условия (XVI.31) d и d^* совпадают, если ранг матрицы, соответствующей определителю Δ равен единице, пересекаются, если $\operatorname{rank}\Delta = 2$, а векторы $\vec{q}$ и $\vec{q}^*$ неколлинеарны, параллельны, если $\operatorname{rank}\Delta = 2$, а векторы $\vec{q}$ и $\vec{q}^*$ коллинеарны.

Часть III

Евклидовы пространства

Глава XVII

Билинейные и квадратичные формы

XVII.1 Линейные отображения и их матричное представление

Пусть заданы два векторных пространства, V_n и $\overline{V}_m$. Пусть далее A - отображение пространства V_n в пространство $\overline{V}_m$. Образ вектора $\vec{x} \in V_n$ будем обозначать символом $A(\vec{x})$, ($A(\vec{x}) \in \overline{V}_m$).

Определение OXVII.1. *Отображение $A : V_n \longrightarrow \overline{V}_m$ называется линейным отображением (иначе морфизмом), если выполнено условие*

$$A(\vec{x}_1 + \vec{x}_2) = A(\vec{x}_1) + A(\vec{x}_2) \text{ и} A(\lambda\vec{x}) = \lambda A(\vec{x}) \tag{XVII.1}$$

для любых векторов $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}$ из V_n и любого $\lambda \in \mathbb{R}$.

Если A отображает векторы V_n *на все множество* векторов $\overline{V}_m$, то отображение называется *эпиморфизмом*. Если же A задает отображение *на часть множества* векторов $\overline{V}_m$, то отображение *взаимно - однозначное* ($\vec{x} \leftrightarrow A(\vec{x})$), то A называется *мономорфизмом*. Отображение A, являющееся одновременно эпиморфизмом и мономорфизмом, называется *изоморфизмом*.

В случае, когда пространство $\overline{V}_m$ является n - мерным, как и V_n ($m = n$), линейное отображение $A : V_n \longrightarrow \overline{V}_n$ называется *эндоморфизмом* или *линейным оператором*.

Ранее, в Главе (II) мы доказывали ряд теорем об изоморфизме векторных пространств, в частности, теоремы (TII.5) об изоморфизме любого векторного пространства V_n арифметическому векторному пространству $V(\mathbb{R}^n)$ и вытекающую из нее теорему (TII.6) об изоморфизме любых векторных пространств V_n и $\overline{V}_n$ одинаковой размерности.

Тем самым все n — мерные линейные пространства (если учитывать только линейную структуру) не различимы между собой. Поэтому символ M для другого линейного пространства можно не употреблять и писать V_n, V_m, V_p и т.д.

Пусть A — линейное отображение из V_n в V_m. Из линейности A следует $A(\alpha\vec{x}_1 + \beta\vec{x}_2) = \alpha A(\vec{x}_1) + \beta A(\vec{x}_2)$ и вообще $A\left(\sum\limits_{k=1}^{s} \alpha_k \vec{x}_k\right) = \sum\limits_{k=1}^{s} \alpha_k A(\vec{x}_k)$. Пусть $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n\}$ — базис V_n, $\{\vec{g}_1, \vec{g}_2, \ldots, \vec{g}_m\}$ — базис V_m. Векторам базиса $\vec{e}_k$
($k = \overline{1,n}$) соответствуют образы $A(\vec{e}_k) \in V_m$, которые мы можем разложить по векторам базиса $\{\vec{g}_1, \vec{g}_2, \ldots, \vec{g}_m\}$

$$\left.\begin{array}{l} A(\vec{e}_1) = \alpha_1^1\vec{g}_1 + \alpha_1^2\vec{g}_2 + \ldots + \alpha_1^m\vec{g}_m \\ A(\vec{e}_2) = \alpha_2^1\vec{g}_1 + \alpha_2^2\vec{g}_2 + \ldots + \alpha_2^m\vec{g}_m \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ A(\vec{e}_n) = \alpha_n^1\vec{g}_1 + \alpha_n^2\vec{g}_2 + \ldots + \alpha_n^m\vec{g}_m \end{array}\right\} \left(A(\vec{e}_k) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_k^i \vec{g}_i\right). \tag{XVII.2}$$

Записывая координаты векторов $A(\vec{e}_1), \ldots, A(\vec{e}_n)$ в виде столбцов, получим матрицу

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_1^1 & \alpha_2^1 & \ldots & \alpha_n^1 \\ \alpha_1^2 & \alpha_2^2 & \ldots & \alpha_n^2 \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ \alpha_m^1 & \alpha_2^m & \ldots & \alpha_n^m \end{pmatrix}, \tag{XVII.3}$$

которую кратко будем записывать в виде $A = (a^i_k)$ (верхний индекс — номер строки, нижний индекс — номер столбца) и называть *матрицей линейного отображения* $A : V_n \longrightarrow V_m$ в данных базисах $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n\}$, $\{\vec{g}_1, \vec{g}_2, \ldots, \vec{g}_m\}$. Если A — эндоморфизм (линейный оператор), то его матрица необходимо *квадратная*.

Если координаты вектора $\vec{x}$ заданы: $\vec{x} = \sum\limits_{k=1}^{n} \xi^k \vec{e}_k$, то как найти координаты образа $A(\vec{x})$? Используя линейность отображения A, получим

$$\vec{y} = A(\vec{x}) = A\left(\sum_{k=1}^{n} \xi^k \vec{e}_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \xi^k A(\vec{e}_k) = \sum_{k=1}^{n} \xi^k \left(\sum_{i=1}^{m} \alpha^i_k \vec{g}_i\right) = \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{k=1}^{n} \alpha^i_k \xi^k\right) \vec{g}_i.$$

Если обозначить координаты вектора $\vec{y}$ через η^i, то имеем

$$\eta^i = \sum_{k=1}^{n} \alpha^i_k \xi^k. \tag{XVII.4}$$

Формула (XVII.4) служит для нахождения координат образа $A(\vec{x})$, если известны матрица отображения и координаты вектора $\vec{x}$.

Итак:

> Каждому линейному отображению A соответствует в (фиксированных базисах) прямоугольная матрица $A = (\alpha^i_k)$ $(i = \overline{1, m}; k = \overline{1, n})$.

Обратно, пусть задана некоторая матрица $A = (\alpha^i_k)$ $(i = \overline{1, m}; k = \overline{1, n})$ и заданы базис $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n\}$ в V_n и $\{\vec{g}_1, \vec{g}_2, \ldots, \vec{g}_m\}$ в V_m. Зададим отображение $A : V_n \longrightarrow V_m$ по следующему закону. Каждому вектору $\vec{x} = \sum\limits_{k=1}^{n} \xi^k \vec{e}_k$ сопоставим вектор $\vec{y} = \sum\limits_{i=1}^{m} \eta^i \vec{g}_i$, где числа η^i определяются с помощью матрицы $A = (\alpha^i_k)$ по формуле ((XVII.4)). Заданное отображение линейное, так как вектору $\alpha\vec{x}_1 + \beta\vec{x}_2 = \sum\limits_{k=1}^{n} (\alpha\xi^k_1 + \beta\xi^k_2)\vec{e}_2$ по ((XVII.4)) соответствует вектор с координатами

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha^i_k (\alpha\xi^k_1 + \beta\xi^k_2)\vec{e}_2 = \alpha \sum_{k=1}^{n} \alpha^i_k \xi^k_1 + \beta \sum_{k=1}^{n} \alpha^i_k \xi^k_2 = \alpha\eta^i_1 + \beta\eta^i_2,$$

откуда следует, что $A(\alpha\vec{x}_1 + \beta\vec{x}_2) = \alpha A(\vec{x}_1) + \beta A(\vec{x}_2)$. Воспользовавшись формулой ((XVII.4)), подсчитаем координаты векторов $A(\vec{e}_1), \ldots, A(\vec{e}_n)$. У вектора $\vec{e}_1$ первая координата равна 1, остальные равны 0. Поэтому из (XVII.4) следует, что вектор $A(\vec{e}_1)$ имеет координаты $\alpha^1_1, \alpha^2_1, \ldots, \alpha^m_1$ - первый столбец матрицы A. У вектора $\vec{e}_2$ вторая координата равна 1, а остальные равны нулю. Поэтому из (XVII.4) следует, что вектор $A(\vec{e}_2)$ имеет координаты $\alpha^1_2, \alpha^2_2, \ldots, \alpha^m_2$ - второй столбец матрицы A. Аналогично получим, что остальные столбцы матрицы A есть координаты векторов $A(\vec{e}_3), \ldots, A(\vec{e}_n)$. Таким образом, матрица построенного отображения A совпадает с заданной матрицей A. Тем самым, *каждой матрице* (при фиксированных базисах $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n\}$, $\{\vec{g}_1, \vec{g}_2, \ldots, \vec{g}_m\}$ *однозначно сопоставляется линейное отображение* A. Можно сделать заключение:

> Между множеством всех линейных отображений (операторов) и множеством всех прямоугольных (квадратных) матриц существует взаимно - однозначное соответствие.

Пример ПXVII.1. *Найти матрицу оператора, переводящего векторы* $\vec{x}_1 = [1, 0, -1]$, $\vec{x}_2 = (0, 1, -2), \vec{x}_3 = (1, 1, 1)$ *в векторы* $\vec{y}_1 = (0, 1, -1), \vec{y}_2 = (1, 0, 2), \vec{y}_3 = (0, 0, -1)$.
Решение. Используем (XVII.4) для определения 9 неизвестных α^i_k $(i, k = 1, 2, 3)$

$$\begin{cases} 0 = \alpha^1_1 - \alpha^1_3 \\ 1 = \alpha^2_1 - \alpha^2_3 \\ -1 = \alpha^3_1 - \alpha^3_3 \end{cases} \quad \begin{cases} 1 = \alpha^1_2 - 2\alpha^1_3 \\ 0 = \alpha^2_2 - 2\alpha^2_3 \\ 2 = \alpha^3_2 - 2\alpha^3_3 \end{cases} \quad \begin{cases} 0 = \alpha^1_1 + \alpha^1_2 + \alpha^1_3 \\ 0 = \alpha^2_1 + \alpha^2_2 + \alpha^2_3 \\ -1 = \alpha^3_1 + \alpha^3_2 + \alpha^3_3 \end{cases}.$$

Данная система уравнений распадается на три подсистемы каждая с тремя неизвестными

$$\left\{\begin{array}{l}\alpha_1^1+\alpha_2^1+\alpha_3^1=0\\ \alpha_2^1-2\alpha_3^1=1\\ \alpha_1^1-\alpha_3^1=0\end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{l}\alpha_1^2+a_2^2+\alpha_3^2=0\\ \alpha_2^2-2\alpha_3^2=0\\ \alpha_1^2-\alpha_3^2=1\end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{l}\alpha_1^3+\alpha_2^3+\alpha_3^3=-1\\ \alpha_2^3-2\alpha_3^3=2\\ \alpha_1^3-\alpha_3^3=-1\end{array}\right. .$$

Решая их , находим вид матрицы оператора

$$A=\begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4}\\ \frac{3}{4} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4}\\ -\frac{3}{2} & 1 & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}.$$

Среди множества отображений выделим три отображения, играющие важную роль в теории линейных операторов.

Определение OXVII.2. *Нулевым морфизмом называется отображение $O : V_n \longrightarrow V_m$, которое любой вектор переводит в нуль-вектор пространства V_m, т.е. $O(\vec{x})=0$ для любого $\vec{x}\in V_n$.*

Легко найти вид матрицы нулевого морфизма. Поскольку $O(\vec{e}_k)=0$, то все $\alpha_k^i=0$ $(i=\overline{1,m}; k=\overline{1,n})$ и матрица имеет вид

$$0=\begin{pmatrix} 0 & 0 & ... & 0\\ 0 & 0 & ... & 0\\ . & . & . & .\\ . & . & ... & .\\ 0 & 0 & ... & 0\end{pmatrix}. \tag{XVII.5}$$

Определение OXVII.3. *Отображение A' называется противоположным по отношению к отображению A, если для любого $\vec{x}\in V_n$ выполнено $A'(\vec{x})=-A(\vec{x})$.*

Пусть матрица отображения A есть $A=(\alpha_k^i)$ $(i=\overline{1,m}; k=\overline{1,n})$. Поскольку $A'(\vec{e}_k)=-A(\vec{e}_k)=-\sum\limits_{i=1}^{m}\alpha_k^i\vec{g}_i=\sum\limits_{i=1}^{m}(-\alpha_k^i)\vec{g}_i$, то матрица противоположного оператора составлена из чисел α_k^i, умноженных на -1. т.е. $A'=(-\alpha_k^i)$.

Определение OXVII.4. *Эндоморфизм (оператор) ε называется тождественным, если он оставляет на месте все векторы пространства, т.е. $\varepsilon\vec{x}=\vec{x}$ для любого $\vec{x}\in V_n$.*

Поскольку $\varepsilon\vec{e}_k=\vec{e}_k$, то $\alpha_k^i=\delta_k^i=\left\{\begin{array}{l}1, i=k\\ 0, i\neq k\end{array}\right.$ — символ Кронекера $(i,k=\overline{1,n})$. Матрица тождественного оператора имеет вид

$$E=\begin{pmatrix} 1 & 0 & ... & 0\\ 0 & 1 & ... & 0\\ . & . & ... & .\\ . & . & ... & .\\ 0 & 0 & ... & 1\end{pmatrix} \tag{XVII.6}$$

и носит название *единичной матрицы.*

Перейдем к рассмотрению действий над отображениями и построим соответствующие действия для матриц.

Определение OXVII.5. *Если для любого $\vec{x}\in V_n$ $A(\vec{x})=B(\vec{x})$, то отображения считаются одинаковыми (равными).*

Поскольку $A(\vec{e}_k) = B(\vec{e}_k)$, то $\alpha^i_k = \beta^i_k$ $(i = \overline{1,m}; k = \overline{1,n})$. Поэтому две матрицы A и B считаются *совпадающими* (пишем $A = B$), если их элементы на соответствующих местах равны друг другу.

Определение OXVII.6. *Суммой линейных отображений A и B называется такое отображение $C = A + B$, что для любого $\vec{x} \in V_n$ $\quad C(\vec{x}) = A(\vec{x}) + B(\vec{x})$. Покажем, что C - линейное отображение. Действительно,*

$$C(\alpha\vec{x}_1 + \beta\vec{x}_2) = A(\alpha\vec{x}_1 + \beta\vec{x}_2) + B(\alpha\vec{x}_1 + \beta\vec{x}_2) = \alpha A(\vec{x}_1) + \beta A(\vec{x}_2) + \alpha B(\vec{x}_1) + \beta B(\vec{x}_2) =$$

$$= \alpha(A(\vec{x}_1) + B(\vec{x}_1)) + \beta(A(\vec{x}_2) + B(\vec{x}_2)) = \alpha C(\vec{x}_1) + \beta C(\vec{x}_2),$$

т.е. при любых $\vec{x}_1, \vec{x}_2 \in V_n$ и любых $\alpha, \beta \in K$ $\quad C(\alpha\vec{x}_1 + \beta\vec{x}_2) = \alpha C(\vec{x}_1)\beta + C(\vec{x}_2)$. Отображение C — линейное отображение.

Поскольку

$$C(\vec{e}_k) = A(\vec{e}_k) + B(\vec{e}_k) = \sum_{i=1}^{m} \alpha^i_k \vec{g}_i + \sum_{i=1}^{m} \beta^i_k \vec{g}_i = \sum_{i=1}^{m} (\alpha^i_k + \beta^i_k)\vec{g}_i,$$

то, обозначая элементы матрицы отображения C через γ^i_k, мы получим,

$$\gamma^i_k = \alpha^i_k + \beta^i_k \quad (i = \overline{1,m}; k = \overline{1,n}). \tag{XVII.7}$$

Поэтому под *под суммой матриц $A = (\alpha^i_k)$ и $B = (\beta^i_k)$ понимаем матрицу $C = (\gamma^i_k)$, элементы которой связаны соотношением (XVII.7)*. Легко проверить, что как для отображений, так и для матриц выполняются следующие четыре условия (записываем только для матриц):

$$(1) A + B = B + A;\ (2)(A + B) + C = A + (B + C); (3) A + 0 = A;\ (4) A + A' = 0. \tag{XVII.8}$$

Определение OXVII.7. *Если для любого $\vec{x} \in V_n$ выполнено $(\lambda A)(\vec{x}) = \lambda((A)(\vec{x}))$ то отображение λA называется произведением числа λ на отображение A (введена операция умножения на число отображения A).*

Поскольку $(\lambda A)(\vec{x})\lambda A(\vec{e}_k) = \lambda \sum\limits_{i=1}^{m} \alpha^i_k \vec{g}_i = \sum\limits_{i=1}^{m} (\lambda\alpha^i_k)\vec{g}_i$, то элементы матрицы оператора λA получаются путем умножения на λ всех элементов матрицы $A = (\alpha^i_k)$. Поэтому под произведением числа λ и матрицы A понимается матрица с элементами $(\lambda\alpha^i_k)$ $(i = \overline{1,m}; k = \overline{1,n})$.

Легко убедиться, что выполнены условия

$$(1) 1 \cdot A = A; \qquad (2)(\lambda\mu)A = \lambda(\mu A);$$

$$(3)(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A; \quad (4)\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B. \tag{XVII.9}$$

Введенные операции и выполнение свойств (XVII.8) для суммы матриц и свойств (XVII.9) для операции умножения матрицы на число приводит нас к выводу:

> Совокупность всех матриц вида $m \times n$ представляет собой линейное векторное пространство, где роль векторов играют прямоугольные матрицы, имеющие m строк и n столбцов.

Какова размерность введенного линейного пространства? Чтобы ответить на этот вопрос, рассмотрим mn матриц вида

$$\begin{pmatrix} 0 & ... & 0 & ... & 0 \\ . & . & . & . & . \\ 0 & ... & 1 & ... & 0 \\ . & . & . & . & . \\ 0 & ... & 0 & ... & 0 \end{pmatrix}, \tag{XVII.10}$$

где на пересечении i-й строки и k-го столбца стоит 1, а остальные элементы матрицы - нули. Эти матрицы линейно - независимы, так как, составив линейную комбинацию $\sum\limits_{i=1}^{m}\sum\limits_{k=1}^{n}\lambda_{ik}\vec{e}_{ik}$ с произвольными коэффициентами λ_{ik} и приравняв ее нулевой матрице (нуль - вектору), из равенства матриц получим, что $\lambda_{ik}=0$ $(i=\overline{1,m};\ k=\overline{1,n})$.

Кроме того, любая матрица $A=(\alpha_k^i)$ может быть представлена как линейная комбинация матриц e_{ik}:

$$A=\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}\alpha_k^i e_{ik}.$$

Поэтому матрицы (XVII.10) играют роль базисных векторов в линейном пространстве матриц $m\times n$. Таких матриц mn. Поэтому размерность рассматриваемого линейного пространства равна mn.

Ясно, что все изложенное выше для отображений $A : V_n \longrightarrow V_m$ и прямоугольных матриц имеет место для операторов (эндоморфизмов) и квадратных матриц $m\times n$.

Размерность линейного пространства операторов равна n^2.

XVII.2 Композиция отображений и умножение матриц

Пусть A — линейное отображение из V_n в V_m, B — линейное отображение из V_m в V_p, т.е. $V_n\to V_m\to V_p$. Тогда возникает отображение $C : V_n \longrightarrow V_p$, которое называется *композицией* отображений A и B и обозначается символом $C=B\circ A$ (при композиции последовательность действий пишется справа налево). Другими словами, для любого $\vec{x}\in V_n$ имеем $C(\vec{x})=B(A(\vec{x}))$.

Покажем, что C - линейный оператор. Этот факт легко проверяется, так как $C(\alpha\vec{x}_1+\beta\vec{x}_2)=B(A(\alpha\vec{x}_1+\beta\vec{x}_2))=B(\alpha A(\vec{x}_1)+\beta A(\vec{x}_2))=\alpha B(A(\vec{x}_1))+\beta B(A(\vec{x}_2))=\alpha C(\vec{x}_1)+\beta C(\vec{x}_2)$.

Как записать композицию отображений в матричном представлении?

Пусть $\{\vec{e}_1,\vec{e}_2,\ldots,\vec{e}_n\},\{\vec{g}_1,\vec{g}_2,\ldots,\vec{g}_m\},\{\vec{h}_1,\vec{h}_2,\ldots,\vec{h}_p\}$ — базисы в пространствах V_n,V_m,V_p, а соответствующие матрицы отображений — $A=(\alpha_k^i)\,(i=\overline{1,m};k=\overline{1,n}),B=(\beta_i^s)\,(s=\overline{1,p}),C=(\gamma_k^s)(s=\overline{1,p};k=\overline{1,n})$. Можно написать следующую цепочку преобразований:

$$\vec{e}_k\xrightarrow{A}\sum_{i=1}^{m}\alpha_k^i\vec{g}_i\xrightarrow{B}\sum_{i=1}^{m}\alpha_k^i\left(\sum_{s=1}^{p}\beta_i^s\vec{h}_s\right)=\sum_{s=1}^{p}\left(\sum_{i=1}^{m}\beta_i^s\alpha_k^i\right)\vec{h}_s. \tag{XVII.11}$$

С другой стороны имеем

$$C(\vec{e}_k)=\sum_{s=1}^{p}\gamma_k^s\vec{h}_s. \tag{XVII.12}$$

Сравнивая (XVII.11) и (XVII.12) и учитывая линейную независимость векторов $\vec{h}_1,\ldots,\vec{h}_p$, получим

$$\gamma_k^s=\sum_{i=1}^{m}\beta_i^s\alpha_k^i, \tag{XVII.13}$$

т.е. элемент матрицы C, стоящий на пересечении s-й строки и k-го столбца представляет собой *сумму произведений элементов s-ой строки матрицы B с соответствующими элементами* (т.е. стоящими под теми же номерами, что и элементы s-ой строки)*k-столбца матрицы A.*

Построенную таким образом матрицу C называют *произведением матриц* B,A (пишут $C=BA$), а правило умножения матриц ((XVII.13)) называют правилом ‘строки на столбец’ (см. более подробно Главу (III)). Из этого правила вытекает, что не любые матрицы B и A могут быть перемножены, а только такие, когда число столбцов матрицы B совпадает с числом строк матрицы A. В результате получится матрица, имеющая число строк, равное числу строк матрицы B, а число ее столбцов совпадает с числом столбцов матрицы A.

Если речь идет об операторах A,B, то соответствующие матрицы квадратные и, следовательно, $C=BA$ — снова квадратная матрица.

В общем случае для квадратных матриц $AB\neq BA$, в чем легко убедиться на следующем примере:

$$A=\begin{pmatrix}1&2\\-1&3\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}-1&0\\1&1\end{pmatrix},\quad AB=\begin{pmatrix}1&2\\4&3\end{pmatrix},\quad BA=\begin{pmatrix}-1&-2\\0&5\end{pmatrix},$$

$\Longrightarrow AB \neq BA$. Когда $AB \neq BA$, то этот факт отмечают словами: матрицы A и B *не коммутируют* между собой. Если же матрицы A и B таковы, что $AB = BA$, то они называются *коммутирующими*.

Для всякой квадратной матрицы A вводится понятие неотрицательной степени матрицы, если по определению считать, что

$$A^0 = E,\ A^1 = A,\ A^2 = A \cdot A, \ldots, A^{n+1} = A \cdot A^n, \ldots, \tag{XVII.14}$$

где E — единичная матрица ((XVII.6)). Используя ((XVII.14)), тотчас получим, что $A^p \cdot A^q = A^{p+q} = A^q \cdot A^p$, так как $EA = A = AE$ для любой матрицы A.

Перейдем к более подробному рассмотрению эндоморфизмов пространства $\mathcal{L}_n$, называемых далее операторами.

Определение OXVII.8. *Оператор B называется обратным по отношению к оператору A, если выполнено $B \circ A = \mathcal{E}$, где $\mathcal{E}$ - тождественный оператор.*

В матричном представлении данное условие имеет вид $BA = E$, где E - единичная матрица ((XVII.6)).

Поэтому можно дать аналогичное определение обратной матрицы по отношению к матрице A.

Определение OXVII.9. *Матрица A^{-1} называется обратной к матрице A, если выполнено условие*

$$A^{-1}A = E. \tag{XVII.15}$$

Какие из матриц A имеют обратные? Чтобы ответить на этот вопрос воспользуемся соотношением ((III.17)). Из ((XVII.15)), учитывая, что $\det E = 1$, следует, $(\det A^{-1}) \times (\det A) = 1$. Следовательно, *Детерминант матрицы A непременно должен быть отличен от нуля.* Если матрица A *вырожденная* ($\det A = 0$), то понятие об обратной матрице для нее отсутствует. Этот факт выражает словами, что всякая вырожденная матрица A обратной матрицы не имеет.

Пользуясь формулой разложения определителя по алгебраическим дополнениям своей и чужой строки (столбца)

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k^i A_k^j = \sum_{k=1}^{n} \alpha_i^k A_j^k = \begin{cases} \det A, i = j \\ 0, i \neq j, \end{cases}$$

легко проверить выполнение следующих равенств:

$$\left.\begin{array}{ll} () & AA^{-1} = E; \quad ()(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}; \\ () & (A^{-1})^{-1} = A \end{array}\right\}. \tag{XVII.16}$$

На основании ((XVII.15)) и ((XVII.16)a) заключаем, что

$$A^{-1}A = AA^{-1} = E.$$

Определив отрицательную степень матрицы A в виде $A^{-n} = A^{-1}A^{-1}\ldots A^{-1}$, формулу $A^pA^q = A^{p+q}$ мы распространим тем самым на все множество целых чисел p и q. Вернемся к рассмотрению линейных отображений $A : V_n \longrightarrow V_m$ и установим,что представляет собой множество векторов $A(\vec{x})$ из V_m.

Определение OXVII.10. *Совокупность всех векторов пространства V_m $\vec{y} = A(\vec{x})$, где $\vec{x}$ пробегает все множество векторов V_n, называется образом отображения A и обозначается символом* $\operatorname{Im} A$.

Пусть $\vec{x} = \sum\limits_{k=1}^{n} \xi^k \vec{e}_k$. Тогда

$$A(\vec{x}) = A\left(\sum_{k=1}^{n} \xi^k \vec{e}_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \xi^k A(\vec{e}_k).$$

Вспоминая определение линейной оболочки, заключаем:

> Образ линейного отображения A есть линейная оболочка, натянутая на образы базисных векторов $\{A(\vec{e}_1), \ldots, A(\vec{e}_n)\}$.

Нам известно, что координаты векторов $A(\vec{e}_k)$ составляют столбцы матрицы $A = (\alpha^i_k)$. Поэтому размерность $\operatorname{Im} A$ совпадает с максимальным числом линейно - независимых столбцов матрицы A, т.е. с рангом A.

Итак, $\dim \operatorname{Im} A = \mathrm{p}\, A$.

Еще одной важной характеристикой отображения A является понятие ядра отображения.

Определение OXVII.11. *Ядром линейного отображения A (символ $\operatorname{Ker} A$) называется множество всех векторов из V_n, которые A отображает в нуль - вектор пространства V_m, т.е. совокупность $\vec{x} \in V_n$ таких, что $A(\vec{x}) = \vec{0}$.*

Покажем, что $\operatorname{Ker} A$ есть линейное подпространство пространства V_n.В самом деле, пусть $\vec{x}_1, \vec{x}_2 \in \operatorname{Ker} A$, т.е. $A(\vec{x}_1) = \vec{0}$, $A(\vec{x}_2) = \vec{0}$. Видим, что

$$A(\alpha\vec{x}_1 + \beta\vec{x}_2) = \alpha A(\vec{x}_1) + \beta A(\vec{x}_2) = \alpha \cdot \vec{0} + \beta \cdot \vec{0} = \vec{0},$$

и, следовательно, вектор $(\alpha\vec{x}_1 + \beta\vec{x}_2) \in \operatorname{Ker} A$ при любых $\alpha, \beta \in K$.

Какова размерность ядра отображения? Чтобы ответить на этот вопрос, запишем в координатах условие $A(\vec{x}) = \vec{0}$

$$A(\vec{x}) = A\left(\sum_{k=1}^{n} \xi^k \vec{e}_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \xi^k A(\vec{e}_k) = \sum_{k=1}^{n} \xi^k \left(\sum_{i=1}^{m} \alpha^i_k \vec{g}_i\right) = \vec{0}.$$

Из-за линейной независимости векторов $\vec{g}_1, \ldots, \vec{g}_m$ имеем

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha^i_k \xi^k = 0 \quad (i = \overline{1, m}) \tag{XVII.17}$$

— однородную систему линейных уравнений, матрица которой совпадает с матрицей A. Следовательно, вектор $\vec{x}$ принадлежит пространству решений системы ((XVII.12)), и *ядро отображения A совпадает с пространством решений однородной системы уравнений с матрицей A*. Нам известно, что размерность пространства решений равна $n - r$, где r - ранг матрицы A. Подводя итоги, можно заключить:

> Ядро ($\operatorname{Ker} A$) есть подпространство пространства V_n размерности $n - r$.

Теорема TXVII.1. *Если $B = AT$ (или если $B = TA$), где T - невырожденная матрица, то ранг B = ранг A.*

Доказательство: $\Big\langle\Big\langle$ Имеем, что $B(\vec{x}) = A(\mathcal{G}\vec{x})$ для любого $\vec{x} \in V_n$. Но $\operatorname{Im} \mathcal{G} = V_n$, поскольку ранг $T = n$ (T - невырожденная матрица). Поэтому $\dim \operatorname{Im} B = \dim \operatorname{Im} A$. Ранги матриц A и B совпадают. $\Big\rangle\Big\rangle$

Отметим, что систему уравнений ((XVII.17)) в матричном представлении можно записать в виде $A(\vec{x}) = \vec{0}$, где $(\vec{x})$ - матрица - столбец с неизвестными коэффициентами. Если через b обозначить матрицу - столбец из свободных членов $b^1, b^2, \ldots, b^m$ неоднородной системы, то неоднородная система линейных уравнений в матричной форме примет вид $A(\vec{x}) = \vec{b}$.

Поэтому нахождение общего решения однородной системы уравнений можно всегда интерпретировать как отыскание ядра отображения, задаваемого матрицей системы, а нахождение общего решения неоднородной системы уравнений — как отыскание множества всех векторов пространства V_n, которые отображаются с помощью A в фиксированный вектор $\vec{b}$ пространства V_m.

В частности, когда имеем систему $A(\vec{x}) = \vec{b}$ из n уравнений с n неизвестными и с $\det A \neq 0$, то формулы Крамера приобретают вид

$$(\vec{x}) = A^{-1}(\vec{b}). \qquad \text{(XVII.18)}$$

Для доказательства достаточно умножить равенство $A(\vec{x}) = \vec{b}$ слева на A^{-1} и учесть, что $A^{-1}A(\vec{x}) = E(\vec{x}) = (\vec{x})$.

XVII.3 Собственные значения и собственные векторы оператора

Определение OXVII.12. *Подпространство U называется инвариантным относительно оператора A, если для любого $\vec{x} \in U$ образ $A(\vec{x}) \in U$, т.е. $A(U) \subseteq U$.*

Нас будут интересовать одномерные инвариантные подпространства, называемые *собственными направлениями* оператора A.

Определение OXVII.13. *Вектор $\vec{x}$ ($\vec{x} \neq \vec{0}$) называется собственным вектором оператора A, если $A(\vec{x}) = \lambda\vec{x}$.*

Число λ называется *собственным значением* оператора.

Теорема TXVII.2. *Если $\vec{x}$ - собственный вектор оператора A, то для любого $\alpha \in K$ вектор $\alpha\vec{x}$ также является собственным вектором A с тем же собственным значением, что и вектор $\vec{x}$.*

Доказательство: $\langle\langle$ В самом деле, пусть $A(\vec{x}) = \lambda\vec{x}$. Тогда
$A(\alpha\vec{x}) = \alpha A(\vec{x}) = \alpha(\lambda\vec{x}) = \lambda(\alpha\vec{x})$. $\rangle\rangle$

Теорема TXVII.3. *Множество всех собственных векторов, отвечающих одному и тому же собственному значению, образует линейное инвариантное подпространство.*

Доказательство: $\langle\langle$ Действительно, если $A(\vec{x}_1) = \lambda\vec{x}_1$, $A(\vec{x}_2) = \lambda\vec{x}_2$, то
$A(\alpha\vec{x}_1 + \beta\vec{x}_2) = \alpha A(\vec{x}_1) + \beta A(\vec{x}_2) = \lambda(\alpha\vec{x}_1 + \beta\vec{x}_2)$. Теорема доказана. $\rangle\rangle$

Теорема TXVII.4. *Собственные векторы $\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_s$ с попарно различными собственными значениями $\lambda_1, \ldots, \lambda_s (\lambda_i \neq \lambda_j; i \neq j)$ образуют линейно - независимую систему векторов.*

Доказательство: $\langle\langle$ Для доказательства теоремы применим метод индукции. При $s = 1$ теорема выполнена, так как собственный вектор не нуль - вектор. Пусть теорема верна для любой системы из k собственных векторов. Докажем, что она верна и для системы из $(k+1)$ - собственного вектора. Составим линейную комбинацию с произвольными коэффициентами

$$\alpha_1\vec{x}_1 + \ldots + \alpha_k\vec{x}_k + \alpha_{k+1}\vec{x}_{k+1} = \vec{0}. \qquad \text{(XVII.19)}$$

Действуем оператором A, учитывая, что $A(\vec{x}_s) = \lambda_s\vec{x}_s$. Получаем

$$\alpha_1\lambda_1\vec{x}_1 + \ldots + \alpha_k\lambda_k\vec{x}_k + \alpha_{k+1}\lambda_{k+1}\vec{x}_{k+1} = \vec{0}. \qquad \text{(XVII.20)}$$

Из собственных чисел $\lambda_1, \ldots, \lambda_{k+1}$ хотя бы одно отлично от нуля, так как собственные значения попарно различны. За счет перенумерации всегда можно считать, что $\lambda_{k+1} \neq 0$. Умножив, (XVII.19) на λ_{k+1} и вычитая полученное соотношение из (XVII.30) , получим

$$\alpha_1(\lambda_1 - \lambda_{k+1})\vec{x}_1 + \alpha_2(\lambda_2 - \lambda_{k+1})\vec{x}_2 + \ldots + \alpha_k(\lambda_k - \lambda_{k+1})\vec{x}_k = \vec{0}. \qquad \text{(XVII.21)}$$

Поскольку для любых k собственных операторов теорема верна, то векторы $\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_k$ линейно - независимы и, следовательно,

$$\alpha_1(\lambda_1 - \lambda_{k+1}) = 0, \quad \alpha_2(\lambda_2 - \lambda_{k+1}) = 0, \ldots, \alpha_k(\lambda_1 - \lambda_{k+1}) = 0.$$

Это означает, что $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 0, \ldots, \alpha_k = 0$, так как $\lambda_1 \neq \lambda_{k+1}, \lambda_2 \neq \lambda_{k+1}, \ldots,$
$\lambda_k \neq \lambda_{k+1}$. В таком случае из (XVII.19) следует равенство $\alpha_{k+1}\vec{x}_{k+1} = \vec{0}$. Но $\vec{x}_{k+1}$ как собственный вектор не является нуль - вектором. Теорема доказана. $\rangle\rangle$

Как практически находить собственные значения и собственные векторы оператора?

Пусть $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n\}$ — базис в V_n, $A = (\alpha^i_k)$ — матрица оператора. Равенство $A(\vec{x}) = \lambda\vec{x}$ можно записать в виде $(A - \lambda\mathcal{E})\vec{x} = \vec{0}$, где $\mathcal{E}$ — тождественный оператор ($\mathcal{E}\vec{x} = \vec{x}$). В матричной форме приведенное операторное равенство выглядит следующим образом:

$$(A - \lambda\mathcal{E})(\vec{x}) = \vec{0} \quad \text{и} \quad \sum_{k=1}^{n}(\alpha^i_k - \lambda\delta^i_k)\xi^k = 0.$$

Подробно расписывая последнее равенство, получим систему n линейных уравнений

$$\begin{cases} (\alpha^1_1 - \lambda)\xi^1 + \alpha^1_2\xi^2 + \ldots, +\alpha^1_n\xi^n = 0 \\ \alpha^2_1\xi^1 + (\alpha^2_2 - \lambda)\xi^2 + \ldots, +\alpha^2_n\xi^n = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha^1_n\xi^1 + \alpha^n_2\xi^2 + \ldots, +(\alpha^n_n - \lambda)\xi^n = 0. \end{cases} \tag{XVII.22}$$

Из теории систем линейных уравнений следует, что данная система имеет ненулевое решение тогда и только тогда, когда определитель матрицы системы равен нулю (ранг $(A - \lambda E) < n$).

Приравнивая $\det(A - \lambda E)$ к нулю, мы получим *характеристическое уравнение*

$$\begin{vmatrix} \alpha^1_1 - \lambda & \alpha^1_2 & \ldots & \alpha^1_n \\ \alpha^2_1 & \alpha^2_2 - \lambda & \ldots & \alpha^2_n \\ . & . & \ldots & . \\ . & . & \ldots & . \\ \alpha^n_1 & \alpha^n_2 & \ldots & \alpha^n_n - \lambda \end{vmatrix} = (-1)^n\lambda^n + I_1\lambda^{n-1} + \ldots + I_n = 0. \tag{XVII.23}$$

Полином n-й степени, стоящий в левой части равенства (XVII.23), называется *характеристическим полиномом* матрицы A. *Корни этого полинома есть собственные значения оператора.* Итак:

> Для того, чтобы оператор A имел собственные векторы, необходимо и достаточно, чтобы характеристический полином его матрицы A был равен нулю, причем соответствующие собственные значения оператора совпадают с корнями характеристического полинома.

Если мы рассматриваем комплексные линейные пространства ($K \equiv C$), то согласно основной теореме алгебры (о наличии корней полинома) имеем n корней (включая кратные)

$$\underbrace{\lambda_1, \ldots, \lambda_1}_{r_1}; \underbrace{\lambda_2, \ldots, \lambda_2}_{r_2}; \ldots; \underbrace{\lambda_s, \ldots, \lambda_s}_{r_s}. \tag{XVII.24}$$

Тем самым мы найдем s попарно различных собственных значений оператора. Подставляя λ_k в систему (XVII.22) вместо параметра λ и составляя нормальную фундаментальную систему решений, мы находим базис подпространства собственных векторов, отвечающих данному собственному значению λ_k оператора A.

Если мы рассматриваем вещественные линейные пространства ($K \equiv R$), то ситуация складывается несколько сложнее, чем в предыдущем случае. Когда вещественные корни у характеристического полинома отсутствуют (корни только комплексные), то мы говорим, что вещественных собственных векторов оператор не имеет. Пусть $\underbrace{\lambda_1, \ldots, \lambda_1}_{p_1}; \ldots; \underbrace{\lambda_m, \ldots, \lambda_m}_{p_m}$ — вещественные корни полинома, а

$\underbrace{\alpha_1 \pm i\beta_1, \ldots, \alpha_1 \pm i\beta_1}_{q_1}; \ldots; \underbrace{\alpha_t \pm i\beta_t, \ldots, \alpha_t \pm i\beta_t}_{q_t}$ — комплексные и комплексно - сопряженные корни полинома (вспомним, что у полинома с вещественными коэффициентами наряду с комплексным корнем $\alpha + i\beta$ непременно присутствует корень $\alpha - i\beta$), причем $p_1 + \ldots + p_m + 2q_1 + \ldots + 2q_t = n$. В вещественном линейном пространстве m вещественным собственным значениям $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ будут отвечать вещественные собственные векторы (процедура нахождения базиса оболочки собственных векторов, отвечающих фиксированному вещественному собственному значению, полностью совпадает с указанной выше для комплексных пространств, только координаты ξ^k — вещественные числа), а комплексным собственным значениям будут отвечать комплексные собственные векторы (их координаты ξ^k - комплексные числа).

Пример ПXVII.2. *Найти собственные значения и собственные векторы оператора, заданного матрицей*

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Составим характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} -1-\lambda & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1-\lambda & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (-1-\lambda)^2(\lambda^2+1) = 0.$$

Имеем 2-кратный вещественный корень $\lambda_1 = -1$ и комплексные корни
$\mu_1 = i$, $\mu_2 = -i$. Подставляем вместо λ в систему вида (XVII.22) $\lambda_1 = -1$. Имеем

$$\begin{cases} 0 \cdot \xi^1 + 0 \cdot \xi^2 + \xi^3 + \xi^4 = 0 \\ 0 \cdot \xi^1 + 0 \cdot \xi^2 + 0 \cdot \xi^3 - \xi^4 = 0 \\ 0 \cdot \xi^1 + 0 \cdot \xi^2 + 2\xi^3 + \xi^4 = 0 \\ 0 \cdot \xi^1 + 0 \cdot \xi^2 - 2\xi^3 + 0 \cdot \xi^4 = 0, \end{cases}$$

откуда следует, что $\xi^3 = \xi^4 = 0$, а $\xi^1 = c^1, \xi^2 = c^2$ (c^1, c^2 — произвольные вещественные параметры). Строим нормальную фундаментальную систему решений, полагая сначала $c^1 = 1, c^2 = 0$, затем $c^1 = 0, c^2 = 1$. Получим два базисных собственных вектора

$$\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

для оболочки собственных векторов, отвечающих собственному значению
$\lambda_1 = -1$. Любой другой собственный вектор $\vec{x}$, отвечающий $\lambda_1 = -1$, есть линейная комбинация векторов $\vec{x}_1$ и $\vec{x}_2$

$$\vec{x} = \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Подставляя вместо λ в систему вида (XVII.22) комплексный корень $\mu_1 = i$, получим следующую систему уравнений

$$\begin{cases} (-1-i)\xi^1 + 0 \cdot \xi^2 + \xi^3 + \xi^4 = 0 \\ \quad 0 \cdot \xi^1 + (-1-i)\xi^2 + 0 \cdot \xi^3 - \xi^4 = 0 \\ \quad 0 \cdot \xi^1 + 0 \cdot \xi^2 + (1-i)\xi^3 + \xi^4 = 0 \\ \quad 0 \cdot \xi^1 + 0 \cdot \xi^2 - 2\xi^3 + (-1-i)\xi^4 = 0, \end{cases}$$

откуда находим, что

$$\xi^1 = \frac{1}{2}(1+i)c, \quad \xi^2 = \frac{1}{2}(1-i)^2 c, \xi^3 = c, \xi^4 = (i-1)c,$$

где c — произвольный комплексный параметр.

Фиксируя значение c, полагая, например, $c = 2$, получим базисный комплексны собственный вектор для одномерного инвариантного подпространства, отвечающего собственному значению $\mu_1 = i$

$$\vec{y}_1 = \begin{pmatrix} 1+i \\ -2i \\ 2 \\ -2+2i \end{pmatrix}.$$

Если провести аналогичные рассмотрения с сопряженным корнем $\mu_2 = -i$, то при соответствующем выборе $\xi^3 = \bar{c}$ базисный собственный вектор, отвечающий собственному значению $\mu_2 = -i$, будет комплексно - сопряженным к вектору $\vec{y}_1$:

$$\vec{y}_1 = \begin{pmatrix} 1-i \\ 2i \\ 2 \\ -2-2i \end{pmatrix}.$$

Что можно сказать о размерности инвариантного пространства собственных векторов, отвечающих кратному общему значению?

Теорема TXVII.5. *Размерность подпространства собственных векторов, отвечающих кратному собственному значению, не превосходит кратности этого значения.*

Доказательство: $\langle\langle$ Пусть U - подпространство собственных векторов, отвечающих собственному значению λ_1 кратности r_1, имеет размерность m
($\dim U = m$). Пусть $\{\vec{f}_1, \vec{f}_2, \dots, \vec{f}_m\}$ - базис в U. Поскольку $\vec{f}_1, \dots, \vec{f}_m$ - собственные векторы, отвечающие собственному значению λ_1, то

$$A(\vec{f}_1) = \lambda_1 \vec{f}_1,\ A(\vec{f}_2) = \lambda_1 \vec{f}_2, \dots, A(\vec{f}_m) = \lambda_1 \vec{f}_m. \tag{XVII.25}$$

Дополним базис U до базиса V_n векторами $\vec{e}_{m+1}, \dots, \vec{e}_n$. Образы этих векторов при действии оператора A есть линейные комбинации векторов базиса $\{\vec{f}_1, \dots, \vec{f}_m, \vec{e}_{m+1}, \dots, \vec{e}_n\}$

$$\begin{cases} A(\vec{e}_{m+1}) = \sum\limits_{j=1}^{m} \alpha^j_{m+1} \vec{f}_j + \sum\limits_{s=m+1}^{n} \alpha^s_{m+1} \vec{e}_s \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ A(\vec{e}_n) = \sum\limits_{j=1}^{m} \alpha^j_n \vec{f}_j + \sum\limits_{s=m+1}^{n} \alpha^s_n \vec{e}_s. \end{cases} \tag{XVII.26}$$

Матрица A в базисе $\{\vec{f}_1, \dots, \vec{f}_m, \vec{e}_{m+1}, \dots, \vec{e}_n\}$, согласно (XVII.25), (XVII.26), имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0\dots0 & . & \alpha^1_{m+1}\dots\alpha^1_n \\ 0 & \lambda_1\dots0 & . & \alpha^2_{m+1}\dots\alpha^2_n \\ . & \dots & . & \dots \\ . & \dots & . & \dots \\ 0 & 0\dots\lambda_1 & . & \alpha^m_{m+1}\dots\alpha^m_n \\ . & \dots & . & \dots \\ 0 & 0\dots0 & . & \alpha^{m+1}_{m+1}\dots\alpha^{m+1}_n \\ . & \dots & . & \dots \\ . & \dots & . & \dots \\ 0 & 0\dots0 & . & \alpha^n_{m+1}\dots\alpha^n_n \end{pmatrix}. \tag{XVII.27}$$

Составляя характеристический полином $\det(A - \lambda E)$, получим

$$\det(A - \lambda E) = (\lambda_1 - \lambda)^m Q(\lambda), \tag{XVII.28}$$

где $Q(\lambda)$ - полином степени $n - m$.

Из (XVII.28) следует, очевидно, что кратность r_1 корня $\lambda = \lambda_1$ не меньше m ($\lambda = \lambda_1$ может быть и корнем полинома $Q(\lambda)$). Итак $m \le r_1$. Теорема доказана. $\rangle\rangle$

В том, что размерность подпространства собственных векторов бывает меньше кратности соответствующего корня, легко убедиться на следующем примере. Пусть

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

— матрица оператора. Ее характеристический полином имеет вид

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 1 & -1 \\ -1 & -\lambda & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^3(\lambda - 1).$$

Первый корень $\lambda_1 = 0$ имеет кратность 3, второй корень $\lambda_2 = 1$ однократен. В случае первого собственного значения получаем

$$\xi^3 - \xi^4 = 0,\ -\xi^1 + \xi^3 - \xi^4 = 0, \xi^4 = 0,$$

откуда следует, что $\xi^1 = \xi^3 = \xi^4 = 0$, $\xi^2 = c$ (c - произвольный вещественный параметр). Таким образом, подпространство собственных векторов, отвечающих собственному 3-кратному значению $\lambda_1 = 0$, имеет размерность равную единице. Если произвольный вектор-$\vec{x}$ имеет вид

$$\vec{x} = \alpha \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Преобразования векторного пространства

Как нам уже известно из раздела (II) в n-мерном векторном пространстве V_n любая система из линейно-независимых векторов может служить базисом пространства, т.е. базисы в V_n могут быть выбраны бесконечным числом способов. В разделе (III) мы ввели формулы перехода от одного базиса к другому (формулы (III.1), (III.9)) и формулы обратного перехода (формулы (III.15) и (III.16)). В главе (IV) мы изучили преобразования векторного пространства и получили формулы преобразования как координат образа вектора $\vec{x}\,'$ по отношению к старому базису при преобразовании V_n (формулы (IV.6) и (IV.8)), так и координат самого вектора $\vec{x}$ (прообраза) при переходе к новому базису (формулы (IV.11), (IV.13)). Теперь нам предстоит выяснить: 1). как меняется матрица оператора при переходе к новому базису? 2). какие величины, связанные с матрицей оператора, остаются неизменными, т.е., являются инвариантами преобразования базисов?

Напомним кратко некоторые общие выводы разделов (III) и (IV). Пусть $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n\}$ — базис в V_n и $\{\vec{e}_{'1}, \vec{e}_{'2}, \dots, \vec{e}_{'n}\}$ новый базис в V_n. Как следует из раздела (III), эти базисы связаны матрицей перехода C:

$$\vec{e}_{'i} = C^k_{'i}\vec{e}_k \quad (i = \overline{1,n}). \tag{XVII.29}$$

Координаты $\vec{e}_{'i}$ записанные в виде столбцов квадратной матрицы и составляют *матрицу перехода от нештрихованного (старого) базиса к штрихованному (новому)* :

$$C = \begin{pmatrix} C^1_{'1} & C^1_{'2} & ... & C^1_{'n} \\ C^2_{'1} & C^2_{'2} & ... & C^2_{'n} \\ \dots & \dots & ... & \dots \\ C^n_{'1} & C^n_{'2} & ... & C^n_{'n} \end{pmatrix}, \tag{XVII.30}$$

Вследствие линейной независимости векторов нового базиса $\{\vec{e}_{'i}\}_n$ *матрица перехода всегда есть невырожденная матрица*:

$$\det C \neq 0.$$

Соотношения (XVII.29) могут быть записаны в матричной форме, если ввести в рассмотрение матрицы - строки $(\vec{e})' = (\vec{e}_{'1}, \vec{e}_{'2}, \ldots, \vec{e}_{'n})$, $(\vec{e}) = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n)$ составленного из векторов штрихованного и нештрихованного базисов. Тогда (XVII.29) эквивалентно следующему соотношению:

$$(\vec{e})' = (\vec{e})C. \tag{XVII.31}$$

Поскольку C — невырожденная матрица, то всегда существует C^{-1}. Умножая (XVII.31) на C^{-1} справа и пользуясь равенствами $CC^{-1} = E$ и $(\vec{e})E = (\vec{e})$, получим

$$(\vec{e}) = (\vec{e})'C^{-1}. \tag{XVII.32}$$

Итак:

> Переход от штрихованного (нового) базиса к нештрихованному (старому) осуществляется с помощью обратной матрицы.

Для любого $\vec{x} \in V_n$ мы имеем $\vec{x} = \sum\limits_{k=1}^{n} x^k \vec{e}_k$ в базисе $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n\}$ и $\vec{x} = \sum\limits_{i=1}^{n} x'^i \vec{e}_{'i}$ в базисе $\{\vec{e}_{'1}, \vec{e}_{'2}, \ldots, \vec{e}_{'n}\}$. Подставив $e_{'i}$ из (XVII.29), получим, что

$$\vec{x} = \sum_{i=1}^{n} x'^i \sum_{k=1}^{n} C^k_{'i} \vec{e}_k = \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{n} C^k_{'i} x'^i \right) \vec{e}_k.$$

Поэтому

$$\sum_{k=1}^{n} x^k \vec{e}_k = \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} C^k_{'i} x'^i \right) \vec{e}_k.$$

В силу линейной независимости векторов базиса $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n\}$ вытекает равенство

$$x^k = \sum_{i=1}^{n} C^k_{'i} x'^i, \tag{XVII.33}$$

которое в матричной форме имеет вид

$$(\vec{x}) = C(\vec{x})', \tag{XVII.34}$$

где под $(\vec{x})$ и $(\vec{x})'$ подразумеваются матрицы - столбцы, составленные из координат x^k и x'^k, вектора $\vec{x}$. Умножая (XVII.34) слева на C^{-1}, мы получим, как 'новые' координаты вектора $\vec{x}$ выражаются через 'старые'

$$(\vec{x})' = C^{-1}(\vec{x}). \tag{XVII.35}$$

Таким образом, *формулы (XVII.34) (XVII.35) задают законы, связывающие между собой координаты вектора $\vec{x}$ в штрихованных и нештрихованных базисах.*

Преобразование матрицы оператора при переходе к новому базису. Инварианты линейных операторов.

Пусть $A = (\alpha^i_k)$ — матрица оператора в базисе $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n\}$. Через $A' = (\alpha'^i_{'k})$ обозначим матрицу того же оператора в базисе $\{\vec{e}_{'1}, \vec{e}_{'2}, \ldots, \vec{e}_{'n}\}$.

Заметив, что $A(\vec{e}_k) = \sum\limits_{k=1}^{n} \alpha^i_k \vec{e}_i$ и $A(\vec{e}_{'k}) = \sum\limits_{m=1}^{n} \alpha'^m_{'k} \vec{e}_{'m}$, подставив согласно (XVII.29) $\vec{e}_{'k} = \sum\limits_{s=1}^{n} C^s_{'k} \vec{e}_s$, $\vec{e}_{'m} = \sum\limits_{i=1}^{n} C^i_{'m} \vec{e}_i$ в левую и правую части равенства, получим

$$\sum_{s=1}^{n} C^s_{'k} A(\vec{e}_s) = \sum_{m=1}^{n} \alpha'^m_{'k} \sum_{i=1}^{n} C^i_{'m} \vec{e}_i$$

или

$$\sum_{s=1}^{n} C^s_{'k} \sum_{i=1}^{n} \alpha^i_s \vec{e}_i = \sum_{m=1}^{n} \alpha'^m_{'k} \sum_{i=1}^{n} C^i_{'m} \vec{e}_i.$$

В силу линейной независимости векторов базиса $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n\}$ имеем равенство

$$\sum_{s=1}^{n} \alpha^i_s C'^s_k = \sum_{m=1}^{n} C'^i_m \alpha'^m_k, \tag{XVII.36}$$

которое в матричной форме принимает вид

$$AC = CA', \tag{XVII.37}$$

откуда следует, что

$$(a) \quad A' = C^{-1}AC; \qquad (b) \quad A = CA'C^{-1}. \tag{XVII.38}$$

Формулы (XVII.38) задают законы, согласно которым связаны матрицы оператора в штрихованном и нештрихованном базисах.

Перейдем к вопросу о инвариантах линейных операторов. Прежде всего отметим, что *ранг A есть инвариант преобразования базисов*, так как ранг A' = рангу A из - за умножения A на невырожденные матрицы.

Теорема TXVII.6. *Собственные значения оператора инварианты относительно преобразования базисов.*

Доказательство: $\langle\langle$ В самом деле, пусть λ_0 - собственное значение оператора и $\vec{x}$ - собственный вектор, отвечающий данному собственному значению. Тогда имеет место следующее матричное соотношение:

$$A(\vec{x}) = \lambda_0(\vec{x}), \tag{XVII.39}$$

где A - матрица оператора в базисе $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n\}$. Пусть C - матрица перехода к штрихованному базису. Умножая (XVII.39) на C^{-1} слева и вставив между A и $(\vec{x})$ множитель $E = CC^{-1}$, получим

$$C^{-1}ACC^{-1}(\vec{x}) = \lambda_0 C^{-1}(\vec{x}). \tag{XVII.40}$$

С учетом (XVII.35) и (XVII.38)a равенство (XVII.40) имеет вид

$$A'(\vec{x})' = \lambda_0(\vec{x})'.$$

Собственное значение собственного вектора $\vec{x}$ в штрихованной системе координат осталось неизменным. Теорема доказана. $\rangle\rangle$

Отметим также, что матрица тождественного преобразования при переходе к новому базису не меняет своего вида и остается единичной, так как

$$E' = C^{-1}EC = C^{-1}C = E.$$

Рассмотрим характеристическую матрицу $(A-\lambda E)$ для оператора $A-\lambda\mathcal{E}$. Согласно (XVII.38)a имеем:

$$(A-\lambda E)' = C^{-1}(A-\lambda E)C = C^{-1}AC - \lambda C^{-1}EC = A' - \lambda E.$$

Но

$$\det(A-\lambda E)' = \det C^{-1} \cdot \det(A-\lambda E) \cdot \det C = \frac{1}{\det C} \cdot \det(A-\lambda E) \cdot \det C = \det(A-\lambda E).$$

В силу равенства $(A-\lambda E)' = A' - \lambda E$ получим следующее равенство:

$$\det(A-\lambda E) = \det(A'-\lambda E), \tag{XVII.41}$$

выполняющееся при любом значении параметра λ, т.е. *характеристический полином оператора есть инвариант преобразования базисов.*

В (XVII.41) слева и справа стоит стоят полиномы n-й степени

$$(-1)^n\lambda^n + I'_1\lambda^{n-1} + \ldots + I_{n-1}\lambda + I_n = (-1)^n\lambda^n + I'_1\lambda^{n-1} + \ldots + I'_{n-1}\lambda + I'_n.$$

Известно, что полиномы тождественно равны друг другу, если равны их коэффициенты при соответствующих степенях λ. Итак:

Коэффициенты характеристического полинома есть инварианты относительно преобразования базисов.

Каким образом они связаны с элементами матрицы оператора? Раскрывая определитель n-го порядка $\det(A-\lambda E)$ и собирая члены при соответствующих степенях λ, мы получим, что

$$I_1 = (-1)^{n-1}(\alpha_1^1+\alpha_2^2+\ldots+\alpha_n^n) = (-1)^{n-1}\mathrm{Sp}\,\mathrm{A}, \tag{XVII.42}$$

где символом $\mathrm{Sp}\,\mathrm{A}$ (либо $\mathrm{tr}\,\mathrm{A}$) обозначают $\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i^i$ и называют *следом* матрицы A (*шпуром* A).

Аналогично I_2 есть *сумма всех диагональных миноров второго порядка*, взятая со множителем $(-1)^{n-2}$, I_3 - сумма всех диагональных миноров третьего порядка, взятая со множителем $(-1)^{n-3}$, и т.д. Наконец, $I_n = \det A$, поскольку минор n-го порядка совпадает с определителем матрицы. Тот факт, что определитель матрицы оператора есть инвариант преобразования базисов, могут быть получен и из (XVII.38)a, поскольку $\det A' = \det C^{-1}\det A \det C = \det A$.

XVII.4 Линейные формы

На числовое поле $\mathbf{K}$, под которым мы подразумеваем $\mathbf{C}$ и $\mathbf{R}$, если иметь в виду лишь операции сложения чисел и умножения их на числа из того же поля $\mathbf{K}$, можно смотреть как на одномерное линейное пространство K_1 (комплексное в случае $\mathbf{C}$ и вещественное в случае $\mathbf{R}$), векторами которого являются числа из множества $\mathbf{K}$.

Определение OXVII.14. *Линейное отображение $\varphi : V_n \longrightarrow K_1$ называется линейной формой, заданной на векторах V_n, т.е. для любого $\vec{x}\in V_n$ сопоставлено число $\varphi(\vec{x})\in K_1$, причем $\varphi(\alpha\vec{x}_1+\beta\vec{x}_2) = \alpha\varphi(\vec{x}_1)+\beta\varphi(\vec{x}_2)$ для любых α, $\beta\in\mathbf{K}$.*

Например, если в трехмерном евклидовом пространстве зафиксировать вектор $\vec{c}$ и рассмотреть скалярное произведение $(\vec{c}\;\vec{x})$, где $\vec{x}$ пробегает все множество векторов пространства, то мы получим линейную форму $\varphi(\vec{x}) = (\vec{c}\;\vec{x})$, так как $(\vec{c}(\alpha\vec{x}_1+\beta\vec{x}_2)) = \alpha(\vec{c}\;\vec{x}_1)+\beta(\vec{c}\;\vec{x}_2) = \alpha\varphi(\vec{x}_1)+\beta\varphi(\vec{x}_2)$.

Пусть $\{\vec{e}_1,\vec{e}_2,\ldots,\vec{e}_n\}$ - базис в V_n. Найдем матрицу отображения φ, вычислив φ на векторах базиса. Имеем $\varphi(\vec{e}_k) = \varphi_k$ $(k=\overline{1,n})$. Матрица φ имеет одну строку, поскольку K_1 одномерно. Поэтому

$$(\varphi) = (\varphi_1\varphi_2\ldots\varphi_n). \tag{XVII.43}$$

Элементы этой матрицы носят название *коэффициентов линейной формы*. Зная матрицу (φ), легко найти значение формы на любом векторе $\vec{x}\in V_n$. В самом деле, если $\vec{x} = \sum\limits_{k=1}^{n}x^k\vec{e}_k$, то

$$\varphi(\vec{x}) = \varphi\left(\sum_{k=1}^{n}x^k\vec{e}_k\right) = \sum_{k=1}^{n}x^k\varphi(\vec{e}_k) = \sum_{k=1}^{n}\varphi_k x^k.$$

В матричной форме это выражение имеет простой вид

$$\varphi(\vec{x}) = (\varphi)(\vec{x}), \tag{XVII.44}$$

где под $(\vec{x})$ подразумевается матрица - столбец из координат вектора $\vec{x}$:

$$\varphi(\vec{x}) = (\varphi_1\varphi_2\ldots\varphi_n)\begin{pmatrix} x^1\\ x^2\\ .\\ .\\ x^n\end{pmatrix}.$$

Мы знаем, что относительно операции сложения и умножения на число совокупность всех линейных форм (как линейных отображений) образует свое линейное пространство размерности $1\cdot n = n$.

Определение OXVII.15. *Линейное n-мерное пространство, векторами которого являются линейные формы, называется сопряженным (дуальным) линейным пространством (по отношению к пространству V_n) и обозначается символом V_n^*.*

Векторы из V_n^* будем называть *ковекторами* в отличие от векторов $\vec{x} \in V_n$ и во избежание путаницы обозначать символом $\vec{x} \in V_n^*$ Базис в V_n^* обозначим $\{\underset{\to}{e}^1, \underset{\to}{e}^2, \ldots, \underset{\to}{e}^n\}$. Всякая линейная форма $\overset{\to}{\varphi}$ как вектор из V_n^* раскладывается по векторам базиса $\{\underset{\to}{e}^1, \underset{\to}{e}^2, \ldots, \underset{\to}{e}^n\}$:

$$\overset{\to}{\varphi} = \sum_{k=1}^{n} \theta_k \overset{\to k}{e},$$

где θ_k - координаты линейной формы $\overset{\to}{\varphi}$ в базисе $\{\underset{\to}{e}^1, \underset{\to}{e}^2, \ldots, \underset{\to}{e}^n\}$.

Удобно выбрать выбрать базис в V_n^* таким образом, чтобы линейные формы $\overset{\to k}{e}$ на векторах базиса V_n $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n\}$ принимали наиболее простые значения. А именно

$$\overset{\to}{e^k}(\vec{e}_i) = \delta_i^k = \left\{ \begin{array}{l} 1,\ i = k \\ 0,\ i \neq k. \end{array} \right. \tag{XVII.45}$$

Такой базис в V_n^* называется *каноническим* или *взаимным* к базису $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n\}$ в V_n.

Почему целесообразно выбирать в V_n^* канонический (взаимный) базис? Чтобы ответить на поставленный вопрос находим

$$\overset{\to}{\varphi}(\vec{x}) = \sum_{k=1}^{n} \theta_k \overset{\to k}{e}(\vec{x}) = \sum_{k=1}^{n} \theta_k \overset{\to k}{e}\left(\sum_{i=1}^{n} x^i \vec{e}_i\right) = \sum_{i,k=1}^{n} \theta_k x^i \overset{\to k}{e}(\vec{e}_i) = \sum_{i,k=1}^{n} \theta_k x^i \delta_i^k = \sum_{k=1}^{n} \theta_k x^k,$$

где θ_k - координаты формы. С другой стороны, ранее нами получено выражение $\varphi(\vec{x}) = \sum\limits_{k=1}^{n} \varphi_k x^k$, где φ_k - коэффициенты линейной формы. Итак, если базис

$\{\underset{\to}{e}^1, \underset{\to}{e}^2, \ldots, \underset{\to}{e}^n\}$ канонический, то $\sum\limits_{k=1}^{n} \theta_k x^k = \sum\limits_{k=1}^{n} \varphi_k x^k$ для *любого* вектора $\vec{x}$. Это означает, что $\theta_k = \varphi_k$ $(k = \overline{1,n})$ - *во взаимных базисах* $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n\}$, $\{\underset{\to}{e}^1, \underset{\to}{e}^2, \ldots, \underset{\to}{e}^n\}$ $(e_k(\vec{e}_i) = \delta_i^k)$ - *координаты линейной формы совпадают.* В дальнейшем мы будем предполагать, что базис $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n\}$ в V_n и базис $\{\underset{\to}{e}^1, \underset{\to}{e}^2, \ldots, \underset{\to}{e}^n\}$ в V_n^* взаимные.

Как меняются коэффициенты линейной формы, если от базиса $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n\}$ в V_n перейти к базису $\{\vec{e}_{\prime 1}, \vec{e}_{\prime 2}, \ldots, \vec{e}_{\prime n}\}$ с помощью матрицы перехода C? Пусть $\vec{e}_{\prime k} = \sum\limits_{i=1}^{n} C^i_{\prime k} \vec{e}_i$. Тогда

$$\varphi_{\prime k} = \varphi(\vec{e}_{\prime k}) = \varphi\left(\sum_{i=1}^{n} C^i_{\prime k} \vec{e}_i\right) = \sum_{i=1}^{n} C^i_{\prime k} \varphi(\vec{e}_i) = \sum_{k=1}^{n} \varphi_i C^i_{\prime k}.$$

В матричной форме, если через $(\varphi)'$ обозначить матрицу-строку линейной формы в штрихованном базисе, последнее соотношение может быть записано в виде

$$(\varphi)' = (\varphi)C. \tag{XVII.46}$$

Умножая справа на C^{-1}, получим выражение для матрицы-строки (φ) в нештрихованном базисе

$$(\varphi) = (\varphi)'C^{-1}. \tag{XVII.47}$$

Мы видим, что *закон преобразования коэффициентов линейной формы совпадает по форме с законами преобразования базисов в пространстве V_n.*

XVII.5 Билинейные формы и их матрицы

Рассмотрим линейные скалярные функции, зависящие не от одного векторного аргумента, как это было в случае линейных форм, а от двух векторных аргументов. С этой целью рассмотрим отображение (функцию) $B : V \times V \longrightarrow \mathbf{K}$, где $V \times V$ — прямое произведение V_n самого на себя.

Определение OXVII.16. *Числовая функция $B(\vec{x}, \vec{y})$ называется билинейной формой, если для любых*
$\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in V_n$ и любого $\lambda \in \mathbf{K}$ выполнено:
(1) $B(\vec{x}+\vec{z}, \vec{y}) = B(\vec{x}, \vec{y}) + B(\vec{z}, \vec{y})$;
(2) $B(\lambda\vec{x}, \vec{y}) = \lambda B(\vec{x}, \vec{y})$;
(3) $B(\vec{x}, \vec{y}+\vec{z}) = B(\vec{x}, \vec{y}) + B(\vec{x}, \vec{z})$;
(4) $B(\vec{x}, \lambda\vec{y}) = \lambda B(\vec{x}, \vec{y})$,
т.е. числовая функция линейна как по первому, так и по второму аргументу.

Из условий (1) — (4) следует

$$B\left(\sum_{i=1}^{p} \lambda_i \vec{x}_i, \sum_{k=1}^{q} \mu_k \vec{y}_k\right) = \sum_{i=1}^{p}\sum_{k=1}^{q} \lambda_i \mu_q B(\vec{x}_i, \vec{y}_k)$$

и поэтому, если $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n\}$ — базис в V_n, то

$$B(\vec{x}, \vec{y}) = B\left(\sum_{i=1}^{n} x^i \vec{e}_i, \sum_{k=1}^{n} y^k \vec{e}_k\right) = \sum_{i,k=1}^{n} x^i y^k B(\vec{e}_i, \vec{e}_k).$$

Обозначим $B(\vec{e}_i, \vec{e}_k) = \beta_{ik}$, тогда

$$B(\vec{x}, \vec{y}) = \sum_{i,k=1}^{n} \beta_{ik} v^i y^k, \tag{XVII.48}$$

где β_{ik} называются *коэффициентами билинейной формы*. Из них можно построить матрицу (первый индекс номер строки, второй — номер столбца)

$$B = \begin{pmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \ldots & \beta_{1n} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \ldots & \beta_{2n} \\ . & . & \ldots & . \\ . & . & \ldots & . \\ \beta_{n1} & \beta_{n2} & \ldots & \beta_{nn} \end{pmatrix}, \tag{XVII.49}$$

которая носит название *матрицы билинейной формы относительно данного базиса*.

Как преобразуется матрица билинейной формы, если мы перейдем к штрихованному базису? Какие можно указать инварианты для билинейных форм?

Пусть $\vec{e}_{'k} = \sum\limits_{i=1}^{n} C^i_{'k} \vec{e}_i$ — векторы нового базиса. Тогда

$$\beta_{'i'k} = B(\vec{e}_{'i}, \vec{e}_{'k}) = B\left(\sum_{p=1}^{n} C^p_{'i} \vec{e}_p, \sum_{q=1}^{n} C^q_{'k} \vec{e}_q\right) = \sum_{p,q=1}^{n} C^p_{'i} C^q_{'k} \beta pq.$$

Чтобы записать полученное равенство в матричной форме, запишем последнюю двойную сумму в раздельном виде

$$\beta_{'i'k} = \sum_{p=1}^{n} C^p_{'i} \left(\sum_{q=1}^{n} \beta_{pq} C^q_{'k}\right). \tag{XVII.50}$$

Внутренняя сумма дает нам элементы $\gamma_{p'k}$ матрицы BC. Из равенства $\beta_{'i'k} = \sum\limits_{p=1}^{n} C^p_{'i} \gamma_{p'k}$ следует, что перемножаются соответствующие элементы столбцов матрицы C и BC и складываются. Правило умножения матриц (строка на столбец) нарушено. Чтобы правило умножения матриц не нарушалось, рассмотрим транспонированную C^T, полученную из C заменой строк на столбцы и столбцов на строки.

Тогда $\sum\limits_{p=1}^{n} C'^{p}_{i}\gamma_{p'k}$ будет давать элементы матрицы, полученной от перемножения C^T и BC. Таким образом, равенство (XVII.50) в матричном виде имеет вид

$$B' = C^T BC. \tag{XVII.51}$$

Поскольку матрица B слева и справа умножается на невырожденные матрицы, то заключаем:

> Ранг матрицы билинейной формы есть инвариант преобразования базисов.

В силу того, что $\det C^T = \det C$ (первое свойство определителей), имеем

$$\det B' = (\det C)^2 \det B, \tag{XVII.52}$$

откуда заключаем:

> Знак детерминанта матрицы билинейной формы есть инвариант преобразования базисов.

В приложениях чаще всего находят себя симметричные и антисимметричные (кососимметричные) билинейные формы.

Определение OXVII.17. *Матрица B называется называется симметрической, если при транспонировании она не меняется, т.е. $B^T = B$.*

Определение OXVII.18. *Матрица B называется называется антисимметрической (кососимметрической), если при транспонировании меняет знак на противоположный, т.е.*
$B^T = -B$.

Если элементы матрицы B обозначить через β_{ik}, то условие симметричности означает следующее равенство между элементами матрицы:

$$\beta_{ik} = \beta_{ki} \quad (i, k = \overline{1, n}). \tag{XVII.53}$$

а условие антисимметричности означает, что

$$\beta_{ik} = -\beta_{ki} \quad (i, k = \overline{1, n}). \tag{XVII.54}$$

Условия (XVII.54) при $i = k$ дают, что $\beta_{ii} = -\beta_{ii}$ и все элементы по главной диагонали матрицы нулевые, а при $i \neq k$ элементы совпадают по модулю, но отличаются знаком.

Определение OXVII.19. *Билинейная форма $B(\vec{x}, \vec{y})$ называется симметричной, если для любых $\vec{x}, \vec{y} \in V_n$ выполнено $B(\vec{x}, \vec{y}) = B(\vec{y}, \vec{x})$.*

Пусть в V_n задан базис $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n\}$. По определению (OXVII.19) имеем, что
$B(\vec{e}_i, \vec{e}_k) = B(\vec{e}_k, \vec{e}_i)$. Это означает, что коэффициенты билинейной формы β_{ik} удовлетворяют условию $\beta_{ik} = \beta_{ki}$, т.е. *матрица симметричной билинейной формы необходимо симметрическая*. Обратно, пусть у билинейной формы $B(\vec{x}, \vec{y})$ матрица симметрическая, т.е. $\beta_{ik} = \beta_{ki}$. Тогда

$$B(\vec{x}, \vec{y}) = \sum_{i,k=1}^{n} \beta_{ik} x^i y^k = \sum_{i,k=1}^{n} \beta_{ki} y^k x^i = B(\vec{y}, \vec{x})$$

для любых x и y из V_n.

> Билинейная форма с симметрической матрицей непременно симметричная билинейная форма.

Определение OXVII.20. *Билинейная форма $B(\vec{x},\vec{y})$ называется антисимметричной, если для любых $\vec{x},\vec{y} \in V_n$ справедливо равенство:$B(\vec{x},\vec{y}) = -B(\vec{y},\vec{x})$.*

Если в V_n задан базис $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n\}$, то согласно определению (OXVII.20) $B(\vec{e}_i,\vec{e}_k) = -B(\vec{e}_k,\vec{e}_i)$ и, следовательно, $\beta_{ik} = -\beta_{ki}$. Итак: *матрица антисемметричной билинейной формы с необходимостью является антисимметрической матрицей.* Обратно, если у билинейной формы $B(\vec{x},\vec{y})$ матрица B антисимметрическая, то форма $B(\vec{x},\vec{y})$ является антисимметричной, так как

$$B(\vec{x},\vec{y}) = \sum_{i,k=1}^{n} \beta_{ik}x^i y^k = \sum_{i,k=1}^{n} (-\beta_{ki})y^k x^i = -B(\vec{y},\vec{x}).$$

Поскольку определения симметричности и антисимметричности не связаны с каким - либо базисом и носят инвариантный характер, то условия симметричности и антисимметричности матриц симметричной и антисимметричной билинейных форм носят также инвариантный характер и не зависят от выбора базиса в V_n. Рассмотрим общие билинейные формы $B(\vec{x},\vec{y})$. Построим билинейные формы $B_1(\vec{x},\vec{y}), B_2(\vec{x},\vec{y})$ по правилам

$$\left.\begin{array}{ll} (a) & B_1(\vec{x},\vec{y}) \overset{\text{det}}{=} \frac{1}{2}(B(\vec{x},\vec{y}) + B(\vec{y},\vec{x})) \\ (b) & B_2(\vec{x},\vec{y}) \overset{\text{det}}{=} \frac{1}{2}(B(\vec{x},\vec{y}) - B(\vec{y},\vec{x})) \end{array}\right\}. \tag{XVII.55}$$

Совершенно очевидно, что $B_1(\vec{x},\vec{y})$ — симметричная билинейная форма, так как $B_1(\vec{y},\vec{x}) = \frac{1}{2}(B(\vec{y},\vec{x}) + B(\vec{x},\vec{y})) = B_1(\vec{x},\vec{y})$, а $B_2(\vec{x},\vec{y})$ — антисимметричная билинейная форма, так как $B_2(\vec{y},\vec{x}) = \frac{1}{2}(B(\vec{y},\vec{x}) - B(\vec{x},\vec{y})) = -B_2(\vec{x},\vec{y})$.

Если сейчас сложить оба равенства из (XVII.55), то получим

$$B(\vec{x},\vec{y})) = B_1(\vec{x},\vec{y}) + B_2(\vec{x},\vec{y}). \tag{XVII.56}$$

Итак:

> Любая билинейная форма может быть всегда представлена как сумма некоторой симметричной и некоторой антисимметричной билинейных форм.

Пример ПXVII.3. *Задана билинейная форма*

$$B(\vec{x},\vec{y})) = 2x^1y^1 - x^1y^2 - 2x^1y^3 + 3x^2y^1 - 2x^2y^2 - 5x^2y^3 + x^3y^1 + x^3y^2 + x^3y^3.$$

Представить ее в виде суммы симметричной и антисимметричной билинейных форм.

Решение. Составляем матрицу билинейной формы, а затем по правилу (XVII.55) построим матрицы форм $B_1(\vec{x},\vec{y})$ и $B_2(\vec{x},\vec{y})$. Итак,

$$B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 3 & -2 & -5 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l} \overset{(1)}{\beta}_{11} = 2,\ \overset{(1)}{\beta}_{12} = \frac{1}{2}(-1+3) = 1, \\ \overset{(1)}{\beta}_{13} = \frac{1}{2}(-2+1) = \frac{1}{2},\ \overset{(1)}{\beta}_{22} = -2, \\ \overset{(1)}{\beta}_{23} = \frac{1}{2}(-5+1) = -2,\ \overset{(1)}{\beta}_{33} = 1,\ \overset{(2)}{\beta}_{11} = \overset{(2)}{\beta}_{22} = \overset{(2)}{\beta}_{33} = 0,\ \overset{(2)}{\beta}_{12} = \frac{1}{2}(-1-3) = -2, \\ \overset{(2)}{\beta}_{13} = \frac{1}{2}(-2-1) = \ \frac{3}{2}\ \overset{(1)}{\beta}_{23} = \frac{1}{2}(-5-1) = -3 \end{array}\right\}.$$

Поэтому матрицы симметричной и антисимметричной форм имеют вид:

$$B_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 1 & -2 & -2 \\ -\frac{1}{2} & -2 & 1 \end{pmatrix}, B_2 = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -\frac{3}{2} \\ 2 & 0 & -3 \\ -\frac{3}{2} & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

(сами билинейные формы выписывать не будем).

Проверка решения проста. Сложив B_1 и B_2, мы получаем B.

XVII.6 Квадратичные формы

Определение OXVII.21. *Квадратичной формой $B(\vec{x}, \vec{x})$ называется числовая функция, полученная из билинейной формы $B(\vec{x}, \vec{y})$ путем замены аргумента y на аргумент x.*

Для установления вида квадратичной формы воспользуемся соотношениями (XVII.56) и заменим в них аргумент y на аргумент x. В этом случае $B_2(\vec{x}, \vec{y}) \equiv 0$ (см. (XVII.55)b) и $B(\vec{x}, \vec{x}) = B_1(\vec{x}, \vec{x})$. Итак:

> Всякая квадратичная форма, построенная на основе билинейной формы $B(\vec{x}, \vec{y})$, совпадает с квадратичной формой, построенной на основе симметричной части $B_1(\vec{x}, \vec{y})$ общей билинейной формы $B(\vec{x}, \vec{y})$

.

В силу установленного факта матрица всякой квадратичной формы (понимаемая как матрица соответствующей симметричной билинейной формы) есть симметрическая матрица

$$B = \begin{pmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \dots & \beta_{1n} \\ \beta_{12} & \beta_{22} & \dots & \beta_{2n} \\ . & . & \dots & . \\ . & . & \dots & . \\ \beta_{1n} & \beta_{2n} & \dots & \beta_{nn} \end{pmatrix},$$

а сама квадратичная форма в некотором базисе имеет вид

$$B(\vec{x}, \vec{x}) = \beta_{11}(x^1)^2 + 2\beta_{12}x^1x^2 + \ldots + 2\beta_{1n}x^1x^n + \beta_{22}(x^2)^2 + 2\beta_{23}x^2x^3 + \\ + \ldots + 2\beta_{n-1n}x^{n-1}x^n + \beta_{nn}(x^n)^2. \tag{XVII.57}$$

Поскольку матрица квадратичной формы совпадает с матрицей симметричной билинейной формы, то, как и для любых билинейных форм имеем, что

(1) ранг матрицы квадратичной формы (называемый просто рангом квадратичной формы) есть инвариант преобразования базисов,

(2) знак детерминанта матрицы квадратичной формы сохраняется при преобразованиях базисов,

(3) при переходе от одного базиса к другому закон преобразования матрицы квадратичной формы имеет вид $B' = C^T BC$.

Отметим, что если ранг квадратичной формы полный (ранг $B = n$), то квадратичная форма называется *невырожденной*. Их рассмотрением мы займемся ниже, а сейчас посмотрим, нельзя ли перейти в V_n к такому базису в котором квадратичная форма представляет сумму квадратов новых координат, умноженных на некоторые коэффициенты?

Если такое возможно, то базис называется *каноническим* и матрица квадратичной формы в нем будет иметь диагональный вид.

Теорема TXVII.7. *В пространстве V_n всегда существует канонический базис $\{\vec{e'}_1, \vec{e'}_2, \ldots, \vec{e'}_n\}$ в котором квадратичноя форма примет вид*

$$B(\vec{x}, \vec{x}) = \alpha_1(x^{'1})^2 + \alpha_2(x^{'2})^2 + \ldots + \alpha_n(x^{'n})^2, \tag{XVII.58}$$

где $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ — фиксированные числа (некоторые из них могут быть равны нулю).

Доказательство: $\langle\langle$ Для доказательства применим *метод Лагранжа*. Предварительно отметим, что если $\beta_{11} = 0$ и какое-либо из чисел $\beta_{1s} \neq 0$, то, проведя замену координат по правилу

$$x^1 = y^1 + y^s,\ x^2 = y^2, \ldots, x^{s-1} = y^{s-1},\ x^s = y^1 - y^s,\ x^{s+1} = y^{s+1}, \ldots, x^n = y^n,$$

для слагаемого $2\beta_{1s}x^1x^s$ в новом базисе получим

$$2\beta_{1s}(y^1 + y^s)(y^1 - y^s) = 2\beta_{1s}(y^1)^2 - 2\beta_{1s}(y^s)^2,$$

т.е. в новом базисе $\beta_{'1'1} = 2\beta_{1s} \neq 0$. Поэтому, не ограничивая общности рассуждений, применим метод Лагранжа к квадратичной форме, где $\beta_{11} \neq 0$

$$B(\vec{x}, \vec{x}) = \beta_{11}(x^1)^2 + 2\beta_{12}x^1x^2 + \ldots + 2\beta_{1n}x^1x^n + \sum_{i,k=2}^{n} \beta_{ik}x^ix^k. \tag{XVII.59}$$

Запишем (XVII.59) в следующем виде:

$$B(\vec{x}, \vec{x}) = \frac{1}{\beta_{11}}(\beta_{11}x^1 + \beta_{12}x^2 + \ldots + \beta_{1n}x^n)^2 - \frac{1}{\beta_{11}}(\beta_{12}^2(x^2)^2 + \ldots + \beta_{1n}^2(\tilde{B}(\vec{x}, \vec{x})x^n)^2 +$$

$$+2\beta_{12}\beta_{13}x^2x^3 + \ldots + 2\beta_{1\,n-1}\beta_{1n}x^{n-1}x^n + \sum_{i,k=2}^{n} \beta_{ik}x^ix^k) = \frac{1}{\beta_{11}}(\beta_{11}x^1 + \beta_{12}x^2 + \ldots + \beta_{1n}x^n)^2 +$$

$$+\tilde{B}(\vec{x}, \vec{x}),$$

где $\tilde{B}(\vec{x}, \vec{x})$ — квадратичная форма, в которую входят лишь переменные $x^2, \ldots, x^n$.

Делаем замену координат

$$y^1 = \beta_{11}x^1 + \beta_{12}x^2 + \ldots + \beta_{1n}x^n, \quad y^2 = x^2, \ldots, y^n = x^n, \tag{XVII.60}$$

после которой $B(\vec{x}, \vec{x}) = \dfrac{1}{\beta_{11}}(y^1)^2 + \tilde{B}(\vec{x}, \vec{x})$, где $\tilde{B}(\vec{x}, \vec{x}) = \sum\limits_{i,k=2}^{n} \tilde{\beta}_{ik}y^iy^k$. Предложенный алгоритм применяем к $\tilde{B}(\vec{x}, \vec{x})$ и после конечного числа шагов приходим к (XVII.58). Чтобы найти матрицу перехода от начальных координат $x^1, \ldots, x^n$ к каноническим $x^{'1}, \ldots, x^{'n}$, достаточно перемножить матрицы промежуточных переходов (вспомним, что если $(y) = C_1^{-1}(x)$ и $(z) = C_2^{-1}(y)$, то $(z) = C_2^{-1}C_1^{-1}(x)$ и т.д.) $\rangle\rangle$

Пример ПXVII.4. *Методом Лагранжа привести к каноническому виду квадратичную форму $B(\vec{x}, \vec{x}) = x_1^2 + 4x_1x_2 + x_2^2 + 3x_3x_4$.*

Решение. Первый шаг: $B(\vec{x}, \vec{x}) = (x_1 + 2x_2)^2 - 3x_2^2 + 3x_3x_4$. После замены координат $y_1 = x_1 + 2x_2$, $y_2 = x_2$, $y_3 = x_3 - x_4$, $y_4 = x_3 + x_4$ (эквивалентно относительно старых координат $x_1 = y_1 - 2y_2$, $x_2 = y_2$, $x_3 = \frac{1}{2}(y_3 + y_4)$, $x_4 = \frac{1}{2}(y_4 - y_3)$) имеем $B(\vec{x}, \vec{x}) = y_1^2 - 3y_2^2 - \frac{3}{4}y_3^2 + \frac{3}{4}y_4^2$. Матрица перехода C от первоначального базиса к каноническому (помним, что $(x) = C(y)$) имеет вид

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Все что излагалось до сих пор относительно квадратичных форм, имеет место как для вещественных так и для комплексных квадратичных форм. Дальнейшее изучение квадратичных форм продолжим только для *вещественных* линейных пространств и для квадратичной формы $B(\vec{x},\vec{x})$, коэффициенты β_{ik} и коэффициенты x^k с необходимостью вещественные числа.

Пусть квадратичная форма приведена к каноническому виду (XVII.58), где $\alpha_1,\dots,\alpha_n$ — вещественные числа. Поскольку ранг квадратичной формы инвариант преобразования базисов, то среди чисел $\alpha_1,\dots,\alpha_n$ имеется ровно r чисел, отличных от нуля, где $r =$ ранг B, а остальные равны нулю. Если среди этих r чисел s чисел положительны, а остальные $(r-s)$ отрицательны, то, проведя соответствующую перенумерацию переменных, приведем $B(\vec{x},\vec{x})$ к виду

$$B(\vec{x},\vec{x}) = \lambda_1(y^1)^2+\ldots+\lambda_s(y^s)^2-\lambda_{s+1}(y^{s+1})^2-\ldots-\lambda_r(y^r)2, \qquad \text{(XVII.61)}$$

где $\lambda_1,\dots,\lambda_r$ — положительные числа.

Ясно, что после преобразования координат

$$y'^k=\sqrt{\lambda_k y^k},\quad y'^t=y^t\quad (k=\overline{1,r};\ t=\overline{r+1,n})$$

квадратичная форма примет наиболее простой вид

$$B(\vec{x},\vec{x}) = (y'^1)^2+\ldots+(y'^s)^2-(y'^{s+1})^2-\ldots-(y'^r)^2,$$

который называется *каноническим* для *вещественных квадратичных форм*, рассматриваемых в пространстве V_n, при этом число s— *положительным индексом инерции*, $(r-s)$ — *отрицательным индексом инерции*, разность $s-(r-s)$ при полном ранге $r=n$ — *сигнатурой квадратичной формы.*

Легко заметить, что ни канонический базис, ни канонический вид квадратичной формы не определены однозначно, так как числа $\alpha_1,\dots,\alpha_n$ в (XVII.58) после различных линейных преобразований, сохраняющих диагональную форму принимают различные значения. Ясно, что число r (как ранг матрицы квадратичной формы) при изменении канонического базиса остается неизменным. А что можно сказать о числах $s, r-s$?

Теорема TXVII.8. *(инерции квадратичных форм). Положительный индекс инерции s и отрицательный индекс инерции $r-s$ являются инвариантами квадратичных форм.*

Доказательство: $\langle\langle$ Пусть квадратичная форма в базисе $\{\vec{e}_1,\vec{e}_2,\dots,\vec{e}_n\}$ имеет вид

$$B(\vec{x},\vec{x})=\sum_{i,k=1}^{n}\beta_{ik}x^ix^k.$$

Пусть в каноническом базисе $\{\vec{e}'_1,\vec{e}'_2,\dots,\vec{e}'_n\}$

$$B(\vec{x},\vec{x}) = (y^1)^2+\ldots+(y^s)^2-(y^{s+1})^2-\ldots-(y^r)^2, \qquad \text{(XVII.62)}$$

а в каноническом базисе $\{\vec{e}'_1,\vec{e}'_2,\dots,\vec{e}'_n\}$

$$B(\vec{x},\vec{x}) = (z^1)^2+\ldots+(z^p)^2-(z^{p+1})^2-\ldots-(z^r)^2. \qquad \text{(XVII.63)}$$

Пусть соответствующие преобразования координат следующие:

$$(a)\quad y^k=\sum_{i=1}^{n}\theta^k_i x^i;\quad (b)\quad z^k=\sum_{i=1}^{n}\sigma^k_i x^i. \qquad \text{(XVII.64)}$$

Вычитая из (XVII.62) соотношения (XVII.63), для любого $x\in V_n$ получим

$$(z^1)^2+\ldots+(z^s)^2+(z^{p+1})^2+\ldots+(z^r)^2=(z^1)^2+\ldots+(z^p)^2+(y^{s+1})^2+\ldots+(y^r)^2. \qquad \text{(XVII.65)}$$

Предположим, что $s<p$ и рассмотрим вектор $\vec{x}$, координаты которого в базисе $\{\vec{e}'_1,\vec{e}'_2,\dots,\vec{e}'_n\}$ удовлетворяют условию $y^1=0, y^2=0,\dots,y^s=0$, а в базисе $\{\vec{e}''_1,\vec{e}''_2,\dots,\vec{e}''_n\}$ условию $z^{p+1}=0,\dots,z^n=0$. Такой вектор $\vec{x}$ существует, причем он ненулевой, так как условия, наложенные на координаты вектора $\vec{x}$ в базисе $\{\vec{e}_1,\vec{e}_2,\dots,\vec{e}_n\}$ эквивалентны однородной системе уравнений:

$$\begin{cases}\sum\limits_{i=1}^{n}\theta^k_i x^i=0 & (k=\overline{1,s})\\ \sum\limits_{i=1}^{n}\sigma^m_i x^i=0 & (m=\overline{p+1,n}).\end{cases} \qquad \text{(XVII.66)}$$

Число уравнений в (XVII.66), равное $s + (n - p) = n - (p - s)$ меньше n из-за нашего предположения $s < p$, и поэтому система всегда имеет нетривиальное решение. Выбрав такой вектор $\vec{x}$ (для этого достаточно взять любое частное решение системы (XVII.66)), мы получим из (XVII.65) для его канонических координат соотношение

$$(z^1)^2 + \ldots + (z^p)^2 + (y^{s+1})^2 + \ldots + (y^r)^2 = 0,$$

откуда следует, что $z^1 = 0, \ldots, z^p = 0, y^{s+1} = 0, \ldots, y^r = 0$, т.е. вектор $\vec{x}$ таков, что в базисе $\{\vec{e}_{''1}, \vec{e}_{''2}, \ldots, \vec{e}_{''n}\}$ его координаты $z^1 = 0, \ldots, z^p = 0$, $z^{p+1} = 0, \ldots, z^n = 0$. Получается, что вектор $\vec{x}$ нулевой. Пришли к противоречию. Остается предположить, что $s \geq p$. Однако, в силу симметрии чисел s и p предположение $p < s$ также приводит к противоречию. Следовательно, $s = p$. Теорема доказана. $\rangle\rangle$

Рассмотрим более подробно положительно определенные квадратичные формы.

Определение OXVII.22. *Квадратичная форма $B(\vec{x}, \vec{x})$ называется положительно определенной, если для любого $x \neq 0$ $B(\vec{x}, \vec{x}) > 0$.*

Теорема TXVII.9. *Для того, чтобы квадратичная форма была положительно определенной, необходимо и достаточно, чтобы положительный индекс инерции был равен n.*

Доказательство: $\langle\langle$ *Необходимость.* Дано, что $B(\vec{x}, \vec{x}) > 0$ для любого $\vec{x} \neq 0$. Предположим, что $\vec{x} < n$. Приведем $B(\vec{x}, \vec{x})$ к каноническому виду

$$B(\vec{x}, \vec{x}) = (x^{'1})^2 + \ldots + (x^{'s})^2 - (x^{'s+1})^2 - \ldots - (x^{'r})^2. \tag{XVII.67}$$

Если $r < n$, то, взяв вектор $\vec{x}_0$, у которого координаты в каноническом базисе имеют вид $x^{'1} = 0, \ldots, x^{'n-1} = 0, x^{'n} = 1$, из (XVII.67) получим $B(\vec{x}_0, \vec{x}_0) = 0$. Имеем противоречие. Итак, $r = n$, т.е. *всякая положительно определенная квадратичная форма является невырожденной.* Пусть $s < r = n$. Рассмотрим тот же вектор $\vec{x}_0$, у которого координаты в каноническом базисе имеют вид $x^{'1} = 0, \ldots, x^{'n-1} = 0$, $x^{'n} = 1$. Из (XVII.67), где $r = n$, получим, что $B(\vec{x}_0, \vec{x}_0) = -1 < 0$. Противоречие. Необходимость доказана.

Достаточность. Дано, что $s = n$. Это означает, что в каноническом базисе $B(\vec{x}, \vec{x})$ имеет вид

$$B(\vec{x}, \vec{x}) = (x^{'1})^2 + (x^{'2})^2 + \ldots + (x^{'n})^2, \tag{XVII.68}$$

откуда следует, что для любого $\vec{x} \neq 0$ $\quad B(\vec{x}, \vec{x}) > 0$. Имеем положительно определенную квадратичную форму. $\rangle\rangle$

Отметим, что соответствующая положительно определенной квадратичной форме симметричная билинейная форма в каноническом базисе имеет вид

$$B(\vec{x}, \vec{y}) = x^{'1}y^{'1} + x^{'2}y^{'2} + \ldots + x^{'n}y^{'n}. \tag{XVII.69}$$

Ее матрица является единичной.

Если квадратичная форма записана в произвольном (не каноническом) базисе, то как узнать, является ли она положительно определенной или не является?

Теорема TXVII.10. *(Сильвестра). Квадратичная форма $B(\vec{x}, \vec{x}) = \sum\limits_{i,k=1}^{n} \beta_{ik} x^i x^k$ положительно определенная тогда и только тогда, когда главные миноры матрицы B строго положительны:*

$$\beta_{11} > 0, \quad \begin{vmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} \\ \beta_{12} & \beta_{22} \end{vmatrix} > 0, \ldots, \begin{vmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \ldots & \beta_{1n} \\ \beta_{12} & \beta_{22} & \ldots & \beta_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \beta_{1n} & \beta_{2n} & \ldots & \beta_{nn} \end{vmatrix} > 0. \tag{XVII.70}$$

Доказательство: $\langle\langle$ Для доказательства представим квадратичную форму в виде

$$B(\vec{x},\vec{x}) = \tilde{B}(\vec{x},\vec{x}) + 2\left(\sum_{i=1}^{n} \beta_{in}x^i\right)x^n + \beta_{nn}(x^n)^2, \qquad \text{(XVII.71)}$$

где $\tilde{B}(\vec{x},\vec{x})$ — квадратичная форма, содержащая переменные $x^1,\ldots,x^{n-1}$. Главные миноры матрицы $\tilde{B}$ совпадают с минорами матрицы B, если исключить из рассмотрения последний, совпадающий с $\det B$. Далее будем применять метод индукции. При $n=1$ очевидно, что теорема верна. Предположим, что теорема верна для квадратичной формы от $(n-1)$ переменных. Необходимо доказать теорему для случая n переменных.

Необходимость. Дано, что $B(\vec{x},\vec{x})$ — положительно определенная квадратичная форма. Требуется доказать неравенства (XVII.70). Из соотношения (XVII.71) тотчас следует, что $\tilde{B}(\vec{x},\vec{x})$ также положительно определенная квадратичная форма, так как иначе существует такой вектор $\vec{x}_0$, у которого первые $n-1$ координат отличны от нуля, а $x^n=0$, что $B(\vec{x}_0,\vec{x}_0)=\tilde{B}(\vec{x}_0,\vec{x}_0)\le 0$. Следовательно, в силу индуктивного рассмотрения все главные миноры в (XVII.70), кроме последнего, строго говоря, положительны. Докажем, что и последний минор, равный $\det B$, строго положителен. Поскольку $B(\vec{x},\vec{x})$ положительно определенная квадратичная форма, то в каноническом базисе ее матрица $B'=E$ (см. (XVII.68)) и $\det B'=1$. Но мы знаем, что $\det B'=(\det C)^2\det B$. Поэтому

$$\det B = \frac{1}{(\det C)^2} > 0.$$

Необходимость доказана.

Достаточность. Дано, что выполнены условия (XVII.70). Доказать, что $B(\vec{x},\vec{x})$ положительно определенная квадратичная форма. Поскольку выполнены условия (XVII.70), то согласно индуктивному подходу квадратичная форма $\tilde{B}(\vec{x},\vec{x})$ положительно определенная. Не меняя последней переменной ($x^n=y^n$) за счет невырожденных линейных преобразований, связывающих канонические координаты $y^1,\ldots,y^{n-1}$ и координаты $x^1,\ldots,x^{n-1}$ приведем $\tilde{B}(\vec{x},\vec{x})$ к каноническому виду. В результате получим

$$B(\vec{x},\vec{x}) = \sum_{i=1}^{n-1}(y^i)^2 + 2\left(\sum_{i=1}^{n-1}\gamma_{in}y^i\right)y^n + \beta_{nn}(y^n)^2 = \sum_{i=1}^{n-1}(y^i+\gamma_{in}y^n)^2 - \left(\sum_{i=1}^{n-1}\gamma_{in}^2\right)(y^n)^2 + \beta_{nn}(y^n)^2.$$

Положив

$$x'^i = y^i + \gamma_{in}y^n \ (i=\overline{1,n-1}),\ x'^n = y^n,\ \beta_{nn} - \sum_{i=1}^{n-1}\gamma_{in}^2 = \alpha,$$

имеем

$$B(\vec{x},\vec{x}) = \sum_{i=1}^{n-1}(x'^i)^2 + \alpha(x'^n)^2. \qquad \text{(XVII.72)}$$

Из (XVII.72) следует, что $\det B'=\alpha$. На основании известной нам формулы
$\det B'=(\det C)^2\det B$ и того факта, что $\det B>0$ (условия (XVII.70) выполнены), выводим $\alpha>0$. Следовательно, $B(\vec{x},\vec{x})$ по (XVII.72) строго положительна для любого $\vec{x}\ne 0$. Достаточность также доказана.
$\rangle\rangle$

В заключении отметим, что если бы мы рассматривали квадратичные формы в комплексных линейных пространствах, то не получили бы таких дополнительных свойств квадратичных форм, как в вещественном случае, потому что за счет невырожденных линейных преобразований из (XVII.58) следует единственный канонический вид квадратичной формы

$$B(\vec{x},\vec{x}) = (y^1)^2 + (y^2)^2 + \ldots + (y^r)^2, \qquad \text{(XVII.73)}$$

где $r<n$ для вырожденных квадратичных форм и $r=n$ для невырожденных квадратичных форм.

Глава XVIII

Собственно евклидовы и псевдоевклидовы пространства

XVIII.1 Евклидовы векторные пространства E_n

Определение OXVIII.1. *Векторное пространство E_n называется евклидовым векторным пространством, если в в V_n раз и навсегда зафиксирована симметричная невырожденная билинейная форма*

$$g(\vec{x}, \vec{y}),$$

называемая фундаментальной билинейной формой или метрической билинейной формой (или просто метрикой).

Из этого определения следует, что если в некотором базисе $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n\}$
$g(\vec{x}, \vec{y}) = \sum\limits_{i,k=1}^{n} g_{ik}x^i y^k$, то (1) $g_{ik} = g_{ki}$ (симметричность), (2) $\det(g_{ik}) \neq 0$ (невырожденность.)

Метрическую билинейную форму принято называть *скалярным произведением векторов* $\vec{x}$ и $\vec{y}$ и обозначать просто $(\overrightarrow{x}\,\overrightarrow{y})$, опуская ради простоты букву g - символ метрической билинейной формы.

Зная свойства симметричных билинейных форм, установленные нами ранее, запишем их для скалярного произведения векторов

$$\begin{aligned}
&(a) \qquad (\overrightarrow{x}\,\overrightarrow{y}) = (\overrightarrow{y}\,\overrightarrow{x});\\
&(b) \qquad \Big((\vec{x} + \vec{z}) \cdot \vec{y}\Big) = (\overrightarrow{x}\,\overrightarrow{y}) + (\overrightarrow{z}\,\overrightarrow{y});\\
&(c) \qquad \Big(\lambda\vec{x} \cdot \vec{y}\Big) = \lambda(\overrightarrow{x}\,\overrightarrow{y}).
\end{aligned} \tag{XVIII.1}$$

В произвольном базисе скалярное произведение $(\overrightarrow{x}\,\overrightarrow{y})$ подсчитывается согласно определению билинейной формы, следующим образом:

$$(\overrightarrow{x}\,\overrightarrow{y}) = g_{ik}x^i y^k, \tag{XVIII.2}$$

где $g_{ik} = (\overrightarrow{e_i}\,\overrightarrow{e_k})$ — скалярные произведения векторов базиса.

Как известно, всякая симметричная билинейная форма однозначно определяет квадратичную форму. Метрической билинейной форме однозначно соответствует невырожденная квадратичная форма

$$(\overrightarrow{x}\,\overrightarrow{x}) = x^2 = g_{ik}x^i y^k \tag{XVIII.3}$$

называемая квадратом длины вектора $\vec{x}$.

Длина вектора обозначается символом $|\vec{x}|$ и, следовательно, в аффинной системе координат вычисляется по формуле

$$|\vec{x}| = \sqrt{g_{ik}x^i x^k}. \tag{XVIII.4}$$

Определение OXVIII.2. *Евклидово векторное пространство называется собственно евклидовым векторным пространством и обозначается E_n, если невырожденная квадратичная форма*

$$(\vec{x}\,\vec{x}) = g_{ik}x^i x^k$$

является положительно определенной, т.е.:

$$(\vec{x}\,\vec{x}) \geq 0 \quad (\forall \vec{x} \in E_n),$$

и называется псевдоевклидовым векторным пространством, если невырожденная квадратичная форма не является положительно определенной. В этом случае для векторного пространства принято обозначение E_n^*.

В силу данного определения и определения для положительно определенных квадратичных форм следует, что для собственно евклидовых пространств к свойствам (XVIII.1)a, b, c) скалярного произведения прибавляется еще одно

$$x^2 = (\vec{x}\,\vec{x}) > 0 \quad (\forall \vec{x} \neq 0) \tag{XVIII.5}$$

и $(\vec{x}\,\vec{x}) = 0$ тогда и только тогда , когда $\vec{x}$ является нуль-вектором.

Для псевдоевклидовых пространств условие (XVIII.5) выполняется только для части векторов и $(\vec{x}\,\vec{x})$ может обращаться в нуль и для ненулевых векторов (в физике они называются *светоподобными* или *изотропными*).

Классическая физика базируется на рассмотрении 3-мерных собственных евклидовых пространств (они называются в физике как и в школьной геометрии просто евклидовыми пространствами), а релятивистская физика базируется на рассмотрении определенного класса 4-мерных евклидовых пространств. Этот класс псевдоевклидовых пространств носит название *пространств Минковского* и будет нами определен ниже.

Из предыдущего материала нам известно, что всегда существует такой базис $\{\vec{i}_1, \vec{i}_2, \ldots, \vec{i}_n\}$, называемый каноническим, в котором положительно определенная для собственно евклидовых пространств невырожденная квадратичная форма x^2 имеет вид

$$\vec{x}^2 = (x^1)^2 + (x^2)^2 + \ldots + (x^n)^2. \tag{XVIII.6}$$

Для псевдоевклидовых пространств x^2 может быть приведена к следующей канонической форме:

$$x^2 = (x^1)^2 + (x^2)^2 + \ldots + (x^s)^2 - (x^{s+1})^2 - \ldots - (x^n)^2. \tag{XVIII.7}$$

Это означает, что в базисе $\{\vec{i}_1, \vec{i}_2, \ldots, \vec{i}_n\}$ для собственно евклидовых пространств коэффициенты метрической формы

$$g_{ik} = \delta_{ik} = \begin{cases} 1, \ i = k \\ 0, \ i \neq k \end{cases}$$

и матрица (g_{ik}) имеет вид

$$g = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & . & & \\ & & & . & 0 \\ 0 & & & & 1 \end{pmatrix}, \tag{XVIII.8}$$

а для псевдоевклидовых

$$g = \begin{pmatrix} \left.\begin{matrix} 1 & & & \\ & \cdot & & \\ & & \cdot & \\ & & & \cdot \\ & & & & 1 \end{matrix}\right\} s & & 0 \\ & & \\ 0 & & \left.\begin{matrix} -1 & & & \\ & \cdot & & \\ & & \cdot & \\ & & & \cdot \\ & & & & -1 \end{matrix}\right\} n-s \end{pmatrix}. \qquad \text{(XVIII.9)}$$

Разность между числом положительных слагаемых и числом отрицательных слагаемых в (XVIII.7) называется сигнатурой псевдоевклидова пространства. Все псевдоевклидовы пространства разбиваются на классы в зависимости от сигнатуры пространства. Иногда сигнатуру обозначают символически следующим образом $(\underbrace{+\ldots+}_{s}\underbrace{-\ldots-}_{n-s})$.

Определение OXVIII.3. *Пространством Минковского называется 4-х мерное псевдоевклидово пространство сигнатуры* $(+---)$, *которая носит название сигнатуры Лоренца.*

Иногда в псевдоевклидовых пространствах вместо квадратичной формы x^2 рассматривается квадратичной формы $-x^2$, и в этом случае пространство Минковского имеет сигнатуру вида $(-+++)$.

Рассмотрим собственно евклидовы пространства, которые будем называть евклидовыми и дадим определение ортогональных векторов (используемое также в случае псевдоевклидовых пространств).

Определение OXVIII.4. *Векторы* $\vec{x}, \vec{y}$ *называются ортогональными между собой, если их скалярное произведение равно нулю:* $(\vec{x}\,\vec{y}) = 0$.

Обратившись к каноническому базису $\{\vec{i}_1, \vec{i}_2, \ldots, \vec{i}_n\}$ и зная, что коэффициенты метрической билинейной формы есть скалярные произведения векторов базиса, из (XVIII.8) заключаем

$$(\overset{\rightarrow}{i_k}\,\overset{\rightarrow}{i_m}) = \delta_{km} = \begin{cases} 1, & k = m \\ 0, & k \neq m \end{cases}, \qquad \text{(XVIII.10)}$$

т.е. векторы канонического базиса взаимно ортогональны друг другу и имеют длины, равные единицы. Каждый такой базис называется *ортонормированным* (или *ортореперoм*). Итак, согласно (XVIII.8) *в евклидовом пространстве* E_n *всегда существует ортонормированный базис, в котором матрица метрической формы совпадает с единичной матрицей.*

В ортонормированном базисе все формулы, связанные с вычислением скалярного произведения (метрических величин), упрощаются, и в этом смысле выбор ортонормированного базиса является предпочтительным. Например, скалярное произведение векторов и длина вектора в ортонормированном базисе имеют:

$$(a) \quad (\vec{x}\,\vec{y}) = \sum_{k=1}^{n} x^k y^k; \quad (b) \quad |x| = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} (x^k)^2}. \qquad \text{(XVIII.11)}$$

Для того, чтобы ввести понятие угла между векторами в E_n, докажем предварительно следующее утверждение:

Теорема TXVIII.1. *В пространстве* E_n *для любых векторов* $\vec{x}, \vec{y}$ *имеет место неравенство Коши - Буняковского*

$$|(\vec{x}\,\vec{y})| \leq |\vec{x}||\vec{y}|. \qquad \text{(XVIII.12)}$$

Доказательство: $\langle\langle$ В самом деле, для любого $\lambda \in \mathbf{R}$ и для любых $\vec{x}, \vec{y}$ согласно (XVIII.5) выполнено:

$$\left(\lambda\vec{x} - \vec{y} \cdot \lambda\vec{x} - \vec{y}\right) = \lambda^2(\vec{x}\,\vec{x}) - 2\lambda(\vec{x}\,\vec{y}) + (\vec{y}\,\vec{y}) \geq 0,$$

т.е. квадратный трехчлен относительно λ не может иметь различных вещественных корней. Поэтому его дискриминант $D = (\vec{x}\,\vec{y})^2 - (\vec{x}\,\vec{x})(\vec{y}\,\vec{y}) \le 0$, откуда следует неравенство (XVIII.12). $\rangle\rangle$

Неравенство Коши - Буняковского позволяет ввести понятие угла между векторами.

Определение OXVIII.5. *Углом θ между ненулевыми векторами $\vec{x}, \vec{y}$ мы будем называть угол (в пределах от 0 до π), косинус которого равен* $\dfrac{(\vec{x}\,\vec{y})}{|\vec{x}||\vec{y}|}$.

В аффинной системе координат он подсчитывается по формуле

$$\cos\theta = \frac{g_{ik}x^i y^k}{\sqrt{g_{lm}x^l x^m}\sqrt{g_{jh}y^j y^h}}. \tag{XVIII.13}$$

В прямоугольной системе координат (XVIII.13) принимает более простой вид

$$\cos\theta = \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} x^k y^k}{\sqrt{\sum\limits_{k=1}^{n}(x^k)^2}\sqrt{\sum\limits_{k=1}^{n}(y^k)^2}}. \tag{XVIII.14}$$

Поставим вопрос о переходе в E_n от одной прямоугольной системы координат к другой прямоугольной системе координат. Предварительно дадим определение ортогональной матрицы.

Определение OXVIII.6. *Матрица $A = (\alpha^i_k)$ называется ортогональной, если она удовлетворяет условию*

$$A^T A = E, \tag{XVIII.15}$$

которое в подробной записи имеет вид

$$\sum_{p=1}^{n} \alpha^p_k \alpha^p_m = \delta_{km} = \begin{cases} 1, & k = m \\ 0, & k \ne m. \end{cases} \tag{XVIII.16}$$

Из (XVIII.16) заключаем, что у всякой *ортогональной матрицы* сумма произведений элементов столбца на самого себя равна единице, а сумма произведений элементов разных столбцов равна нулю. Это правило легко позволяет отличить ортогональную матрицу от неортогональной. Его можно было бы взять за новое определение ортогональной матрицы, поскольку оно означает выполнение (XVIII.16).

Из (XVIII.15) следует, что $(\det A^T)\cdot(\det A) = \det E$ или $(\det A)^2 = 1$, и, следовательно, если A - ортогональная матрица, то

$$\det A = \pm 1. \tag{XVIII.17}$$

Это означает, что ортогональная матрица обязательно невырожденная, и если (XVIII.15) умножить справа на A^{-1}, то получим эквивалентное (XVIII.15) условие

$$A^T = A^{-1}, \tag{XVIII.18}$$

Условие (XVIII.18) можно было бы взять еще за одно определение ортогональной матрицы.

XVIII.2 Евклидовы пространства точек $\mathcal{E}_n$

Определение OXVIII.7. *Аффинное пространство $\mathbf{A}_n$ над евклидовым векторным пространством E_n называется евклидовым пространством точек.*

В случае, если пространство переносов E_n является собственно евклидовым, то соответствующее аффинное пространство называется *собственно евклидовым пространством точек, или просто — евклидовым пространством точек* и обозначается $\mathcal{E}_n$. Если пространство переносов является псевдоевклидовым векторным пространством E_n^*, то соответствующее ему аффинное пространство называется *псевдоевклидовым пространством точек* и обозначается $\overset{*}{\mathcal{E}}_n$.[1]

Таким образом, с одной стороны евклидовы пространства точек являются аффинными пространствами, поэтому все отношения и свойства аффинных пространств автоматически переносятся и на евклидовы. С другой стороны, на пространстве переносов E_n евклидова пространства определено новое тернарное отношение — скалярное произведение векторов, которое генерирует новые отношения и в евклидовом пространстве точек $\mathcal{E}_n$, а, значит, и новые свойства этого пространства.

Определение OXVIII.8. *Система координат $\Re\{O;\vec{i}_1,\dots,\vec{i}_n\}$ в $\mathcal{E}_n$, где $\{\vec{i}_k\}_n$ - ортонормированный базис называется прямоугольной системой координат.*

Пусть $\Re\{O;\vec{i}_1,\dots,\vec{i}_n\}$ и $\Re\{O;\vec{i'}_1,\dots,\vec{i'}_n\}$ — две прямоугольные системы координат в E_n с общим началом, т.е. совершается переход от одного ортонормированного базиса к другому. Обозначим матрицу перехода от нештрихованного базиса к штрихованному через $C=(C^m_{\prime k})$, так что вектор

$$\vec{i}_{\prime k}=C^m_{\prime k}\vec{i}_m\,.$$

Ввиду того, что $\vec{i}_{\prime 1},\dots,\vec{i}_{\prime n}$ — единичные взаимно-ортогональные векторы, имеем

$$\delta_{ks}=(\vec{i}_{\prime k}\,\vec{i}_{\prime s})=$$

$$=\left(\sum_{m=1}^{n}C^m_{\prime k}\vec{i}_m\,,\sum_{l=1}^{n}C^l_{\prime s}\vec{i}_l\right)=\sum_{m,l=1}^{n}C^m_{\prime k}C^l_{\prime s}(\vec{i}_m\,\vec{i}_l)=\sum_{m,l=1}^{n}C^m_{\prime k}C^l_{\prime s}\delta_{ml}=\sum_{m=1}^{n}C^m_{\prime k}C^m_{\prime s}.$$

Итак, элементы матрицы перехода связаны соотношением

$$\sum_{p=1}^{n}C^p_{\prime k}C^p_{\prime s}=\delta_{ks},$$

которое совпадает с (XVIII.16) и показывает, что *матрица перехода от одного ортонормированного базиса к другому необходимо является ортогональной матрицей.*

Обратно, если задана некоторая ортогональная матрица $A=(\alpha^i_k)$, то, как известно, она невырожденная и с ее помощью можно осуществить переход от одного базиса к другому. Пусть $\{\vec{e}_1,\vec{e}_2,\dots,\vec{e}_n\}$ — ортонормированный базис в E_n. Построим векторы

$$\vec{e}_{\prime k}=\sum_{m=1}^{n}\alpha^m_k\vec{i}_m\,.$$

Они линейно-независимые ($\det A\neq 0$), и мы можем построить базис $\{\vec{e}_{\prime 1},\vec{e}_{\prime 2},\dots,\vec{e}_{\prime n}\}$. Вычислим скалярное произведение векторов нового базиса. Имеем

$$(\vec{e}_{\prime k}\,\vec{e}_{\prime m})=\left(\sum_{p=1}^{n}\alpha^p_k\vec{i}_p\cdot\sum_{q=1}^{n}\alpha^q_m\vec{i}_q\right)=\sum_{p,q=1}^{n}\alpha^p_k\alpha^q_m\delta_{pq}=\sum_{p=1}^{n}\alpha^p_k\alpha^p_m.$$

Поскольку A — ортогональная матрица, то в силу (XVIII.16) $(\vec{e}_{\prime k}\,\vec{e}_{\prime m})=\delta_{km}$, и, следовательно, базис $\{\vec{e}_{\prime 1},\vec{e}_{\prime 2},\dots,\vec{e}_{\prime n}\}$ является также ортонормированным базисом.

Таким образом, установлено *взаимно-однозначное соответствие между ортогональными матрицами и вращением базиса (репера) в пространстве E_n*. Если детерминант ортогональной матрицы перехода равен $+1$, то вращения называются *собственными* (ориентация репера сохраняется, например, в E_3 правая тройка переходит в правую), если же детерминант ортогональной матрицы перехода равен -1,

[1] См. определение аффинного пространства (V.1)

то вращения называются *несобственными* (ориентация репера меняется, например, в E_3 правая тройка переходит в левую).

Примером собственных вращений в трехмерном евклидовом пространстве E_3 являются вращения, задаваемые углами Эйлера.

Применяя сейчас формулы преобразования координат (VI.7), (VI.5) [2] в произвольном случае, мы можем написать формулы преобразования от одной прямоугольной системы координат к другой прямоугольной системе координат, когда перенесено и начало координат:

$$\left.\begin{array}{ll} () & x^k = C^k_{\prime m} x'^m + \alpha^k \\ () & x'^k = C'^k_m + \alpha'^k \end{array}\right\}, \tag{XVIII.19}$$

или в матричной форме

$$\begin{array}{ll} () & (\vec{x}) = C(\vec{x})' + (\vec{\alpha}) \\ () & (\vec{x})' = C^{-1}(\vec{x}) + (\vec{\alpha})' \end{array}, \tag{XVIII.20}$$

где $C = (C^k_{\prime m})$ — ортогональная матрица и, следовательно, в (XVIII.20)(б) C^{-1} может быть заменено на C^T согласно (XVIII.18).

[2] См. раздел (VI).

Глава XIX

Преобразования евклидовых пространств

XIX.1 Группа движений евклидова пространства

XIX.1.1 Определение движения евклидова пространства

Определение OXIX.1. *Преобразование евклидова пространства точек, $\mathcal{E}_n$, заданное упорядоченной парой декартовых реперов $\Re\{O; \vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n\}$, $\Re\{O'; \vec{e'}_1, \ldots, \vec{e'}_n\}$, называется движением евклидова пространства.*

Таким образом, движение является частным случаем аффинного преобразования, связывающие не произвольные базисы пространства переносов, $\{\vec{e}_i\}_n$ и $\{\vec{e}_{'j}\}_n$, а именно — ортонормированные:

$$\{\vec{e}_i\}_n|\{(\vec{e}_i\,\vec{e}_k) = \delta_{ik}\} \longrightarrow \{\vec{e}_{'i}\}_n|\{(\vec{e}_{'i}\,\vec{e}_{'k}) = \delta_{'i'k}\}, \tag{XIX.1}$$

которые согласно результатам предыдущего раздела (XVIII.2) связаны ортогональной матрицей перехода, C, такой, что:

$$C^T \cdot C = E \Longleftrightarrow {}^{-1} = C^T, \tag{XIX.2}$$

причем вследствие (XIX.2):

$$\det C = \pm 1. \tag{XIX.3}$$

> Следует заметить, что часто студенты в качестве определения ортогональной матрицы указывают условие (XIX.3) вместо условий (XIX.2). Надо отчетливо понимать, что (XIX.2), вообще говоря, представляют собой n^2 алгебраических уравнений, а условие (XIX.3) — всего одно, которое является простым *следствием* соотношений (XIX.2).

Следует также заметить, что движения евклидова пространства точек, $\mathcal{E}_n$ всегда порождают ортогональные преобразования евклидова векторного пространства переносов, E_n, которые задаются упорядоченной парой ортонормированных базисов.

XIX.1.2 Теорема о движениях

Докажем теперь следующую теорему:

Теорема TXIX.1. *Все множество движений n-мерного евклидова пространства, $\mathcal{E}_n$, образует группу преобразований порядка $N = \dfrac{n(n+1)}{2}$.*

Доказательство: $\langle\langle$ Доказательство полностью аналогично доказательству теоремы о группе аффинных преобразований (TXV.5), приведенным в Разделе (XV.7), поэтому мы опускаем общие детали доказательства этой теоремы, предоставляя студентам самостоятельно повторить их. Остановимся подробно лишь на деталях, специфичных для группы движения.

1. Композиция двух движений представляется произведением матриц перехода, C', C'' (см. (XV.33)), каждая из которых является ортогональной:

$$\overline{C}'' = C''C', \tag{XIX.4}$$

причем:

$$C'^T C' = E; \qquad C''^T C'' = E. \tag{XIX.5}$$

Докажем, что матрица $\overline{C}''$ также является ортогональной. Для этого вычислим транспонированную матрицу, $\overline{C}''^T$, учитывая, что при транспонировании произведения меняется порядок сомножителей:

$$\overline{C}''^T = (C''C')^T = C^T C''^T \Longrightarrow \overline{C}''^T C'' = C'^T (C''^T C'')C' = C'^T E C' = C'^T C' = E. \tag{XIX.6}$$

Таким образом, композиция двух движений есть движение.

2. Преобразование, обратное к данному движению, описывается обратной матрицей перехода, C^{-1}. Но для ортогональных преобразований $C^{-1} = C^T$. Далее, пусть C - ортогональная матрица перехода, докажем, что и C^T также ортогональная матрица, т.е., для нее выполняется соотношение, аналогичное (XIX.2), т.е.:

$$C \cdot C^T = E. \tag{XIX.7}$$

Для доказательства этого простого факта достаточно транспонировать матричное соотношение (XIX.2). Таким образом, если C - ортогональная матрица, то C^T и C^{-1} -также ортогональные матрицы, т.е., преобразование, обратное движению, также есть движение.

3. Доказательство того факта, что тождественное преобразование является движением очевидно, так как $E^T = E$; $E \cdot E = E$.

Перейдем теперь к установлению порядка группы движений. Соотношения (XIX.2) можно рассматривать как систему алгебраических уравнений относительно элементов ортогональной матрицы C. Вследствие симметрии произведения ортогональных матриц $C^T \cdot C = C \cdot C^T$, которое мы только что установили, всего имеется

$$(n^2 - n)2 + n = n(n+1)2$$

независимых уравнений относительно n^2 элементов матрицы перехода. Стало быть, лишь

$$n^2 - \frac{n(n+1}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$$

элементов этой матрицы являются произвольными числами (параметрами преобразования). Кроме того еще n координат вектора параллельного переноса $\vec{a}$ в формулах (XVIII.19) - (XVIII.20) являются независимыми параметрами преобразования. Таким образом, всего имеется:

$$N = \frac{n(n+1)}{2}$$

параметров группы движения. Как мы помним, число N и является порядком группы. $\rangle\rangle$

Обычно группа движения обозначается $\mathcal{D}_{n;N}$. На евклидовой плоскости порядок группы движений равен 3, в трехмерном евклидовом пространстве — 6. Из определения (OXIX.1) ясно, что группа движений, $\mathcal{D}_{n;n(n+1)/2}$ евклидова пространства $\mathcal{E}_n$ является подгруппой группы аффинных преобразований $\mathcal{A}^{n;n(n+1)}$: $\mathcal{D}_{n;/,n(n+1)/2} \subset \mathcal{A}_{n;/,n(n+1)}$, причем ее порядок ровно в 2 раза меньше порядка последней.

XIX.1.3 Конгруэнтность фигур

Напомним, что *фигурой аффинного пространства* называется любое множество точек аффинного пространства. Рассмотрим две фигуры F и F' евклидова пространства.

Определение OXIX.2. *Если существует такое движение $\mathcal{D}$ евклидова пространства точек $\mathcal{E}_n$, при котором все точки фигуры F отображаются во все точки фигуры F', то фигуры F и F' называются конгруэнтными друг другу:*

$$F \cong F' \Longleftrightarrow \exists f \in \mathcal{D} | f(F) = F'. \tag{XIX.8}$$

Следует особо подчеркнуть, что нельзя путать отношения *равенства* и *конгруэнтности*: первое определено на множестве чисел, второе - на множестве точек. Две равные точки - это одна и та же точка, поэтому две равные фигуры - это одна и та же фигура. Конгруэнтные же фигуры - это различные фигуры, которые можно совместить подходящим движением.

XIX.1.4 Движения первого и второго рода

Движения евклидова пространства точек, $\mathcal{E}_n$, генерируются ортогональными преобразованиями его евклидова пространства переносов, E_n. Как мы отмечали выше, из определения ортогональной матрицы C (XIX.2) следует свойство ее определителя (XIX.3):

$$\det C = \pm 1.$$

Определение OXIX.3. *Движения евклидова пространства $\mathcal{D}_n$, порождаемые матрицей перехода C с определителем, равным $+1$, называются движениями I-го рода, а движения $\mathcal{D}_n$, порождаемые матрицей перехода C с определителем, равным -1, называются движениями II-го рода:*

$$\begin{array}{llcl} \mathcal{D}_n & |\det C = 1 & \to & \mathrm{I} \;-\; \mathcal{D}_n^I; \\ \mathcal{D}_n & |\det C = -1 & \to & \mathrm{II} \;-\; \mathcal{D}_n^{II} \end{array} \tag{XIX.9}$$

Теорема TXIX.2. *Движения первого рода, $\mathcal{D}_n^I$ образуют подгруппу группы движений $\mathcal{D}_n$ евклидова пространства, $\mathcal{E}_n$, а движения второго рода, $\mathcal{D}_n^{II}$, подгруппы не образуют.*

Доказательство: $\langle\langle$ Рассмотрим сначала закон композиции движений, который определяется матрицей перехода (XIX.4):

$$\overline{C}'' = C''C'.$$

По теореме об определителе произведения матриц (III.17) получим отсюда:

$$\det \overline{C}'' = \det C'' \det C'.$$

Таким образом, если D_n'' и D_n' - движения первого рода, то $\det \overline{C}'' = +1$, т.е., композиция движений первого рода также будет движением I-го рода; если D_n'' и D_n' - движения различных родов, то произведение определителей их матриц перехода будет равно (-1), - т.е., композиция движений различных родов будет движением II-го рода. Аналогично, композиция движений II-го рода будет движением I-го рода.

Рассмотрим обратные преобразования. Вследствие определения обратной матрицы имеем:

$$C^{-1}C = E \Longrightarrow \det C^{-1} \det C = 1,$$

поэтому обратное движение, $\mathcal{D}_n^{-1}$, является движением того же рода, что и движение $\mathcal{D}_n$.

Рассмотрим теперь тождественные преобразование, когда $C = E$. Так как $\det E = +1$, то тождественное преобразование принадлежит к движениям I-го рода, но не принадлежит к движениям II-го рода.

Таким образом, теорема доказана. $\rangle\rangle$

Как мы помним из Главы (III), все базисы векторного пространства делятся на два непересекающиеся класса, каждый из которых связан матрицей перехода с положительным определителем, а базисы различных классов связаны матрицей перехода с отрицательным определителем. Каждый из классов базисов определяет ориентацию векторного пространства, одну из которых можно назвать [1] правой, а другую - левой. Таким образом, движения первого рода связывают одноименные базисы и тем самым не нарушают ориентацию пространства, в то время, как движения второго рода связывают разноименные базисы и изменяют ориентацию пространства.

XIX.1.5 Инварианты движений

Рассмотрим ортогональные преобразования евклидова векторного пространства, E_n, и докажем теорему:

Теорема TXIX.3. *При ортогональных преобразованиях евклидова векторного пространства E_n не изменяется скалярное произведение любых двух векторов:*

$$(\vec{x}\,\vec{y}) = (\vec{x}\,'\vec{y}\,'), \qquad (\forall \vec{x}, \vec{y} \in E_n). \tag{XIX.10}$$

Доказательство: $\langle\langle$ Рассмотрим в E_n любые два ортонормированные базиса: $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n\}$ и $\{\vec{e}_{'1}, \vec{e}_{'2}, \ldots, \vec{e}_{'n}\}$:

$$G = E \Longleftrightarrow g_{ik} = (\vec{e}_i\,\vec{e}_k) = \delta_{ik};$$

$$G' = E \Longleftrightarrow g_{'i'k} = (\vec{e}_{'i}\,\vec{e}_{'k}) = \delta_{'i'k}. \tag{XIX.11}$$

Рассмотрим любые два вектора из евклидова векторного пространства, $\forall \vec{x}, \vec{y} \in E_n$. Образы этих векторов $\vec{x}\,'$, $\vec{y}\,'$ при ортогональных преобразованиях E_n находятся по формулам (см., например, (XVIII.20), где нужно учесть, что $C^{-1} = C^T$ и положить $\vec{\alpha} = \vec{0}$):

$$(\vec{x})' = C^T(\vec{x}) \Longrightarrow x'^i = \sum_{j=1}^{n} C^j_{'i} x^j;$$

$$(\vec{y})' = C^T(\vec{y}) \Longrightarrow y'^k = \sum_{m=1}^{n} C^m_{'k} y^m.$$

Вычислим скалярное произведение образов векторов по определению:

$$G'(\vec{x}\,', \vec{y}\,') = g_{'i'k} x'^i y'^k = \sum_{'i=1}^{n}\sum_{'k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{m=1}^{n} g_{'i'k} C^j_{'i} C^m_{'k} x^j y^m.$$

Учитывая в последнем выражении соотношение (XIX.11) ортонормированности базиса $\{\vec{e}_{'1}, \vec{e}_{'2}, \ldots, \vec{e}_{'n}\}$ и переставляя порядок суммирования, получим:

$$G'(\vec{x}\,', \vec{y}\,') = \sum_{j=1}^{n}\sum_{m=1}^{n} x^j y^m \sum_{'i=1}^{n} C^j_{'i} C^m_{'i}.$$

[1] См. [1].

Поскольку матрица перехода $C^j_{'i}$ - ортогональная, то выполняется соотношение:

$$\sum_{'i=1}^{n} C^j_{'i} C^m_{'i} = \delta^{jm},$$

откуда сразу следует соотношение (XIX.10). $\rangle\rangle$

Вследствие этого важного инвариантного свойства ортогональных преобразований евклидова векторного пространства E_n и определения длин векторов и углов между ними с помощью метрической билинейной формы (XVIII.4) и (XVIII.13) существует еще два важных инварианта ортогональных преобразований евклидова векторного пространства:

Теорема TXIX.4. *При ортогональных преобразованиях евклидова векторного пространства сохраняются длины любых векторов и углы между ними.*

Далее, расстояние между любыми двумя точками A, B евклидова пространства точек, $\mathcal{E}_n$, определяется как длина соответствующего геометрического вектора $\overrightarrow{AB}$, а углы между прямыми (плоскостями) в евклидовом пространстве точек определяются как углы между соответствующими направляющими (нормальными) векторами. Отсюда следует важная теорема:

Теорема TXIX.5. *Расстояния между любыми точками и углы между любыми прямыми (плоскостями) евклидова пространства точек $\mathcal{E}_n$ являются инвариантами движений.*

Можно доказать и обратную теорему, которую мы приведем здесь без доказательства:

Теорема TXIX.6. *Если аффинное преобразование сохраняет расстояние между любыми двумя точками евклидова пространства, то это преобразование является движением.*

> В некоторых учебниках геометрии именно теорема (TXIX.6) выступает в роли определения движения: движением *называется* преобразование евклидова пространства точек, сохраняющее расстояние между любой парой точек.

Дадим еще определение, полезное в будущем.

Определение OXIX.4. *Точка $M_* \in \mathcal{E}_n$ называется инвариантной (неподвижной) точкой аффинного преобразования $f \in \mathcal{A}_{n,N}$, если:*

$$f(M_*) = M_*. \tag{XIX.12}$$

Пусть точка M_* в некотором аффинном репере $\Re\{O; \vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n\}$ имеет координаты $M_0 = (x^1_0, x^2_0, \ldots, x^n_0)$. Тогда из определения (XIX.12) и формул общего аффинного преобразования (IV.6) следуют алгебраические условия на координаты инвариантной точки:

$$x^i_* = C'^i_k x^k_* + x^i_0.$$

Таким образом, координаты инвариантной точки любого аффинного преобразования f определяются системой линейных неоднородных алгебраических уравнений:

$$(C'^i_k - \delta^i_k) x^k_* = x^i_0. \tag{XIX.13}$$

Учитывая, что мы рассматриваем в этой главе ортонормированные базисы и движения, описываемые ортогональными матрицами преобразования, уравнения (XIX.13) можно записать еще в другой эквивалентной форме:

$$(\delta^i_k - C^i_{\prime k})x^k_* = C^i_{\prime k}x^k_0. \tag{XIX.14}$$

XIX.2 Движения плоскости

В качестве конкретной группы движений рассмотрим сначала движения евклидовой плоскости, $\mathcal{E}_2$. Согласно вышеизложенному группа движений плоскости имеет порядок

$$N = \frac{n(n+1)}{2} = 3.$$

Таким образом, на плоскости мы имеем группу движений $\mathcal{D}_{2;3}$.

Поставим задачу: *найти явные выражения для формул движения плоскости, $\mathcal{D}_{2;3}$ через 3 независимых параметра группы движений и провести классификацию движений плоскости.*

XIX.2.1 Формулы движения плоскости

Выпишем сначала общие формулы аффинных преобразований плоскости (IV.6), определяемых упорядоченной парой аффинных реперов, $\Re\{O;\vec{e}_1,\vec{e}_2\}$, $\Re\{O';\vec{e}_{\prime 1},\vec{e}_{\prime 2}\}$, полагая для плоскости $x^1 = x, x^2 = y$:

$$\begin{array}{l} x' = C'^{\,1}_{\,1}x + C'^{\,1}_{\,2}y + x_0 \\ y' = C'^{\,2}_{\,1}x + c'^{\,2}_{\,2}y + y_0 \end{array}, \tag{XIX.15}$$

где $||C'^{\,i}_{\,k}|| = c^{-1}$ - матрица, обратная к матрице перехода C. Для простоты записи введем обозначения:

$$C'^{\,1}_{\,1} = \alpha;\ C'^{\,1}_{\,2} = \beta;\ C'^{\,2}_{\,1} = \gamma;\ C'^{\,2}_{\,2} = \delta.$$

Таким образом:

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}.$$

Поскольку мы рассматриваем движение, и матрица перехода является ортогональной, то ее элементы получаются транспонированием:

$$C = \begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{pmatrix}.$$

Запишем теперь условие ортогональности матрицы перехода (XIX.2):

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, учитывая симметрию произведения, получаем систему 3-х независимых алгебраических уравнений относительно 4-х неизвестных коэффициентов матрицы перехода $\alpha, \beta, \gamma, \delta$:

$$\left.\begin{array}{llcl} (\mathbf{a}) & \alpha^2 + \gamma^2 & = & 1 \\ () & \alpha\beta + \gamma\delta & = & 0 \\ () & \beta^2 + \delta^2 & = & 1 \end{array}\right\}. \tag{XIX.16}$$

Для решения уравнений (XIX.16)(а) и (XIX.16)(в) положим:

$$\alpha = \cos\phi\,,\ \gamma = \sin\phi\,; \quad \beta = -\sin\psi\,, \delta = cos\psi, \tag{XIX.17}$$

где ψ и ϕ - произвольные пока числа. Осуществляя подстановку (XIX.17) в уравнении (XIX.16)(б), приведем последнее к виду:

$$\sin(\psi - \phi) = 0,$$

откуда получим решение:

$$\psi = \phi + \pi k\,, \quad \text{k} - \quad : -\ k \in \mathbb{Z}. \tag{XIX.18}$$

Подставляя теперь ψ из (XIX.18) в соотношения (XIX.17) и используя формулы приведения с учетом того, что $\cos\pi k = (-1)^k = \pm 1$, получим:

$$C = \begin{pmatrix} \cos\phi & -\varepsilon\sin\phi \\ \sin\phi & \varepsilon\cos\phi \end{pmatrix}, \qquad \text{(XIX.19)}$$

где

$$\varepsilon = \pm 1.$$

Вычисляя определитель матрицы (XIX.19), получим:

$$\det C = \begin{vmatrix} \cos\phi & -\varepsilon\sin\phi \\ \sin\phi & \varepsilon\cos\phi \end{vmatrix} = \varepsilon, \qquad \text{(XIX.20)}$$

поэтому движениям I-го рода соответствует $\varepsilon = +1$, движениям II-го рода: $\varepsilon = -1$.

Выпишем, наконец, формулы движения плоскости:

$$\begin{array}{l} x' = x\cos\phi - y\varepsilon\sin\phi + x_0; \\ y' = x\sin\phi + y\varepsilon\cos\phi + y_0, \end{array} \qquad \text{(XIX.21)}$$

где $\vec{r}_0 = (x_0, y_0)$ - вектор параллельного переноса. Числа ϕ, x_0, y_0 и являются независимыми параметрами группы движения плоскости. В случае собственных вращений ϕ является по смыслу углом поворота декартовой системы координат.

XIX.2.2 Классификация движений плоскости

Рассмотрим уравнения (XIX.14) для нахождения *инвариантной точки движения* плоскости. Используя формулы движения плоскости (XIX.21), получим систему уравнений для координат инвариантной точки плоскости $M(x, y)$[2]:

$$\begin{array}{rcl} x(1-\cos\phi) + y\varepsilon\sin\phi & = & x_0, \\ -x\sin\phi + y(1-\varepsilon\cos\phi) & = & y_0. \end{array} \qquad \text{(XIX.22)}$$

Определитель системы (XIX.22) равен:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1-\cos\phi & \sin\phi \\ -\sin\phi & 1-\varepsilon\cos\phi \end{vmatrix} = (1+\varepsilon)(1-\cos\phi) = 2(1+\varepsilon)\sin^2\frac{\phi}{2}. \qquad \text{(XIX.23)}$$

Итак, пусть движение плоскости, f, задано упорядоченной парой аффинных реперов: $\Re\{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2\}$, $\Re\{O'; \vec{e'}_1, \vec{e'}_2\}$б , причем $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}'$. Возможны различные случаи решения системы (XIX.22) в зависимости от величины ε в определителе определителе (XIX.23).

1. Движение первого рода: $\varepsilon = 1$.

а). $\Delta \neq 0 \Longleftrightarrow \phi \neq 0$, т.е., $\vec{e'}_i \neq \vec{e}_i$. В этом случае, как известно, система уравнений (XIX.22) имеет одно и только одно решение, а, следовательно, движение f имеет одну и только одну инвариантную точку:

$$M_S(x_s, y_s)| : \begin{array}{rcl} x_s & = & x_s\cos\phi - y_s\varepsilon\sin\phi + x_0, \\ y_s & = & x_s\sin\phi + y_s\varepsilon\cos\phi + y_0. \end{array} \qquad \text{(XIX.24)}$$

[2] Значок$*$ мы опускаем.

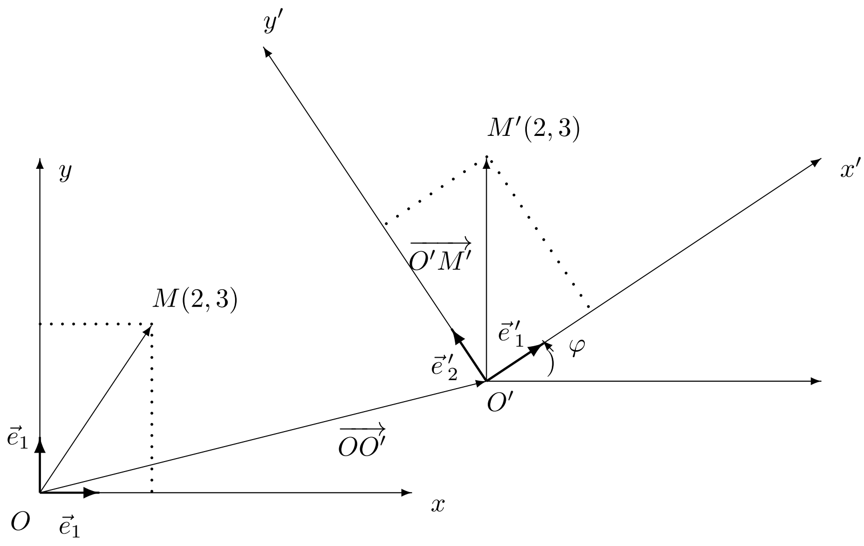


Рис.XIX.53. *Движение плоскости*

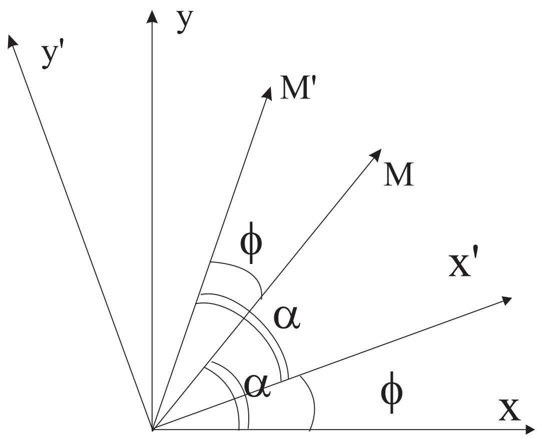


Рис.XIX.54. *Поворот плоскости на угол* α

Из (XIX.24) и формул движения плоскости (XIX.21) получим:

$$\begin{array}{rcl} x' - x_s &=& (x - x_s)\cos\phi - (y - y_s)\varepsilon\sin\phi, \\ y' - y_s &=& (x - x_s)\sin\phi + (y - y_s)\varepsilon\cos\phi. \end{array} \tag{XIX.25}$$

Формулы (XIX.25) определяют в репере $\mathbb{R}$ вращение плоскости вокруг точки $M_S(x_s, y_s)$ на угол ϕ.

б). $\Delta = 0 \Longleftrightarrow \phi = 0$; $(\vec{e}_{'i} = \vec{e}_i\,.)$ Тогда формулы движения (XIX.21) принимают вид:

$$\begin{array}{rcl} x' &=& x + x_0, \\ y' &=& y + y_0 \end{array} \tag{XIX.26}$$

и определяют параллельный перенос плоскости на вектор $\vec{a} = (x_0, y_0)$. В этом случае, если вектор параллельного переноса ненулевой ($\vec{a} \neq \vec{0}$), то система уравнений (XIX.22) несовместна, следовательно, движение f в этом случае не имеет инвариантных точек. Если же $\vec{a} = \vec{0}$, движение становится тождественным преобразованием, и каждая точка плоскости является инвариантной.

II. $\varepsilon = -1$, т.е., f - движение 2-го рода.

Подставляя в формулы (XIX.22) значение $\varepsilon = -1$ и учитывая тригонометрические формулы для синуса и косинуса двойного аргумента:

$$\sin\phi = 2\sin\frac{\phi}{2}\cos\frac{\phi}{2}; \quad cos\phi = 2\cos^2\frac{\phi}{2} - 1,$$

получим из формул (XIX.22) для координат инвариантной точки:

$$M_S(x_s, y_s)| : \begin{cases} \left(x_s\sin\frac{\phi}{2} - y_s\cos\frac{\phi}{2}\right)\sin\frac{\phi}{2} & = & -\dfrac{x_0}{2}, \\ \left(x_s\sin\frac{\phi}{2} - y_s\cos\frac{\phi}{2}\right)\cos\frac{\phi}{2} & = & -\dfrac{y_0}{2}. \end{cases} \tag{XIX.27}$$

Напомним, что x_0, y_0 есть координаты точки O' (начала репера $\Re'$) по отношению к реперу $\Re$. Наряду с реперами $\Re$ и $\Re' = f(\Re)$ рассмотрим ортонормированный репер $\Re_1$:

$$\Re\{O_1; \vec{i}_1, \vec{i}_2\}, \qquad O_1\left(\frac{x_0}{2}, \frac{y_0}{2}\right), \ (\vec{i}_1\,\vec{i}_2) = \frac{\alpha}{2}.$$

Найдем формулы движения f в ортонормированном репере $\Re_1$, обозначая координаты образов точек в репере $\Re_1$ как (x_1, Y_1). По формулам движения плоскости (XIX.21) найдем координаты образов точек M и M':

$$x' = x_1'\cos\tfrac{\phi}{2} - y_1'\sin\tfrac{\phi}{2} + \frac{x_0}{2}, \qquad x = x_1\cos\tfrac{\phi}{2} - y_1\sin\tfrac{\phi}{2} + \frac{x_0}{2},$$

$$y' = x_1'\sin\tfrac{\phi}{2} + y_1'\cos\tfrac{\phi}{2} + \frac{y_0}{2}, \qquad y = x_1\sin\tfrac{\phi}{2} + y_1\cos\tfrac{\phi}{2} + \frac{y_0}{2}.$$

Выражая с помощью формул движения (XIX.21) координаты x', y' через x, y, исключая затем последние из предыдущих уравнений, получим связь между координатами (x_1', y_1') и (x_1, y_1), т.е., формулы движения f в ортонормированном репере $\Re_1$:

$$\begin{aligned} x_1' &= x_1 + \left(x_0\cos\frac{\phi}{2} + y_0\cos\frac{\phi}{2}\right), \\ y_1' &= -y_1. \end{aligned} \tag{XIX.28}$$

Выражение в круглых скобках формул (XIX.28) описывает параллельный перенос вдоль оси O_1x_1. Таким образом, движение 2-го рода является композицией *симметрии относительно оси* O_1y_1 и параллельного переноса вдоль оси O_1x_1. Ясно, что инвариантная точка такого движения может существовать лишь отсутствии параллельного переноса, т.е., при условии:

$$x_0\cos\frac{\phi}{2} + y_0\cos\frac{\phi}{2} = 0.$$

Симметрию относительно оси в дальнейшем будем называть *осевой симметрией*, а композицию осевой симметрии и параллельного переноса - *скользящей симметрией.*

Таким образом, если движение 2-го рода имеет инвариантную точку, то f - осевая симметрия.

XIX.2.3 Движения псевдоевклидовой плоскости

В каноническом базисе матрица фундаментальной симметричной билинейной формы, G, псевдоевклидовой плоскости $\overset{*}{\mathcal{E}}_2$ имеет вид:

$$G = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{XIX.29}$$

причем:

$$(\vec{e}_1\,\vec{e}_1) = -1, \quad (\vec{e}_1\,\vec{e}_2) = 0, \quad (\vec{e}_2\,\vec{e}_2) = 1. \tag{XIX.30}$$

Согласно определению квадратичной формы псевдоевклидова пространства (XVIII.7) запишем для любого вектора $\vec{x} \in \overset{*}{E}_2$:

$$\vec{x}^2 \overset{def}{=\!=} (\vec{x}\,\vec{x}) = -(x^1)^2 + (x^2)^2. \tag{XIX.31}$$

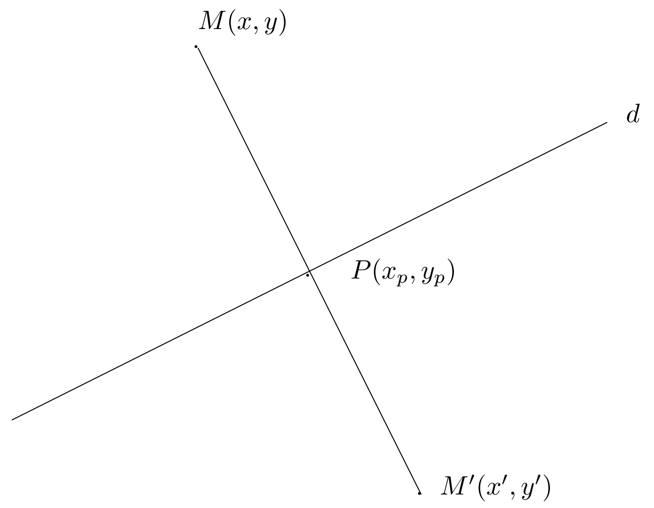


Рис.XIX.55. *Симметрия относительно прямой d*

Из этой формулы видно, что все векторы псевдоевклидовой векторной плоскости $\overset{*}{E}_2$ делятся на 3 непересекающихся класса: 1). *времениподобные векторы*: $\vec{x}^2 > 0$, 2). *пространственноподобные векторы*: $\vec{x}^2 < 0$, 3). *изотропные векторы*: $\vec{x}^2 = 0$.

Найдем формулы движения псевдоевклидовой плоскости, т.е., преобразований, связывающих ее два ортонормированных в смысле (XIX.30) репера, повторяя все аналогичные выкладки для евклидовой плоскости и полагая $x^1 = x, x^2 = y$. Общие формулы аффинных преобразований псевдоевклидовой плоскости совпадают с введенными ранее (XIX.15). Однако, определение ортогональности матриц, а точнее говоря, *псевдоортогональности*, будет отличаться. Введем *псевоединичную матрицу* E_*:

$$E_* = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & \cdot & 0 \\ 0 & -1 & 0 & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

где (-1) и $(+1)$ повторяются на главной диагонали соответственно отрицательному и положительному индексу инерции фундаментальной квадратичной форме псевдоевклидова пространства, т.е., его сигнатуре.

Определение OXIX.5. *Квадратная матрица C называется псевдоортогональной, если выполняется соотношение:*

$$C^T E_* C = E_*. \tag{XIX.32}$$

Умножая слева обе части уравнения (XIX.37) на матрицу E_* и учитывая очевидное соотношение:

$$E_* E_* = E, \tag{XIX.33}$$

получим из определения (XIX.37) выражение для матрицы, обратной к псевдоортогональной:

$$C^{-1} = E_* C E_*. \tag{XIX.34}$$

Запишем теперь вместо (XIX.2) условие псевдоортогональности матрицы перехода, получим вместо (XIX.16) систему уравнений на коэффициенты $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ матрицы перехода:

$$\left.\begin{array}{lll} \textbf{(а)} & \alpha^2 - \gamma^2 & = 1 \\ \textbf{(б)} & \alpha\beta - \gamma\delta & = 0 \\ \textbf{(в)} & -\beta^2 + \delta^2 & = 1 \end{array}\right\}. \tag{XIX.35}$$

Аналогично (XIX.16) уравнения (XIX.35) решаются подстановкой:

$$\alpha = \epsilon_1 \operatorname{ch} \eta; \quad \gamma = \operatorname{sh} \eta; \quad \beta = \operatorname{sh} \psi; \quad \delta = \epsilon_2 \operatorname{ch} \psi, \tag{XIX.36}$$

где $\epsilon_i = \pm 1$, а η, ψ могут принимать любые значения на множестве действительных чисел $\mathbb{R}$. Подставляя эти выражения в уравнение (XIX.35) (б), получим:

$$\epsilon_1 \operatorname{ch} \eta \operatorname{sh} \psi - \epsilon_2 \operatorname{sh} \eta \operatorname{ch} \psi = 0 \Longrightarrow \operatorname{sh}(\eta - \psi) = 0.$$

Если $\epsilon_1 \epsilon_2 = +1$, последнее уравнение, как не трудно показать, имеет единственное решение: $\psi = \eta$. В противоположном случае $\epsilon_1 \epsilon_2 = -1$ это уравнение имеет также единственное решение $\psi = -\eta$. Таким образом, подставляя эти решения в (XIX.36), получим выражение для псевдоортогональной матрицы перехода псевдоевклидовой плоскости:

$$C = \begin{pmatrix} \pm \operatorname{ch} \eta & \operatorname{sh} \eta \\ \epsilon \operatorname{sh} \eta & \pm \epsilon \operatorname{ch} \eta \end{pmatrix}, \tag{XIX.37}$$

где $\epsilon = \pm 1$, причем $\epsilon = +1$ отвечают движения I-го рода, $\epsilon = -1$ - движения II-го рода. Выпишем окончательные формулы движения псевдоевклидовой плоскости:

$$\begin{aligned} x' &= \pm \operatorname{ch} \eta + y\varepsilon \operatorname{sh} \eta + x_0; \\ y' &= x \operatorname{sh} \eta + \pm y\varepsilon \operatorname{ch} \eta + y_0, \end{aligned} \tag{XIX.38}$$

где $\eta in(-\infty, +\infty)$. Формулы преобразования псевдоевклидовой плоскости (XIX.38) обычно называются *преобразованиями Лоренца - Пуанкаре* и играют важную роль в современной физике.

XIX.3 Движения трехмерного евклидова пространства

Рассмотрим теперь движения трехмерного евклидова пространства $\mathcal{E}_3$. Как это следует из (TXIX.1), порядок группы движений трехмерного евклидова пространства равен 6, — $\mathcal{D}_{3;6}$. Три параметра являются координатами вектора параллельного переноса $\overrightarrow{OO}'$, другие три параметра описываются упомянутыми ранее *углами Эйлера.*

Формулы движения

Представим движение евклидова пространства в виде композиции трех движений координатных плоскостей (без параллельного переноса) и последующего параллельного переноса. Сначала произведем движение $f_Z = \mathcal{D}_{1,6}$ координатной плоскости XOY:

$$\begin{aligned} x' &= x \cos \phi - y\varepsilon_1 \sin \phi; \\ y' &= x \sin \phi + y\varepsilon_1 \cos \phi; \\ z' &= z, \end{aligned} \tag{XIX.39}$$

где $\varepsilon_1 = \pm 1$ - индекс движения плоскости XOZ, ϕ- угол поворота этой плоскости вокруг оси OZ (первый угол Эйлера). Соответствующая матрица перехода равна:

$$C_Z = \begin{pmatrix} \cos \phi & -\varepsilon_1 \sin \phi & 0 \\ \sin \phi & \varepsilon_1 \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{XIX.40}$$

Совершим теперь поворот $f_{X'}$ с индексом движения $\varepsilon_2 = \pm 1$ на угол θ (второй угол Эйлера) плоскости $Y'OZ'$ вокруг новой оси OX':

$$\begin{aligned} x'' &= x'; \\ y'' &= y' \cos \theta - z'\varepsilon_2 \sin \theta; \\ z'' &= y' \sin \theta + z'\varepsilon_2 \cos \theta. \end{aligned} \tag{XIX.41}$$

Соответствующая матрица перехода равна:

$$C_X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\varepsilon_2 \sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \varepsilon_2 \cos \theta \end{pmatrix}. \tag{XIX.42}$$

Наконец, совершим третий поворот $f_{Z''}$ с индексом движения $\varepsilon_3 = \pm 1$ на угол ψ (третий угол Эйлера) плоскости $X''OY''$ вокруг новой оси OZ'':

$$\begin{aligned} x''' &= x''\cos\psi - y''\varepsilon_3\sin\psi; \\ y''' &= x''\sin\psi + y''\varepsilon_3\cos\psi; \\ z''' &= z''. \end{aligned} \tag{XIX.43}$$

Соответствующая матрица перехода равна:

$$C_{Z''} = \begin{pmatrix} \cos\psi & -\varepsilon_3\sin\psi & 0 \\ \sin\psi & \varepsilon_3\cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{XIX.44}$$

Композиция этих движений и параллельного переноса описывается движением с индексом $\varepsilon = \varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3$, вектором параллельного переноса $\overrightarrow{OO}' = (x_0, y_0, z_0)$ и ортогональной матрицей перехода:

$$C = C_{Z''}C_X C_Z = \tag{XIX.45}$$

$$\begin{pmatrix} \cos\psi\cos\phi - \varepsilon_3\sin\psi\cos\theta\sin\phi & -\varepsilon_1\cos\psi\sin\phi - \varepsilon_3\varepsilon_1\sin\psi\cos\theta\cos\phi & \varepsilon_3\varepsilon_2\sin\psi\sin\theta \\ \sin\psi\cos\phi + \varepsilon_3\cos\psi\cos\theta\sin\phi & -\varepsilon_1\sin\psi\sin\phi + \varepsilon_3\varepsilon_1\cos\psi\cos\theta\cos\phi & -\varepsilon_3\varepsilon_2\cos\psi\sin\theta \\ \sin\theta\sin\phi & \varepsilon_1\sin\theta\cos\phi & \varepsilon_2\cos\theta \end{pmatrix},$$

причем

$$\det C = \varepsilon = \varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3. \tag{XIX.46}$$

В результате получаем общие формулы движения трехмерного евклидова пространства[3].

Классификация движений трехмерного евклидова пространства

Пусть дана плоскость $\Pi \subset \mathcal{E}_3$.

Определение OXIX.6. *Две точки M и M' называются симметричными относительно плоскости Π, если плоскость Π перпендикулярна отрезку $[MM']$ и проходит через его середину. Если же $M \in \Pi$, то говорят, что эта точка симметрична самой себе относительно Π.*

Определение OXIX.7. *Отображение $f : \mathcal{E}_3 \longrightarrow \mathcal{E}_3$ называется симметрией относительно плоскости Π (или отражением от плоскости Π), если точки M и $M' = f(M)$ симметричны относительно плоскости $\Pi, \forall M \in \mathcal{E}_3$.*

Рассмотрим такое изображение f и примем плоскость Π в качестве плоскости (xOy) ортонормированной системы координат $R = \{O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$.

Если x, y, z - координаты точки M в репере $\Re$, то точка $M' = f(M)$ имеет координаты $x, y, -z$ в том же репере. Возьмем еще какие-либо две точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M'_1(x_1, y_1, -z_1)$, симметричные относительно плоскости Π. Тогда, как легко подсчитать, $\rho(M, M_1) = \rho(M', M'_1)$. Отсюда следует,что f - движение. Как известно, репер $\Re$ можно определить упорядоченной четверкой точек
$\{O, A_1, A_2, A_3\}$. В симметрии относительно плоскости Π точки A_1, A_2 инвариантны, а точка $A_3(0,0,1)$ перейдет в точку $A'_3(0,0,-1)$. Следовательно, f переводит репер $\Re = \{O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ в репер $\Re' = \{O, \vec{i}, \vec{j}, -\vec{k}\}$. Здесь определитель матрицы C перехода от базиса $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ к базису $\{\vec{i}, \vec{j}, -\vec{k}\}$ $\det(C) = -1$, и поэтому симметрия относительно плоскости есть движение II рода.

Рассмотрим пару одинаково ориентированных ортонормированных реперов $\Re = \{O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ и $\Re' = \{O, \vec{i}', \vec{j}', \vec{k}\}$. Существует движение которое переводит репер $\Re$ в $\Re'$. Это движение называется *поворотом пространства вокруг оси Oz* на угол $\varphi = (\overrightarrow{i}\ \overrightarrow{i'})$.

Так как реперы $\Re$ и $\Re'$ одинаковы ориентированы, то поворот — движение I рода. Ясно, что любая точка оси поворота инвариантна в этом повороте.

[3] См. формулы, приведенные в курсе лекций I-го семестра [1].

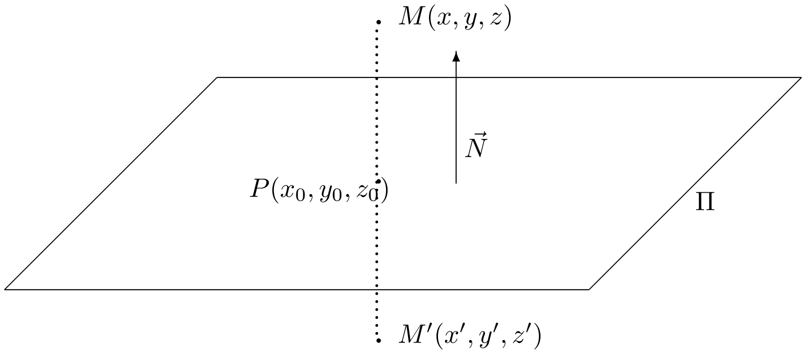


Рис.XIX.56. *Симметрия относительно плоскости* Π

Угол поворота φ считают ориентированным, если $\varphi \neq \pi$. Именно, угол φ ориентирован положительно (отрицательно), если тройка векторов $\{\vec{i},\vec{i}',\vec{k}\}$ ориентирована положительно (отрицательно). Если угол поворота $\varphi = \pi$, то каждая точка M переходит в симметричную ей относительно прямой (Oz) точку M'. Это значит, что если $M \in (Oz)$, то $M = M'$, если же $M \notin (Oz)$, то прямая (Oz) перпендикулярна к отрезку $[MM']$ и делит его пополам. Такое движение пространства называется *симметрией относительно прямой* (Oz) (это частный случай поворота, когда угол поворота $\varphi = \pi$).

Произведение поворота на перенос, вектор которого параллелен оси поворота, называется *винтовым движением*. Поворот и перенос — движения I рода, значит и винтовое движение — движение I рода.Произведение поворота на отражение от плоскости Π, перпендикулярной оси поворота, называется *поворотным отражением*. Очевидно, это движение II рода. Ось s поворота, угол φ поворота, плоскость Π и точка $O = s \cap \Pi$ называются соответственно *осью, углом, плоскостью и центром поворотного отражения*.

Рассмотрим частный случай поворотного отражения, когда $\varphi = \pi$. Легко заметить, что в этом движении каждая точка M переходит в симметричную ей относительно точки O точку M'. Движение пространства, обладающее этим свойством, называется *центральной симметрией* (или отражением от точки).

Мы рассмотрели следующие частные случаи движений пространства $\mathcal{E}_3$:

Классификация движений $\mathcal{E}_3$

Движения I рода	Движения II рода
перенос	симметрия относительно плоскости
поворот	поворотное отражение
винтовое движение	скользящее отражение

Заметим еще, что тождественное преобразование пространства можно считать как частным случаем переноса (вектор переноса — нулевой), так и частным случаем поворота (угол поворота $\varphi = 0$).

Можно доказать, что каждое движение пространства $\mathcal{E}_3$ является одним из движений, указанных в таблице. Следовательно, в этой таблице дана классификация движений пространства $\mathcal{E}_3$.

Теорема TXIX.7. *Пусть $s \perp \Pi$ и $O = s \bigcap \Pi$. Произведение поворота на угол φ вокруг оси s на отражение от точки O есть поворотное отражение на угол $\varphi - \pi$. Осью, плоскостью и центром этого поворотного отражения служат соответственно s, Π и O.*

Доказательство: $\Big\langle\!\Big\langle$ Пусть f - поворот вокруг оси s на угол φ, g - отражение от точки O, f_1 — поворот вокруг оси s на угол $\varphi-\pi$, g_1 — симметрия относительно плоскости П.

Для произвольной точки M пространства находим:

$$f(M)=M', \quad g(M')=M'', \quad f_1(M)=M_0.$$

Так как $f_1=cf$, где c — симметрия относительно прямой s, то точки M' и M_0 симметричны относительно оси s. Следовательно, точки M_0 и M'' симметричны относительно плоскости П: $g_1(M_0)=M''$.

Итак, $(gf)(M)=(g_1f_1)(M)$, $\forall M\in\mathcal{E}_3$. Поэтому $gf=g_1f_1$. Но g_1f_1 — поворотное отражение (с осью s, плоскостью П и центром O) на угол $\varphi-\pi$. $\Big\rangle\!\Big\rangle$

XIX.3.1 Пример исследования движения с помощью пакета Maple

Пример ПXIX.1. *Выяснить, являются ли формулы преобразования:*

$$\left.\begin{array}{rcl} x &=& -\frac{1}{2}x'+\frac{1}{\sqrt{2}}y'-\frac{1}{2}z'+2; \\ y &=& -\frac{1}{2}x'-\frac{1}{\sqrt{2}}y'-\frac{1}{2}z'-2; \\ z &=& \frac{1}{2}x'-\frac{1}{2}z'+3 \end{array}\right\}$$

и, если являются, определить род движения.

Решение. Будем решать задачу с помощью пакета символьной математики Maple, используя его библиотеку **linalg**:

```
> with(linalg):
```

```
Warning, the protected names norm and trace have been redefined and
unprotected
```

Зададим матрицу преобразования A с помощью команды array([[],[],[]]), где во внутренних скобках задаются элементы матричной строки:

```
> A:=array([[-1/2,1/sqrt(2),-1/2],
> [-1/2,-1/sqrt(2),-1/2],[1/sqrt(2),0,-1/sqrt(2)]]);
```

$$A:=\begin{bmatrix} \frac{-1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{-1}{2} \\ \frac{-1}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{-1}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$$

Зададим также матрицу-стобец X1=X', чтобы прверить правильность формул преобразования:

```
> X1:=array([[x1],[y1],[z1]]);
```

$$X1:=\begin{bmatrix} x1 \\ y1 \\ z1 \end{bmatrix}$$

Осуществим умножение согласно формуле: X=A X' с помощью команды multiply(A,B):

```
> X:=multiply(A,X1);
```

$$X:=\begin{bmatrix} -\frac{x1}{2}+\frac{\sqrt{2}\,y1}{2}-\frac{z1}{2} \\ -\frac{x1}{2}-\frac{\sqrt{2}\,y1}{2}-\frac{z1}{2} \\ \frac{\sqrt{2}\,x1}{2}-\frac{\sqrt{2}\,z1}{2} \end{bmatrix}$$

Так, например, для извлечения значения y из этой матрицы запишем
(заметим, что в западной литературе первый индекс - индекс строки, вто рой - столбца):

```
> y:=X[2,1];
```

$$y := -\frac{x1}{2} - \frac{\sqrt{2}\,y1}{2} - \frac{z1}{2}$$

- таким образом, матрица A составлена нами правильно.

Вычислим определитель этой матрицы, чтобы убедиться в том, что A - мат рица преобразования:

```
> det(A);
```

$$-1$$

Определитель матрицы отличен от нуля, значит - это матрица преобразов ания.
Для того, чтобы формулы преобразования описывали движение, необходимо и достаточно, чтобы матрица A являлась ортогональной, т.е., чтобы произведение матр ицы на свое транспонированное значение давало бы единичную матрицу. Вычислим снач ала транспонированную матрицу с помощью команды inverse(A):

```
> A_T:=inverse(A);
```

$$A\_T := \begin{bmatrix} \frac{-1}{2} & \frac{-1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{-1}{2} & \frac{-1}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$$

и перемножим полученные матрицы:

```
> multiply(A,A_T);
```

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- в результате получили единичную матрицу.

XIX.4 Группа подобий

XIX.4.1 Определение подобия

Определение OXIX.8. *Подобием пространства $\mathcal{E}_n$ называется преобразование f этого пространства, обладающее следующим свойством: существует число $k > 0$ (коэффициент подобия), такое, что*

$$\rho(f(A), f(B)) = k\rho(A, B), \quad \forall A, B \in \mathcal{E}_n.$$

Очевидно, движение является частным случаем подобия ($k = 1$).

XIX.4.2 Гомотетии

Пусть даны две точки $S \in \mathcal{E}_n$ и число $h \in \mathbf{R}$, $h \neq 0$.

Определение OXIX.9. *Гомотетией с центром S и коэффициентом h называется отображение $g : \mathcal{E}_n \longrightarrow \mathcal{E}_n$ по закону*

$$g(M) = M' \iff \overrightarrow{SM'} = h\overrightarrow{SM}.$$

Отсюда следует, что $g(S) = S$ (S — неподвижная точка), и если $M \neq S$, то точка M' лежит на прямой (SM). Возьмем произвольные точки M и N и пусть

$$M' = g(M), \quad N' = g(N).$$

Тогда

$$\overrightarrow{SM'} = h\overrightarrow{SM}, \quad \overrightarrow{SN'} = h\overrightarrow{SN} \Rightarrow \overrightarrow{M'N'} = h\overrightarrow{MN}. \qquad \text{(XIX.47)}$$

Возьмем еще одну точку L на прямой (MN). Для точки $L' = f(L)$ имеем:

$$\overrightarrow{M'L'} = h\overrightarrow{ML}. \qquad \text{(XIX.48)}$$

Пусть точки M и N различны. Тогда

$$\overrightarrow{ML} = \lambda\overrightarrow{MN}, \qquad \text{(XIX.49)}$$

$$(XIX.47), (XIX.48) \Rightarrow \overrightarrow{M'L'} = \lambda\overrightarrow{M'N'}, \qquad \text{(XIX.50)}$$

(XIX.49), (XIX.50) $\Rightarrow$ гомотетия сохраняет отношения трех точек прямой. Поэтому в гомотетии отрезок переходит в отрезок, луч — в луч, прямая — в прямую, полуплоскость — в полуплоскость.

Если $\overrightarrow{MN}$ — направляющий вектор прямой a, то $\overrightarrow{M'N'}$ — направляющий вектор прямой $a' = f(a)$.

$$(XIX.47) \Rightarrow a'||a.$$

Следовательно, гомотетия переводит прямую в параллельную ей прямую. Аналогично убеждаемся, что в гомотетии каждая k-плоскость переходит в параллельную ей k-плоскость.

В гомотетии угол переходит в конгруэнтный ему угол. Это утверждение очевидно, если стороны угла лежат на одной прямой. Поэтому рассмотрим углов $\angle AOB$, стороны которого не лежат на одной прямой. Обозначим через Π плоскость, в которой лежит этот угол. В гомотетии g плоскость Π перейдет в плоскость $\Pi'||\Pi$, луч $[OA) \subset \Pi$ перейдет в луч $[O'A') \subset \Pi'$, а луч $[OB) \subset \Pi$ — в луч $[O'B') \subset \Pi'$. Если $\angle AOB$ выпуклый, то он является пересечением полуплоскостей $[(OA), B)$ и $[(OB), A)$:

$$\angle AOB = [(OA), B) \bigcap [(OB), A).$$

В гомотетии g эти полуплоскости перейдут соответственно в полуплоскости $[(O'A'), B')$ и $[(O'B'), A')$ и, значит, угол $\angle AOB$ перейдет в угол

$$\angle A'O'B' = [(O'A'), B') \bigcap [(O'B'), A').$$

Соответствующие стороны углов $\angle AOB$ и $\angle A'O'B'$ одинаково направлены при $h < 0$. При параллельном переносе пространства на вектор $\overrightarrow{OO'}$ эти углы совпадут в первом случае и окажутся вертикальными во втором случае. Следовательно, эти углы конгруэнтны.

Так как $g(\Pi) = \Pi'$ и $g(\angle AOB) = \angle A'O'B'$, то угол 1, дополняющий выпуклый угол $\angle AOB$ до полного угла, переходит в гомотетии g в угол $1'$, дополняющий выпуклый угол $\angle A'O'B'$ до полного угла:

$$\angle AOB \cong \angle A'O'B' \Rightarrow \angle 1 \cong \angle 1'.$$

Значит, и невыпуклый угол гомотетия переводит в конгруэнтный ему угол. Учитывая равенство (XIX.47), находим:

$$|\overrightarrow{M'N'}| = |h| \cdot |\overrightarrow{MN}|, \quad \forall M, N \in \mathcal{E}_n.$$

Следовательно, гомотетия является подобием.

Ясно, что гомотетия с центром S и коэффициентом $h = -1$ является центральной симметрией (относительно точки S).

XIX.4.3 Теорема о разложении подобия

Теорема TXIX.8. *Всякое подобие является произведением гомотетии и движения.*

Доказательство: $\Big\langle\Big\langle$ Пусть f — подобие с коэффициентом $k > 0$ в пространстве $\mathcal{E}_n$. Возьмем какую - либо точку S и пусть g — гомотетия с центром S и коэффициентом k.

Если M, N — произвольные точки пространства $\mathcal{E}_n$ и $M' = f(M)$, $N' = f(N)$, то

$$|\overrightarrow{M'N'}| = k|\overrightarrow{MN}|, \tag{XIX.51}$$

Пусть $g(M) = M''$, $g(N) = N''$. Тогда

$$|\overrightarrow{M''N''}| = k|\overrightarrow{MN}| \quad (k > 0). \tag{XIX.52}$$

$$(XIX.51), (XIX.52) \Rightarrow |\overrightarrow{M''N''}| = |\overrightarrow{M'N'}|. \tag{XIX.53}$$

Преобразование $d = f \cdot g^{-1}$ переводит каждую точку M'' в такую точку M', что имеет место равенство (XIX.53), т.е. преобразование d сохраняет расстояние между любыми двумя точками. Следовательно, $d = f \cdot g^{-1}$ — движение. Отсюда $f = d \cdot g$, и теорема доказана. $\Big\rangle\Big\rangle$

Следствие CXIX.1. *В подобии сохраняется отношение трех точек; следовательно, отрезок переходит в отрезок, луч — в луч.*

Следствие CXIX.2. *В подобии угол переходит в конгруэнтный ему угол.*

Следствие CXIX.3. *В подобии k - плоскость переходит в k - плоскость.*

XIX.4.4 Подобие фигур

Пусть дано подобие с коэффициентом k. Возьмем какой - либо ортонормированный репер $\Re = \{O, \vec{e}_i\}$. По доказанному $i = d \cdot g$, где g — гомотетия с центром O и коэффициентом k, а d — движение. Произвольная точка $M(x^i)$ перейдет в гомотетии g в такую точку $M''(\tilde{x}^i)$,что $\overrightarrow{OM''} = k\overrightarrow{OM}$. Следовательно,

$$\tilde{x}^i = k \cdot x^i. \tag{XIX.54}$$

Движение d переводит точку M'' в точку $M' = d(M'') = d \cdot g(M) = f(M)$. Если y^i — координата точки M'', то, как известно,

$$y^i = a^i_j \tilde{x}^i + a^i, \tag{XIX.55}$$

где $||a^i_j||$ — ортогональная матрица.

$$(XIX.54), (XIX.55) \Rightarrow y^i = ka^i_j x^j + a^i. \tag{XIX.56}$$

Так выражаются в ортонормированном репере $\Re$ координаты y^i точки $M' = f(M)$ через координаты x^i точки M в подобии f.

XIX.4.5 Теоретико-групповой подход к геометрии

Выше мы определили понятие аффинного и евклидова n-мерных пространств и убедились в том, какую важную роль играют группы преобразований этих пространств. Далее будут рассмотрены и некоторые другие пространства, изучаемые в геометрии. Что является предметом исследования геометрии? Пусть даны некоторое $\mathcal{S}$ и группа преобразований G этого пространства. Задача геометрии — изучить свойства фигур пространства $\mathcal{S}$, инвариантные относительно группы G (т. е. такие свойства, которые сохраняются при любых преобразованиях из G). Такой взгляд на предмет геометрии (или, как говорят, групповой подход к геометрии) был впервые сформулирован немецким математиком Феликсом Клейном в его работе "Сравнительное обозрение новейших геометрических исследований" ("Эрлангенская программа"), изданной в 1872 г.

Групповой подход к геометрии способствовал бурному ее развитию. В последние годы методы геометрии интенсивно проникали в различные разделы современной физики и способствовали ее "геометризации". Особенно это касается теории гравитации и современной квантовой теории поля. Согласно современным концепциям теоретической физики в основу той или иной модели квантовой теории поля, т.е., теории элементарных частиц, кладется определенная группа симметрий, с которой самым тесным образом оказываются связанными как законы сохранения [4], так и сама алгебра взаимодействий элементарных частиц.

[4]Законы сохранения при этом устанавливаются на основе универсального закона - теоремы Нётер.

Глава XX

Приведение квадрик к каноническому виду с помощью движений

XX.1 Самосопряженный оператор и его матрица

Определение OXX.1. *Оператор $A(\vec{x}) \in E_n$ называется изометрическим, если он сохраняет скалярное произведение векторов, т.е.* $\Big(A(\vec{x}) \cdot A(\vec{y})\Big) = (\vec{x}\,\vec{y}) \quad \forall \vec{x}, \vec{y} \in E_n$.

Другими словами, изометричный оператор сохраняет метрику пространства и соответственно все метрические свойства пространства E_n.

Пусть $A = (\alpha_k^i)$ — матрица изометрического оператора в произвольном базисе $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n\}$. Согласно определению имеем $\Big(A(\vec{e}_k) \cdot A(\vec{e}_m)\Big) = (\overset{\to}{e_k}\,\overset{\to}{e_m})$. Рассмотрим подробнее левую часть этого равенства и учтем, что $(\overset{\to}{e_k}\,\overset{\to}{e_m}) = g_{km}$.

$$\Big(A(\vec{e}_k) \cdot A(\vec{e}_m)\Big) = \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_k^i \vec{e}_i \cdot \sum_{p=1}^{n} \alpha_m^p \vec{e}_p\right) = \sum_{i,p=1}^{n} \alpha_k^i \alpha_m^p (\overset{\to}{e_i}\,\overset{\to}{e_p}) = \sum_{i,p=1}^{n} \alpha_k^i g_{ip} \alpha_m^p,$$

т.е. элементы матрицы изометрического оператора и коэффициенты метрической формы связаны соотношением

$$\sum_{i,p=1}^{n} \alpha_k^i g_{ip} \alpha_m^p = g_{km} \tag{XX.1}$$

или в матричном представлении:

$$A^T G A = G, \tag{XX.2}$$

где через $G = (g_{km})$ обозначена матрица метрической билинейной формы.[1]

Если в E_n выбран ортонормированный базис $\{\vec{i}_1, \vec{i}_2, \ldots, \vec{i}_n\}$, то в нем $G = E$, и (XX.2) переходит в соотношение:

$$A^T A = E. \tag{XX.3}$$

Это означает, что:

> У всякого изометрического оператора его матрица невырождена и в ортонормированном базисе является ортогональной.

Обратно, пусть в ортонормированном базисе матрица A некоторого оператора $A(\vec{x})$ является ортогональной. Тогда A — изометричный оператор.

[1] Часто матрица G называется матрицей Грамма.

В самом деле,

$$\Big(A(\vec{x})\cdot A(\vec{y})\Big)=\Big(A(x^k\vec{i}_k)\cdot A(y^m\vec{i}_m)\Big)=\sum_{i,m=1}^{n}x^ky^m\Big(A(\vec{i}_k)\cdot A(\vec{i}_m)\Big)=$$

$$=\sum_{k,m=1}^{n}x^ky^m\Big(\sum_{p=1}^{n}\alpha^p_k\vec{i}_p\cdot\sum_{q=1}^{n}\alpha^q_m\vec{i}_q\Big)=$$

$$=\sum_{k,m=1}^{n}x^ky^m\left(\sum_{p,q=1}^{n}\alpha^p_k\alpha^q_m\delta_{pq}\right)=\sum_{k,m=1}^{n}x^ky^m\delta_{km}=(\vec{x}\,\vec{y}).$$

Определение ОXX.2. *Оператор $B(\vec{x})$ называется сопряженным к оператору $A(\vec{x})$ относительно операции скалярного произведения, если* $\Big(B(\vec{x})\cdot\vec{y}\Big)=\Big(\vec{x}\cdot A(\vec{y})\Big)\,\forall\vec{x},\vec{y}\in E_n$

Пусть $A=(\alpha^i_k)$ — заданная матрица оператора $A(\vec{x})$ в произвольном базисе $\{\vec{e}_1,\vec{e}_2,\ldots,\vec{e}_n\}$. Какова матрица оператора $B(\vec{x})$ в этом базисе? Пусть $B=(\beta^i_k)$, где β^i_k — пока неизвестные числа. Из определения следует: $\Big(B(\vec{e}_k)\cdot\vec{e}_m\Big)=\Big(\vec{e}_k\cdot A(\vec{e}_m)\Big)$ или в подробной записи

$$\Big(\sum_{p=1}^{n}\beta^p_k\vec{e}_p\cdot\vec{e}_m\Big)=\Big(\vec{e}_k\cdot\sum_{q=1}^{n}{}^q_m\vec{e}_q\Big)$$

т.е.

$$\sum_{p=1}^{n}\beta^p_kg_{pm}=\sum_{q=1}^{n}g_{kq}\alpha^q_m.\tag{XX.4}$$

Последнее равенство в матричном виде записывается следующим образом (учтем, что слева стоят элементы с индексами k,m, а справа с индексами m,k):

$$GB=(GA)^T.\tag{XX.5}$$

Но при транспонировании произведения матриц необходимо перемножить транспонированные матрицы в обратном порядке, т.е. $(GA)^T=A^TG^T$. Поскольку для метрической билинейной формы $G^T=G$ (форма симметричная), то (XX.5) эквивалентно соотношению

$$B=G^{-1}A^TG.\tag{XX.6}$$

Условие (XX.6) и есть то условие которому удовлетворяет матрица сопряженного оператора в произвольном базисе.

Если базис ортонормированный, то $G=E$, $G^{-1}=E$ и из (XX.6) следует что, $B=A^T$. Итак:

> Если в ортонормированном базисе A — матрица некоторого оператора $A(\vec{x})$, то матрица A^T определяет сопряженный ему оператор.

Сопряженный к A оператор обычно обозначают символом $A^c(\vec{x})$ (или $A^+(\vec{x})$), и, следовательно, в ортонормированном базисе его матрица $A^c=A^T$.

Определение ОXX.3. *Оператор $A(\vec{x})$ называется самосопряженным (симметрическим), если $A(\vec{x})=A^c(\vec{x})$, т.е.* $\Big(A(\vec{x})\cdot\vec{y}\Big)=\Big(\vec{x}\cdot A(\vec{y})\Big)$, $\forall\vec{x},\vec{y}\in E_n$.

Согласно (XX.6) матрица A самосопряженного оператора в произвольном базисе удовлетворяет условию

$$A=G^{-1}A^TG,\tag{XX.7}$$

а в ортонормированном базисе, когда $G=E$, имеем

$$A=A^T\Rightarrow\alpha^i_k=\alpha^k_i.\tag{XX.8}$$

XX.1.1 Теорема о соответствии самосопряженного оператора и симметричной матрицы

Таким образом:

> У всякого самосопряженного оператора в ортонормированном базисе матрица необходимо симметрическая (отсюда и еще одно название у самосопряженного оператора — симметрический оператор).

Наоборот, пусть в ортонормированном базисе матрица некоторого оператора $A(\vec{x})$ симметрическая, т.е. $\alpha_k^m = \alpha_m^k$. Покажем, что $A(\vec{x})$ — самосопряженный оператор.

В самом деле,

$$A(\vec{x}) = \left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k^1 x^k\right) \vec{i}_1 + \ldots + \left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k^n x^k\right) \vec{i}_n\,,$$

$$A(\vec{y}) = \left(\sum_{m=1}^{n} \alpha_m^1 y^m\right) \vec{i}_1 + \left(\sum_{m=1}^{n} \alpha_m^2 y^m\right) \vec{i}_2 + \ldots + \left(\sum_{m=1}^{n} \alpha_m^n y^m\right) \vec{i}_n\,.$$

Тогда

$$\Big(A(\vec{x}) \cdot \vec{y} \Big) = \sum_{m=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k^m x^k\right) y^m = \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{m=1}^{n} \alpha_m^k y^m\right) x^k = \Big(\vec{x} \cdot A(\vec{y}) \Big).$$

> Между множеством всех симметричных матриц и множеством самосопряженных операторов существует взаимно-однозначное соответствие.

Но каждая симметрическая матрица однозначно определяет симметричную билинейную форму и соответствующую квадратичную форму. Установим связь между самосопряженными операторами и симметричными билинейными формами (эквивалентными квадратичными формами).

Пусть $A(\vec{x})$ — самосопряженный оператор, $A = (\alpha_k^i)$ — его матрица в ортонормированном базисе. Введем обозначение $\tilde{\alpha}_{km} = \alpha_m^k$ и построим симметричную билинейную форму

$$\tilde{A}(\vec{x}, \vec{y}) = \sum_{k,m=1}^{n} \tilde{\alpha}_{km} x^k y^m$$

($\tilde{\alpha}_{km} = \tilde{\alpha}_{mk}$ из-за симметричности матрицы $A = (\alpha_m^k)$). Что она собой представляет? Для ответа на этот вопрос сначала подсчитаем скалярное произведение $\Big(\vec{x} \cdot A(\vec{y}) \Big)$. Имеем:

$$\Big(\vec{x} \cdot A(\vec{y}) \Big) = \sum_{k=1}^{n} x^k \left(\sum_{m=1}^{n} \alpha_m^k y^m\right) = \sum_{k,m=1}^{n} \tilde{\alpha}_{km} x^k y^m = \tilde{A}(\vec{x}, \vec{y}).$$

Таким образом мы доказали, что *каждому самосопряженному оператору однозначно сопоставляется симметричная билинейная форма, которая представляет собой скалярное произведение вектора $\vec{x}$ и образа вектора $\vec{y}$ при самосопряженном эндоморфизме $A(\vec{x})$.*

Отметим, что из-за самосопряженности $\Big(\vec{x} \cdot A(\vec{y}) \Big) = \Big(A(\vec{x}) \cdot \vec{y} \Big)$, и поэтому симметричную билинейную форму $\tilde{A}(\vec{x}, \vec{y})$ можно задать и таким скалярным произведением $\Big(A(\vec{x}) \cdot \vec{y} \Big) = \tilde{A}(\vec{x}, \vec{y})$. Докажем сейчас обратное, что *любой симметрической билинейной форме можно одно сопоставить самосопряженный оператор.* **Доказательство:** $\langle\langle$ Действительно, пусть $B(\vec{x}, \vec{y}) = \sum\limits_{k,m=1}^{n} \beta_{km} x^k y^m$ — симметричная билинейная форма ($\beta_{km} = \beta_{mk}$), заданная в ортонормированном базисе. Введем в рассмотрение элементы матрицы $A = (\alpha_m^k)$, определив их равенством $\alpha_m^k = \beta_{km}$. Из-за симметричности билинейной формы получим, что $A = A^T$. Но в таком случае матрица A определяет по свойству, доказанному нами выше, самосопряженный оператор. Итак: *между множеством самосопряженных операторов и симметрическими билинейными формами (квадратичными формами) существует взаимно-однозначное соответствие.* $\rangle\rangle$

Полученный результат имеет очень важное значение при решении вопроса о приведении ортогональными преобразованиями к каноническому виду квадратичных форм (или что то же самое — симметричных билинейных форм).

Пусть C — матрица перехода от одного ортонормированного базиса к другому ортонормированному базису, т.е. C — ортогональная матрица, и пусть $A = (\alpha_{km})$ — матрица квадратичной формы ($\alpha_{km} = \alpha_{mk}$). Тогда согласно общей теории билинейных форм матрица A преобразуется по закону $A' = C^T AC$. Но в ортонормированном базисе матрица A определяет и самосопряженный оператор $A(\vec{x})$. Согласно общей теории линейных операторов закон преобразования для матриц операторов таков:

$$A' = C^{-1}AC.$$

Но для ортогональных матриц $C^{-1} = C^T$, и, следовательно, *закон преобразования матрицы самосопряженного оператора при переходе к новому ортонормированному базису совпадает с законом преобразования матрицы квадратичной формы.* Из этого факта следует вывод:

> Если удастся ортогональными преобразованиями привести к диагональному виду матрицу самосопряженного оператора, то тем самым будет указан канонический вид квадратичной формы, ибо матрица квадратичной формы будет в новом базисе иметь тот же диагональный вид, что и матрица оператора.

XX.1.2 Теоремы о собственных векторах и собственных значениях оператора

Нам известно, что наиболее простой вид матрица оператора имеет в базисе, где векторы базиса являются собственными векторами оператора. Поэтому необходимо выяснить все свойства собственных значений и собственных векторов самосопряженного оператора.

Теорема TXX.1. *Все собственные значения самосопряженного оператора вещественные числа.*

Доказательство: $\langle\langle$ Пусть λ_0 - корень характеристического уравнения $\det(\alpha^i_k - \lambda\delta^i_k) = 0$, где (α^i_k) — матрица самосопряженного оператора в ортонормированном базисе (для доказательства теоремы достаточно ограничиться рассмотрением ортонормированного базиса, так как собственные значения оператора — инварианты преобразования базиса). Из системы алгебраических уравнений

$$\sum_{q=1}^{n} \alpha^p_q x^q = \lambda_0 x^p \quad (p = \overline{1,n}) \tag{XX.9}$$

ограничиваются координаты x^q собственных векторов, отвечающих собственному значению λ_0. При этом мы не знаем пока, при этом мы не знаем пока, вещественные или комплексные числа $\lambda_0, x^1, \dots, x^n$. Будем предполагать, что имеет место общий случай — эти числа комплексные, потому что вещественные числа есть частный случай комплексных. Умножим равенство (XX.9) на комплексно - сопряженные числа $\overline{x}^p$ и просуммируем по p от 1 до n. Имеем

$$\sum_{p,q=1}^{n} \alpha^p_q \overline{x}^p x^q = \lambda_0 \sum_{p=1}^{n} x^p \overline{x}^p. \tag{XX.10}$$

Выражение $\sum\limits_{p=1}^{n} x^p\overline{x}^p$ — вещественное число, так как каждое слагаемое $x^p\overline{x}^p$ — вещественное число. Если мы покажем, что и левая часть равенства (XX.10) вещественна, то λ_0 - вещественное число и теорема будет доказана.

В левой части равенства (XX.10) слагаемые, для которых $p = q$ являются вещественными числами. Те члены, где $p \neq q$, будем рассматривать попарно, объединяя, например, члены при $p = s, q = t$ и при $p = t, q = s$ (s, t — фиксированные индексы). Тогда такая пара слагаемых представляет собой

$$(\alpha_t^s x^t \overline{x}^s + \alpha_s^t x^s \overline{x}^t).$$

Но в силу самосопряженности оператора $\alpha_s^t = \alpha_t^s$, и, следовательно, рассматриваемая пара слагаемых равна

$$\alpha_t^s (x^t \overline{x}^s + x^s \overline{x}^t) = \alpha_t^s (x^t \overline{x}^s + \overline{\overline{x}^s x^t}).$$

В скобках стоит сумма комплексного числа и сопряженного ему комплексного числа, т.е. скобка есть вещественное число. Итак, левая часть равенства (XX.10) — вещественное число. Теорема доказана. $\rangle\rangle$

Теорема ТXX.2. *Собственные векторы самосопряженного оператора, отвечающие различным собственным значениям, ортогональны между собой.*

Доказательство: $\langle\langle$ Пусть $A(\vec{x}) = \lambda\vec{x}$, $A(\vec{y}) = \mu\vec{y}\,(\lambda \neq \mu)$. Тогда $\Big(A(\vec{x}) \cdot \vec{y}\Big) = \lambda(\vec{x}\,\vec{y})$ и $\Big(\vec{x} \cdot A(\vec{y})\Big) = \mu(\vec{x}\,\vec{y})$. Но оператора A самосопряженный, и, следовательно, $\Big(A(\vec{x}) \cdot \vec{y}\Big) = \Big(\vec{x} \cdot A(\vec{y})\Big)$. Это означает,что $\lambda(\vec{x}\,\vec{y}) = \mu(\vec{x}\,\vec{y})$ или $(\lambda - \mu)(\vec{x}\,\vec{y}) = 0$, откуда следует, что $(\vec{x}\,\vec{y}) = 0$. Собственные векторы ортогональны между собой. $\rangle\rangle$

Доказанные теоремы позволяют нам перейти к вопросу о каноническом виде матрицы самосопряженного оператора и соответственно каноническом виде квадратичной формы, полученном с помощью ортогональных преобразований.

XX.1.3 Нахождение собственных векторов и собственных значений оператора с помощью Maple

Пример ПXX.1. *Найти собственные векторы и собственные значения самосопряженного оператора A, представленного в ортонормированном базисе симметрической матрицей A:*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 3 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Решение.

```
> with(linalg):
```

Зададим симметрическую матрицу оператора A с помощью команды array([[],[],[]]),

где во внутренних скобках задаются элементы матричной строки:

```
> A:=array([[3/2,-sqrt(2),-3/2],
> [-sqrt(2),0,-sqrt(2)],[-3/2,-sqrt(2),3/2]]);
```

$$A := \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & -\sqrt{2} & \frac{-3}{2} \\ -\sqrt{2} & 0 & -\sqrt{2} \\ \frac{-3}{2} & -\sqrt{2} & \frac{3}{2} \end{bmatrix}$$

Собственные векторы матрицы A находятся с помощью команды eigenvectors(A)

```
> V:=[eigenvectors(A)];
```

$$V := [[-2,\ 1,\ \{\left[\frac{\sqrt{2}}{2},\ 1,\ \frac{\sqrt{2}}{2}\right]\}],\ [3,\ 1,\ \{[-1,\ 0,\ 1]\}],\ [2,\ 1,\ \{\left[-\frac{\sqrt{2}}{2},\ 1,\ -\frac{\sqrt{2}}{2}\right]\}]]$$

Полученная запись расшифровывается следующим образом:

Первый собственный вектор, назовем его $u_1 = [\frac{\sqrt{2}}{2},\ 1,\ \frac{\sqrt{2}}{2}]$, соответствующее

ему собственное значение $\lambda_1 = -2$ имеет кратность 1; второй собственный

вектор: $u_2 = [-1,\ 0,\ 1]$ имеет собственное значение $\lambda_2 = 3$ кратности 1,

третий собственный вектор: $u_3 = \left[-\frac{\sqrt{2}}{2},\ 1,\ -\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$ имеет собственное значение

$\lambda_3 = 2$
кратности 1:

```
> u[1]:=op(V[1,3]); u[2]:=op(V[2,3]);
> u[3]:=op(V[3,3]);
```

$$u_1 := \left[\frac{\sqrt{2}}{2},\ 1,\ \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$$

$$u_2 := [-1,\ 0,\ 1]$$

$$u_3 := \left[-\frac{\sqrt{2}}{2},\ 1,\ -\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$$

По теории эти векторы должны быть взаимно ортогональны, проверяем их

ортогональность с помощью команды innerprod(A,B)- скалярного (внутреннего)

произведения:

```
> innerprod(u[1],u[2]);
> innerprod(u[1],u[3]);
> innerprod(u[2],u[3]);
```

$$0$$
$$0$$
$$0$$

- таким образом, все собственные векторы взаимно ортногональны.

XX.1.4 Ортогонализация системы линейно - независимых векторов

Взаимно-однозначное соответствие между симметричными билинейными формами и самосопряженными операторами в E_n, установленное в предыдущем разделе, позволяет решить один из наиболее важных для физических приложений вопросов о приведении ортогональными преобразованиями к главным осям симметрических матриц, описывающих физические характеристики той или иной физической системы (в механике и электродинамике сплошных сред).

Предварительно решим задачу о построении ортонормированного базиса для линейной оболочки в E_n, натянутую на систему векторов $\{\vec{f_1}, \vec{f_2}, \ldots, \vec{f_k}\}\,(k \le n)$, причем, не ограничивая общности рассуждений, будем считать эти векторы линейно-независимыми (в противном случае из системы векторов выделяем максимальное число линейно-независимых и процесс ортогонализации будем осуществлять только для них).

Рассмотрим вектор $\vec{f_1}$, пронормируем его и обозначим $\vec{g}_1 = \dfrac{\vec{f_1}}{|\vec{f_1}|}$. Рассмотрим далее вектор $\vec{f}\,'_2 = \alpha_1\vec{g}_1 + \vec{f_2}$ с неизвестным коэффициентом α_1 и выберем его так, чтобы $\vec{f}\,'_2$ был ортогонален к $\vec{g}_1$, т.е. $(\vec{g_1}\,\vec{f}\,'_2) = 0$. Последнее равенство означает, что $\alpha_1 \cdot 1 + (\vec{g_1}\,\vec{f_2}) = 0$, откуда следует

$$\alpha_1 = -(\vec{g_1}\,\vec{f_2}).$$

Пронормируем вектор $\vec{f'}_2$ и обозначим $\vec{g}_2 = \dfrac{\vec{f'}_2}{|\vec{f'}_2|}$. Затем строим вектор $\vec{f'}_3 = \beta_1\vec{g}_1 + \beta_2\vec{g}_2 + \vec{f}_3$ с неизвестными коэффициентами β_1, β_2, которые определим из условий ортогональности f'_3 к $\vec{g}_1$ и к $\vec{g}_2$: $(\vec{g_1}\,\vec{f'_3}) = \beta_1 \cdot 1 + (\vec{g_2}\,\vec{f_3}) = 0$, и $(\vec{g_2}\,\vec{f'_3}) = \beta_2 \cdot 1 + (\vec{g_2}\,\vec{f_3}) = 0$, т.е.

$$\beta_1 = -(\vec{g_1}\,\vec{f_3}), \quad \beta_2 = -(\vec{g_2}\,\vec{f_3}).$$

Пронормируем вектор $\vec{f'}_3$ и обозначим $\vec{g}_3 = \dfrac{\vec{f'}_3}{|\vec{f'}_3|}$. Продолжая процесс, мы построим систему единичных взаимно-ортогональных векторов $\{\vec{g}_1\,, \vec{g}_2\,, \ldots, \vec{g}_k\,\}$, которую можно взять за базис рассматриваемой оболочки, так как система построенных векторов будет линейно независима. Последний факт нуждается в доказательстве. **Доказательство:** $\langle\langle$ Составим линейную комбинацию векторов $\vec{g}_1, \ldots, \vec{g}_k$ с произвольными коэффициентами $\vec{\lambda}_1, \ldots, \vec{\lambda}_k$ и приравняем ее нулю

$$\lambda_1\vec{g}_1 + \lambda_2\vec{g}_2 + \ldots + \lambda_k\vec{g}_k = 0. \tag{XX.11}$$

Умножая (XX.11) скалярно на вектор $\vec{g}_1$ и учитывая ортогональность к $\vec{g}_1$ векторов $\vec{g}_2, \ldots, \vec{g}_k$, получим $\lambda_2 = 0, \lambda_3 = 0, \ldots, \lambda_k = 0$, что и доказывает линейную независимость построенных векторов. $\rangle\rangle$

Если нам необходимо перейти от ортонормированного базиса $\{\vec{i}_1\,, \vec{i}_2\,, \ldots, \vec{i}_n\,\}$, относительно которого были заданы векторы $\vec{f}_1, \ldots, \vec{f}_k$, к другому ортонормированному базису в E_n, первыми векторами которого служили бы векторы $\vec{g}_1, \ldots, \vec{g}_k$, то поступаем следующим образом.

Пусть $\vec{g}_1 = \sum\limits_{m=1}^{n} x_1^m \vec{i}_m\,, \ldots, \vec{g}_k = \sum\limits_{m=1}^{n} x_k^m \vec{i}_m$. Ищем множество всех таких векторов $\vec{x} = \sum\limits_{m=1}^{n} x_1^m \vec{i}_m$, которые были бы ортогональны одновременно к $\vec{g}_1, \ldots, \vec{g}_k$. Для этого строим нормальную систему решений

$$\left.\begin{array}{l} (\vec{g_1}\,\vec{x}\,) = \sum\limits_{m=1}^{n} x_1^m \vec{x}^{\,m} = 0 \\ (\vec{g_2}\,\vec{x}\,) = \sum\limits_{m=1}^{n} x_2^m \vec{x}^{\,m} = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ (\vec{g}\,\vec{x}\,) = \sum\limits_{m=1}^{n} x_k^m \vec{x}^{\,m} = 0 \end{array}\right\}. \tag{XX.12}$$

Тогда совокупность векторов $\vec{x}$ будет образовывать линейную оболочку, натянутую на векторы нормальной фундаментальной системы решений. Поскольку ранг матрицы системы уравнений (XX.12) равен k (векторы $\vec{g}_1, \ldots, \vec{g}_k$ линейно независимы), то имеем $(n-k)$ векторов нормальной фундаментальной системы решений. Для них применим процесс ортогонализации и обозначим полученные единичные взаимно ортогональные векторы $\vec{h}_1, \vec{h}_2, \ldots, \vec{h}_{n-k}$. Система векторов $\{\vec{g}_1, \vec{g}_2, \ldots \vec{g}_k, \vec{h}_1, \ldots, \vec{h}_{n-k}\}$ и будет служить новым ортонормированным базисом в E_n. Ортогональная матрица перехода от базиса $\{\vec{i}_1\,, \vec{i}_2\,, \ldots, \vec{i}_n\,\}$ к базису $\{\vec{g}_1, \vec{g}_2, \ldots \vec{g}_k, \vec{h}_1, \ldots, \vec{h}_{n-k}\}$ строится очень просто. Ее столбцами служат матрицы- столбцы из координат векторов $\{\vec{g}_1, \vec{g}_2, \ldots \vec{g}_k, \vec{h}_1, \ldots, \vec{h}_{n-k}\}$.

XX.1.5 Пример ортогонализации системы векторов с помощью пакета Maple

Пример ПXX.2. *Ортонормировать систему векторов:* $\vec{U}_1 = (1, 1, 1)$; $\vec{(U)}_2 = (-1, 1, 0)$; $\vec{U}_3 = (-1, 0, 1)$.

Решение.[2]

```
> with(linalg):
```

[2]Пример взят из квалификационной работы Ю.Н.Клевачевой “Квадрики в евклидовом пространстве, приведение их к каноническому виду и графическое представление в пакете Maple”, 2004, КГПУ

Зададим векторы с помощью команды vector:

```
>  U1 := vector([1, 1, 1]);
>  U2 := vector([-1, 1, 0]);
>  U3 := vector([-1, 0, 1]);
```

$$U1 := [1, 1, 1]$$
$$U2 := [-1, 1, 0]$$
$$U3 := [-1, 0, 1]$$

Зададим теперь базис из этих векторов с помощью команды

basis:

```
>  bas_U:=basis([U1,U2,U3]);
```

$$bas\_U := [U1,\ U2,\ U3]$$

и создадим из него ортогональный базис с помощью команды

GramSchmidt(bas_U);:

```
>  orto_bas:=GramSchmidt(bas_U);
```

$$orto\_bas := [[1, 1, 1], [-1, 1, 0], [\frac{-1}{2}, \frac{-1}{2}, 1]]$$

Проверим ортогональность векторов:

```
>  innerprod(orto_bas[1],orto_bas[2]);
>  innerprod(orto_bas[1],orto_bas[3]);
>  innerprod(orto_bas[2],orto_bas[3]);
```

$$0$$
$$0$$
$$0$$

- все векторы ортогональны. Осталось их нормировать, - это мы сделаем

с помощью команды scalarmul(a,l) умножения вектора a на число l :

```
>  norm_bas:=
>  [scalarmul(orto_bas[1],1/sqrt(innerprod(orto_bas[1],orto_bas[1])))
>  ,scalarmul(orto_bas[2],1/sqrt(innerprod(orto_bas[2],orto_bas[2]))),
>  scalarmul(orto_bas[3],1/sqrt(innerprod(orto_bas[3],orto_bas[3])))];
```

$$norm\_bas := [\left[\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right], \left[-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right], \left[-\frac{\sqrt{6}}{6}, -\frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{3}\right]]$$

XX.2 Теорема о диагональном виде матрицы самосопряженного оператора

Теорема TXX.3. *У каждого самосопряженного оператора в E_n существует n единичных взаимно-ортогональных собственных векторов. Матрица оператора относительно ортонормированного базиса, построенного на указанных собственных векторах оператора, имеет диагональный вид*

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & \\ & \cdot & & & & \\ & & \lambda_1 & & & \\ & & & \cdot & & \\ & & & & \lambda_s & \\ & & & & & \cdot \\ & & & & & & \lambda_s \end{pmatrix}, \tag{XX.13}$$

где по диагоналям расположены собственные значения оператора, построенные столько раз, какова их кратность в характеристическом уравнении.

Доказательство: $\langle\langle$ Пусть λ_0 - собственное значение самосопряженного оператора $A(\vec{x})$, заданного в некотором ортонормированном базисе $\{\vec{i}_1, \vec{i}_2, \ldots, \vec{i}_n\}$ своей симметрической матрицей $A = (\alpha^p_q)$. Рассмотрим собственный вектор $\vec{f}_1$, для этого достаточно взять первый вектор из нормальной фундаментальной системы однородных уравнений

$$\sum_{q=1}^{n} (\alpha^p_q - \lambda_1 \delta^p_q) x^q = 0.$$

Пронормируем его. Получим единичный собственный вектор $\vec{g}_1 = \dfrac{\vec{f}_1}{|\vec{f}_1|}$, для которого $A(\vec{g}_1) = \lambda_1 \vec{g}_1$.

Рассмотрим далее множество всех векторов $\vec{x} = \sum\limits_{m=1}^{n} x^m \vec{i}_m$, ортогональных к $\vec{g}_1 = \sum\limits_{m=1}^{n} x^m_1 \vec{i}_m$. Для этого необходимо построить векторы нормальной фундаментальной системы решений для системы уравнений, состоящей лишь из одного уравнения

$$(\vec{g}_1\, \vec{x}) = x^1_1 \vec{x}^1 + x^2_1 \vec{x}^2 + \ldots + x^n_1 \vec{x}^n = 0.$$

Таких векторов будет $(n-1)$. Применим к ним процесс ортогонализации и получим $(n-1)$ единичных взаимноортогональных векторов $\{\vec{h}_2, \vec{h}_3, \ldots, \vec{h}_n\}$, каждый из которых также ортогонален и к вектору $\vec{g}_1$. Очевидно, что искомые векторы $\vec{x}$ принадлежат к линейной оболочке, натянутой на векторы $\{\vec{h}\}$, а сама она представляет $(n-1)$-мерное векторное пространство E_{n-1}, ортогональное к $\vec{g}_1$ (т.е. любой вектор из E_{n-1} ортогонален к $\vec{g}_1$). Покажем, что векторы из E_{n-1} под действием самосопряженного оператора $A(\vec{x})$ переходят в векторы того же E_{n-1} (другими словами E_{n-1} является инвариантным подпространством для $A(\vec{x})$).

Используя самосопряженность $A(\vec{x})$, имеем

$$\Big(A(\vec{x}) \cdot \vec{g}_1\Big) = \Big(\vec{x} \cdot A(\vec{g}_1)\Big) = \Big(\vec{x} \cdot \lambda_1 \vec{g}_1\Big) = \lambda_1 (\vec{x}\, \vec{g}_1) = 0,$$

т.е. $A(\vec{x}) \in E_{n-1}$. От ортонормированного базиса $\{\vec{i}_1, \vec{i}_2, \ldots, \vec{i}_n\}$ перейдем к ортонормированному базису $\{\vec{g}_1, \vec{h}_2, \ldots, \vec{h}_n\}$. Поскольку

$$A(\vec{g}_1) = \lambda_1 \vec{g}_1, \quad A(\vec{h}_s) = \sum_{r=2}^{n} \beta^r_s \vec{h}_r \; (s = \overline{2, n}),$$

то матрица самосопряженного оператора в новом базисе имеет вид

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \beta^2_2 & \ldots & \beta^2_n \\ . & . & \ldots & . \\ . & . & \ldots & . \\ 0 & \beta^n_2 & \ldots & \beta^n_n \end{pmatrix}. \tag{XX.14}$$

В силу вышесказанного матрица $B = (\beta^r_s)\,(r, s = \overline{2, n})$ есть матрица самосопряженного оператора $A(\vec{x})$, действующего на векторах пространства E_{n-1}. Затем весь рассмотренный нами процесс повторяем уже для E_{n-1} и матрицы B . А именно, находим корни характеристического уравнения $\det(B - \lambda E) = 0$, и если, например, λ_1 корень уравнения $\det(A - \lambda E) = 0$ кратности $r_1 > 1$, то λ_1 непременно будет корнем уравнения $\det(B - \lambda E) = 0$, поскольку характеристический полином оператора (вместе с ним и собственные значения) есть инвариант преобразования базисов, а характеристический полином матрицы (XX.14) имеет вид $\chi(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda)\det(B - \lambda E)$. Из системы уравнений $\sum\limits_{s=2}^{n} (\beta^r_s - \lambda_1 \delta^r_s) \vec{x}^s = 0$ (если λ_1 - однократный корень уравнения $\det(A - \lambda E) = 0$, то в системе вместо λ_1 стоит другой корень уравнения $\det(B - \lambda E) = 0$) определяем собственный вектор $\vec{f}_2$, нормируем его и получим единичный собственный вектор $\vec{g}_2\,(A(\vec{g}_2) = \lambda_1 \vec{g}_2)$, ортогональный к единичному собственному вектору g_1. Как и выше, в E_{n-1} строим подпространство E_{n-2}, ортогональное к $\vec{g}_2$ (автоматически и к $\vec{g}_1$), с ортонормированным базисом $\{\vec{h}'_3, \ldots, \vec{h}'_n\}$. Перейдя от базиса $\{\vec{g}_1, \vec{h}_2, \ldots, \vec{h}_n\}$ к базису $\{\vec{g}_1, \vec{g}_2, \vec{h}'_3, \ldots, \vec{h}'_n\}$, мы получим следующий вид матрицы самосопряженного оператора в новом базисе:

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \gamma_3^3 & \dots & \gamma_n^3 \\ . & . & . & \dots & . \\ 0 & 0 & \gamma_3^n & \dots & \gamma_n^n \end{pmatrix}. \tag{XX.15}$$

Заметим, что если λ_1 - однократное собственное значение, то в матрице (XX.15) на пересечении 2-ой строки и 2-ого столбца будет стоять не λ_1, а другой корень характеристического уравнения $\det(A-\lambda E) = 0$.

Продолжая предложенный алгоритм построения ортогональных друг другу единичных собственных векторов оператора, через $n-2$ шага мы придем к ортонормированному базису $\{\vec{g}_1, \vec{g}_2, \dots, \vec{g}_n\}$, состоящему из собственных векторов оператора $A(\vec{x})$, в котором матрица оператора примет вид (XX.13). $\rangle\rangle$

Важнейшим следствием доказанной теоремы является следующий факт:

> r - кратному собственному значению самосопряженного оператора соответствует r - мерное инвариантное подпространство собственных векторов оператора, отвечающих данному собственному значению.

Это следствие дает практический способ построения того ортонормированного базиса, в котором матрица оператора имеет диагональный вид. Пусть $\vec{f}_1, \dots, \vec{f}_n$ — линейно независимые собственные векторы, отвечающие собственному значению λ_1 кратности r_1 (для их нахождения достаточно построить векторы нормальной фундаментальной системы решений для однородной системы уравнений

$$\sum_{q=1}^{n} (\alpha_q^p - \lambda_1 \delta_q^p)\vec{x}^q = 0.$$

Согласно следствию будет r_1 таких векторов). Далее совершим их ортогонализацию и получим r_1 единичных взаимноортогональных собственных векторов
$\{\vec{g}_1, \vec{g}_2, \dots, \vec{g}_r\}$. Поскольку различным собственным значениям отвечают ортогональные собственные векторы, то достаточно проделать такую же процедуру с собственным значением λ_2 кратности r_2 и т.д. В итоге мы имеем n единичных взаимно ортогональных собственных векторов
$\{\vec{g}_1, \dots, \vec{g}_{r_1}; \vec{h}_1, \dots, \vec{h}_{r_2}; \dots; \vec{k}_1, \dots, \vec{k}_{r_s}\}$ $(r_1 + r_2 + \dots + r_s = n)$, служащих базисом, в котором матрица оператора имеет диагональный вид (XX.13).

Координаты собственных векторов $\{\vec{g}_1, \dots, \vec{k}_{r_s}\}$, записанные в виде столбцов, будут составлять ортогональную матрицу перехода от первоначального ортонормированного базиса к каноническому ортонормированному базису.

Но заданной в ортонормированном базисе матрице самосопряженного оператора однозначно сопоставляется симметрическая билинейная форма (квадратичная форма), причем матрицы оператора и формы при переходе в другой ортонормированный базис преобразуются по одному и тому же закону. Поэтому теорему (TXX.3) можно записать в следующей эквивалентной форме (она - то и играет в приложениях главную роль).

Теорема TXX.4. *Любую квадратичную форму $B(\vec{x},\vec{x}) = \sum\limits_{i,k=1}^{n} \alpha_{ik} x^i x^k \, (\alpha_{ik} = \alpha_{ki})$ ортогональными преобразованиями всегда можно привести к следующему каноническому виду:*

$$B(\vec{x},\vec{x}) = \lambda_1 (y^1)^2 + \dots + \lambda_1 (y^{r_1})^2 + \dots + \lambda_s (y^n)^2 \tag{XX.16}$$

где $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ — корни характеристического уравнения $\chi(\lambda) = \det(\alpha_{ik} - \lambda\delta_{ik})$, встречающиеся столько раз, какова их кратность.[3]

[3] В данном случае кратность корня λ_1, k_1, равна r_1.

XX.2.1 Примеры

Пример ПXX.3. *В E_n задана оболочка, натянутая на линейно независимые векторы*

$$\vec{f_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{f_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{f_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Построить ортонормированный базис $\{g_1, g_2, g_3\}$ оболочки и перейти к новому ортонормированному базису в E_n, первыми тремя векторами которого служили бы $\vec{g}_1, \vec{g}_2, \vec{g}_3$.
Решение. Пронормируем $\vec{f_1}$. Имеем $|\vec{f_1}| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$. Тогда

$$\vec{g}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{i}_1 - \vec{i}_2).$$

Находим что,

$$\alpha_1 = -(\overset{\to}{g_1}\overset{\to}{f_2}) = \frac{1}{\sqrt{2}}, \ \vec{f}_2' = \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{g}_1 + \vec{f_2} = \frac{1}{2}\vec{i}_1 - \frac{1}{2}\vec{i}_2 + \vec{i}_2 + 2\vec{i}_3 = \frac{1}{2}\vec{i}_1 + \frac{1}{2}\vec{i}_2 + 2\vec{i}_3 .$$

Поэтому

$$\vec{g}_2 = \frac{\vec{f}_2'}{|\vec{f'}_2|} = \frac{1}{3\sqrt{2}}(\vec{i}_1 + \vec{i}_2 + 4\vec{i}_3).$$

Далее находим, что

$$\beta_1 = -(\overset{\to}{g_1}\overset{\to}{f_3}) = 0, \quad \beta_2 = -(\overset{\to}{g_2}\overset{\to}{f_3}) = -\frac{4}{3\sqrt{2}},$$

$$\vec{f'}_3 = -\frac{4}{3\sqrt{2}}\vec{g}_2 + \vec{f_3} = -\frac{1}{9}(2\vec{i}_1 + 2\vec{i}_2 - \vec{i}_3) - \vec{i}_4 .$$

Поэтому

$$\vec{g}_3 = -\frac{2}{3\sqrt{10}}\left(\vec{i}_1 + \vec{i}_2 - \frac{1}{2}\vec{i}_3 + \frac{9}{2}\vec{i}_4\right).$$

Решаем систему линейных уравнений (XX.12)

$$\left.\begin{array}{l} \frac{1}{\sqrt{2}}x^1 - \frac{1}{\sqrt{2}}x^2 = 0 \\ \frac{1}{3\sqrt{2}}x^1 + \frac{1}{3\sqrt{2}}x^2 + \frac{4}{3\sqrt{2}}x^3 = 0 \\ -\frac{2}{3\sqrt{10}}x^1 - \frac{2}{3\sqrt{10}}x^2 + \frac{1}{3\sqrt{10}}x^3 - \frac{9}{3\sqrt{10}}x^4 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x^1 = -2c_1 \\ x^2 = -2c_1 \\ x^3 = x^4 = c_1 \\ x^5 = c_2. \end{array}\right.$$

Векторы нормальной фундаментальной системы решений имеют вид

$$x_1 = -2\vec{i}_1 - 2\vec{i}_2 + \vec{i}_3 + \vec{i}_4 , \ x_2 = \vec{i}_5 .$$

Поэтому

$$\vec{\ }_1 = \frac{1}{\sqrt{10}}(-2\vec{i}_1 - 2\vec{i}_2 + \vec{i}_3 + \vec{i}_4), \quad \vec{h}_2 = \vec{i}_5 .$$

Ортогональная матрица перехода от базиса $\{\vec{i}_1, \vec{i}_2, \ldots, \vec{i}_5\}$ *к базису* $\{\vec{g}_1, \vec{g}_2, \vec{g}_3, \vec{h}_1, \vec{h}_2\}$ *имеет вид*

$$C = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{2}} & \dfrac{1}{3\sqrt{2}} & -\dfrac{2}{3\sqrt{10}} & -\dfrac{2}{\sqrt{10}} & 0 \\ -\dfrac{1}{\sqrt{2}} & \dfrac{1}{3\sqrt{2}} & -\dfrac{2}{3\sqrt{10}} & -\dfrac{2}{\sqrt{10}} & 0 \\ 0 & \dfrac{4}{3\sqrt{2}} & \dfrac{1}{3\sqrt{10}} & \dfrac{1}{\sqrt{10}} & 0 \\ 0 & 0 & -\dfrac{3}{\sqrt{10}} & \dfrac{1}{\sqrt{10}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{XX.17}$$

Пример ПXX.4. .

Привести ортогональными преобразованиями к каноническому виду квадратичную форму

$$2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_1x_4 - 2x_2x_3 + 2x_2x_4 + 2x_3x_4$$

и найти матрицу перехода от данного базиса к каноническому.
*Решение.*Найдем характеристический полином матрицы квадратичной формы

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -\lambda & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -\lambda & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 1)^3(\lambda + 3). \tag{XX.18}$$

Из (XX.18) следует, что A имеет собственное значение $\lambda_1 = 1$ кратности 3 и однократное собственное значение $\lambda_2 = -3$. Согласно теореме (TXX.4) по формуле (XX.16) имеем следующий канонический вид квадратичной формы:

$$A(\vec{x}, \vec{x}) = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 - 3y_4^2. \tag{XX.19}$$

Найдем ортогональной преобразование, осуществляющее приведение квадратичной формы к каноническому виду. С этой целью нам необходимо указать четыре единичных взаимно ортогональных собственных вектора матрицы A.

При $\lambda_1 = 1$ система уравнений $\sum\limits_{q=1}^{4}(\alpha_{pq} - \lambda_1\delta_{pq})x^q = 0$, соответствующая данному примеру, выглядит так:

$$\left.\begin{array}{r} -x^1 + x^2x^3 - x^4 = 0 \\ x^1 - x^2 - x^3 + x^4 = 0 \\ x^1 - x^2 - x^3 + x^4 = 0 \\ -x^1 + x^2 + x^3 - x^4 = 0 \end{array}\right\}. \tag{XX.20}$$

Ранг матрицы системы равен 1 (уравнения $2, 3, 4$ совпадают с первыми). Поэтому

$$x^1 = x^2 + c^3 - c^4,\ x^2 = c^2,\ x^3 = c^3\ x^4 = c^4,$$

Строим нормальную фундаментальную систему решений. Имеем:

$$\vec{f}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{f}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{f}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Применяя процесс ортогонализации и нормировки, приведем к следующим единичным взаимно ортогональным векторам:

$$\vec{g}_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{g}_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \sqrt{\frac{2}{3}} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{g}_3 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2\sqrt{3}} \\ \frac{1}{2\sqrt{3}} \\ \frac{1}{2\sqrt{3}} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}.$$

При $\lambda_2 = -3$ система уравнений

$$\sum_{q=1}^{4} (\alpha_{pq} - \lambda_2 \delta_{pq}) x^q = 0$$

имеет ранг, равный трем, и нормальная фундаментальная система решений состоит из одного вектора

$$\vec{f}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Нормируя собственный вектор $\vec{f}_4$, получим единичный собственный вектор, ортогональный к $\vec{g}_1, \vec{g}_2, \vec{g}_3$, так как $\lambda_1 \neq \lambda_2$

$$\vec{g}_4 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Таким образом ортогональная матрица перехода от старого базиса к каноническому имеет следующий вид:

$$C = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{2\sqrt{3}} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{2\sqrt{3}} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \sqrt{\frac{2}{3}} & \frac{1}{2\sqrt{3}} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Глава XXI

Поверхности II-го порядка в евклидовом пространстве

XXI.1 Приведение общего уравнения поверхности II-го порядка к каноническому виду с помощью движений $\mathcal{E}_n$

XXI.1.1 Определение поверхности II-го порядка в E_n

Определение OXXI.1. *Поверхностью второго порядка в E_n называется геометрическое место точек M, прямоугольные координаты $x^1; \ldots; x^n$ которых удовлетворяют уравнению вида*

$$\sum_{i,k=1}^{n} \alpha_{ik} x^i x^k + 2\sum_{i=1}^{n} \varphi_i x^i + \gamma = 0, \qquad \text{(XXI.1)}$$

где $A(\vec{x}, \vec{x}) = \sum\limits_{i,k=1}^{n} \alpha_{ik} x^i x^k$ — квадратичная форма от радиус-вектора $\vec{x}, \varphi(\vec{x}) = \sum\limits_{i,k=1}^{n} \varphi_i x^i$ — линейная форма от $\vec{x}$, γ - постоянная, ранг $(\alpha_{ik}) \neq 0$.

Нашей задачей является выбор в E_n новой прямоугольной декартовой системы координат, в которой поверхность второго порядка описывалась бы наиболее простым уравнением называемым *каноническим*. По каноническому уравнению легко изучать свойства этих поверхностей.

XXI.1.2 Приведение уравнения к каноническому виду

Совершим ортогональное преобразование базиса, оставляя начало координат на месте, и перейдем к базису, в котором квадратичная форма $A(\vec{x}, \vec{x})$ принимает канонический вид. Пусть ранг формы равен r и $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ - собственные значения матрицы $A = (\alpha_{ik})$, отличные от нуля (среди них совпадающие также занумерованы). В результате получим новое уравнение поверхности

$$\lambda_1 (y^1)^2 + \ldots + \lambda_r (y^r)^2 + 2\sum_{i=1}^{n} \beta_i y^i + \gamma = 0, \qquad \text{(XXI.2)}$$

которое может быть записано в следующем виде:

$$\sum_{s=1}^{r} \lambda_s \left(y^s + \frac{\beta_s}{\lambda_s} \right)^2 + 2 \sum_{p=r+1}^{n} \beta_p y^p + \gamma - \sum_{s=1}^{r} \frac{\beta_s^2}{\lambda_s} = 0. \qquad \text{(XXI.3)}$$

Второй этап. Совершим перенос начала координат в точку $O' \left(-\frac{\beta_1}{\lambda_1}; \ldots, \frac{\beta_r}{\lambda_r}; 0; \ldots 0 \right)$

$$y'^s = y^s + \frac{\beta_s}{\lambda_s} \, (s = \overline{1, r}), \quad y'^p = y^p \, (p = \overline{r+1, n}). \qquad \text{(XXI.4)}$$

После этого уравнение поверхности примет вид:

$$\lambda_1(y'^1)^2 + \ldots + \lambda_r(y'^r)^2 + 2\beta_{r+1}y'^{r+1} + \ldots + 2\beta_n y'^n + \tilde{\gamma} = 0. \tag{XXI.5}$$

Определение OXXI.2. *Поверхность называется центральной, если в ее уравнении (XXI.5) коэффициенты линейной формы $\beta_{r+1}, \ldots, \beta_n$ равны нулю, причем — невырожденной центральной, когда $r = n$ и вырожденной центральной, когда $r < n$. Если же хотя бы одно из чисел β_p $(p = \overline{r+1, n})$ отлично от нуля, то поверхность называется нецентральной.*

Такое определение связано с тем, что точка O' является единственным центром симметрии для поверхностей с уравнением

$$\lambda_1(y'^1)^2 + \ldots + \lambda_r(y'^r)^2 + \tilde{\gamma} = 0, \tag{XXI.6}$$

поскольку отражения $y'^k \to -y'^k$ не меняют вида данного уравнения.

Для нецентральных поверхностей продолжим процесс выбора новой прямоугольной системы координат с целью дальнейшего упрощения вида уравнения нецентральной поверхности (вместе с этим объяснится и тот факт, почему поверхность названа нецентральной.)

Третий этап. (Для нецентральных поверхностей). Начало координат O' оставляем на месте и совершим следующее преобразование (новые координаты обозначим буквой ζ:

$$\left.\begin{array}{l}
\zeta^s = y'^s \quad (s = \overline{1, r}) \\
\zeta^{r+1} = \alpha(\beta_{r+1}y'^{r+1} + \ldots + \beta_n y'^n) \\
\zeta^{r+2} = \sum\limits_{p=r+1}^{n} q_p^{r+2} y'^p \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\zeta^n = \sum\limits_{p=r+1}^{n} q_p^n y'^p \qquad \left(\alpha = -\dfrac{1}{\sqrt{\beta_{r+1}^2 + \ldots + \beta_n^2}}\right),
\end{array}\right\} \tag{XXI.7}$$

подобрав числа $q_p^{r+2}, \ldots, q_p^n$ $(p = \overline{r+1, n})$ так, чтобы матрица преобразования была ортогональной. Покажем, что это всегда может быть осуществлено.

Действительно, матрицы-столбцы (ζ) из новых координат и $(y)'$ из старых координат связаны с матрицей перехода C соотношением $(\zeta) = C^{-1}(y)'$. Но для ортогональных преобразований $C^{-1} = C^T$, и поэтому для (XXI.7) матрица C^T имеет вид

$$C^T = \begin{pmatrix}
1 & 0\ldots0 & . & 0 & 0\ldots0 \\
0 & 1\ldots0 & . & 0 & 0\ldots0 \\
. & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . \\
0 & 0\ldots1 & . & 0 & 0\ldots0 \\
. & . & . & . & . \\
0 & 0\ldots0 & . & \alpha\beta_{r+1} & \alpha\beta_{r+2}\ldots\alpha\beta_n \\
0 & 0\ldots0 & . & q_{r+1}^{r+2} & q_{r+2}^{r+2}\ldots q_n^{r+2} \\
. & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . \\
0 & 0\ldots0 & . & q_{r+1}^n & q_{r+2}^n\ldots q_n^n
\end{pmatrix}, \tag{XXI.8}$$

где $q_p^{r+2}, \ldots, q_p^n$ $(p = \overline{r+1, n})$ — неизвестные пока элементы матрицы.

Очевидно, для того чтобы матрица C была ортогональной, необходимо в E_{n-r} найти $(n-r-1)$ единичных взаимно ортогональных вектора, ортогональных к вектору $\vec{x}_0$ с координатами $\alpha\beta_{r+1}, \ldots, \alpha\beta_n$, и их координаты подставить вместо $q_{r+1}^{r+2}, \ldots, q_n^{r+2}, \ldots, q_n^n$. Для этого строим векторы нормальной фундаментальной системы решений для системы уравнений, состоящей из одного уравнения

$$(\vec{x}_0, \vec{x}) = \sum_{p=r+1}^{n} (\alpha\beta_p)x^p = 0.$$

Таких векторов будет $(n-r-1)$. Затем для них проводим процесс ортогонализации и нормировки. Тем самым неизвестные числа $q_p^{r+2},\ldots,q_p^n$ $(p=\overline{r+1,n})$ будут определены, и ортогональное преобразование (XXI.7) принимает конкретный вид. После преобразования (XXI.7) уравнение (XXI.5) поверхности перейдет в следующее:

$$\lambda_1(\zeta^1)^2+\ldots+\lambda_r(\zeta^r)^2+\frac{2}{\alpha}\zeta^{r+1}+\tilde{\gamma}=0. \tag{XXI.9}$$

Четвертый этап состоит в переносе начала координат

$$x'^1=\zeta^1,\ldots,x'^r=\zeta^r,x'^{r+1}=\zeta^{r+1}+\frac{\alpha\tilde{\gamma}}{2},x'^{r+2}=\zeta^{r+2},\ldots,x'^n=\zeta^n,$$

после которого каноническое уравнение нецентральной поверхности примет окончательный вид

$$\lambda_1(x'^1)^2+\ldots+\lambda_r(x'^r)^2=2\delta x'^{r+1}, \tag{XXI.10}$$

где $\delta=\sqrt{\beta_{r+1}^2+\ldots+\beta_n^2}$.

XXI.1.3 Общая классификация поверхностей II-го порядка

Если в (XXI.10) $r+1=n$, то нецентральная поверхность называется невырожденной, если же $r+1<n$ — то вырожденной.

Переходим к конкретной классификации невырожденных центральных и нецентральных поверхностей второго порядка, учитывающей знаки собственных значений.

Невырожденные центральные поверхности.
Каноническое уравнение имеет вид (XXI.6), где $r=n$. В зависимости от того равен нулю свободный член $\tilde{\gamma}$ или отличен от нуля, все невырожденные центральные поверхности разбиваются на два типа. Рассмотрим каждый в отдельности.
(I) $\tilde{\gamma}\neq 0$. Поделим левую часть уравнения (XXI.6) на $\tilde{\gamma}$ и переобозначим переменные так, что бы сначала шли те у которых коэффициенты положительные, а затем те, у которых коэффициенты отрицательные. В результате получим для первого типа следующий вид уравнения центральной поверхности:

$$\frac{x_1^2}{a_1^2}+\ldots+\frac{x_k^2}{a_k^2}-\frac{x_{k+1}^2}{a_{k+1}^2}-\ldots-\frac{x_n^2}{a_n^2}=1. \tag{XXI.11}$$

Имеем n различных классов невырожденных центральных поверхностей первого типа при $k=1,2,\ldots,$ (при $k=0$ имеем мнимую поверхность второго порядка).

XXI.1.4 Классификация центральных кривых и поверхностей II-го порядка

Ограничимся рассмотрением частных случаев $n=2$ и $n=3$. При $n=2$ (на плоскости) имеем две центральные кривые второго порядка

$$k=1:\quad \frac{x_1^2}{a_1^2}-\frac{x_2^2}{a_2^2}=1\quad ()$$

$$k=2:\quad \frac{x_1^2}{a_1^2}+\frac{x_2^2}{a_2^2}=1\quad ()$$

При $n=3$ (в пространстве) имеем три центральные поверхности второго порядка

$$k=1:\quad \frac{x_1^2}{a_1^2}-\frac{x_2^2}{a_2^2}-\frac{x_3^2}{a_3^2}=1\quad ()$$

$$k=2:\quad \frac{x_1^2}{a_1^2}+\frac{x_2^2}{a_2^2}-\frac{x_3^2}{a_3^2}=1\quad ()$$

$$k=3:\quad \frac{x_1^2}{a_1^2}+\frac{x_2^2}{a_2^2}+\frac{x_3^2}{a_3^2}=1\quad ().$$

Вид приведенных кривых и поверхностей подробно изучен нами в первой части аналитической геометрии, и на этих вопросах мы не останавливаемся.

(II) $\tilde{\gamma}=0$. Нумеруя переменные так, чтобы сначала шли переменные с положительными коэффициентами, а затем с отрицательными, мы получим уравнение для центральных невырожденных поверхностей второго типа

$$\frac{x_1^2}{a_1^2}+\ldots+\frac{x_k^2}{a_k^2}-\frac{x_{k+1}^2}{a_{k+1}^2}-\ldots-\frac{x_n^2}{a_n^2}=0. \tag{XXI.12}$$

Такие поверхности относятся к каноническим, так как наряду с точкой $M(x_1;\ldots;x_n)$ этому уравнению удовлетворяют точки с координатами $tx_1;tx_2;\ldots;tx_n$ при любом $t\in\mathbf{R}$, т.е. точки, лежащие на прямой, проходящей через M и начало координат. Сколько различных классов конических поверхностей описывает уравнение (XXI.12)? Чтобы ответить на этот вопрос заметим, что k достаточно менять лишь в пределах от 0 до $\frac{n}{2}$, так как при $k>\frac{n}{2}$, умножая уравнение (XXI.12) на -1, придем к уравнению, в котором положительных слагаемых меньше $\frac{\pi}{2}$. Кроме того, при $k=0$ имеем мнимую поверхность с одной вещественной точкой $(0,0,\ldots,0)$. Итак, $0<k\leq\frac{n}{2}$, при этом мы должны учитывать, что k - целое число.

Опять ограничимся рассмотрением частных случаев $n=2$ и $n=3$. Согласно нашим оценкам для k имеем лишь по одному классу в каждом случае.

При $n=2:\quad \frac{x_1^2}{a_1^2}-\frac{x_2^2}{a_2^2}=0$ или $\left(\frac{x_1}{a_1}-\frac{x_2}{a_2}\right)\left(\frac{x_1}{a_1}+\frac{x_2}{a_2}\right)=0$ (пара пересекающихся прямых).

При $n=3:\quad \frac{x_1^2}{a_1^2}-\frac{x_2^2}{a_2^2}-\frac{x_3^2}{a_3^2}=0$ (эллиптический конус с централью осью $\vec{x}$).

XXI.1.5 Классификация нецентральных кривых и поверхностей II-го порядка

Невырожденные нецентральные поверхности.

Как и выше, поделив на δ и переменуровав переменные в (XXI.10), получим уравнение вида

$$\frac{x_1^2}{a_1^2}+\ldots+\frac{x_k^2}{a_k^2}-\frac{x_{k+1}^2}{a_{k+1}^2}-\ldots-\frac{x_{n-1}^2}{a_{n-1}^2}=2xn. \tag{XXI.13}$$

Число различных классов поверхностей зависит от числа значений принимаемых индексом k. Очевидно, что $0\leq k\leq\frac{n-1}{2}$, так как если $k>\frac{n-1}{2}$, то, умножая (XXI.13) на -1 и обозначая $-x_n$ через x'_n, мы придем опять же к уравнению вида (XXI.13), в котором положительных слагаемых (квадратичных) меньше $\frac{n-1}{2}$.

Обратимся к конкретным случаям $n=2$ и $n=3$. При $n=2$ имеем 1 класс нецентральных кривых 2-го порядка:

$$k=0:\quad -\frac{x_1^2}{a_1^2}=2x_2\quad ().$$

При $n=3\,(k=0,k=1)$ имеем два класса нецентральных поверхностей второго порядка

$$k=0:\quad -\frac{x_1^2}{a_1^2}-\frac{x_2^2}{a_2^2}=2x_3\quad (\,)$$

$$k=1:\quad \frac{x_1^2}{a_1^2}-\frac{x_2^2}{a_2^2}=2x_3\quad (\,).$$

Форма параболы и формы указанных поверхностей подробно изучались нами в аналитической геометрии, и на их построении мы не останавливаемся.

Вырожденные центральные и нецентральные поверхности 2-го порядка.

Поскольку поверхность вырожденная, то в канонических уравнениях (XXI.11), (XXI.12), (XXI.13) отсутствует хотя бы одна переменная, например, переменная x_1. В этом случае все сечения рассматриваемой поверхности гиперплоскостями $x_1=\mathrm{Const}$ представляют собой одну и ту же поверхность в пространстве E_{n-1}. Это означает, что каждая вырожденная поверхность образуется за счет поступательного движения поверхности 2-го порядка, заданной в E_{n-1}, вдоль оси x_1, перпендикулярной к E_{n-1}.

Следовательно, исследуемая поверхность необходимо содержит прямолинейные образующие параллельные оси x_1. Следовательно, исследуемая поверхность необходимо содержит прямолинейные образующие параллельные оси x_1. Поэтому вырожденные поверхности второго порядка часто называют цилиндрическими.

Перейдем к конкретным частным случаям $n = 2$ и $n = 3$.

При $n = 2$ согласно (XXI.11) и (XXI.12) все центральные вырожденные кривые описываются уравнением

$$\frac{x_2^2}{a_2^2} = \varepsilon, \tag{XXI.14}$$

где $\varepsilon = -1, 1, 0$.

При $\varepsilon = -1$ вещественных геометрических образов не существует. Когда $\varepsilon = 1$, имеем *пару параллельных прямых*.

Согласно (XXI.13), когда $n = 2$, нецентральных невырожденных кривых второго порядка не имеется.

Чтобы построить все цилиндрические поверхности в E_n, необходимо подвергнуть поступательному движению вдоль оси x_3 все кривые второго порядка, лежащие в плоскости x_1Ox_2.

Учитывая приведенную выше классификацию всех невырожденных и вырожденных кривых второго порядка, получим следующие вещественные цилиндрические поверхности второго порядка:

(1) $\dfrac{x_1^2}{a_1^2} + \dfrac{x_2^2}{a_2^2} = 1$ (эллиптический цилиндр)

(2) $\dfrac{x_1^2}{a_1^2} - \dfrac{x_2^2}{a_2^2} = 1$ (гиперболический цилиндр)

(3) $\dfrac{x_1^2}{a_1^2} = 2x_2$ (параболический цилиндр)

(4) $\dfrac{x_1^2}{a_1^2} - \dfrac{x_2^2}{a_2^2} = 0$ (пара пересекающихся плоскостей)

(5) $\dfrac{x_1^2}{a_1^2} = 1$ (пара параллельных плоскостей)

(6) $\dfrac{x_1^2}{a_1^2} = 0$ (пара слившихся плоскостей).

Рассмотрим пример, связанный с приведением к каноническому виду общего уравнения кривой второго порядка на плоскости.

XXI.1.6 Пример приведения уравнения II-го порядка к каноническому виду

Пример ПXXI.1. *Требуется привести к каноническому виду уравнение кривой второго порядка*

$$3x^2 + 10xy + 3y^2 - 2x - 14y - 13 = 0$$

и указать преобразование координат.
Решение. Найдем собственные значения матрицы квадратичной формы

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 5 \\ 5 & 3-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 6\lambda - 16 = 0.$$

$$\lambda_1 = 8, \quad \lambda_2 = -2.$$

Соответствующие им собственные векторы из - за $\lambda_1 \neq \lambda_2$ ортогональны между собой, и их остается только пронормировать. Имеем

$$\vec{g}_1 = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ \\ \dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \quad \vec{g}_2 = \begin{pmatrix} -\dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ \\ \dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

Следовательно, после преобразования координат, вызванного переходом к базису с векторами $\vec{g}_1, \vec{g}_2$

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{\sqrt{2}}x' - \dfrac{1}{\sqrt{2}}y' \\ \\ y = \dfrac{1}{\sqrt{2}}x' + \dfrac{1}{\sqrt{2}}y', \end{cases}$$

мы придем к уравнению

$$8(x')^2 - 2(y')^2 - 8\sqrt{2}x' - 6\sqrt{2}y' - 13 = 0.$$

Его можно преобразовать к следующему виду:

$$8\left(x' - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 - 2\left(y' + \frac{3}{\sqrt{2}}\right)^2 - 13 - 4 + 9 = 0.$$

После переноса начала координат:

$$x' = X + \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad y' = Y - \frac{3}{\sqrt{2}},$$

получим следующее уравнение:

$$8X^2 - 2Y^2 = 8,$$

которое в канонической записи примет вид

$$X^2 - \frac{Y^2}{4} = 1. \tag{XXI.15}$$

Преобразование, связывающее координаты x, y и X, Y, легко устанавливается

$$\begin{cases} x = X\cos\dfrac{\pi}{4} - Y\sin\dfrac{\pi}{4} + 2 \\ \\ y = X\sin\dfrac{\pi}{4} + Y\cos\dfrac{\pi}{4} - 1. \end{cases}$$

Таким образом, в новой системе координат, которая получена из старой поворотом на угол $\dfrac{\pi}{4}$ (против часовой стрелки) и переносом начала координат в точку $O'(2;-1)$, мы имеем гиперболу (XXI.15) с осью $O'X$ и асимтотами
$Y = \pm 2X$.

XXI.1.7 Примеры изображения поверхностей с помощью пакета Maple

Для построения графиков трехмерных поверхностей Maple имеет встроенную в ядро функцию plot3d. Она может использоваться в следующих форматах: plot3d(expr1, x=a..b, y=c..d, p)
plot3d(f, a..b, c..d, p)
plot3d([exprf, exprg, exprh], s=a..b, t=c..d, p)
plot3d([f, g, h], a..b, c..d, p)
В двух первых формах plot3d применяется для построения обычного графика одной поверхности, в других формах - для построения графика с параметрической формой задания поверхности. В приведенных

формах записи f,g и h - функции; expr1 - выражение, отражающее зависимость от x и y; exprf, exprg и exprh - выражения, задающие поверхность параметрически; s,t,a,b - числовые константы действительного типа; c,d - числовые константы или выражения действительного типа; x,y,s,t - имена независимых переменных; p - управляющие параметры. С помощью параметров p можно в широких пределах управлять видом трехмерных графиков, выводя или убирая линии каркасной сетки, вводя функциональную окраску поверхностей, меняя угол их обзора и параметры освещения и т.д. Библиотека plots позволяет использовать расширенные средства графики.

```
> with(plots):
```

```
Warning, the name changecoords has been redefined
```

```
> Ellipsoid:=[2*cos(u)*cos(v),sin(u)*cos(v),sin(v)];
```

$$Ellipsoid := [2\cos(u)\cos(v),\ \sin(u)\cos(v),\ \sin(v)]$$

```
> plot3d(Ellipsoid,u=0..2*Pi,v=-Pi/2..Pi/2,
> style=hidden,color=navy,axes=BOXED,labels=[X,Y,Z],grid=[50,50]);
```

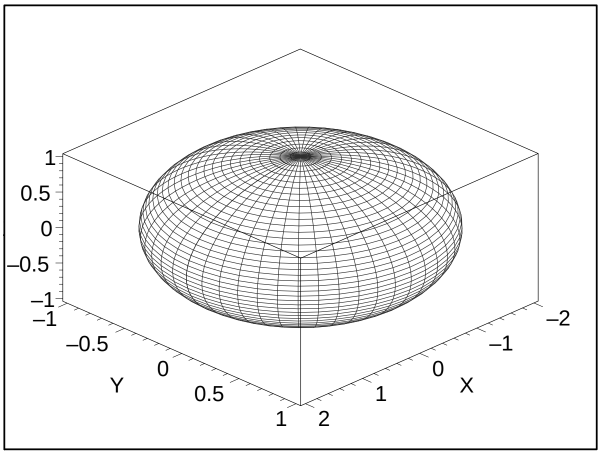


Рис.XXI.57. *График эллипсоида*

```
> cylinderplot(1,theta=0..2*Pi,
> z=-1..1,shading=ZGRAYSCALE,color=cyan,axes=BOXED,labels=[X,Y,Z]);
```

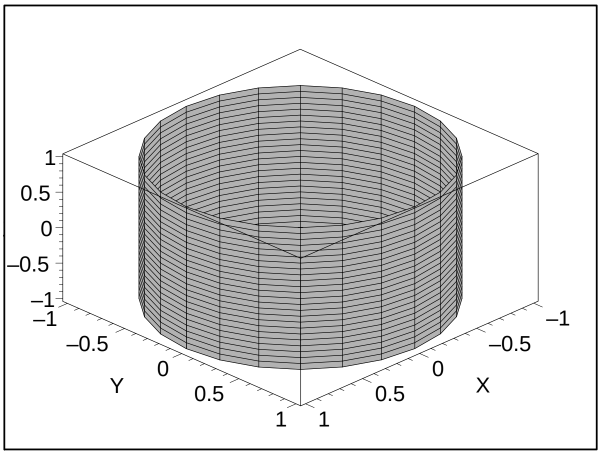


Рис.XXI.58. *График эллиптического цилиндра*

```
> parab:=[rho*cos(phi),rho*sin(phi),rho^2];
```

$$parab := [\rho\cos(\phi),\ \rho\sin(\phi),\ \rho^2]$$

```
> plot3d(parab,phi=0..2*Pi,rho=0..5,axes=BOXED,labels=[X,Y,Z]);
```

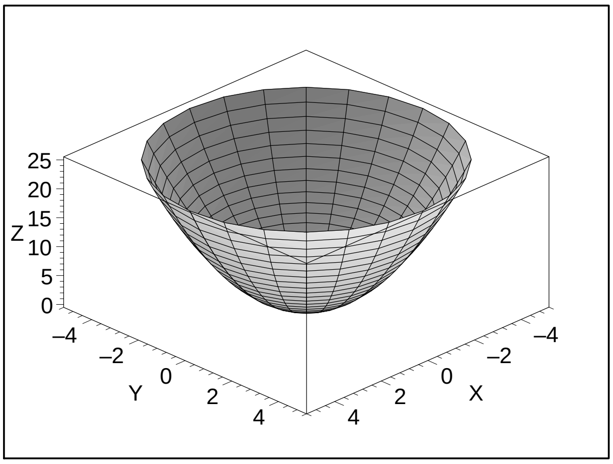


Рис.XXI.59. *График параболоида вращения*

```
> s:=[sinh(u)*cos(v),sinh(u)*sin(v),cosh(u)];
```

$$s := [\sinh(u)\cos(v),\ \sinh(u)\sin(v),\ \cosh(u)]$$

```
> G1:=plot3d(s,u=-2..2,v=0..2*Pi):
> s1:=[sinh(u)*cos(v),sinh(u)*sin(v),cosh(u)];
```

$$s1 := [\sinh(u)\cos(v),\ \sinh(u)\sin(v),\ \cosh(u)]$$

```
> s2:=[sinh(u)*cos(v),sinh(u)*sin(v),-cosh(u)];
```

$$s2 := [\sinh(u)\cos(v),\ \sinh(u)\sin(v),\ -\cosh(u)]$$

```
> G2:=plot3d(s2,u=-2..2,v=0..2*Pi):
> display(G1,G2,axes=BOXED,labels=[X,Y,Z],orientation=[20,70]);
```

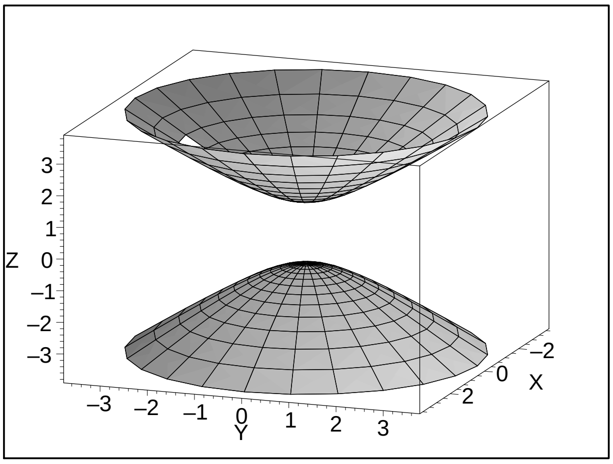


Рис.XXI.60. *График двухполостного гиперболоида*

```
> H:=[cosh(u)*cos(v),cosh(u)*sin(v),sinh(u)];
```

$H := [\cosh(u)\cos(v),\ \cosh(u)\sin(v),\ \sinh(u)]$

$$H := [\cosh(u)\cos(v),\ \cosh(u)\sin(v),\ \sinh(u)]$$

```
> G3:=plot3d(H,u=-1..1,v=0..2*Pi,axes=BOXED,labels=[X,Y,Z],orientation=
> [30,50]):
> display(G3);
```

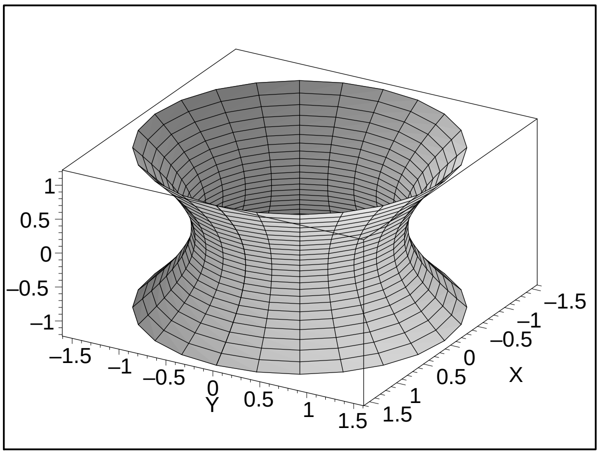


Рис.XXI.61. *График однополостного гиперболоида*

```
> HP:=x^2/2-y^2/4;
```

```
> plot3d(HP,x=-2..2,y=-2..2,style=hidden, color=red,
> grid=[50,50],axes=BOXED,labels=[X,Y,Z]);
```

$$HP := \frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{4}$$

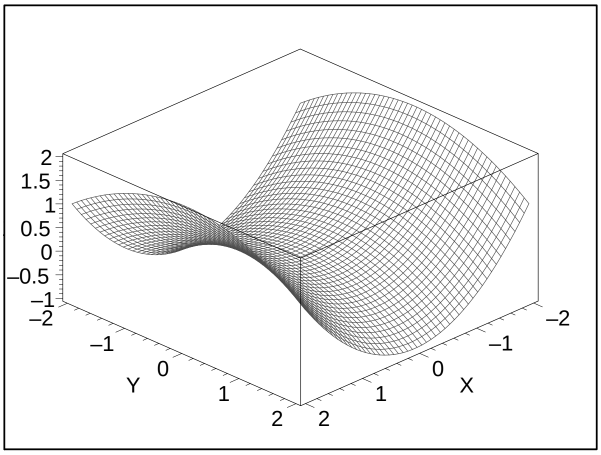


Рис.XXI.62. *График гиперболического параболоида*

График кругового конуса

α

- половинный угол при вершине конуса:

```
> Conus:=[abs(z)*tan(alpha)*cos(phi),abs(z)*tan(alpha)*sin(phi),z];
```

$$Conus := [|z| \tan(\alpha)\cos(\phi),\ |z| \tan(\alpha)\sin(\phi),\ z]$$

```
> A:=alpha=Pi/12;
```

$$A := \alpha = \frac{\pi}{12}$$

```
> Conus_1:=subs(A,Conus);
```

$$Conus\_1 := [|z| \tan(\frac{\pi}{12})\cos(\phi),\ |z| \tan(\frac{\pi}{12})\sin(\phi),\ z]$$

```
> plot3d(Conus_1,z=-2..2,phi=0..2*Pi,style=hidden, color=navy,
> grid=[50,50],axes=BOXED,labels=[X,Y,Z],orientation=[20,70]);
```

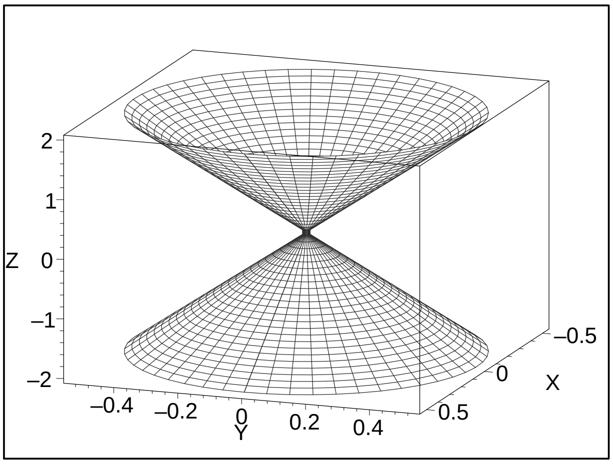


Рис.XXI.63. *График кругового конуса*

tex

Изобразим теперь прямой геликоид, заданный своим уравнением:

$$x = t\cos\varphi,\ y = t\sin\varphi,\ z = a\varphi.$$

```
> Hel:=[cos(phi)*t,sin(phi)*t,a*phi];
```

$$Hel := [\cos(\phi)\,t,\,\sin(\phi)\,t,\,a\,\phi]$$

```
> Param1:=a=1;
```

$$Param1 := a = 1$$

```
> Hel1:=subs(Param1,Hel);
```

$$Hel1 := [\cos(\phi)\,t,\,\sin(\phi)\,t,\,\phi]$$

```
> plot3d(Hel1,phi=0..4*Pi,t=0..2,numpoints=2000,color=BLACK,style=WIREF
> RAME);
```

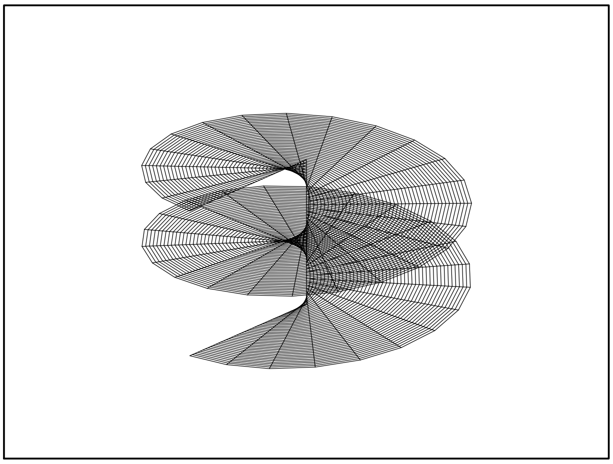


Рис.XXI.64. *Геликоид*

XXI.2 Криволинейные координаты в евклидовом пространстве

XXI.2.1 Условие невырожденности преобразований

При исследовании различных фигур в пространстве часто бывает удобно применять системы координат, отличные от декартовых, т.е., определять положение любой точки, M, упорядоченным набором трех чисел (u, v, w) *однозначно* связанных с декартовыми координатами точки (x, y, z). Таким образом, зададим три непрерывные функции трех переменных:

$$\begin{cases} x &= F(u,v,w)\,; \\ y &= G(u,v,w)\,; \\ z &= H(u,v,w) \end{cases} \tag{XXI.16}$$

Выясним, каким условиям должны удовлетворять функции $F(u,v,w)$, $G(u,v,w)$ и $H(u,v,w)$. Во - первых, как мы указали, F,G,H должны быть функциями своих аргументов, т.е., каждой тройке чисел $(u,v,w) \in \mathcal{D}$ из некоторой *области* $\mathcal{D}$ должна соответствовать одна и только одна тройка чисел $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Однако, это соответствие должно быть и *взаимно однозначным*, т.е., каждой тройке чисел $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ должна соответствовать одна и только одна тройка чисел (u,v,w).

Фиксируя значения переменных $v = v_0, w = w_0 \in \mathcal{D}$ и изменяя переменную u в области $\mathcal{D}$, получим:

$$\begin{cases} x &= F(u,v_0,w_0)\,; \\ y &= G(u,v_0,w_0)\,; \\ z &= H(u,v_0,w_0) \end{cases}, \tag{XXI.17}$$

т.е., получим:

$$x = x(u);\ y = y(u);\ z = z(u) \Longrightarrow \vec{r} = \vec{r}(u) \tag{XXI.18}$$

параметрическое уравнение кривой линии, где параметром служит новая координата u. Эта линия называется *координатной линией* u. Аналогично получим координатные линии v и w. Система координат, построенная таким образом, называется *криволинейной системой координат.*

Заметим, что строго говоря, криволинейные координаты получаются лишь в том случае, когда функции (XXI.16) не являются линейными функциями переменных u,v,w. В последнем же случае, когда:

$$\begin{cases} x &= C^1_{\prime 1}u + C^1_{\prime 2}v + C^1_{\prime 3}w + x^0\,; \\ y &= C^2_{\prime 1}u + C^2_{\prime 2}v + C^2_{\prime 3}w + y^0\,; \\ z &= C^3_{\prime 1}u + C^3_{\prime 2}v + C^3_{\prime 3}w + z^0 \end{cases}, \tag{XXI.19}$$

где $C^i_{\prime k}, (i,k = \overline{1,3})$, x^0, y^0, z^0 - некоторые числа, система координат (u,v,w) называется *косоугольной* или *аффинной*.

Выясним, что означает указанное выше условие взаимной однозначности соответствия. Дифференцируя по параметру u радиус - вектор точки $M(x,y,z)$ (XXI.18) и придавая затем переменной u фиксированное значение $u = u_0 \in \mathcal{D}$, получим согласно геометрическому смыслу производной вектор, касательный к координатной линии u в точке $M_0(\vec{r}_0)$, где $\vec{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$; $x_0 = F(u_0,v_0,w_0)$, $y_0 = G(u_0,v_0,w_0)$, $z_0 = H(u_0,v_0,w_0)$,

$$\vec{\tau}_u = \left(\frac{d}{du}F(u,v_0,w_0)\Big|_{u=u_0},\ \frac{d}{du}G(u,v_0,w_0)\Big|_{u=u_0},\ \frac{d}{du}H(u,v_0,w_0)\Big|_{u=u_0} \right) \Longrightarrow$$

$$\vec{\tau}_u = \left(\frac{\partial F}{\partial u}, \frac{\partial G}{\partial u}, \frac{\partial H}{\partial u} \right)_{u=u_0, v=v_0, w=w_0}. \tag{XXI.20}$$

Аналогично получим векторы $\vec{\tau}_v$ и $\vec{\tau}_w$, касательные к координатным линиям v и w, соответственно:

$$\vec{\tau}_v = \left(\frac{\partial F}{\partial v}, \frac{\partial G}{\partial v}, \frac{\partial H}{\partial v} \right)_{u=u_0, v=v_0, w=w_0}; \tag{XXI.21}$$

$$\vec{\tau}_w = \left(\frac{\partial F}{\partial w}, \frac{\partial G}{\partial w}, \frac{\partial H}{\partial w} \right)_{u=u_0, v=v_0, w=w_0}. \tag{XXI.22}$$

Для того, чтобы указанное соответствие было взаимно однозначным в каждой точке M_0, необходимо и достаточно, чтобы на касательных векторах $\vec{\tau}_u, \vec{\tau}_v, \vec{\tau}_w$ в каждой точке M_0 можно было построить координатную систему, т.е., чтобы эти векторы были линейно независимыми в каждой точке M_0.

Таким образом, необходимым и достаточным условием взаимной однозначности соответствия (XXI.16) является:

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} \stackrel{def}{=} \left|\begin{array}{ccc} \dfrac{\partial F}{\partial u} & \dfrac{\partial G}{\partial u} & \dfrac{\partial H}{\partial u} \\ \dfrac{\partial F}{\partial v} & \dfrac{\partial G}{\partial v} & \dfrac{\partial H}{\partial v} \\ \dfrac{\partial F}{\partial w} & \dfrac{\partial G}{\partial w} & \dfrac{\partial H}{\partial w} \end{array}\right|_{M_0} \neq 0. \qquad \text{(XXI.23)}$$

Определитель

$$J = \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}$$

в соотношении (XXI.23) называется *якобианом преобразования (XXI.16)*. Таким образом, якобиан преобразования должен быть отличен от нуля.

Точки M_*, в которых якобиан обращается в нуль или не существует, называются *особыми точками криволинейной системы координат*. Практически все криволинейные координаты имеют особые точки. Заметим, что область $\mathcal{D}$ изменения переменных (u,v,w) определяется из требования взаимной однозначности соответствия.

Рассмотрим некоторые, наиболее распространенные криволинейные системы координат.

XXI.2.2 Цилиндрические координаты

Для цилиндрических координат (ρ,φ,z) формулы связи (XXI.16) имеют вид:

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & \rho\cos\varphi\,; \\ y & = & \rho\sin\varphi\,; \\ z & = & z. \end{array}\right. \qquad \text{(XXI.24)}$$

Таким образом, при фиксированной координате z координаты ρ,φ совпадают с полярными координатами на плоскости (см. Рис.XXI.65).

Нетрудно видеть, что для того, чтобы данная система координат покрывала все евклидово пространство точек, необходимо, чтобы переменные ρ,φ,z изменялись в следующих пределах:

$$\rho\in[0,+\infty); \quad \varphi\in[0,2\pi), \quad z\in(-\infty,+\infty). \qquad \text{(XXI.25)}$$

Вычисляя якобиан преобразования (XXI.24), найдем:

$$J = \rho.$$

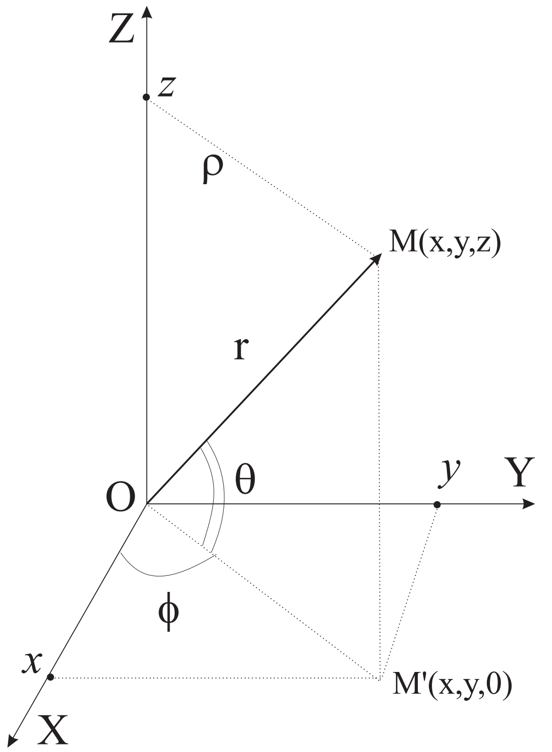


Рис.XXI.65. *Цилиндрическая и сферическая системы координат*

Поэтому все точки с $\rho = 0$ являются особыми точками цилиндрической системы координат. Однако, очевидно, что такая точка всего одна — это начало декартовой системы координат: $O(0,0,0)$. Особенность этой точки состоит в том, что этой точке соответствуют любые значения *полярного угла* φ. В таких случаях, будем говорить, что координатная особенность несущественная. Ось Oz называется *полярной осью цилиндрической системы координат.*

Обратный переход от цилиндрических координат к декартовым осуществляется с помощью формул:

$$\begin{cases} \rho &= \sqrt{x^2+y^2}\,; \\ \varphi &= \operatorname{arctg}\frac{y}{x}\,; \\ z &= z \end{cases} . \tag{XXI.26}$$

При этом надо помнить, что полярный угол изменяется в пределах $[0, 2\pi)$.

Наиболее просто в цилиндрических координатах записываются уравнение поверхностей вращения. Для этого необходимо направить полярную ось цилиндрической системы координат вдоль оси вращения поверхности. Координатные линии $\varphi = \mathrm{Const}$ называются *меридианами поверхности вращения*, а линии $z = \mathrm{Const}$ — *ее параллелями.*

XXI.2.3 Сферические координаты

Для сферической системы координат (r, φ, θ) формулы связи (XXI.16) принимают вид (см. Рис.XXI.65):

$$\begin{cases} x &= r\cos\varphi\cos\theta\,; \\ y &= r\sin\varphi\cos\theta\,; \\ z &= r\sin\theta. \end{cases} \tag{XXI.27}$$

Нетрудно видеть, что для того, чтобы данная система координат покрывала все евклидово пространство точек, необходимо, чтобы переменные r, φ, θ изменялись в следующих пределах:

$$r \in [0, +\infty); \quad \varphi \in [0, 2\pi), \quad \theta \in \left(-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right). \tag{XXI.28}$$

Вычисляя якобиан преобразования, найдем:

$$J = r^2 \cos\theta.$$

Поэтому все точки с $r = 0$ или (и) $\theta = -\pi/2, +\pi/2$ являются особыми точками сферической системы координат. Очевидно, что все эти точки лежат на оси Oz — это, во - первых, начало декартовой системы координат: $O(0,0,0)$, и кроме того все точки, соответствующие значениям $\theta = \pm\pi/2$. Эти координатные особенности также являются несущественными.

Обратный переход от сферических координат к декартовым осуществляется с помощью формул:

$$\left\{\begin{array}{lcl} r & = & \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,; \\ \varphi & = & \operatorname{arctg}\frac{y}{x}\,; \\ \theta & = & \dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \end{array}\right. . \qquad \text{(XXI.29)}$$

Наиболее просто в цилиндрических координатах записываются уравнение сферы: $r = a(=\mathrm{Const})$.

Литература

[1] Игнатьев Ю.Г. *Аналитическая геометрия. Курс лекций. Часть I.* Казань, 2004 г, компьютерная версия.

[2] Игнатьев Ю.Г. *Геометрия. Аффинные пространства 1. Курс лекций.* Казань, 1997 г., компьютерная версия

[3] Клейн Ф. *Элементарная математика с точки зрения высшей. II. Геометрия.* М., “Наука”, 1987.

[4] Постников М.М. *Лекции по геометрии. Аналитическая геометрия.* М., “Наука”, 1986.

[5] Дьедонне Ж. *Линейная алгебра и аналитическая геометрия.* М., “Наука”, 1972.

[6] Базылев В.Т., Дуничев К.И., Иваницкая В.П. *Геометрия I.* М., “Просвещение”, 1974.

[7] Базылев В.Т., Дуничев К.И., Иваницкая В.П. *Геометрия. II.* М., “Просвещение”, 1975.

[8] Кайгородов В.Р. *Курс аналитической геометрии и линейной алгебры.* Издательство Казанского университета, Казань, 1985.

[9] Ильин В.А., Позняк Э.Г. *Аналитическая геометрия.* М., “Наука”, ГИФМЛ, 1971.

[10] Базылев В.Т., Дуничев К.И., Иваницкая В.П., Кузнецова Г.Б., Майоров В.М., Скопец З.А. *Сборник задач по геометрии.* М., “Просвещение”, 1990.

[11] Погорелов А.В. *Геометрия. Учебное пособие для 6 - 10 классов средней школы.* М., “Просвещение”, 1985.

[1]

Аналитическая геометрия. Часть II.

Аффинные и Евклидовы пространства

Учебное пособие. II семестр

Автор - **Ю.Г. Игнатьев**, доктор физ.-мат. наук, профессор,
заслуженный деятель науки РТ
Редактор - **А.Р. Самигуллина**

Научно-исследовательская лаборатория
«Информационных технологий в математическом образовании»
Казанского (Приволжского) федерального университета
420035, г. Казань, ул. Кремлевская, 35
Компьютерный набор и верстка в издательской системе LaTeX2ε В.И.Ковтун.
Стилевое оформление «*BIBLIO*» Ю.Г.Игнатьева