ФГАОУ ВПО «Казанский (Приволжский) Федеральный Университет»
Институт математики и механики им. Н.И. Лобачевского

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ ЕВКЛИДОВА ПРОСТРАНСТВА

I семестр

Курс лекций для студентов математического факультета проф. Ю.Г.Игнатьева

(Специальности: математика и информатика, математика и английский язык)

Большое количество примеров по всем разделам!

Большое количество конкретных примеров!

По просьбе студентов издание дополнено большим количеством иллюстраций, выполненных с применением системы компьютерной математики Maple!

Лаборатория НИЛИТМО КФУ

Казанский университет
2013

Печатается по рекомендации учебно-методической комиссии Института математики и механики им. Н.И. Лобачевского, протокол № 6 от 13 июня 2013 г.

УДК 513

Игнатьев Ю.Г. Аналитическая геометрия. Учебное пособие. I семестр. - Казань: Казанский университет, 2013, - 184 с.

Учебное пособие является приложением к Курсу лекций Автора по аналитической геометрии и посвящено изложению основ аналитической геометрии. Курс лекций снабжен большим количеством примеров решений основных геометрических задач аналитической геометрии.

Материалы пособия предназначены для студентов математических факультетов педагогических институтов по специальностям «Математика», «Математика и информатика», «Математика и иностранный язык».

Рецензенты: **Сушков С.В.,** д-р. физ.-мат. наук, проф., (КФУ); **Мухлисов Ф.Г.**., д-р. физ.-мат. наук, проф., (КФУ)

Оглавление

Введение

В курсе лекций изложены первоначальные понятия аналитической геометрии в соответствие с требованиями нового Госстандарта Российской Федерации. Вопросы линейной алгебры (определители и матрицы, системы линейных алгебраических уравнений) даны в форме справочного материала. Теория кривых II-го порядка значительно дополнена изучением касательных к этим кривым, оптическими свойствами кривых II-го порядка и свойств диаметров этих кривых.

Курс разделен на две части — *Аналитическая геометрия* и *Задачи аналитической геометрии*. Вторая часть содержит сжатое изложение основных понятий и формул и примеры решения основных задач аналитической геометрии. Эта Часть будет особенно полезна студентам при выполнении самостоятельных контрольных работ.

Курс лекций хорошо иллюстрирован компьютерными изображениями основных геометрических фигур.

В значительной мере Курс лекций сложился под влиянием идей прекрасного Курса лекций по линейной алгебре и аналитической геометрии учителя Автора, профессора Кайгородова Владимира Романовича, блестящие и лаконичные лекции которого с удовольствием вспоминают все выпускники физического факультета Казанского университета. Ему Автор и выражает свою благодарность.

Автор

Основные обозначения

$\{a, b, \ldots\}$ - множество, состоящее из элементов $a, b, \ldots$;
$a \in A$ - "a" принадлежит множеству A ;
$a \notin A$ - "a" не принадлежит множеству A ;
$B \subset A$ - множество A включает в себя множество B ;
$B \not\subset A$ - множество A не включает в себя множество B ;
$A \cup B$ - объединение множеств A и B ;
$A \cap B$ - пересечение множеств A и B ;
$\alpha = \overline{1, n}$ - α пробегает значения от 1 до n на множестве натуральных чисел $\mathcal{N}$;
$\mathcal{R}$ - множество действительных чисел ;
$\mathcal{R}_+$ - множество неотрицательных чисел ;
$\mathcal{N}$ - множество натуральных чисел (включая 0) ;
$\mathcal{Z}$ - множество целых чисел ;
$\exists x \in X | x + a = b, \ (\forall a, b \in X)$ - "для любых a, b, принадлежащих множеству X существует элемент x, принадлежащий множеству X, такой, что $x + a = b$ " ;
$a \Longrightarrow b$ - "из a следует b" ;
$a \Longleftrightarrow b$ - "b имеет место тогда и только тогда, когда имеет место a".
$\emptyset$ - пустое множество;
$[a, b]$ - замкнутый промежуток;
(a, b) - открытый промежуток, интервал;
$(a, b]\,, [a, b)$ - полуоткрытые промежутки;
$\vec{0}$ - нуль-вектор;
$A \backslash B$ - дополнение множества B до множества A, т.е.: $A = B \cup A \backslash B$;
$A \stackrel{def}{=} B$ - "A по определению равно B".
$\{a\} \stackrel{\rightrightarrows}{=} A$ - "элемент a пробегает все множество A".

Часть I

Аналитическая геометрия

Глава I

Векторы и действия над ними

I.1 Векторы и геометрические преобразования над ними

Строгое аксиоматическое определение n - мерного евклидова пространства будет дано позднее, а сейчас мы будем опираться лишь на те геометрические понятия евклидова пространства, что рассмотрены в школьном курсе элементарной геометрии.

Хотя содержание аналитической геометрии концентрируется вокруг понятия координат, целесообразно начать ее изложение с понятия вектора и аксиоматически ввести операции с векторами, а затем уже переходить к координатной записи. Отметим, что физика и механика дают нам многочисленные примеры использования векторных величин, как, например, скорость, ускорение тела, сила и т. д. В геометрии абстрагируются от конкретного физического содержания векторных величин и говорят просто о векторе. Отметим, что далее в качестве числового поля выступает поле вещественных чисел.

Определение OI.1. *Если для двух точек A, B указано, какая из них является начальной и какая конечной, то говорят об упорядоченной паре точек (A, B) (A - начальная точка, B - конечная точка.)*

Определение OI.2. *Геометрическим вектором $\overrightarrow{AB}$ называется всякая упорядоченная пара точек (A, B).*

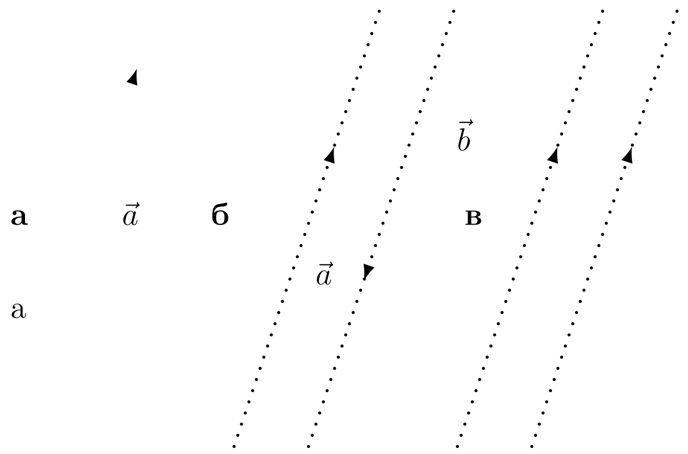


Рис. I.1. *а — вектор* **AB***; б — коллинеарные векторы; в — равные векторы.*

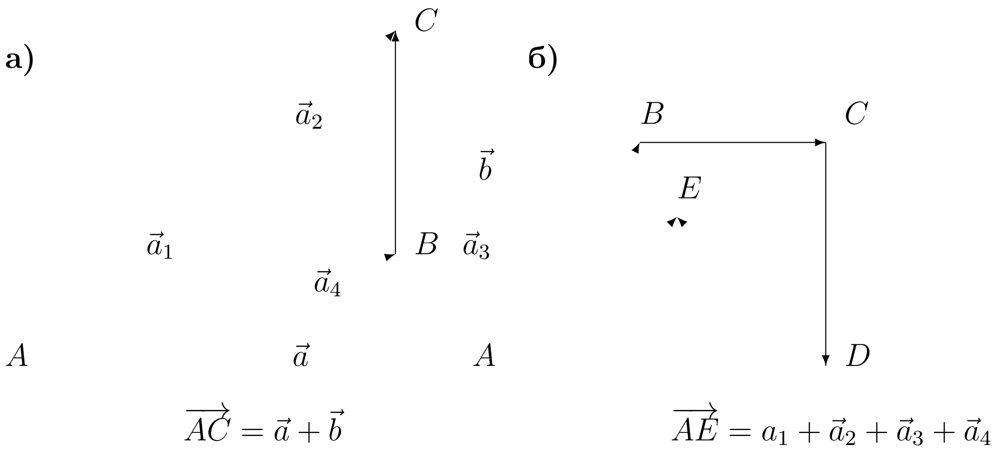


Рис. I.2.

Определение OI.3. *Векторы называются коллинеарными, если они лежат на одной прямой либо на параллельных прямых.*

Определение OI.4. *Вектор называется нулевым (пишется $\vec{0}$), если его начало и конец совпадают.*

Очевидно, что длина нулевого вектора равна нулю, а направление не определено (можно считать, что его направление какое угодно). Вследствие этого нулевой вектор коллинеарен с любым вектором пространства.

Определение OI.5. *Два вектора считаются равными, если их длины*

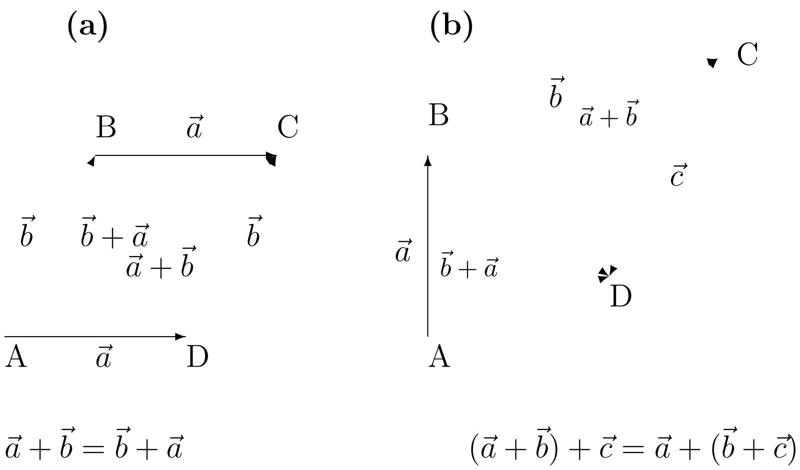


Рис. I.3. *К доказательству коммутативности (a) и ассоциативности (b) операции сложения векторов*

равны и они имеют одинаковые направления (сонаправлены). Пишем: $\vec{a}=\vec{b}$ *(см. Рис. I.1).*

Из последнего определения следует, что каковы бы ни были точка P и вектор $\vec{a}$, всегда найдется такая точка Q, что $\overrightarrow{PQ}=\vec{a}$. Это означает, что точка приложения вектора $\vec{a}$ может быть выбрана *произвольно*. Такие векторы называют *свободными*. В дальнейшем мы будем рассматривать только свободные векторы.

Для свободных векторов введем две линейные операции и укажем их свойства.

Определение OI.6. *Суммой векторов* $\vec{a}_1+\vec{a}_2+\ldots+\vec{a}_k$ *называется вектор* $\vec{a}$ *пишем* $(\vec{a}=\vec{a}_1+\vec{a}_2+\ldots+\vec{a}_k)$*, который замыкает ломаную линию, построенную из данных векторов так, что начало каждого последующего вектора совмещается с концом предыдущего.*

Замыкающий вектор $\vec{a}$ направлен из начала первого вектора к концу последнего. (см. Рис. I.2). Операция сложения векторов обладает следующими свойствами.

Свойство $\bar{\text{C}}$I.1. *(коммутативность). Для любых векторов* $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$.

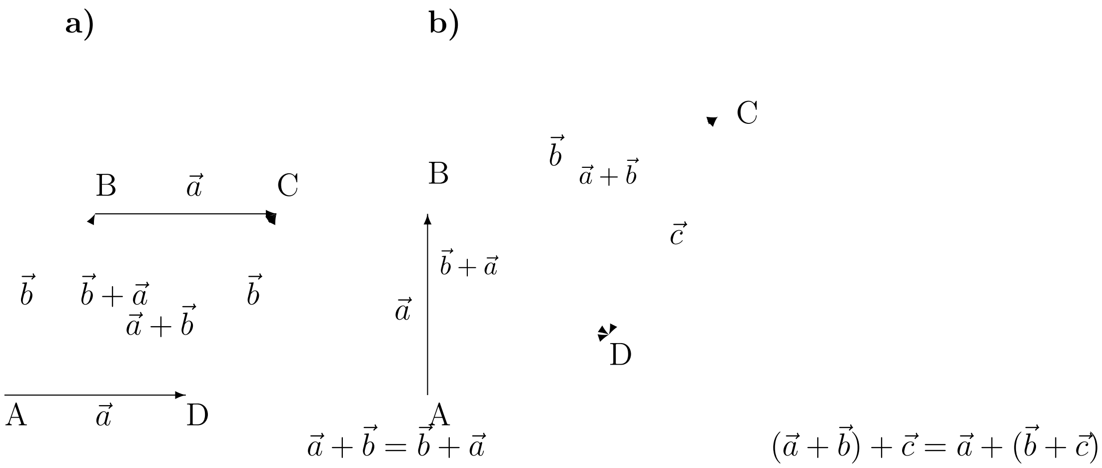


Рис. I.4.

В самом деле для коллинеарных векторов свойство очевидно. В случае неколлинеарных векторов (Рис. V.54.a) $\overrightarrow{AD} = \vec{a} = \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{DC} = \vec{b} = \overrightarrow{AB}$. Поэтому

$$\vec{a}+\vec{b} = \overrightarrow{AC} = \vec{b}+\vec{a}.$$

Свойство $\bar{\text{C}}$I.2. *(ассоциативность). Для любых векторов* $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c} = \vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$.

Действительно (Рис. V.54 b)) $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD}$ и $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD}$. Поэтому $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c} = \vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$.

Свойство $\bar{\text{C}}$I.3. *Нуль - вектор является нулем сложения:* $\vec{a}+\vec{0} = \vec{a}$.

Прежде чем переходить к формулировке четвертого свойства, дадим определение противоположного вектора.

Определение OI.7. *Вектор $\vec{a}\,'$ (обозначается также символом $-\vec{a}$) называется противоположным по отношению к вектору $\vec{a}$, если длины векторов $\vec{a}$ и $\vec{a}'$ равны, а направления противоположны.*

Поскольку для любых точек выполнено $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AA}$, то можно сформулировать

Свойство $\bar{\text{C}}$I.4. *Для любого вектора $\vec{a}$ существует противоположный*

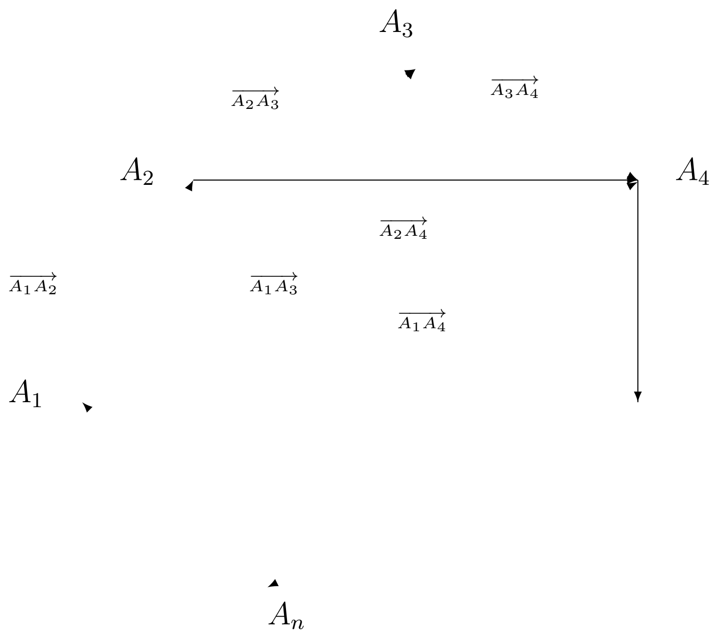


Рис. I.5. *К доказательству основного векторного тождества*

вектор $\vec{a}\,'$, *такой, что* $\vec{a} + \vec{a}\,' = \vec{0}$.

Следствие CI.1. *Сумма векторов, являющихся сторонами любой замкнутой ломаной, причем таких, что начало каждого последующего совпадает с концом предыдущего, равна нуль-вектору.*

Доказательство: $\langle\langle$ Действительно, из правила треугольника имеем:
$\overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{A_2A_3} = \overrightarrow{A_1A_3}$;
$\overrightarrow{A_1A_3} + \overrightarrow{A_3A_4} = \overrightarrow{A_1A_4}$;
.................................;
$\overrightarrow{A_1A_{n-2}} + \overrightarrow{A_{n-2}A_{n-1}} = \overrightarrow{A_1A_n}$.
Таким образом:
$\overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{A_2A_3} + \overrightarrow{A_3A_4} + \ldots + \overrightarrow{A_{n-1}A_n} = \overrightarrow{A_1A_n}$.
Заменяя вектор $\overrightarrow{A_1A_n}$ противоположным, получим окончательно:

$$\overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{A_2A_3} + \overrightarrow{A_3A_4} + \ldots + \overrightarrow{A_{n-1}A_n} + \overrightarrow{A_nA_1} = \vec{0}\,. \qquad \text{(I.1)}$$

$\rangle\rangle$

Векторное равенство (I.1) называется *основным векторным тождеством для* *многоугольников.*[1]

Перейдем к следующей операции — умножению вектора на вещественное число.

Определение OI.8. *Произведением вектора* $\vec{a}$ *на число* λ *называется вектор (символ* $\lambda\vec{a}$*) такой, что* (1), $|\lambda\vec{a}| = |\lambda| \cdot |\vec{a}|$;
(2), *векторы* $\vec{a}$ *и* $\lambda\vec{a}$ *сонаправлены, если* $\lambda > 0$, *и противоположно направлены, если* $\lambda < 0$, *и* $\lambda\vec{a} = \vec{0}$, *если* $\lambda = 0$.

Операция произведения вектора на число обладает следующими четырьмя свойствами, доказательства которых просты.

Свойство $\bar{\text{C}}$I.5. $1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$ *для любого вектора* $\vec{a} \neq 0$.

Свойство $\bar{\text{C}}$I.6. $(\lambda + \mu)\vec{a} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{a}$ *для любых* $\lambda, \mu \in R$ *и любого вектора* $\vec{a}$.

Свойство $\bar{\text{C}}$I.7. $(\lambda\mu)\vec{a} = \lambda(\mu\vec{a})$ *для любых* $\lambda, \mu \in R$ *и любого* $\vec{a}$.

Свойство $\bar{\text{C}}$I.8. $\lambda(\vec{a} + \vec{b}) = \lambda\vec{a} + \lambda\vec{b}$ *для любого* $\lambda \in R$ *и любых векторов* $\vec{a}$ *и* $\vec{b}$.

Из определения операции умножения вектора на число следует, что противоположный вектор $\vec{a}\,'$ может быть получен путем умножения вектора $\vec{a}$ на -1 : $\vec{a}\,' = (-1) \cdot \vec{a}$. Отсюда и обозначение $-\vec{a}$, принятое для противоположного вектора.

Определение OI.9. *Разностью векторов* $\vec{a}$ *и* $\vec{b}$ *называем сумму вектора* $\vec{a}$ *и противоположного вектора* $\vec{b}\,'$. *Обозначаем разность символом* $\vec{a} - \vec{b}$. *Итак,* $\vec{a} - \vec{b} \overset{def}{=} \vec{a} + (-1) \cdot \vec{b}$. *(см. Рис. I.6)*

[1] Заметим, что при его доказательстве не предполагалось, что многоугольник плоский.

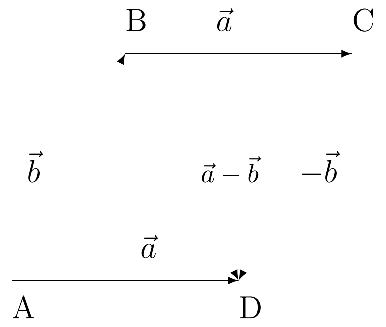


Рис. I.6.

Пользуясь операцией умножения вектора на число, выведем формулу для нахождения орта вектора.

Определение OI.10. *Ортом вектора $\vec{a}$ называется вектор единичной длины, имеющий тоже направление, что и вектор $\vec{a}$. Орт вектора обозначают символом $\vec{a}^{\,0}$ (либо $\vec{e}$).*

По определению $\vec{a}^{\,0} = \lambda\vec{a}$, где $\lambda > 0$. Но $|\vec{a}^{\,0}| = 1$. Поэтому $|\lambda\vec{a}| = \lambda \cdot |\vec{a}| = 1$. Следовательно, множитель $\lambda = \dfrac{1}{|\vec{a}|}$. Окончательно можно записать, что

$$\vec{a}^{\,0} = \frac{1}{|\vec{a}|}\vec{a} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}. \tag{I.2}$$

Обе линейные операции позволяют нам рассмотреть *линейные комбинации* векторов $\vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \ldots + \vec{a}_s$ с коэффициентами $\vec{\lambda}_1 + \vec{\lambda}_2 + \ldots + \vec{\lambda}_s$

$$\vec{l} = \lambda_1\vec{a}_1 + \lambda_2\vec{a}_2 \cdots + \lambda_s\vec{a}_s. \tag{I.3}$$

Определение OI.11. *Система векторов $\vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \ldots + \vec{a}_s$ называется линейно - зависимой, если существуют такие числа $\lambda_1 \ldots \lambda_s$, среди которых хотя бы одно не равно нулю, что выполнено*

$$\lambda_1\vec{a}_1 + \lambda_2\vec{a}_2 \cdots + \lambda_s\vec{a}_s = \vec{0}. \tag{I.4}$$

Если (I.4) для системы $\vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \ldots + \vec{a}_s$ выполнено тогда и только тогда, когда все $\lambda_i = 0$, то система векторов называется *линейно - независимой*.

Приводимые ниже теоремы полностью разъясняют геометрический смысл линейной зависимости векторов.

Теорема TI.1. *Для того, чтобы система, состоящая из одного вектора, была линейно - зависимой, необходимо и достаточно, чтобы он был нулевым вектором.*

Доказательство: $\langle\langle$ В самом деле, пусть система $(\vec{a})$, состоящая из одного вектора, линейно зависима. Следовательно, $\lambda\vec{a} = \vec{0}$, где $\lambda \neq 0$. Вектор $\vec{a}$ — нулевой. Пусть, обратно, вектор $\vec{a}$ есть нуль - вектор. Очевидно, что при любом $\lambda \neq 0$ имеем $\lambda\vec{a} = \vec{0}$.
$\rangle\rangle$

Вывод из этой теоремы можно сформулировать и так:

Каждый ненулевой вектор есть линейно - независимый вектор.

Теорема TI.2. *Для того, чтобы система, состоящая из двух векторов, была линейно - зависимой, необходимо и достаточно, чтобы векторы были коллинеарны.*

Доказательство: $\langle\langle$ Действительно, если система $(\vec{a}, \vec{b})$ из двух векторов линейно - зависима, то $\lambda\vec{a} + \mu\vec{b} = \vec{0}$, где $\lambda \neq 0$ или $\mu \neq 0$. Если $\lambda \neq 0$, то $\vec{a} = \left(-\dfrac{\mu}{\lambda}\right)\vec{b}$ и векторы коллинеарны. Если $\mu \neq 0$, то $\vec{b} = \left(-\dfrac{\lambda}{\mu}\right)\vec{a}$. Имеем коллинеарные векторы.

Пусть, обратно, векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны между собой. Если хотя бы один из них нулевой (например, $\vec{a} = \vec{0}$), то очевидным образом выполняется $\lambda\vec{a} + 0 \cdot \vec{b} = \vec{0}$, где $\lambda \neq 0$. Система линейно - зависима. Если же ни один из векторов не нулевой, то согласно определениям операции умножения вектора на число и орта вектора $\vec{a}$ получим $\vec{b} = \varepsilon|\vec{b}|\dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$, где $\varepsilon = \pm 1$, когда направления векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ совпадают, $\varepsilon = -1$, когда направления векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ противоположны. Обозначив, $\varepsilon \cdot \dfrac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|} = \lambda$, получим $\lambda\vec{a} - \vec{b} = \vec{0}$, где $\lambda \neq 0$. Линейная зависимость имеет место. $\rangle\rangle$

Вывод из доказанной теоремы может быть сформулирован следующим образом:

> Любая пара неколлинеарных векторов образует систему линейно - независимых векторов.

Определение OI.12. *Векторы, расположенные в одной плоскости или параллельные одной и той же плоскости, называются компланарными.*

Теорема TI.3. *Для того, чтобы система, состоящая из трех векторов, была линейно - зависимой, необходимо и достаточно, чтобы тройка векторов была компланарной.*

Доказательство: $\langle\langle$ *Необходимость.* Дано, что $(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$ — линейно - зависимая тройка. Это означает, что выполнено $\lambda\vec{a}+\mu\vec{b}+\nu\vec{c}=\vec{0}$, где хотя бы один из коэффициентов отличен от нуля. Например, $\lambda\neq 0$. В таком случае

$$\vec{a}=\left(-\frac{\mu}{\lambda}\right)\vec{b}+\left(-\frac{\nu}{\lambda}\right)\vec{c}$$

— вектор $\vec{a}$ есть диагональ параллелограмма, построенного на векторах $\left(-\frac{\mu}{\lambda}\right)\vec{b}$ и $\left(-\frac{\nu}{\lambda}\right)\vec{c}$. Это означает (в силу коллинеарности векторов $\vec{b}$ и $\left(-\frac{\mu}{\lambda}\right)\vec{b}$, $\vec{c}$ и $\left(-\frac{\nu}{\lambda}\right)\vec{c}$), что тройка векторов $(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$ лежит в плоскости указанного параллелограмма и, следовательно, компланарна. В случае, когда хотя бы один из тройки векторов нулевой, доказательство становится очевидным.

Достаточность. Пусть тройка $(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$ компланарна. Если хотя бы один из векторов нулевой (например, $\vec{a}=\vec{0}$), то имеет место равенство $\lambda\cdot\vec{a}+0\cdot\vec{b}+0\cdot\vec{c}=\vec{0}$, где $\lambda\neq 0$, и в данном случае тройка является линейно - зависимой. Пусть ни один из векторов не является нулевым. Приведем их к общему началу O и спроектируем конец вектора $\vec{a}$ (проектирующие прямые строим параллельно векторам $\vec{b}$ и $\vec{c}$) на прямые, на которых лежат векторы $\vec{b}$ и $\vec{c}$: $\vec{a}=\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}$. Но $\overrightarrow{OA}=\lambda\vec{c}$ ($\overrightarrow{OA}$ коллинеарен $\vec{c}$), $\overrightarrow{AB}=\mu\vec{b}$ ($\overrightarrow{AB}$ коллинеарен вектору $\vec{b}$). Таким образом, имеет место равенство $\vec{a}-\lambda\vec{c}-\mu\vec{b}=\vec{0}$. Тройка векторов линейно - зависима. Данные рассуждения справедливы, когда $\vec{b}$ и $\vec{c}$ — неколлинеарные векторы (что и отражено на Рис. I.7). Если же $\vec{b}$ и $\vec{c}$

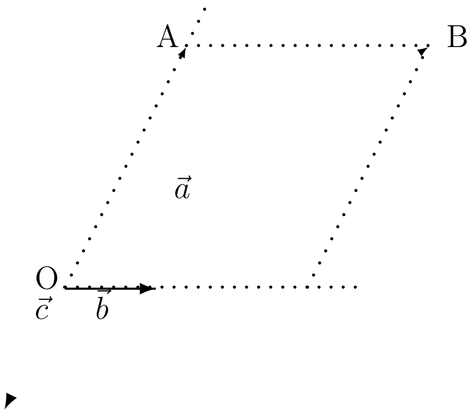


Рис. I.7.

коллинеарны, то в силу теоремы TI.2

$$\vec{b} - \lambda\vec{c} + 0\vec{a} = \vec{0}$$

— имеем линейно - зависимую систему векторов.
$\rangle\rangle$

Вывод из теоремы TI.3 таков:

> Всякая некомпланарная тройка векторов есть линейно - независимая система векторов.

Теорема TI.4. *Всякая четверка векторов (в трехмерном пространстве) линейно - зависима.*

Доказательство: $\langle\langle$ Если все четыре вектора компланарны, то в силу теоремы TI.3 они линейно - зависимы. Пусть векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ некомпланарны, а x — произвольный четвертый вектор. Приведем четверку к общему началу (Рис. I.8). Из конца вектора $\overrightarrow{OB} = x$ проведем прямую, параллельную вектору $\vec{c}$, до встречи в точке A с плоскостью векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Из точки A проведем прямые, параллельные $\vec{a}$ и $\vec{b}$, до пересечения с прямыми, на которых лежат $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Имеем: $x = \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB}$. Но $\overrightarrow{OA} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{b}$, $\overrightarrow{AB} = \nu\vec{c}$ и, следовательно,

$$x = \lambda\vec{a} + \mu\vec{b} + \nu\vec{c}, \tag{I.5}$$

что и доказывает линейную зависимость четверки векторов. $\rangle\rangle$

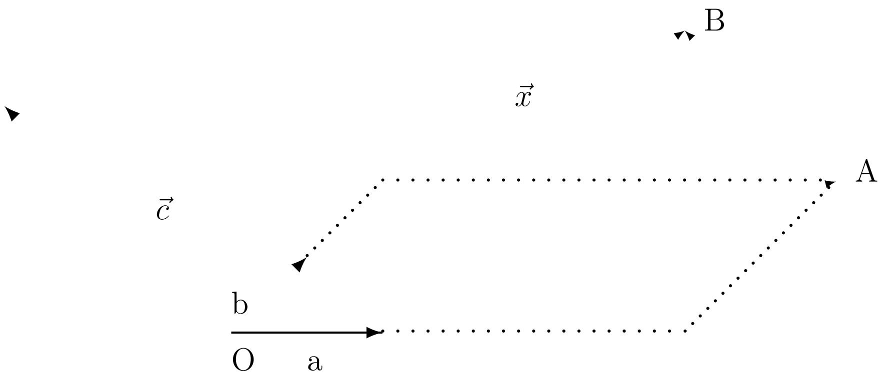


Рис. I.8.

I.2 Базис и аффинные координаты

Рис. I.9. *а) — правая тройка;*
б) — левая тройка

Определение OI.13. *Тройка $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ (пара $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$) линейно - независимых векторов называется базисом в пространстве (на плоскости), если любой вектор $\vec{x}$ может быть представлен в виде линейной комбинации:*

$$\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + x_3\vec{e}_3 : \qquad (\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2).$$

Числа (x_1, x_2, x_3) (а на плоскости — (x_1, x_2)) называются координатами $\vec{x}$ в указанном базисе.

Из этого определения на основании теоремы TI.3 вытекает, что

> Всякая пара неколлинеарных векторов образует базис на плоскости.

На основании теоремы TI.4 вытекает:

> Всякая тройка некомпланарных векторов образует базис в пространстве.

Определение OI.14. *Упорядоченная тройка некомпланарных векторов* $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ *называется правой (левой) тройкой, если, будучи приведенной к общему началу, кратчайший поворот вокруг* $\vec{e}_3$ *от* $\vec{e}_1$ *к* $\vec{e}_2$ *совершается против часовой стрелки (по часовой стрелке)(см. Рис. I.9). Соответственно базис в пространстве называется правым (левым).*

Определение OI.15. *Упорядоченная пара неколлинеарных векторов* $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ *называется правой (левой), если, будучи приведенной к общему началу, кратчайший поворот на плоскости от* $\vec{e}_1$ *к* $\vec{e}_2$ *происходит против часовой стрелки (по часовой стрелке). Соответственно базис на плоскости называется правым (левым).*

Теорема TI.5. *Координаты вектора в данном базисе определены однозначным образом.*

Доказательство: $\langle\langle$ Действительно, если предположить, что это не так

$$\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + x_3\vec{e}_3$$

и одновременно:

$$\vec{x} = y_1\vec{e}_1 + y_2\vec{e}_2 + y_3\vec{e}_3,$$

то при вычитании векторов получим:

$$(x_1 - y_1)\vec{e}_1 + (x_2 - y_2)\vec{e}_2 + (x_3 - y_3)\vec{e}_3 = \vec{0}. \tag{I.6}$$

Но для тройки линейно - независимых векторов равенство (I.6) имеет место лишь тогда, когда все коэффициенты равны нулю. Таким образом, $x_1 = y_1$, $x_2 = y_2$, $x_3 = y_3$. Теорема доказана. $\rangle\rangle$

Теорема TI.6. *При сложении векторов их координаты складываются, а при умножении вектора на число его координаты умножаются на это число.*

Доказательство: $\langle\langle$ В самом деле, пусть

$$\vec{a} = \sum_{i=1}^{3} a_i \vec{e}_i, \ \vec{b} = \sum_{i=1}^{3} b_i \vec{e}_i.$$

Тогда

$$\vec{a} + \vec{b} = \sum_{i=1}^{3} a_i \vec{e}_i + \sum_{i=1}^{3} b_i \vec{e}_i = \sum_{i=1}^{3} (a_i + b_i) \vec{e}_i.$$

Согласно определению $(a_1+b_1, a_2+b_2, a_3+b_3)$ есть координаты вектора $\vec{a}+\vec{b}$. Умножим вектор $\vec{a}$ на число λ. Имеем

$$\lambda \vec{a} = \lambda \sum_{i=1}^{3} a_i \vec{e}_i = \sum_{i=1}^{3} (\lambda a_i) \vec{e}_i.$$

Числа $(\lambda a_1, \lambda a_2, \lambda a_3)$ есть координаты вектора $\lambda \vec{a}$. $\rangle\rangle$

Обе теоремы имеют место и для вектора плоскости.

Определение OI.16. *Аффинной системой координат в пространстве* $\Re\{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2,$ *(на плоскости* $\Re\{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2\}$*) называется совокупность некоторой точки* O *и базиса* $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ *(*$\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$*), приведенного к общему началу в этой точке.*

Определение OI.17. *Аффинными координатами точки* M *в пространстве (на плоскости) в данной аффинной системе координат* $\Re\{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ *(*$\Re\{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2\}$*) называются координаты вектора* $\overrightarrow{OM}$ *относительно базиса* $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ *(*$\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$*)*
(Рис. I.10).

Координаты $\overrightarrow{OM}$, как показано нами, определены однозначным образом в данном базисе. Тем самым показано, что каждой точке M однозначным способом сопоставлено три числа — ее аффинные координаты.

Отметим, что в аналитической геометрии употребляются только правые системы координат, т.е. тройка (пара) $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ $((\vec{e}_1, \vec{e}_2))$ в системе координат $\Re\{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ $(\Re\{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2\})$ есть правая тройка векторов.

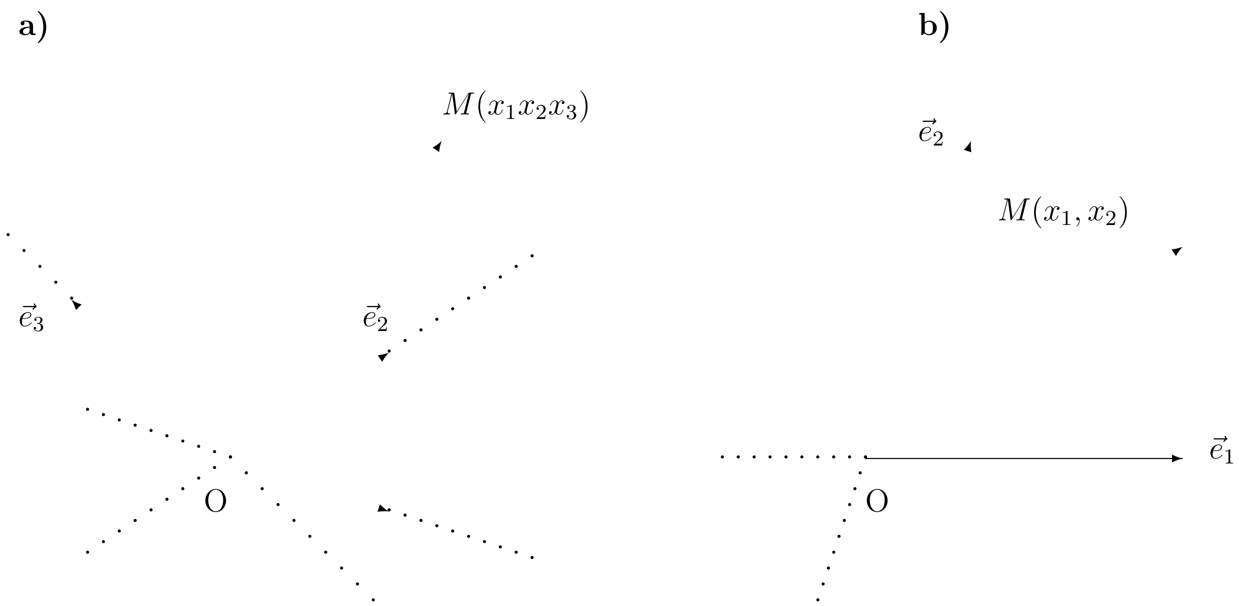


Рис. I.10. *а) — аффинная система координат в пространстве; б) — аффинная система координат на плоскости.*

I.3 Проекция вектора на направление

Прежде чем переходить к наиболее используемым в приложениях прямоугольным системам координат, являющимся частным случаем аффинных, остановимся на свойствах проекции вектора на ось.

Пусть задана прямая и с помощью орта $\vec{i}$ на ней указано направление. Такая прямая называется осью.

Определение OI.18. *Проекцией вектора $\overrightarrow{AB}$ на ось Ox называется длина отрезка $A'B'$ этой оси, заключенного между основаниями перпендикуляров, опущенных из A и B на ось, взятая со знаком плюс, если направление $\overrightarrow{A'B'}$ совпадает с направлением $\vec{i}$, и взятая со знаком минус, если направление вектора $\overrightarrow{A'B'}$ и $\vec{i}$ противоположны. Символически записываем следующим образом:*

$$\text{Пр}_{\vec{Ox}}\,\overrightarrow{AB} = \begin{cases} |\overrightarrow{A'B'}|, & \text{если сонаправлены векторы } \vec{i} \text{ и } \overrightarrow{A'B'}. \\ -|\overrightarrow{A'B'}|, & \text{если направления } \vec{i} \text{ и } \overrightarrow{A'B'} \text{ противоположны.} \end{cases}$$

Углом вектора $\overrightarrow{AB}$ $(= \overrightarrow{A'B_1})$ с осью Ox называется угол α (Рис. I.11), на который нужно кратчайшим способом повернуть ось Ox около точки A', чтобы совместить с вектором $\overrightarrow{A'B_1}$ $(0 \leq \alpha \leq \pi)$.

Рис. I.11. *Проекция вектора на ось*

Теорема TI.7. *Проекция вектора на ось равна длине вектора, умноженного на косинус угла α.*

Доказательство: $\langle\langle$ Пусть α — острый угол. Из треугольника $A'B_1B'$ (Рис. I.11a)) имеем:

$$\text{Пр}_{\vec{Ox}}\, \overrightarrow{AB} = |\overrightarrow{A'B'}| = |\overrightarrow{A'B_1}| \cos\alpha = |\overrightarrow{AB}| \cos\alpha.$$

Пусть α — тупой угол (Рис. I.11b)). Из треугольника $B'B_1A'$ имеем:

$$\text{Пр}_{\vec{Ox}}\, \overrightarrow{AB} = -|\overrightarrow{A'B'}| = -|\overrightarrow{A'B_1}| \cos(\pi - \alpha) = |\overrightarrow{A'B_1}| \cos\alpha = |\overrightarrow{AB}| \cos\alpha.$$

Если длина вектора $\overrightarrow{AB}$ равна единице (имеем орт - вектор), то $\text{Пр}_{\vec{Ox}}\, \overrightarrow{AB} = \cos\alpha$. Косинус угла α называется *направляющим* косинусом единичного вектора с осью Ox. Таким образом, теорема доказана. $\rangle\rangle$

Теорема TI.8. *При умножении вектора на число λ его проекция умножается на то же число.*

Доказательство: $\langle\langle$ Пусть вектор $\vec{a}$ составляет с осью Ox угол α и $\lambda > 0$. В таком случае вектор $\lambda\vec{a}$ с осью Ox составляет тот же угол, а вектор $(-\lambda\vec{a})$

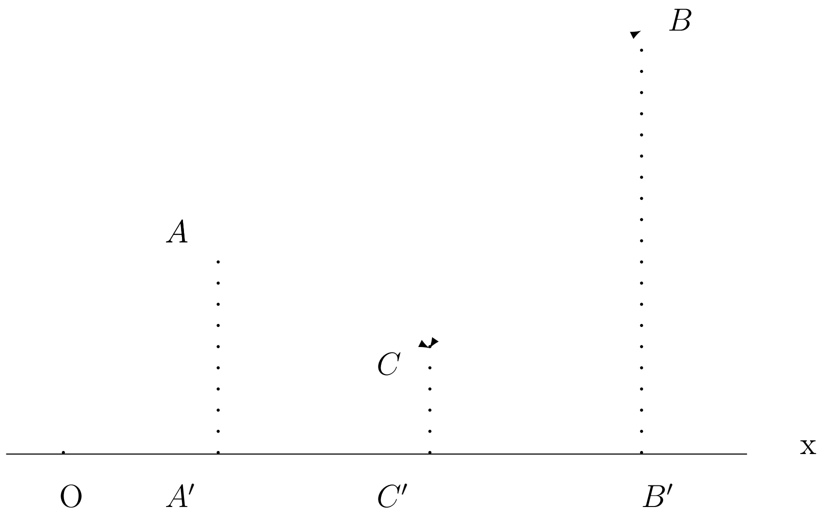


Рис. I.12.

— угол $(\pi - \alpha)$. Согласно теореме TI.7 имеем

$$\text{Пр}_{\vec{Ox}}\,(\lambda\vec{a}) = |\lambda\vec{a}|\cos\alpha = \lambda|\vec{a}|\cos\alpha = \lambda\text{Пр}_{\vec{Ox}}\,\vec{a}$$

и

$$\text{Пр}_{\vec{Ox}}\,(-\lambda\vec{a}) = |-\lambda\vec{a}|\cos(\pi-\alpha) = -\lambda|\vec{a}|\cos\alpha = -\lambda\text{Пр}_{\vec{Ox}}\,\vec{a}.$$

Таким образом, теорема доказана. $\rangle\rangle$

Теорема TI.9. *Проекция суммы двух векторов на ось равна сумме проекций этих векторов на ту же ось.*

Доказательство: $\langle\langle$ Рассмотрим сумму двух векторов $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$. Для доказательства теоремы спроектируем точки A, B, C на ось Ox и получим три точки A', B', C' на оси. В общем случае возможны следующие 6 случаев расположения и направления штрихованных точек на оси: (1)A', B', C'; (2) A', C', B'; (3)B', A', C'; (4)B', C', A'; (5)C', A', B'; (6)C', B', A'.

Доказательство проведем для случая (2) (Рис. I.12). Имеем

$$\begin{cases} \text{Пр}_{\vec{Ox}}\,(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) = \text{Пр}_{\vec{Ox}}\,\overrightarrow{AC} = |\overrightarrow{A'C'}| \\ \text{Пр}_{\vec{Ox}}\,\overrightarrow{AB} + \text{Пр}_{\vec{Ox}}\,\overrightarrow{BC} = |\overrightarrow{A'C'}| - |\overrightarrow{B'C'}| = |\overrightarrow{A'C'}| \end{cases}$$

Из сравнения соотношений вытекает, что

$$\text{Пр}_{\vec{Ox}}\,(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) = \text{Пр}_{\vec{Ox}}\,\overrightarrow{AB} + \text{Пр}_{\vec{Ox}}\,\overrightarrow{BC}$$

Аналогично доказываются остальные случаи. Теорема TI.9 по индукции распространяется на любое число слагаемых векторов. $\rangle\rangle$

Определение OI.19. *Система координат* $\Re\{O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\}$ *в пространстве (на плоскости* $\Re\{O;\vec{i},\vec{j}\}$*) называется декартовой прямоугольной системой координат, если базисные векторы* $\{\vec{i},\vec{j},\vec{k}\}$ *(пара* $\{\vec{i},\vec{j}\}$*) попарно ортогональны и имеют длину, равную единице.*

Базисные векторы $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ соответственно называются *ортами координатных осей* Ox, Oy, Oz (на плоскости (Ox, Oy)).

Определение OI.20. *Декартовыми прямоугольными координатами точки* M *в пространстве (на плоскости) относительно выбранной прямоугольной системы координат называются координаты вектора* $\overrightarrow{OM}$ *в ортонормированном базисе* $\{\vec{i},\vec{j},\vec{k}\}$ *(на плоскости* $\{\vec{i},\vec{j}\}$*), т.е.*

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \Rightarrow M(x,y,z)$$

Из определения проекции вектора на ось следует геометрический смысл прямоугольных координат точки M

$$x = \text{Пр}_{\vec{Ox}}\,\overrightarrow{OM}, \quad y = \text{Пр}_{\vec{Oy}}\,\overrightarrow{OM}, \quad z = \text{Пр}_{\vec{Oz}}\,\overrightarrow{OM}.$$

Для плоскости имеем буквальное повторение сказанного.

I.4 Полярная система координат на плоскости

Некоторые задачи аналитической геометрии на плоскости целесообразно решать используя не прямоугольную систему координат на плоскости а *полярную систему координат*, которая строится следующим образом. Выбираем точку O на плоскости (полюс) и ось с ортом $\vec{i}$ (полярная ось) (Рис. I.13). Любой точке плоскости можно однозначно сопоставить (за исключением полюса) пару чисел (*полярные координаты*) $r = |\overrightarrow{OM}|$ и φ — угол между $\overrightarrow{OM}$ и полярной осью. При этом считаем $\varphi > 0$, если поворот от $\vec{i}$ к $\overrightarrow{OM}$ совершается против часовой стрелки. Полюс задается одним числом $r = 0$. Когда $0 \le r < \infty$ и $0 \le \varphi < 2\pi$ (или $-\pi < \varphi \le \pi$), мы пробегаем все множества точек плоскости. Из определения проекции вектора на ось и с учетом геометрического смысла прямоугольных координат точки следует связь полярных и прямоугольных координат

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi, \end{cases} \qquad \begin{cases} r & = \sqrt{x^2+y^2} \\ \mathrm{tg}\varphi & = \dfrac{y}{x}. \end{cases} \tag{I.7}$$

Замечание. В задачах, связанных с перемещением материальной точки на плоскости, часто требуют, чтобы переменная φ менялась в пределах $-\infty < \varphi < +\infty$.

Рис. I.13. *Полярная система координат*

I.5 Скалярное произведение векторов и его приложения

Определение OI.21. *Углом α между векторами $\vec{a} \neq 0$ и $\vec{b} \neq 0$ называется наименьший угол между этими векторами, приведенными к общему началу. Его обозначение $\alpha = \widehat{\vec{a}\,\vec{b}}$. Очевидно, что $0 \leq \alpha \leq \pi$.*

Определение OI.22. *Скалярным произведением двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ (пишем $(\vec{a}\,\vec{b})$) называется число, равное произведению длин этих векторов на косинус угла между ними*

$$\left(\vec{a}\,\vec{b}\right) = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\widehat{\vec{a}\,\vec{b}}. \tag{I.8}$$

Обращаясь к формуле, по которой вычисляется проекция вектора на ось, можно (I.8) записать в виде

$$(a). \quad \left(\vec{a}\,\vec{b}\right) = |\vec{a}|\text{Пр}_{\vec{a}}\,\vec{b}; \qquad (b) \quad \left(\vec{a}\,\vec{b}\right) = |\vec{b}|\text{Пр}_{\vec{b}}\,\vec{a}. \tag{I.9}$$

> Таким образом, скалярное произведение двух векторов равно длине одного из них, умноженной на проекцию второго вектора на ось, направление которой определяется первым вектором.

Свойство $\bar{\text{С}}$I.9. *Для любых $\vec{a}$ и $\vec{b}$ имеем $(\vec{a}\vec{b}) = (\vec{b}\vec{a})$.*

В самом деле, из равенства $\cos\widehat{\vec{a}\,\vec{b}} = \cos\widehat{\vec{b}\,\vec{a}}$ следует коммутативность скалярного произведения.

Свойство $\bar{\text{С}}$I.10. *Для любого $\vec{a} \neq \vec{0}$; $\left(\vec{a}\,\vec{a}\right) = \vec{a}^2 = |\vec{a}|^2 > 0$.*

Скалярный квадрат вектора равен нулю тогда и только тогда, когда $\vec{a}$ есть нуль - вектор.

Свойство $\bar{\text{С}}$I.11. *Для любого $\lambda \in R$ и любых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$* $\Big((\lambda\vec{a})\cdot\vec{b}\Big) = \lambda\left(\vec{a}\,\vec{b}\right)$.

Действительно, $\Big((\lambda\vec{a})\cdot\vec{b}\Big) = |\vec{b}|\text{Пр}_{\vec{b}}\,(\lambda\vec{a}) = |\vec{b}|\lambda\text{Пр}_{\vec{b}}\,\vec{a} = \lambda\left(\vec{a}\,\vec{b}\right)$.

Свойство $\bar{\text{С}}$I.12. *Для любых векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ выполнено* $\Big(\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})\Big) = \left(\vec{a}\,\vec{b}\right) + \left(\vec{a}\,\vec{c}\right)$.

На основании (I.9 а) имеем

$$\Big(\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})\Big) = |\vec{a}|\text{Пр}_{\vec{a}}\,(\vec{b}+\vec{c}) = |\vec{a}|\text{Пр}_{\vec{a}}\,\vec{b} + \text{Пр}_{\vec{a}}\,\vec{c} = \left(\vec{a}\,\vec{b}\right) + \left(\vec{a}\,\vec{c}\right).$$

Теорема TI.10. *Два вектора ортогональны друг другу тогда и только тогда, когда их скалярное произведение равно нулю.*

Доказательство: $\langle\langle$ Пусть векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ ненулевые и ортогональны между собой: $\widehat{\vec{a}\,\vec{b}} = \dfrac{\pi}{2}$. Так как $\cos\widehat{\vec{a}\,\vec{b}} = \cos\dfrac{\pi}{2} = 0$, то $(\vec{a}\,\vec{b}) = 0$. Если же один из векторов нулевой, то его длина равна нулю и $(\vec{a}\,\vec{b}) = 0$.

Обратно, если $(\vec{a}\,\vec{b}) = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\widehat{\vec{a}\,\vec{b}} = 0$, то хотя бы один из множителей равен нулю. В случае равенства нулю одного из первых двух множителей один из векторов нулевой, который всегда можно считать ортогональным к любому вектору. Если
$\cos\widehat{\vec{a}\,\vec{b}} = 0$, то $\widehat{\vec{a}\,\vec{b}} = \dfrac{\pi}{2}$ — векторы ортогональны между собой. $\rangle\rangle$

Все перечисленные выше определения и свойства установлены безотносительно к какой - либо системе координат — они *инвариантны* относительно выбора системы координат.

Введем сейчас прямоугольную систему координат и установим, как вычисляется скалярное произведение векторов, заданных своими координатами в базисе $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$. Все приводимые ниже формулы выведены для пространства (для плоскости во всех формулах третью координату следует положить равной нулю).

Учитывая, что базис $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ есть ортонормированный базис, получим

$$(\vec{i}\,\vec{i}) = 1, \quad (\vec{i}\,\vec{j}) = 0, \quad (\vec{i}\,\vec{k}) = 0, \quad (\vec{j}\,\vec{j}) = 1, \quad (\vec{j}\,\vec{k}) = 0, \tag{I.10}$$

$$(\vec{k}\,\vec{k}) = 1.$$

Если $\vec{a} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}$, то воспользовавшись свойствами 1.3.3 и 1.3.4, имеем

$$(\vec{a}\,\vec{b}) = x_1x_2(\vec{i}\,\vec{i}) + x_1y_2(\vec{i}\,\vec{j}) + x_1z_2(\vec{i}\,\vec{k}) + y_1x_2(\vec{j}\,\vec{i}) +$$

$$+ y_1y_2(\vec{j}\,\vec{j}) + y_1z_2(\vec{j}\,\vec{k}) + z_1x_2(\vec{k}\,\vec{i}) + z_1y_2(\vec{k}\,\vec{j}) + z_1z_2(\vec{k}\,\vec{k})$$

С учетом (I.10) и свойства $\bar{\text{C}}$I.9 окончательно получим

$$(\vec{a}\,\vec{b}) = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2. \tag{I.11}$$

Итак, скалярное произведение векторов в ортонормированном базисе равно сумме произведений одноименных координат этих векторов.

На основании (I.11) могут быть тотчас получены вычислительные формулы для длины вектора, орта вектора, проекции вектора, косинуса угла между векторами и другие геометрические приложения.

Длина вектора $\vec{a}(x_1, y_1, z_1)$

$$|\vec{a}| = \sqrt{(\vec{a}\vec{a})} = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}. \tag{I.12}$$

Орт вектора $\vec{a}(x_1, y_1, z_1)$ $(\vec{a} \neq \vec{0})$

$$\vec{a}^{\ 0} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \frac{x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}}. \tag{I.13}$$

Поэтому для направляющих косинусов вектора $\vec{a}$ имеем

$$\cos\alpha = \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}}, \quad \cos\beta = \frac{y_1}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}},$$

$$\cos\gamma = \frac{z_1}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}} \tag{I.14}$$

Проекция вектора $\vec{b}(x_2, y_2, z_2)$ на ось с направлением $\vec{a}(x_1, y_1, z_1)$ $(\vec{a} \neq \vec{0})$

$$\text{Пр}_{\vec{a}}\,\vec{b} = \frac{\left(\vec{a}\ \vec{b}\right)}{|a|} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}}. \tag{I.15}$$

Косинус угла между векторами $(\vec{a} \neq \vec{0}, \vec{b} \neq \vec{0})$

$$\cos\widehat{\vec{a}\ \vec{b}} = \frac{\vec{a}\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}\sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}. \tag{I.16}$$

На основании доказанной выше теоремы получаем, что необходимым и достаточным условием ортогональности двух векторов является следующее условие:

$$x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 = 0. \tag{I.17}$$

Пример ПI.1. *Найти орт вектора* $\vec{a}(1, -1, 5)$

. Согласно (I.13) имеем

$$\vec{a}^{\,0} = \frac{\vec{i} - \vec{j} + 5\vec{k}}{\sqrt{1^2 + (-1)^2 + 5^2}} = \frac{1}{\sqrt{27}}\vec{i} - \frac{1}{\sqrt{27}}\vec{j} + \frac{5}{\sqrt{27}}\vec{k}.$$

Пример ПI.2. *Дан вектор* $\vec{a}(6, -18, z)$. *Найти* z, *если* $|\vec{a}| = 21$.

В силу (I.12) имеем

$$21 = \sqrt{6^2 + (-18)^2 + z^2}, \; z = \pm\sqrt{441 - 360} = \pm 9.$$

Понятие скалярного произведения векторов пришло из физики, и мы остановимся на одном из физических приложений скалярного произведения для подсчета работы силы.

Пусть требуется вычислить работу W силы $\vec{F}$ по перемещению материальной точки из точки A в точку B по прямолинейному пути (Рис. I.14).

Рис. I.14. *К вычислению работы силы*

Если бы материальная точка двигалась по направлению действия силы $\vec{F}$ (угол $\alpha = 0$), то, по определению, работа силы равна произведению величины силы на длину перемещения:

$$W = |\vec{F}||\overrightarrow{AB}| = (\vec{F} \cdot \overrightarrow{AB}).$$

Если же точка движется под углом α к направлению силы, то работает только составляющая $\overrightarrow{AC'}$, направленная по линии перемещения $\overrightarrow{AB}$. Перпендикулярная составляющая силы уравновешивается сопротивлением. Поэтому

$$W = (\text{Пр}_{\vec{AB}}\, \vec{F})|\overrightarrow{AB}| = \left(\vec{F}\, \vec{AB}\right). \tag{I.18}$$

I.6 Векторное произведение векторов и его приложения

Определение OI.23. *Векторным произведением векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется вектор $\vec{x}$, который:(1) перпендикулярен к плоскости векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$; (2) $|\vec{x}| = |\vec{a}||\vec{b}|\sin\widehat{\vec{a}\,\vec{b}}$; (3) направлен так, что тройка $(\vec{a},\vec{b},\vec{x})$ — правая (Рис. I.15).*

Векторное произведение обозначается символом $\vec{x} = \left[\vec{a}\,\vec{b}\right]$ (либо $\vec{x} = \vec{a}\times\vec{b}$).

Приведенные условия (1) — (3) однозначно определяют векторное произведение, если сомножители — ненулевые векторы. Если хотя бы один из множителей нуль - вектор, векторное произведение, по определению, есть нулевой вектор.

Отметим также, что из условия (2) вытекает:

> Модуль векторного произведения численно равен площади параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Рассмотрим свойства векторного произведения.

Свойство $\bar{\text{C}}$I.13. *Для любых $\vec{a}$ и $\vec{b}$: $\left[\vec{a}\,\vec{b}\right] = -\left[\vec{b}\,\vec{a}\right]$. Действительно, для $\vec{x}_1 = \left[\vec{b}\,\vec{a}\right]$ выполнены условия (1), (2). Но, чтобы тройка $(\vec{b},\vec{a},\vec{x})$ была правой, вектор $\vec{x}_1$ должен быть направлен в сторону, противоположную вектору $\vec{x} = \left[\vec{a}\,\vec{b}\right]$.*

Свойство $\bar{\text{C}}$I.14. *Для любого $\lambda \in R$ и любых $\vec{a}$ и $\vec{b}$ имеем*

$$\left[(\lambda\vec{a})\cdot\vec{b}\right] = \lambda\left[\vec{a}\,\vec{b}\right] = \left[\vec{a}\cdot(\lambda\vec{b})\right]. \tag{I.19}$$

Пусть $\lambda = 0$, - справедливость равенства очевидна. Пусть $\lambda > 0$. Тогда $\lambda\vec{a}$ имеет то же направление, что и вектор $\vec{a}$. Длины векторов $\left[(\lambda\vec{a})\cdot\vec{b}\right]$ и

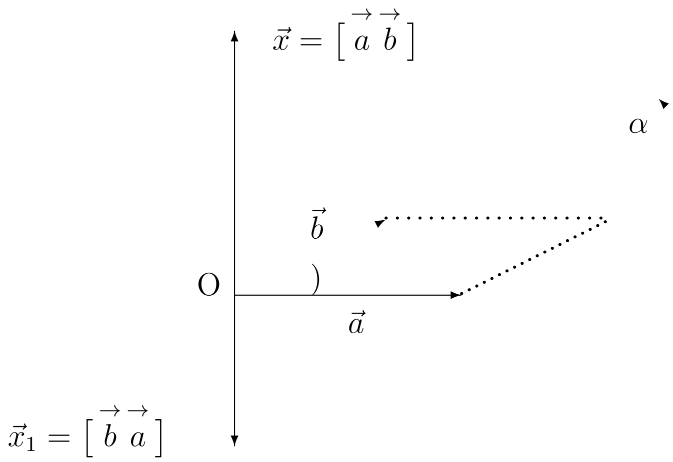


Рис. I.15.

$\lambda[\vec{a}\,\vec{b}]$ совпадают, так как

$$|\Big[(\lambda\vec{a})\cdot\vec{b}\Big]| = |\lambda\vec{a}||\vec{b}|\sin\widehat{\vec{a}\,\vec{b}} = \lambda|\vec{a}||\vec{b}|\sin\widehat{\vec{a}\,\vec{b}} = |\lambda[\vec{a}\,\vec{b}]|.$$

Направления их также совпадают (ориентация тройки не меняется). Аналогичные рассуждения имеют место и при $\lambda < 0$.

Свойство C̄I.15. *Для любых векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ имеем*

$$\Big[(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c}\Big] = [\vec{a}\,\vec{c}] + [\vec{b}\,\vec{c}]. \tag{I.20}$$

Предварительно докажем, что имеет место равенство

$$\Big[(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c}^{\,0}\Big] = [\vec{a}\,\vec{c}^{\,o}] + [\vec{b}\,\vec{c}^{\,o}], \tag{I.21}$$

где $\vec{c}^{\,0}$ — орт вектора $\vec{c}$. Умножив затем (I.21) на $\lambda = |\vec{c}|$, получим выполнение (I.20).

Для доказательства (I.21) заметим, что вектор $[\vec{a}\,\vec{c}^{\,0}]$ можно построить следующим образом. На плоскость. перпендикулярную к $\vec{c}^{\,0}$, спроектируем направленный отрезок $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$. Затем повернем по часовой стрелке вектор $\overrightarrow{OA'}$ на угол $\dfrac{\pi}{2}$ и получим вектор $\overrightarrow{OA'}$ (Рис. I.16а). Имеем: $\overrightarrow{OA''} = [\vec{a}\,\vec{c}^{\,o}$

$\big]$, так как (1) $\overrightarrow{OA''}$ перпендикулярен $\vec{a}$ и $\vec{c}^{\,0}$, $|\overrightarrow{OA''}| = |\overrightarrow{OA'}| = |\vec{a}|\cos(\dfrac{\pi}{2} - \varphi) = |\vec{a}||\vec{c}^{\,0}|\sin\varphi$, (3)тройка $(\vec{a}, \vec{c}^{\,0}, \overrightarrow{OA''})$ — правая. Спроектируем далее на плоскость, перпендикулярную к $\vec{c}^{\,0}$ векторы $\vec{a}, \vec{b}, (\vec{a}+\vec{b})$ (Рис. I.16b) и получим векторы $\overrightarrow{OA'}$, $\overrightarrow{A'B'}$, и $\overrightarrow{OB'}$. После поворота на $\alpha = \dfrac{\pi}{2}$ этих векторов по часовой стрелке можно записать. что $\overrightarrow{OA''} + \overrightarrow{A''B''} = \overrightarrow{OB''}$. Обращаясь к высказанному замечанию, заключаем, что справедливо равенство (I.21), а после умножения его на $\lambda = |\vec{c}|$ убеждаемся в выполнении равенства (I.20).

Теорема TI.11. *Необходимым и достаточным условием коллинеарности двух векторов является равенство нулю их векторного произведения.*

Доказательство: $\langle\langle$

Рис. I.16a. **Рис. I.16b.**

Пусть векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны. Следовательно, либо $\widehat{\vec{a}\,\vec{b}} = 0$, либо $\widehat{\vec{a}\,\vec{b}} = \pi$. В обоих случаях $\sin\widehat{\vec{a}\,\vec{b}} = 0$. Это означает, что $|[\vec{a}\,\vec{b}]| = 0$. Векторное произведение есть нуль - вектор.

Пусть, обратно, $[\vec{a}\,\vec{b}] = \vec{0}$. Тогда $|[\vec{a}\,\vec{b}]| = |\vec{a}||\vec{b}| \cdot \sin\widehat{\vec{a}\,\vec{b}} = 0$. Если хотя бы один из первых сомножителей равен нулю, то данный вектор является нулевым и коллинеарность установлена. Если $\sin\widehat{\vec{a}\,\vec{b}} = 0$, то (1) $\widehat{\vec{a}\,\vec{b}} = 0$, (2) $\widehat{\vec{a}\,\vec{b}} = \pi$. Векторы коллинеарны. $\rangle\rangle$

Изложенные свойства векторного произведения инвариантны относительно выбора системы координат. Пусть задана прямоугольная система координат $\Re\{O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$. Легко проверить, что выполнены следующие условия:

$$[\vec{i}\,\vec{i}] = \vec{0}, \quad [\vec{j}\,\vec{j}] = \vec{0}, \quad [\vec{k}\,\vec{k}] = \vec{0}$$

$$\left[\vec{i}\,\vec{j}\right]=\vec{k},\quad \left[\vec{j}\,\vec{k}\right]=\vec{i},\quad \left[\vec{k}\,\vec{i}\right]=\vec{j}. \tag{I.22}$$

Пользуясь свойствами 1.4.1; 1.4.2; 1.4.3 и правилами (I.22), для векторов $\vec{a}=x_1\vec{i}+y_1\vec{j}+z_1\vec{k}$ и $\vec{b}=x_2\vec{i}+y_2\vec{j}+z_2\vec{k}$ получим

$$\left[\vec{a}\,\vec{b}\right]=x_1x_2\left[\vec{i}\,\vec{i}\right]+x_1y_2\left[\vec{i}\,\vec{j}\right]+x_1z_2\left[\vec{i}\,\vec{k}\right]+y_1x_2\left[\vec{j}\,\vec{i}\right]+$$

$$+y_1y_2\left[\vec{j}\,\vec{j}\right]+y_1z_2\left[\vec{j}\,\vec{k}\right]+z_1x_2\left[\vec{k}\,\vec{i}\right]+z_1y_2\left[\vec{k}\,\vec{j}\right]+z_1z_2\left[\vec{k}\,\vec{k}\right]=$$

$$\vec{i}\begin{vmatrix} y_1 & z_1\\ y_2 & z_2\end{vmatrix}-\vec{j}\begin{vmatrix} x_1 & z_1\\ x_2 & z_2\end{vmatrix}+\vec{k}\begin{vmatrix} x_1 & y_1\\ x_2 & y_2\end{vmatrix}. \tag{I.23}$$

Обращаясь к свойству разложения определителя по элементам строки окончательно получим формулу вычисления векторного произведения векторов, заданных своими координатами в ортонормированном базисе

$$\left[\vec{a}\,\vec{b}\right]=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\end{vmatrix}. \tag{I.24}$$

Заметим, что хотя в первой строке определителя стоят векторы (а не числа!) запись (I.24) законная, так как операции умножения вектора на число и суммы векторов подчиняются тем же правилам, что и числовые элементы.

Поскольку условием коллинеарности двух векторов является равенство нулю их векторного произведения, то, приравнивая определитель в правой части (I.23) нулю и учитывая линейную независимость векторов $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$, получим, что ранг матрицы

$$\begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\end{pmatrix}$$

равен 1 и, следовательно, *условие*

$$\operatorname{rank}\begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\end{pmatrix}=1 \tag{I.25}$$

является необходимым и достаточным условием коллинеарности векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Одним из геометрических приложений векторного произведения является вычисление с его помощью площади треугольника с вершинами в точках

$$A_1(x_1,y_1,z_1);\ A_2(x_2,y_2,z_2);\ A_3(x_3,y_3,z_3).$$

Имеем: $\vec{a}=\overrightarrow{A_1A_2}=\vec{i}(x_2-x_1)+\vec{j}(y_2-y_1)+\vec{k}(z_2-z_1)$, $\vec{b}=\overrightarrow{A_1A_3}=\vec{i}(x_3-x_1)+\vec{j}(y_3-y_1)+\vec{k}(z_3-z_1)$. В силу того, что площадь треугольника равна половине площади параллелограмма, построенного на векторах $\overrightarrow{A_1A_2}$, $\overrightarrow{A_1A_3}$, получим

$$S_\triangle = \left|\frac{1}{2}\left[\vec{a}\,\vec{b}\right]\right| = \left|\frac{1}{2}\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix}\right| \tag{I.26}$$

Если речь идет о площади треугольника на плоскости, заданного своими вершинами $A_1(x_1, y_1)$; $A_2(x_2, y_2)$; $A_3(x_3, y_3)$, то в формуле (I.26) необходимо положить $z_1 = z_2 = z_3 = 0$ и разложить определитель по элементам последнего столбца.

$$S_\triangle = \left|\frac{1}{2}\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & 0 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & 0 \end{vmatrix}\right| = \left|\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix}\right|. \tag{I.27}$$

Одним из физических приложений является подсчет *момента силы* с помощью векторного произведения.

Пусть твердое тело закреплено в точке A и в точке B приложена сила $\vec{F}$. Вращающий момент, возникающий в этом случае, вычисляется по следующей формуле (так показывает опыт):

$$\vec{M} = \overrightarrow{AB} \times \vec{F}. \tag{I.28}$$

I.7 Смешанное произведение векторов

Зная операции скалярного и векторного умножения двух векторов, что можно сказать о комбинированных произведениях трех векторов? Имеются следующие возможности для комбинированного произведения: (1) $\left(\vec{a}\,\vec{b}\right)\vec{c}$; (2) $(\left[\vec{a}\,\vec{b}\right]\vec{c})$; (3) $[\vec{a}\left[\vec{b}\,\vec{c}\right]]$. В первом случае ответ простой — получаем вектор, коллинеарный вектору $\vec{c}$. Случаи (2) и (3) требуют более подробного рассмотрения.

Определение OI.24. *Смешанным произведением трех векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ называется число, получаемое от умножения вектора $\left[\vec{a}\,\vec{b}\right]$ скалярно на $\vec{c}$. Оно обозначается символом $\left(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right)$, т.е.*
$\left(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right) \stackrel{def}{=} (\left[\vec{a}\,\vec{b}\right]\vec{c})$.

Выясним геометрический смысл смешанного произведения, считая, что $(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$ — некомпланарная тройка векторов. Учитывая, что вектор $\vec{x} = \left[\,\vec{a}\ \vec{b}\,\right]$ имеет длину, равную численно площади параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$, и перпендикулярен к плоскости параллелограмма, из равенства

$$(\left[\,\vec{a}\ \vec{b}\,\right]\vec{c}) = \left(\vec{x}\ \vec{c}\right) = |\vec{x}|\text{Пр}_{\vec{x}}\,\vec{c} = \pm h\cdot S \tag{I.29}$$

выводим, что

> В случае правой тройки смешанное произведение равно объему V параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, а в случае левой тройки, — объему параллелепипеда, взятому со знаком минус. (Рис. I.17)

Теорема TI.12. *Тройка векторов $(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$ компланарна тогда и только тогда, когда их смешанное произведение равно нулю.*

Доказательство: $\langle\langle$ *Необходимость.* Пусть тройка векторов $(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$ компланарна. Это может осуществиться в трех случаях: (1) один из векторов есть нуль - вектор, (2) пара векторов коллинеарна, (3) векторы лежат в одной или параллельных плоскостях. Во всех трех случаях в соотношениях (I.29) либо $|\vec{x}| = 0$ либо $\text{Пр}_{\vec{x}}\,\vec{c} = 0$ и, следовательно, смешанное произведение равно нулю.

Достаточность. Пусть $\left(\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}\right) = 0$. Это означает, что $|\left[\,\vec{a}\ \vec{b}\,\right]|\text{Пр}_{\vec{x}}\,\vec{c} = 0$. Если первый сомножитель равен нулю, то векторное произведение $\left[\,\vec{a}\ \vec{b}\,\right]$ равно нулю, векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ — коллинеарные, а, следовательно, тройка $(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$ компланарна. Если $\text{Пр}_{\vec{x}}\,\vec{c} = 0$, то вектор $\vec{c}$ ортогонален к вектору $\vec{x} = \left[\,\vec{a}\ \vec{b}\,\right]$ и, следовательно, параллелен плоскости параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Имеем компланарную тройку векторов. Теорема доказана. $\rangle\rangle$

Свойство $\bar{\text{C}}$I.16. *Операции скалярного и векторного умножений в смешанном произведении можно поменять местами, т.е.*

$$(\left[\,\vec{a}\ \vec{b}\,\right]\vec{c}) = (\vec{a}\left[\,\vec{b}\ \vec{c}\,\right]) = (\left[\,\vec{b}\ \vec{c}\,\right]\vec{a}). \tag{I.30}$$

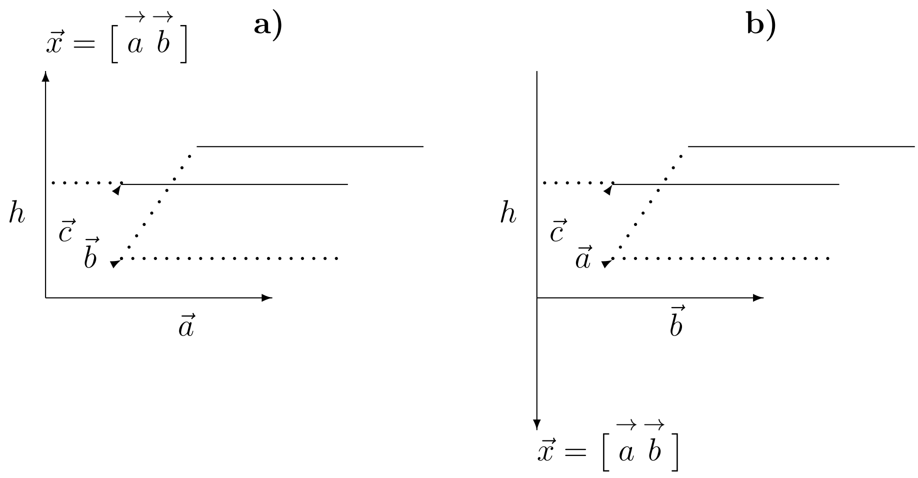


Рис. I.17.

Свойство С̄I.17. *Круговая перестановка сомножителей не меняет величины смешанного произведения. Перестановка местами двух соседних сомножителей изменяет знак произведения на противоположный, т.е.*

$$(\vec a, \vec b, \vec c) = (\vec b, \vec c, \vec a) = (\vec c, \vec a, \vec b) = -(\vec b, \vec a, \vec c) = -(\vec a, \vec c, \vec b) = \\ = -(\vec c, \vec b, \vec a). \tag{I.31}$$

В самом деле, в силу коммутативности скалярного произведения и свойства С̄I.16 имеем

$$(\vec a, \vec b, \vec c) = ([\vec a\,\vec b]\vec c) = (\vec c[\vec a\,\vec b]) = (\vec c, \vec a, \vec b)$$

$$(\vec a, \vec b, \vec c) = (\vec a[\vec b\,\vec c]) = ([\vec b\,\vec c]\vec a) = (\vec b, \vec c, \vec a). \tag{I.32}$$

В силу антикоммутативности векторного произведения и равенства (I.32) получим

$$(\vec a, \vec b, \vec c) = ([\vec a\,\vec b]\vec c) = -([\vec b\,\vec a]\vec c) = -(\vec b, \vec a, \vec c). \tag{I.33}$$

Пусть выбрана прямоугольная система координат. В ортонормированном базисе $\{\vec i, \vec j, \vec k\}$ векторы $\vec a$, $\vec b$, $\vec c$ имеют координаты (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2),

(x_3, y_3, z_3). Согласно определению смешанного произведения как скалярного произведения векторов $[\vec{a}\ \vec{b}]$ и $\vec{c}$ и выражению (I.23) для $[\vec{a}\ \vec{b}]$ получим

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = x_3 \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} - y_3 \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} + z_3 \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}. \tag{I.34}$$

Правая часть (I.34) с учетом свойств определителей представляет собой разложение определителя третьего порядка по элементам последней строки. Поэтому

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}. \tag{I.35}$$

Получили компактное выражение смешанного произведения через координаты векторов - сомножителей.

I.8 Двойное векторное произведение

Переходим к рассмотрению третьей возможности комбинированного произведения трех векторов.

Определение OI.25. *Двойным векторным произведением векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ называется выражение вида $[\vec{a}\ [\vec{b}\ \vec{c}]]$.*

Рассмотрим это произведение в прямоугольной системе координат, когда векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ заданы своими координатами:

$$\vec{a} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k},\ \vec{b} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k},\ \vec{c} = x_3\vec{i} + y_3\vec{j} + z_3\vec{k}.$$

$$[\vec{a}\ [\vec{b}\ \vec{c}]] = \begin{vmatrix} i_1 & j_1 & k_1 \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ \begin{vmatrix} y_2 & z_2 \\ y_3 & z_3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} x_2 & z_2 \\ x_3 & z_3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} \end{vmatrix}.$$

Раскрывая определитель по элементам первой строки, вычисляя определители второго порядка и добавляя в сомножителях при $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ соответственно нули в виде $(x_1x_2x_3 - x_1x_2x_3)$, $(y_1y_2y_3 - y_1y_2y_3)$, $(z_1z_2z_3 - z_1z_2z_3)$, получим

$$[\vec{a}\ [\vec{b}\ \vec{c}]] = \vec{i}(y_1x_2y_3 - y_1x_3y_2 - z_1x_3z_2 + z_1x_2z_3 + x_1x_2x_3-$$

$$-x_1x_2x_3) + \vec{j}(z_1y_2z_3 - z_1y_3z_2 - x_1x_2y_3 + x_1x_3y_2+$$

$$+y_1y_2y_3 - y_1y_2y_3) + \vec{k}(x_1x_3z_2 - x_1x_2z_3 - y_1y_2z_3 +$$
$$+y_1y_3z_2 + z_1z_2z_3 - z_1z_2z_3) =$$
$$= (x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k})(x_1x_3 + y_1y_3 + z_1z_3) -$$
$$-(x_3\vec{i} + y_3\vec{j} + z_3\vec{k})(x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2).$$

Поскольку $(x_1x_3 + y_1y_3 + z_1z_3) = \left(\vec{a}\,\vec{c}\right)$, $(x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2) = \left(\vec{a}\,\vec{b}\right)$, то окончательно имеем

$$\left[\vec{a}\ \left[\vec{b}\,\vec{c}\right]\right] = \vec{b}\left(\vec{a}\,\vec{c}\right) - \vec{c}\left(\vec{a}\,\vec{b}\right). \tag{I.36}$$

Формула (I.36) носит название формулы раскрытия двойного векторного произведения по векторам - сомножителям внутреннего векторного произведения.

Очевидно, что используя определение смешанного произведения векторов и (I.36), можно рассматривать различные комбинированные произведения четырех и т. д. векторов.

Пример III.3. *Компланарны ли векторы* $\vec{a} = (2, 3, -1)$, $\vec{b} = (1, -1, 3)$, $\vec{c} = (1, 9, -11)$*?*

Вычислим определитель

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 1 & 9 & -11 \end{vmatrix} = 2(11 - 27) - 3(-11 - 3) - 1(9 + 1) = 0.$$

Векторы компланарны.

Пример III.4. *Проверить справедливость равенства*

$$[\left[\vec{a}\,\vec{b}\right]\vec{c}] + [\left[\vec{b}\,\vec{c}\right]\vec{a}] + [\left[\vec{c}\,\vec{a}\right]\vec{b}] = \vec{0}.$$

Переставим сомножители во внешних векторных произведениях и воспользуемся формулой (I.36). Имеем:

$$\left[\vec{c}\ \left[\vec{a}\,\vec{b}\right]\right] = \vec{a}\left(\vec{c}\,\vec{b}\right) - \vec{b}\left(\vec{c}\,\vec{a}\right),\ \left[\vec{a}\ \left[\vec{b}\,\vec{c}\right]\right] = \vec{b}\left(\vec{a}\,\vec{c}\right) - \vec{c}\left(\vec{a}\,\vec{b}\right),$$

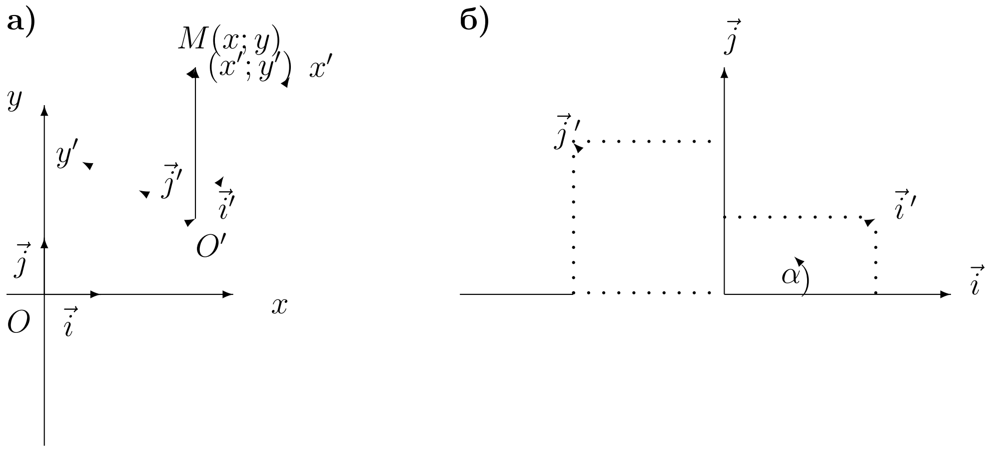


Рис. I.18.

$$\left[\vec{b}\,\left[\vec{c}\,\vec{a}\right]\right] = \vec{c}(\vec{b}\,\vec{a}) - \vec{a}(\vec{b}\,\vec{c}).$$

Сложим все три равенства и учтем коммутативность скалярного произведения пары векторов. При сложении правые части взаимно уничтожаются и справедливость написанного равенства доказана.

I.9 Преобразование прямоугольной системы координат на плоскости

Рассмотрим преобразование прямоугольной системы координат на плоскости. Пусть $\Re\{O;\vec{i},\vec{j}\}$ — некоторая прямоугольная система координат на плоскости и пусть $\Re\{O';\vec{i}',\vec{j}'\}$ — другая прямоугольная система координат (Рис. I.18а). Координаты точки M в первой системе координат есть координаты $\overrightarrow{OM}$ в базисе $\{\vec{i},\vec{j}\}$
($\overrightarrow{OM} = \vec{i}x + \vec{j}y$). Координаты точки M во второй системе координат есть координаты вектора $\overrightarrow{O'M}$ в базисе $\{\vec{i}',\vec{j}'\}$ ($\overrightarrow{O'M} = x'\vec{i}' + y'\vec{j}'$). Установим связь координат $(x;y)$ с координатами $(x';y')$ точки M. С этой целью заметим, (Рис. I.18b) что

$$\left.\begin{aligned} \vec{i}' &= (\text{Пр}_{\vec{i}}\,\vec{i}')\vec{i} + (\text{Пр}_{\vec{j}}\,\vec{i}')\vec{j} = \vec{i}\cos\widehat{\vec{i}\,\vec{i}'} + \vec{j}\cos\widehat{\vec{j}\,\vec{i}'} \\ \vec{j}' &= (\text{Пр}_{\vec{i}}\,\vec{j}')\vec{i} + (\text{Пр}_{\vec{j}}\,\vec{j}')\vec{j} = \vec{i}\cos\widehat{\vec{i}\,\vec{j}'} + \vec{j}\cos\widehat{\vec{j}\,\vec{j}'} \end{aligned}\right\} \tag{I.37}$$

Если обозначить через α угол между осью Ox и осью $O'x'$, то (I.37) примет вид

$$\left.\begin{aligned}\vec{i}' &= \vec{i}\cos\alpha + \vec{j}sin\alpha\\ \vec{j}' &= -\vec{i}\sin\alpha + \vec{j}cos\alpha\end{aligned}\right\}. \tag{I.38}$$

Радиусы - векторы точки M в первой и второй системе координат связаны соотношением

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M}. \tag{I.39}$$

Если $(a;b)$ координаты нового начала O', то (I.39) примет вид

$$x\vec{i} + y\vec{j} = a\vec{i} + b\vec{j} + x'\vec{i}' + y'\vec{j}'. \tag{I.40}$$

Подставляя в (I.40) вместо $\vec{i}'$, $\vec{j}'$ их выражения (I.38), окончательно получим

$$x\vec{i} + y\vec{j} = a\vec{i} + b\vec{j} + x'(\vec{i}\cos\alpha + \vec{j}\sin\alpha) + y'(-\vec{i}\sin\alpha + \vec{j}\cos\alpha). \tag{I.41}$$

В силу линейной независимости векторов $\vec{i}$ и $\vec{j}$ коэффициенты при них в левой и правой частях (I.41) равны между собой. Мы получаем связь координат не штрихованной системы координат с координатами штрихованной системы координат

$$\left.\begin{aligned}x &= x'\cos\alpha - y'\sin\alpha + a\\ y &= x'\sin\alpha + y'\cos\alpha + b\end{aligned}\right\}. \tag{I.42}$$

Если (I.42) разрешить относительно x', y', то получим выражение для новых (штрихованных) координат

$$\left.\begin{aligned}x' &= x\cos\alpha + y\sin\alpha + a'\\ y' &= -x\sin\alpha + y\cos\alpha + b'\end{aligned}\right\}. \tag{I.43}$$

Очевидно, что если $\alpha = 0$, то совершен лишь параллельный перенос начала координат без вращения осей координат. Полагая $\alpha = 0$ в (I.42), (I.43) и выражениях для a' и b', получим

$$\left.\begin{aligned}x &= x' + a\\ y &= y' + b\end{aligned}\right\} \qquad \left.\begin{aligned}x' &= x - a\\ y' &= y - b\end{aligned}\right\}. \tag{I.44}$$

Если $a = b = 0$, $\alpha \neq 0$, то перенос начала координат не совершается, происходит лишь поворот осей. Для него имеем

$$\left.\begin{aligned}x &= x'\cos\alpha - \sin\alpha\\ y &= x'\sin\alpha + y'\cos\alpha\end{aligned}\right\} \qquad \left.\begin{aligned}x' &= x\cos\alpha + y\sin\alpha\\ y' &= -x\sin\alpha + y\cos\alpha\end{aligned}\right\}. \tag{I.45}$$

I.10 Преобразование прямоугольной системы координат в пространстве

Осуществим сейчас переход в пространстве от одной прямоугольной системы координат $\Re\{O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\}$ к другой прямоугольной системе координат $\Re\{O';\vec{i}',\vec{j}',\vec{k}'\}$ без переноса начала координат. ($\overrightarrow{OO'}=\vec{0}$) и с сохранением ориентации (обе тройки векторов — правые).

Очень часто в приложениях формулы перехода, связывающих штрихованные и нештрихованные координаты, требуется записать через три независимых параметра — углы Эйлера.

С этой целью переход от первого ортонормированного базиса ко второму разобьем на три этапа.

Первый этап. Повернем вокруг оси Oz на угол φ оси Ox и Oy. Новые оси обозначим через Ox_1, Oy_1, Oz_1. Согласно формулам (I.45) поворота осей на плоскости P имеем

$$\left.\begin{array}{l} x = x_1\cos\varphi - y_1\sin\varphi \\ y = x_1\sin\varphi + y_1\cos\varphi \\ z = z_1 \end{array}\right\}. \tag{I.46}$$

Второй этап. Повернем вокруг оси Ox_1 оси Oy_1, Oz_1 на угол θ. Новые оси обозначим через Ox_2,Oy_2, Oz_2. Имеем

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = x_2 \\ y_1 = y_2\cos\theta - z_2\sin\theta \\ z_1 = y_2\sin\theta + z_2\cos\theta \end{array}\right\}. \tag{I.47}$$

Третий этап. Повернем вокруг оси Oz_2 в плоскости Q оси Ox_2, Oy_2 на угол ψ. Получим оси Ox', Oy', Oz'. Формулы перехода следующие:

$$\left.\begin{array}{l} x_2 = x'\cos\psi - y'\sin\psi \\ y_2 = x'\sin\psi + y'\cos\psi \\ z_2 = z' \end{array}\right\}. \tag{I.48}$$

Подставляя сейчас (I.48) в (I.47), а затем полученный результат в (I.46), получим следующий переход от одной прямоугольной системы координат в пространстве к другой прямоугольной системе без переноса начала координат:

$$\left\{\begin{array}{l} x = (\cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\cos\theta\sin\psi)x' - \\ -(\cos\varphi\sin\psi + \sin\varphi\cos\theta\cos\psi)y' + z'\sin\varphi\sin\theta, \\ y = (\sin\varphi\cos\psi + \cos\varphi\cos\theta\sin\psi)x' - (\sin\varphi\sin\psi - \\ -\cos\varphi\cos\theta\cos\psi)y' - z'\cos\varphi\sin\theta, \\ z = x'\sin\theta\sin\psi + y'\sin\theta\cos\psi + z'\cos\theta. \end{array}\right. \tag{I.49}$$

Чтобы получить выражение x', y', z' через "старые координаты" x, y, z, необходимо в (I.49) заменить φ на $-\varphi$, θ на $-\theta$, ψ на $-\psi$, штрихованные координаты на нештрихованные.

В случае, если осуществлен и перенос начала координат ($\overrightarrow{OO'} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$), то к правым частям соотношений (I.49) нужно добавить соответственно слагаемые a, b, c.

Глава II

Линии на плоскости

II.1 Каноническое и общее уравнения прямой на плоскости

Как нами установлено ранее, при помощи системы координат устанавливается взаимно - однозначное соответствие между геометрическими образами — точками и алгебраическими объектами — числами. Показано, что каждой точке плоскости в прямоугольных и полярных координатах соответствует пара чисел, взятых в определенном порядке, и обратно, каждой паре чисел соответствует единственная точка плоскости. Взаимно - однозначное соответствие между точками и их координатами сводит изучение геометрических свойств различных объектов к изучению аналитических соотношений между координатами точек множеств, задающих рассматриваемые геометрические объекты.

Прежде чем переходить к установлению соответствия между линиями на плоскости и уравнениями с двумя переменными x и y или r и φ, остановимся на трех простейших фактах, знание которых необходимо при решении задач аналитической геометрии на плоскости.

Согласно определению расстояние между точками $M_1(x_1; y_1)$ и $M_2(x_2; y_2)$ равно модулю вектора $\overrightarrow{M_1M_2}$, т.е. $d(M_1, M_2) = d(M_2, M_1) = |\overrightarrow{M_1M_2}|$.

Поскольку

$$\overrightarrow{M_1M_2} = \overrightarrow{OM_2} - \overrightarrow{OM_1} = (x_2 - x_1)\vec{i} + (y_2 - y_1)\vec{j},$$

то согласно (I.12) имеем

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}. \tag{II.1}$$

Пусть задан, далее, отрезок как упорядоченная пара точек $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$. Пусть задана также третья точка $C(x, y)$, лежащая на прямой, соединяющей точки A и B, и не совпадающая с концом B отрезка (точка C может находиться как внутри отрезка, так и вне его). Рассмотрим векторы $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{CB}$. Они коллинеарны так как находятся на одной прямой. Поэтому

$$\overrightarrow{AC} = \lambda \overrightarrow{CB}. \tag{II.2}$$

Определение OII.1. *Число λ в (II.2) называется отношением, в котором точка C делит отрезок AB.*

Отметим, что поскольку точки A и B не совпадают между собой, то $\lambda \neq -1$. В координатах (II.2) имеет вид

$$(x - x_1)\vec{i} + \vec{j}(y - y_1) = \lambda((x_2 - x)\vec{i} + (y_2 - y)\vec{j}).$$

В силу линейной независимости векторов $\vec{i}$ и $\vec{j}$ получим

$$\lambda = \frac{x - x_1}{x_2 - x}, \qquad \lambda = \frac{y - y_1}{y_2 - y}, \tag{II.3}$$

а также

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \qquad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}. \tag{II.4}$$

При $\lambda = 1$ точка C делит отрезок пополам. Согласно (II.4) координаты середины отрезка имеют вид

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \qquad y = \frac{y_1 + y_2}{2}. \tag{II.5}$$

Наконец, часто приходится иметь дело с формулой вычисления площади треугольника, заданного своими вершинами $A_1(x_1; y_1)$, $A_2(x_2; y_2)$, $A_3(x_3; y_3)$. Приведем ее

$$S_\triangle = \left| \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix} \right|. \tag{II.6}$$

Используя свойства определителей, выражение (II.6) часто записывают в следующей эквивалентной форме:

$$S_\triangle = \left| \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} \right|. \tag{II.7}$$

В самом деле, вычитая первую строку из второй и третьей строк и понижая порядок определителя, приходим к соотношению (II.6).

Следующим этапом является установление между линиями на плоскости и уравнениями с двумя переменными x и y (r и φ) определенного соответствия, что позволяет свести изучение геометрических свойств линий к изучению аналитических свойств соответствующих уравнений. В аналитической геометрии всякую линию рассматривают как геометрическое место точек, обладающих общим свойством. Так, например, пусть задана прямоугольная декартова система координат и требуется вывести уравнение окружности радиуса R, центр которой находится в точке $C(a;b)$.

Определение OII.2. *Окружностью с центром в точке C называется геометрическое место точек, находящихся на одном и том же расстоянии R от центра.*

Пусть x и y — координаты произвольной точки M окружности (текущая точка M окружности). Тогда $|\overrightarrow{CM}| = R$ и, следовательно, $|\overrightarrow{CM}|^2 = R^2$. Последнее равенство в координатах запишется в виде

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2. \tag{II.8}$$

Равенство (II.8) называется *уравнением окружности* в прямоугольной системе координат. Если центр окружности совпадает с началом координат ($a = b = 0$), то ее уравнение принимает вид

$$x^2 + y^2 = R^2. \tag{II.9}$$

В полярной системе координат уравнение окружности с центром в полюсе имеет наиболее простой вид: $r = R$.

В общем случае посредством уравнения, связывающего координаты x, y (или r, φ) переменной точки M, выражаем общее свойство точек линии.

Определение OII.3. *Уравнение $F(x,y) = 0$ ($\Phi(r,\varphi) = 0$) в прямоугольной системе координат (в полярной системе координат) называется уравнением линии L, если этому уравнению удовлетворяют координаты любой точки линии и не удовлетворяют координаты ни одной точки, не лежащей на ней.*

Если уравнение имеет вид $y = f(x)$, то оно называется *явным* в отличие от *неявного* уравнения $F(x,y) = 0$.

Отметим, что множество точек плоскости, координаты которых удовлетворяют некоторому уравнению, может обладать особенностями и не составлять линии на плоскости в том смысле, который придается этому слову. Перечислим наиболее часто встречающиеся особенности:
(1) уравнение $F(x, y) = 0$, $(\Phi(r, \varphi) = 0)$ не определяет ни одной точки плоскости (например, $x^2 + y^2 + 1 = 0$); (2) уравнение задает одну или несколько точек (например, $x^2+y^2 = 0$), (3) левая часть уравнения $F(x, y) = 0$ распадается на k штук сомножителей: $F(x, y) = f_1(x, y)f_2(x, y) \ldots f_k(x, y)$ и тем самым выделяется k ветвей линии с уравнениями $f_{(}x, y) = 0, \ldots, f_k(x, y) = 0$. Например, $x^2 - y^2 = 0$ представляется в виде двух ветвей $(x - y) = 0$ и $(x + y) = 0$.

Рассмотрим конкретные примеры часто встречающихся в приложениях уравнений линий в полярной системе координат.

Окружность: $r = a(a > 0 -$ Const)

Рис. II.19.

Спираль Архимеда: $r = a\varphi$ (a — положительная константа) $0 \leq \varphi < \infty$ (Рис. II.20).

Рис. II.20.

Логарифмическая спираль: $r = ae^{k\varphi}$ (a, k — положительные константы), $-\infty < \varphi < +\infty$ (Рис. II.21).

Рис. II.21.

Кардиодида: $r = a(1 + \cos\varphi)$ $(a > 0 - const)$, $0 \le \varphi < 2\pi$ (Рис. II.22)

Рис. II.22.

Пересечением двух (трех и т. д.) линий называется геометрическое место точек, координаты которых одновременно удовлетворяют уравнениям обеих линий.

$$\begin{cases} F_1(x, y) = 0 \\ F_2(x, y) = 0. \end{cases} \tag{II.10}$$

II.2 Параметрические уравнения линии на плоскости

Часто линию на плоскости удобно (особенно при рассмотрении движения материальных точек в механике) задавать системой уравнений, в которой каждая текущая координата есть некоторая функция одной переменной t (например, в механике времени t), называемой *параметром.* В данном случае уравнение вида

$$\left.\begin{array}{l} x = x(t) \\ y = y(t) \end{array}\right\} \quad (t \in T) \tag{II.11}$$

называются *параметрическими уравнениями линии на плоскости.* При фиксированном значении $t = t_0$ (II.11) определяют координаты $x_0 = x(t_0)$, $y_0 = y(t_0)$ точки M_0 линии.

Исключив из (II.11) параметр t, мы получим уравнение $F(x, y) = 0$ (либо $y = f(x)$), задающее ту же линию на плоскости, что и уравнение (II.11).

Например, уравнения

$$\begin{cases} x = R\cos t \\ y = R\sin t \end{cases} \quad (0 \le t < 2\pi)$$

определяют окружность с центром в $O(0; 0)$ и радиуса R, так как, возводя в квадрат уравнения и складывая, получим уравнение $x^2 + y^2 = R^2$, описывающее окружность с центром в начале координат. Параметр t в рассматриваемом случае есть угол между осью Ox и радиусом - вектором текущей точки окружности.

Рис. II.23. *Циклоида*

В качестве еще одного примера выведем параметрические уравнения *циклоиды*, определяемой как траектория точки M окружности радиуса a при ее качении по прямой линии без скольжения (Рис. II.23). В качестве параметра t выберем увеличивающийся при качении угол $t = \angle AC_1M$.

Имеем $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC_1} + \overrightarrow{C_1M}$. Поэтому

$$\left.\begin{aligned} x &= \text{Пр}_{\vec{Ox}}\, \overrightarrow{OA} + \text{Пр}_{\vec{Ox}}\, \overrightarrow{AC_1} + \text{Пр}_{\vec{Ox}}\, \overrightarrow{C_1M} = a(t - \sin t) \\ y &= \text{Пр}_{\vec{Oy}}\, \overrightarrow{OA} + \text{Пр}_{\vec{Oy}}\, \overrightarrow{AC_1} + \text{Пр}_{\vec{Oy}}\, \overrightarrow{C_1M} = a(1 - \cos t) \end{aligned}\right\}. \quad (t \in [0, 2\pi])$$

Если линия задана в полярной системе координат явным способом $r = r(\varphi)$, то, используя связь полярных и декартовых координат (I.7), легко получить ее параметрическое представление

$$\left.\begin{aligned} x &= r(\varphi)\cos\varphi \\ y &= r(\varphi)\sin\varphi \end{aligned}\right\} \quad (\varphi \in \Phi). \tag{II.12}$$

Если задано неравенство $F(x, y) > 0$ или $F(x, y) < 0$, то его геометрический смысл легко устанавливается. Такие неравенства определяют в прямоугольной системе координат множество точек плоскости — область плоскости, границей которой является линия с уравнением $F(x, y) = 0$. Аналогично и в полярной системе координат. Так, например, неравенство $x^2 + y^2 < R^2$ определяет множество точек, находящихся внутри окружности $x^2 + y^2 = R^2$, называемое *открытым кругом радиуса* R.

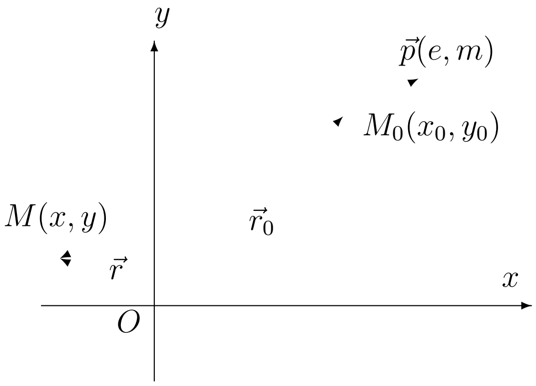


Рис. II.24.

В заключении остановимся на выводе канонического и общего уравнения прямой линии на плоскости в прямоугольной системе координат.

II.3 Канонические уравнения прямой на плоскости

Прямую на плоскости можно задать, если фиксировать некоторую точку $M_0(x_0; y_0)$ (*опорная точка* прямой) и *направляющий вектор* $\vec{p}(l, m)$ Рис. II.24. Пусть $\vec{r}(x, y)$ — радиус - вектор текущей точки искомой прямой линии. Тогда векторы $\vec{r} - \vec{r}_0$ и $\vec{p}$ суть коллинеарные векторы ($\vec{r} - \vec{r}_0 = t\vec{p}$), и мы имеем

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + t\vec{p} \quad (-\infty < t < +\infty). \tag{II.13}$$

Получили *параметрическое уравнение прямой в векторном виде*. В координатной записи (II.13) имеет вид

$$\left.\begin{aligned} x &= x_0 + lt \\ y &= y_0 + mt \end{aligned}\right\} \quad (-\infty < t < +\infty). \tag{II.14}$$

Коллинеарность векторов $\vec{r} - \vec{r}_0$ и $\vec{p}$ согласно (I.25) может быть выражена и так:

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m}. \tag{II.15}$$

Имеем *каноническое уравнение* прямой на плоскости. Если $l = 0$ ($m = 0$), то соответствующее уравнение прямой имеет вид $x = x_0$ ($y = y_0$).

II.4 Общие уравнения прямой на плоскости

Прямую на плоскости можно задать другим способом. Зафиксируем некоторую точку прямой $M_0(x_0; y_0)$ и вектор $\vec{N}(A, B)$, *ортогональный* к искомой

Рис. II.25.

прямой (он носит название *нормального* вектора прямой). Пусть $\vec{r}(x; y)$ — радиус - вектор текущей точки прямой. Тогда (Рис. II.25)

$$(\vec{N}(\vec{r} - \vec{r}_0)) = 0 \tag{II.16}$$

суть *векторное уравнение прямой с нормальным вектором.*

В координатах имеем

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0. \tag{II.17}$$

Чтобы описать все множество прямых на плоскости, мы должны произвольным образом задавать $\vec{N}$ и M_0, т.е. считать A, B и $C = -Ax_0 - By_0$ произвольными параметрами, пробегающими множество вещественных чисел.

Таким образом, уравнение

$$Ax + By + C = 0 \tag{II.18}$$

называется *общим уравнением* прямой на плоскости. Геометрический смысл коэффициентов при x и y следующий:

Коэффициенты A и B суть координаты в ортонормированном базисе $\{\vec{i}, \vec{j}\}$ нормального вектора прямой.

Геометрический смысл параметра C будет выяснен ниже. Этот параметр связан с расстоянием от начала координат до прямой. В частности, при $C = 0$ имеем $Ax + By = 0$ — уравнение прямой, проходящей через начало координат.

Обратно, если в прямоугольной системе координат на плоскости имеем уравнение 1-й степени вида (II.18), то это будет уравнение прямой линии.

Действительно, (II.18) как уравнение с двумя неизвестными всегда имеет решение. Пусть $(x_0; y_0)$ — некоторое решение, т.е. $Ax_0 + By_0 + C \equiv 0$. Вычитая это тождество (II.18), получим эквивалентное ему уравнение $A(x-x_0)+B(y-y_0) = 0$, которое может быть записано в виде $(\vec{N}(\vec{r}-\vec{r}_0)) = 0$, где $\vec{N} = A\vec{i}+B\vec{j}$, $\vec{r} = x\vec{i}+y\vec{j}$ — переменный радиус - вектор, $\vec{r}_0 = x_0\vec{i}+y_0\vec{j}$ — фиксированный вектор, задающий точку $M_0(x_0; y_0)$. Очевидно, что данному уравнению удовлетворяют координаты любой точки прямой линии, проходящей через M_0 и имеющей нормальный вектор $\vec{N}$, и не удовлетворяют координаты ни одной точки с радиус - вектором $\vec{r}\,'$,не лежащей на прямой, так как $\vec{r}\,' - \vec{r}_0$ и $\vec{N}$ не ортогональны между собой.

II.5 Различные виды уравнений прямой на плоскости

Остановимся на трех видах уравнений прямой, имеющих наибольшие приложения.

Уравнение в отрезках. Пусть в общем уравнении прямой $Ax+By+C = 0$ коэффициенты $A \neq 0, B \neq 0, C \neq 0$. Тогда это уравнение можно переписать в виде

$$\frac{x}{\left(-\dfrac{C}{A}\right)} + \frac{y}{\left(-\dfrac{C}{B}\right)} = 1.$$

Обозначив $a = -\dfrac{C}{A}$, $b = -\dfrac{C}{b}$, получим уравнение прямой в отрезках

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1. \tag{II.19}$$

Видим, что точки с координатами $(a; 0)$ и $(0; b)$ удовлетворяют уравнению (II.19), и, следовательно, уравнение (II.19) описывает прямые, отсекающие от осей координат отрезки длиной $|a|$ и $|b|$.

Уравнение с угловым коэффициентом. Каноническое уравнение (II.15) может быть записано в виде

$$y - y_0 = \frac{m}{l}(x - x_0),$$

где $l \neq 0$. Вспомним, что

$$l = \text{Пр}_{\vec{i}}\, \vec{p} = |\vec{p}| \cos\varphi, \quad m = \text{Пр}_{\vec{j}}\, \vec{p} = |\vec{p}| \sin\varphi,$$

и поэтому коэффициент

$$k = \frac{m}{l} = \operatorname{tg}\varphi, \tag{II.20}$$

где φ (рассматриваемый в пределах $\varphi \in \left[\left(0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)\right]$), угол между векторами $\vec{i}$ и $\vec{p}$ (угол наклона прямой к оси Ox), называем *угловым коэффициентом*. Если обозначить $b = y_0 - \frac{m}{l}x_0$, то уравнение прямой с угловым коэффициентом примет вид

$$y = kx + b. \tag{II.21}$$

Легко убедиться в том, что точка с координатами $(0; b)$ удовлетворяет уравнению (II.21), и, следовательно, прямая (II.21) отсекает от оси Oy отрезок длиной $|b|$ (Рис. II.26a).

Рис. II.26a. **Рис. II.26b.**

Если в общем уравнении прямой $B \neq 0$ (прямая не параллельна оси ординат), то его можно привести к виду $y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}$. Обозначив $k = -\frac{A}{B}$, $b = -\frac{C}{B}$, приходим к уравнению прямой с угловым коэффициентом.

Используя геометрический смысл углового коэффициента k, легко получить выражение для тангенса угла между двумя прямыми.

Определение OII.4. *Углом θ между прямыми, заданными уравнениями с угловыми коэффициентами, будем называть угол, на который надо повернуть против часовой стрелки первую прямую вокруг точки S до совмещения со второй прямой $(0 \leq \theta \leq \pi)$ (Рис. II.26b)*

Пусть заданы прямые $y = k_1x + b_1$ и $y = k_2x + b_2$. Поскольку $\varphi_2 = \varphi_1 + \theta$ (Рис. II.26b), то $\operatorname{tg}\theta = \operatorname{tg}(\varphi_2 - \varphi_1)$. Учитывая, что $\operatorname{tg}\varphi_1 = k_1$, $\operatorname{tg}\varphi_2 = k_2$, и применяя формулу для тангенса разности углов, получим

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}, \quad (1 + k_1 k_2 \neq 0). \tag{II.22}$$

Если прямые заданы общими уравнениями $A_1x + B_1y + C_1 = 0$, $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ то, так как

$$k_1 = -\frac{A_1}{B_1},\ k_2 = -\frac{A_2}{B_2},$$

из (II.22) имеем

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{A_1B_2 - B_1A_2}{A_1A_2 + B_1B_2}, \quad (A_1A_2 + B_1B_2 \neq 0). \tag{II.23}$$

Последняя формула годится и в том случае, когда одна из прямых параллельна оси ординат. Формула (II.22) этот случай не затрагивает.

Теорема TII.1. *Для того, чтобы прямые были параллельны, необходимо и достаточно, чтобы* $k_1 = k_2$ $(A_1B_2 = B_1A_2)$.

Доказательство: $\langle\langle$ Пусть прямые параллельны. Угол $\theta = 0$ (либо $\theta = \pi$), и, следовательно, $\operatorname{tg}\theta = 0$. Из (II.22) вытекает, что $k_1 = k_2$, а из (II.23) — $A_1B_2 = B_1A_2$. Необходимость доказана.

Пусть обратно $k_1 = k_2$ $(A_1B_2 = B_1A_2)$. Тогда $\operatorname{tg}\theta = 0$. Следовательно, прямые параллельны. Достаточность доказана. $\rangle\rangle$

Теорема TII.2. *Для того, чтобы прямые были перпендикулярны между собой, необходимо и достаточно, чтобы* $k_2 = -\dfrac{1}{k_1}$ $\qquad (A_1A_2 + B_1B_2 = 0)$.

Доказательство: $\langle\langle$ В самом деле, если прямые ортогональны друг другу, то ортогональны и их нормальные векторы, и имеющие для прямых с угловым коэффициентом вид:

$$\vec{N}_1 = k_1\vec{i} - \vec{j}, \quad \vec{N}_2 = k_2\vec{i} - \vec{j},$$

а для прямых с общим уравнением

$$\vec{N}_1 = A_1\vec{i} + B_1\vec{j}, \quad \vec{N}_2 = A_2\vec{i} + B_2\vec{j}.$$

В силу равенства $\left(\vec{N}_1\,\vec{N}_2\right) = 0$ получим, что $k_1k_2 + 1 = 0$ и соответственно $A_1A_2 + B_1B_2 = 0$.

Пусть обратно, $k_2 = -\dfrac{1}{k_1}$. Это значит $k_1 k_2 + 1 = 0$. Поскольку для прямой $y = k_1 x + b_1$ нормальный вектор $\vec{N}_1$ имеет координаты $(k_1, -1)$, а для прямой $y = k_2 x + b_2$ $\quad \vec{N}_2 = k_2 \vec{i} - \vec{j}$, то равенство $k_1 k_2 + 1 = 0$ эквивалентно $\left(\vec{N}_1 \vec{N}_2\right) = 0$. Следовательно, нормальные векторы у прямых ортогональны. Ортогональны и прямые. Аналогичное рассуждение приводится в случае выполнения условия $A_1 A_2 + B_1 B_2 = 0$, если вспомнить, что

$$\vec{N}_1 = A_1 \vec{i} + B_1 \vec{j}, \quad \vec{N}_2 = A_2 \vec{i} + B_2 \vec{j}.$$

$\rangle\rangle$

II.6 Нормированное уравнение прямой

Нормированное уравнение прямой. Рассмотрим прямую, не проходящую через начало координат, опустим из начала координат перпендикуляр на прямую (Рис. II.27а) и обозначим через Q точку пересечения перпендикуляра и прямой. Пусть $\vec{n}$ — орт вектора $\overrightarrow{OQ} = \vec{q}$. Для любой точки M прямой вектор $(\vec{r} - \vec{q})$ ортогонален к $\vec{n}$, т.е. $((\vec{r} - \vec{q})\vec{n}) = 0$. Поскольку $\vec{n}$ — орт - вектор, то $\vec{n} = \vec{i}\cos\alpha + \vec{j}\sin\alpha$, где $\alpha = \widehat{\vec{i}\,\vec{n}}$, и

$$\left(\vec{q}\,\vec{n}\right) = |\vec{q}||\vec{n}|\cos\widehat{\vec{q}\,\vec{n}} = p$$

(длина перпендикуляра, равная расстоянию от начала координат до прямой). Поэтому равенство

$$((\vec{r} - \vec{q})\vec{n}) = \left(\vec{r}\,\vec{n}\right) - \left(\vec{q}\,\vec{n}\right) = 0$$

в координатах имеет вид

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0. \tag{II.24}$$

Уравнение (II.24) носит название *нормированного (нормального)* уравнения прямой.

Пусть прямая задана общим уравнением $Ax + By + C = 0$ или $\left(\vec{r}\,\vec{N}\right) + C = 0$. Найдем выражение для единичного вектора

$\vec{n}$, коллинеарного с $\vec{N}$. Получим, что

$$\vec{n} = \frac{\vec{N}}{\epsilon|\vec{N}|} = \frac{A}{\epsilon\sqrt{A^2 + B^2}}\vec{i} + \frac{B}{\epsilon\sqrt{A^2 + B^2}}\vec{j}.$$

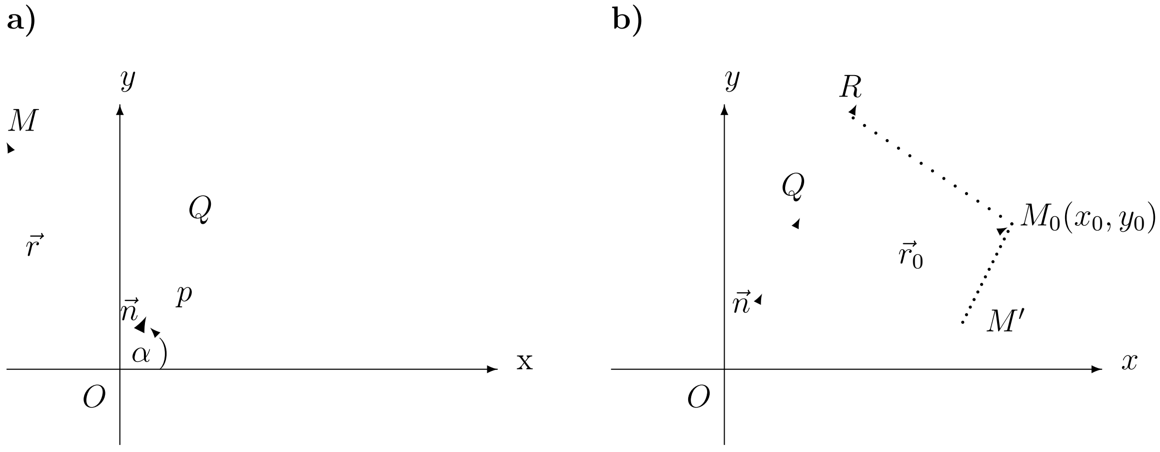


Рис. II.27.

Поэтому нормированное уравнение имеет следующий вид:

$$\frac{A}{\epsilon\sqrt{A^2+B^2}}x+\frac{B}{\epsilon\sqrt{A^2+B^2}}y+\frac{C}{\epsilon\sqrt{A^2+B^2}}=0, \tag{II.25}$$

где $\epsilon=+1$, если свободный член $C<0$ и $\epsilon=-1$, если $C>0$. Такой выбор знака перед корнем определяется тем, что в (II.24) свободный член $-p$ всегда отрицателен.

Пример ПII.1. *Пронормировать уравнение прямой $x-y+1=0$. Так как свободный член положителен, то нормирующий множитель будет равен*

$$-\frac{1}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=-\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Поэтому нормированное уравнение имеет вид:

$$-\frac{1}{\sqrt{2}}x+\frac{1}{\sqrt{2}}y-\frac{1}{\sqrt{2}}=0.$$

Используя нормированное уравнение прямой, легко вывести формулу вычисления расстояния d от точки до прямой.

Пусть $M_0(x_0;y_0)$ — точка вне прямой $x\cos\alpha+y\sin\alpha-p=0$.

Определение ОII.5. *Отклонением δ точки M_0 от прямой называется число, равное $+d$, если M_0 и начало координат находятся по разные стороны прямой, и равное $-d$, если $_0$ и начало координат находятся по одну сторону от прямой.*

Теорема TII.3. *Для вычисления отклонения δ точки $M_0(x_0; y_0)$ от прямой $x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0$ нужно в левую часть уравнения вместо x и y подставить координаты x_0 и y_0 точки M_0, т.е.*

$$\delta = x_0\cos\alpha + y_0\sin\alpha - p. \tag{II.26}$$

Для вычисления расстояния от точки до прямой получаем формулу

$$d = |x_0\cos\alpha + y_0\sin\alpha - p|. \tag{II.27}$$

Доказательство: $\langle\langle$ Доказательство проведем для случая, когда начало координат и M_0 находятся по разные стороны прямой (Рис Рис. II.27b). В другом случае все повторяется буквально. Для рассматриваемой ситуации

$$\delta = \text{Пр}_{\vec{n}}\,\overrightarrow{M'M_0} = \text{Пр}_{\vec{n}}\,\overrightarrow{QR}.$$

Но

$$\overrightarrow{QR} = \left(\text{Пр}_{\vec{n}}\,\overrightarrow{OM_0}\right)\vec{n} - p\vec{n} = (\vec{r_0}\,\vec{n})\vec{n} - p\vec{n}.$$

Поэтому

$$\delta = \left(\overrightarrow{QR}\cdot\vec{n}\right) = (\vec{r_0}\,\vec{n}) - p,$$

так как $(\vec{n}\,\vec{n}) = 1$. Формулы (II.26), а, следовательно, и (II.27) доказаны. $\rangle\rangle$

Пример ПII.2. *Найти расстояние от точки $P(1, -2)$ до прямой $2x + y - 3 = 0$.*

Нормируем согласно (II.25) данное уравнение:

$$\frac{2}{\sqrt{5}}x + \frac{1}{\sqrt{5}}y - \frac{3}{\sqrt{5}} = 0.$$

Подставляем координаты точки $P(1, -2)$. Получим, что

$$\delta = \frac{2}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{5}}(-2) - \frac{3}{\sqrt{5}} = -\frac{3}{\sqrt{5}}.$$

Биссектрисы углов

В качестве приложения формулы для отклонения (II.26) выступает вывод *уравнений биссектрис* углов, образованных при пересечении прямых $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2 = 0$. Так как биссектриса есть геометрическое место точек, равноудаленных от сторон угла, то, учитывая знак отклонения текущей точки биссектрисы $M(X;Y)$ от первой и второй прямой, получим уравнение биссект А именно

$$\left(\frac{A_1}{\epsilon_1\sqrt{A_1^2+B_1^2}}-\frac{A_2}{\epsilon_2\sqrt{A_2^2+B_2^2}}\right)X+\left(\frac{B_1}{\epsilon_1\sqrt{A_1^2+B_1^2}}-\frac{B_2}{\epsilon_2\sqrt{A_2^2+B_2^2}}\right)Y+$$

$$+\left(\frac{C_1}{\epsilon_1\sqrt{A_1^2+B_1^2}}-\frac{C_2}{\epsilon_2\sqrt{A_2^2+B_2^2}}\right)=0$$

для угла, где отклонения совпадают по знаку, а также

$$\left(\frac{A_1}{\epsilon_1\sqrt{A_1^2+B_1^2}}+\frac{A_2}{\epsilon_2\sqrt{A_2^2+B_2^2}}\right)X+\left(\frac{B_1}{\epsilon_1\sqrt{A_1^2+B_1^2}}+\frac{B_2}{\epsilon_2\sqrt{A_2^2+B_2^2}}\right)Y+$$

$$+\left(\frac{C_1}{\epsilon_1\sqrt{A_1^2+B_1^2}}+\frac{C_2}{\epsilon_2\sqrt{A_2^2+B_2^2}}\right)=0$$

для углов, где отклонения разнятся знаком.

Пример III.3. *Найти уравнение биссектрис углов, образованных пересечением прямых $x - 2y + 1 = 0$ и $2x + y - 2 = 0$.*
Решение. Нормируем прямые. Имеем

$$-\frac{1}{\sqrt{5}}x+\frac{2}{\sqrt{5}}y-\frac{1}{\sqrt{5}}=0$$

и

$$\frac{2}{\sqrt{5}}x+\frac{1}{\sqrt{5}}y-\frac{2}{\sqrt{5}}=0.$$

Для одинаковых знаков δ получим, что

$$-\frac{3}{\sqrt{5}}X+\frac{1}{\sqrt{5}}Y+\frac{1}{\sqrt{5}}=0$$

или $Y = 3X - 1$.

Для разных знаков δ *получим, что*

$$\frac{1}{\sqrt{5}}X + \frac{3}{\sqrt{5}}Y - \frac{3}{\sqrt{5}} = 0,$$

т.е. $X + 3Y - 3 = 0$ *или* $Y = -\dfrac{1}{3}X + 1$.

Взаимное расположение двух прямых $A_1x+B_1y+C_1 = 0$ и $A_2x+B_2y+C_2 = 0$ на плоскости описывается тремя ситуациями: (1) прямые пересекаются; (2) прямые параллельны, но не совпадают; (3) прямые совпадают. Рассмотрение системы уравнений

$$\left\{ \begin{array}{l} A_1x + B_1y + C_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2 = 0 \end{array} \right. \tag{II.28}$$

с привлечением теории систем линейных уравнений приводит нас к следующим выводам: (1) если определитель

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \neq 0,$$

то система (II.28) имеет единственное решение — прямые пересекаются; (2) если

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} = 0,$$

а ранг матрицы

$$\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{pmatrix}$$

равен двум, то система несовместна — прямые параллельны и не совпадают; (3) если ранг

$$\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{pmatrix}$$

равен 1, то прямые совпадают.

Перейдем к описанию пучка прямых.

Определение OII.6. *Множество всех прямых плоскости, проходящих через точку* $M_0(x_0; y_0)$ *плоскости (называемую центром), называется пучком прямых.*

Как задать пучок прямых? Первый способ состоит в задании центра пучка $M_0(x_0; y_0)$. В таком случае множество всех прямых, проходящих через эту точку, описывается соотношениями

$$\left\{\begin{array}{l} y - y_0 = k(x - x_0) \\ x = x_0 \end{array}\right\} \quad (-\infty < k < +\infty). \tag{II.29}$$

Второй способ состоит в задании двух фиксированных пересекающихся прямых: $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ и $A_2 + B_2y + C_2 = 0$ $(A_1B_2 - A_2B_1 \neq 0)$.

Теорема ТII.4. *Уравнение пучка прямых с центром в точке пересечения прямых $A_1x+B_1y+C_1 = 0$ и $A_2x+B_2y+C_2 = 0$ (без определения координат точки пересечения) описывается соотношениями вида*

$$\lambda(A_1x + B_1y + C_1) + \mu(A_2x + B_2y + C_2) = 0, \tag{II.30}$$

где $\lambda\,\mu$ — произвольные вещественные числа.

Доказательство: $\langle\langle$ Действительно, (II.30) относится к уравнению вида $Ax + By + C = 0$ и, следовательно, есть уравнение прямой (при $\mu = 0$ имеет первую базисную прямую пучка, при $\lambda = 0$ имеет вторую базисную прямую). Прямая, описываемая уравнением (II.30), проходит через точку пересечения базовых прямых, ибо координаты точки пересечения обращают в нуль как первую скобку, так и вторую и, следовательно, удовлетворяют (II.30). Наконец, (II.30) описывает все прямые пучки, т.е. какова бы ни была наперед заданная прямая, проходящая через центр пучка, она будет описываться уравнением (II.30) при некоторых значениях параметров λ и μ. В самом деле, наперед заданная прямая пучка однозначно определяется заданием еще одной точки $P(x_1; y_1)$ (через две точки проходит единственная прямая). Если мы покажем, что найдутся такие λ и μ, что координаты точки P удовлетворяют (II.30), то доказательство теоремы будет закончено. Все эти условия соблюдаются, так как, взяв,

$$\lambda = -\frac{A_2x_1 + B_2y_1 + C_2}{A_1x_1 + B_2x_1 + C_1} \cdot \mu$$

мы получим

$$\lambda\,(A_1x_1 + B_1y_1 + C_1) + \mu\,(A_2x_1 + B_2y_1 + C_2) \equiv 0.$$

$\rangle\rangle$

Пример ПII.4. *Через точку пересечения прямых $x - y + 1 = 0$ и $2x + y + 1 = 0$ проходит прямая , параллельная прямой $3x + y + 1 = 0$. Написать ее*

уравнение.
Решение. Имеем $\lambda(x-y+1)+\mu(2x+y+1)=0$ *или* $(\lambda+2\mu)x+(-\lambda+\mu)y+\lambda+\mu=0$. *Условие параллельности:* $\lambda+2\mu=3$ *и* $-\lambda+\mu=1$, *т. е.* $\lambda=\frac{1}{3}$, $\mu=\frac{4}{3}$. *Ответ:* $3x+y+\frac{5}{3}=0$.

II.7 Общее уравнение кривой второго порядка и классификация кривых второго порядка

Определение ОII.7. *Линия, определяемая в прямоугольной системе координат уравнением*

$$Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0, \tag{II.31}$$

где A, B, C *одновременно не обращаются в нуль, называется кривой второго порядка, а уравнение (II.31) — ее общим уравнением.*

Совершенно очевидно, что всякая окружность $(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$ есть кривая второго порядка (II.31) при $A=C$, $B=0$, так как после возведения в квадрат имеем: $x^2+y^2-2ax-2by+a^2+b^2-R^2=0$.

Обратно, если в (II.31)
$A=C$, $B=0$, $\frac{F}{A}<0$, то (II.31) есть уравнение окружности. В самом деле, умножив (II.31) на $\frac{1}{A}$, получим
$x^2+y^2-2ax-2by-c=0$ $\left(a=-\frac{D}{A},\ b=-\frac{E}{A},\ c=-\frac{F}{a}>0\right)$, которое может быть записано в виде

$$(x-a)^2+(y-b)^2=c+a^2+b^2.$$

Нашей целью является выбор такой новой прямоугольной системы координат
$\Re\{O';\vec{i}\,',\vec{j}\,',\vec{k}\,'\}$, относительно которой уравнение кривой (II.31) имеет наименьшее число числовых параметров (каноническое уравнение). Переход осуществляется по формулам (I.42)

$$\left.\begin{array}{l} x=x'\cos\alpha-y'\sin\alpha+a \\ y=x'\sin\alpha+y'\cos\alpha+b \end{array}\right\}. \tag{II.32}$$

Подставив вместо x и y в (II.31) их выражения (II.32), получим

$$A(x'^2\cos^2\alpha + y'^2\sin^2\alpha + a^2 - 2x'y'\cos\alpha\sin\alpha + 2ax'\cos\alpha - 2ay'\sin\alpha)+$$
$$+2B(x'^2\cos\alpha\sin\alpha + x'y'\cos^2\alpha + bx'\cos\alpha - x'y'\sin^2\alpha - y'^2\sin\alpha\cos\alpha - by'\sin\alpha+$$
$$+ax'\sin\alpha + ay'\cos\alpha + ab) + C(x'^2\sin^2\alpha + y'^2\cos^2\alpha + b^2 + 2x'y'\cos\alpha\sin\alpha + 2bx'\sin\alpha+$$
$$+2by'\cos\alpha) + 2D(x'\cos\alpha - y'\sin\alpha + \alpha) + 2E(x'\sin\alpha + y'\cos\alpha + b) + F = 0.$$

Приведя подобные члены, имеем

$$A'x'^2 + 2B'x'y' + C'y'^2 + 2D'x' + 2E'y' + F' = 0, \qquad \text{(II.33)}$$

где новые коэффициенты выражаются следующим образом:

$$\left.\begin{aligned}
A' &= A\cos^2\alpha + 2B\cos\alpha\sin\alpha + C\sin^2\alpha\\
B' &= B\cos 2\alpha + \frac{1}{2}(C-A)\sin 2\alpha\\
C' &= A\sin^2\alpha - 2B\sin\alpha\cos\alpha + C\cos^2\alpha\\
D' &= a(A\cos\alpha + B\sin\alpha) + b(B\cos\alpha + C\sin\alpha) + D\cos\alpha + E\sin\alpha\\
E' &= a(b\cos\alpha - A\sin\alpha) + b(C\cos\alpha - B\sin\alpha) - D\sin\alpha + E\cos\alpha\\
F' &= Aa^2 + 2Bab + Cb^2 + 2Da + 2Eb + F
\end{aligned}\right\}. \qquad \text{(II.34)}$$

Отметим следующий факт:

Определитель $\Delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix}$, составленный из коэффициентов при второй степени есть инвариант относительно преобразований координат (II.32).

В самом деле, подставив в выражение $\Delta' = A'C' - B'^2$ значения A', B', C' из (II.34), получим

$$\Delta' = A'C' - B'^2 = (AC - B^2)\sin^4\alpha + (AC - B^2)\cos^4\alpha + 2(AC - B^2)\sin^2\alpha\cos^2\alpha =$$
$$= (AC - B^2)(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)^2 = \Delta. \qquad \text{(II.35)}$$

Если в уравнении $B \neq 0$, то в преобразованиях (II.32) угол α подберем таким, чтобы коэффициент B' в (II.33) обратился в нуль. Для этого достаточно, чтобы

$$B\cos 2\alpha + \frac{1}{2}(C - A)\sin 2\alpha = 0,$$

т.е.

$$\operatorname{ctg} 2\alpha = \frac{1}{2B}(A - C). \tag{II.36}$$

Распорядимся сейчас выбором параметров a и b для упрощения уравнения (II.33), где $B' = 0$. С этой целью дальнейшее рассмотрение разобьем на два случая в зависимости от того, отличен от нуля определитель $\Delta = AC - B^2$ в уравнении (II.31) или он равен нулю.

(A) Пусть $\Delta = AC - B^2 \neq 0$. Заметив, что определитель, составленный из коэффициентов при a и b для D' и E' в (II.34)

$$\begin{vmatrix} A\cos\alpha + B\sin\alpha & B\cos\alpha + C\sin\alpha \\ B\cos\alpha - A\sin\alpha & C\cos\alpha - B\sin\alpha \end{vmatrix} = AC - B^2 \neq 0, \tag{II.37}$$

выберем a и b таким образом, чтобы $D' = 0$ и $E' = 0$. Для этого, согласно (II.34), необходимо решить систему уравнений относительно неизвестных a и b (значение α фиксировано равенством (II.36))

$$\left.\begin{array}{l} a(A\cos\alpha + B\sin\alpha) + b(B\cos\alpha + C\sin\alpha) = -D\cos\alpha - E\sin\alpha \\ a(B\cos\alpha - A\sin\alpha) + b(C\cos\alpha - B\sin\alpha) = D\sin\alpha - E\cos\alpha \end{array}\right\}.$$

В силу (II.37) для a и b по формулам Крамера имеем единственное решение.

Подставив найденные значения α, a, b, в A', C', F' из (II.34), мы получим в штрихованной системе координат с началом в точке $O'(a; b)$ следующее уравнение:

$$px'^{\,2} + qy'^{\,2} = r. \tag{II.38}$$

Покажем, что начало координат $O'(a; b)$ является центром симметрии кривой (II.38), а штрихованные оси координат — осями симметрии. В самом деле, если в уравнении (II.38) вместо координаты x' подставить $-x'$, то уравнение не изменится. Не изменится оно и после замены y' на $-y'$. Это значит, что точка O' (пересечение осей $O'x'$ и $O'y'$) есть центр симметрии кривой (II.38). Линию второго порядка, имеющую единственный центр симметрии называют *центральной*, остальные носят название нецентральных.

Если $r \neq 0$, то центральная кривая называется *невырожденной*, при $r = 0$ — *вырожденной*.

(A.1) *Невырожденные центральные кривые.*Представив уравнение (II.38) в виде

$$\frac{x^2}{\left(\dfrac{r}{p}\right)} + \frac{y^2}{\left(\dfrac{r}{q}\right)} = 1$$

(ради упрощения записи штрихи у переменных опустим) и обозначив

$$\frac{r}{p} = \epsilon_1 a^2, \quad \frac{r}{q} = \epsilon_2 b^2 \quad (a, b > 0, \quad \epsilon_1 \pm 1, \quad \epsilon_2 = \pm 1),$$

получим

$$\frac{x^2}{\epsilon_1 a^2} + \frac{y^2}{\epsilon_2 b^2} = 1. \tag{II.39}$$

При $\epsilon_1 = 1$, $\epsilon_2 = 1$ имеем *каноническое уравнение эллипса*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \tag{II.40}$$

Когда $a = b$, эллипс представляет собой окружность. При $\epsilon_1 = 1$, $\epsilon_2 = -1$ имеем *каноническое уравнение гиперболы*

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1. \tag{II.41}$$

При $\epsilon_1 = -1$, $\epsilon_2 = 1$ опять имеем уравнение гиперболы, в котором по сравнению с II.41 роль переменной x играет y и наоборот. Этот случай принципиально не отличается от предыдущего.

При $\epsilon_1 = -1$, $\epsilon_2 = -1$ вещественных точек не существует (*мнимый эллипс*). Очевидно, что первый и четвертый случай соответствуют ситуации, когда $\Delta > 0$, второй и третий, когда $\Delta < 0$.

$(A.2)$ *Вырожденные центральные кривые.* При $r = 0$ уравнение II.38 записывается в виде

$$\epsilon_1 \frac{x^2}{a^2} + \epsilon_2 \frac{y^2}{b^2} = 0 \quad \left(\epsilon_1 a^2 = \frac{1}{p}, \quad \epsilon_2 b^2 = \frac{1}{q}\right). \tag{II.42}$$

При $\epsilon_1 = 1$, $\epsilon_2 = 1\,(\Delta > 0)$ имеем одну точку $O'(0,0)$. При $\epsilon_1 = 1$, $\epsilon_2 = -1\,(\Delta < 0)$ левая часть II.42 распадается на два сомножителя

$$\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right)\left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right) = 0.$$

Поэтому имеем пару пересекающихся прямых

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 0, \quad \frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 0 \tag{II.43}$$

При $\epsilon_1 = -1$, $\epsilon_2 = 1\,(\Delta < 0)$ ситуация та же самая. Этот случай ничем принципиальным от предыдущего не отличается.

Наконец, При $\epsilon_1 = -1$, $\epsilon_2 = -1\,(\Delta > 0)$ возвращаемся к первой ситуации.

(B). Пусть $\Delta = AC - B^2 = 0$. Взяв $a = 0$, $b = 0$ в (II.42), после выбора угла поворота осей, α, в виде (II.36) мы получим, что $B' = 0$. Из - за инвариантности Δ имеем $\Delta' = A'C' = 0$. Пусть $A' = 0$ (если $C' = 0$, то все рассуждения повторяются буквально, только роль x будет играть y), и, следовательно, $C' \neq 0$. Уравнение (II.33) принимает после умножения на $\dfrac{1}{C'}$ следующий вид:

$$y'^{\,2} + 2px' + 2qy' + r = 0. \tag{II.44}$$

После переноса начала координат в точку

$$O''\left(\frac{q^2 - r}{2p}; -q\right) \quad x'' = x' + \frac{r - q^2}{2p}, \quad y'' = y' + q$$

(случай $p = 0$ будет рассмотрен ниже) имеем

$$y''^{\,2} = 2px''. \tag{II.45}$$

Получили *каноническое уравнение нецентральной невырожденной* кривой второго порядка — *параболы.*

Если в (II.44) $p = 0$, то после переноса начала координат в точку $O''(0;\ -q)$: $x'' = x'$, $y'' = y' + q$ имеем *каноническое уравнение вырожденной нецентральной кривой второго порядка*

$$(y'')^2 = \epsilon a^2 \quad (\epsilon a^2 = q^2 - r,\ \epsilon = \pm 1). \tag{II.46}$$

При $\epsilon = 1$ уравнение (II.36) описывает *пару параллельных* прямых (при $a = 0$ *слившихся*), при $\epsilon = -1$ — *пару мнимых параллельных прямых.*

На этом классификация всех возможных алгебраических линий второго порядка закончена.

II.8 Исследование формы и свойств эллипса

Перейдем к рассмотрению свойств и установлению формы *эллипса* (II.40). При этом мы будем предполагать, что $b < a$ (при $b > a$ роли переменных x и y меняются местами), и называть a — *большой полуосью* эллипса, b — *малой полуосью* эллипса.

Введем параметр $c > 0$, определив его из равенства $c^2 = a^2 - b^2$, и рассмотрим на оси Ox две точки $F_1(-c; 0)$ и $F_2(c; 0)$ так, что начало координат делит отрезок F_1F_2 пополам. Вычислим сейчас расстояния r_1 и r_2 от точек F_1 и F_2 до произвольной точки эллипса $M(x; y)$: $r_1 = \sqrt{(x + c)^2 + y^2}$, $r_2 =$

$\sqrt{(x-c)^2+y^2}$. Из уравнения (II.40), подставив вместо b^2 его выражение $b^2 = a^2 - c^2$, получим

$$y^2 = a^2 - c^2 - x^2 + \frac{c^2}{a^2}x^2$$

и внесем его под корни для r_1 и r_2

$$\left.\begin{aligned} r_1 &= \sqrt{2cx + a^2 + \frac{c^2}{a^2}x^2} = \sqrt{\left(a + \frac{c}{a}x\right)^2} = \left|a + \frac{c}{a}x\right| \\ r_2 &= \sqrt{-2cx + a^2 + \frac{c^2}{a^2}x^2} = \sqrt{\left(a - \frac{c}{a}x\right)^2} = \left|a - \frac{c}{a}x\right| \end{aligned}\right\}.$$

Из уравнения (II.40) следует, что $|x| \leq a$, и так как $c < a$, то $\left|\frac{c}{a}x\right| < a$. Таким образом, $a + \frac{c}{a}x > 0$ и $a - \frac{c}{a}x > 0$. Поэтому для r_1 и r_2 окончательно имеем

$$r_1 = a + ex, \quad r_2 = a - ex, \tag{II.47}$$

где параметр $e = \frac{c}{a} < 1$ называют *эксцентриситетом* эллипса. Складывая равенства (II.47), получим, что

$$r_1 + r_2 = 2a$$

для *любой* точки эллипса. Это свойство позволяет определить эллипс таким образом:

Рис. II.28. *Эллипс с главной осью OX*

> Эллипс — это геометрическое место точек плоскости, сумма расстояний от которых до двух данных точек F_1 и F_2 (называемых фокусами эллипса) есть величина постоянная (большая чем расстояние между фокусами).

Числа r_1 и r_2 из (II.47) часто называют *фокальными радиусами* эллипса.

Исследуем форму эллипса по его каноническому уравнению. Нами уже установлено, что оси координат являются осями симметрии, а начало координат — центром симметрии. Поскольку $\dfrac{x^2}{a^2} \le 1$ и $\dfrac{y^2}{b^2} \le 1$, то эллипс расположен в прямоугольнике $|x| \le a$, $|y| \le b$.

Для исследования формы эллипса в силу симметрии достаточно рассмотреть ту его часть, что лежит в первой координатной четверти:

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}.$$

Получив график этой линии и достроив ее симметрично в остальных четвертях, получим линию эллипса (Рис. II.28)

При изучении эллипса особую роль играют две прямые, перпендикулярные к оси Ox, с уравнениями $x = \pm\dfrac{a}{e}$ (Рис. II.29) — *директрисы* эллипса. Для эллипса $e < 1$, $\dfrac{a}{e} > a$, и, следовательно, директрисы расположены вне эллипса. Для диррректрис имеет место теорема, которую можно взять за новое определение эллипса.

Рис. II.29. *Эллипс*

Теорема ТII.5. *Отношение расстояния от любой точки эллипса до фокуса к расстоянию ее до соответствующей директрисы есть величина постоянная, равная эксцентриситету эллипса.*

Доказательство: $\langle\langle$ Действительно, пусть $M(x;y)$ — точка эллипса, d_1 и d_2 — расстояния до соответствующих диррект В силу симметрии достаточно доказать теорему для одного из фокусов (например, для F_2).

Точка M' имеет координаты $(x;0)$, а $D_2' - \left(\dfrac{a}{e};0\right)$. Поэтому $d_2 = |\overrightarrow{M'D_2'}| = \dfrac{a}{e} - x$. Поскольку $r_2 = a - ex$, то

$$\frac{r_2}{d_2} = \frac{(a-ex)e}{a-ex} = e.$$

$\rangle\rangle$

В заключении остановимся на параметрическом уравнении эллипса. С этой целью рассмотрим окружность $x^2 + y^2 = a^2$ и произведем точечное сжатие плоскости вдоль ординат точек

$$x = X \qquad y = \frac{a}{b}Y. \tag{II.48}$$

Подставив в уравнение окружности, получим уравнение эллипса

$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = 1.$$

Пусть окружность задана в параметрической форме:

$$x = a\cos t, \quad y = a\sin t, \quad (t \in [0, 2\pi]).$$

Из (II.48) находим $X = a\cos t$, $Y = \dfrac{b}{a}y = b\cos t\,(t \in [0, 2\pi])$. Поэтому параметрическое уравнение эллипса с полуосями a и b имеют вид

$$\left.\begin{aligned} x &= a\cos t \\ y &= b\sin t \end{aligned}\right\} \quad (0 \le t < 2\pi). \tag{II.49}$$

В следующем разделе мы изучим гиперболу и параболу.

II.9 Исследование формы и свойств гиперболы

Перейдем к рассмотрению геометрических свойств и формы гиперболы

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (a, b > 0). \tag{II.50}$$

Введем параметр $c > 0$ с помощью равенства $c^2 = a^2 + b^2$, так что $c > a$, и рассмотрим на оси Ox две точки $F_1(-c; 0)$ и $F_2(c; 0)$, которые назовем *левым* и *правым фокусами* гиперболы. Вычислим фокальные расстояния $|\overrightarrow{F_1M}|$, $|\overrightarrow{F_2M}|$ до произвольной точки гиперболы $M(x; y)$: $|\overrightarrow{F_1M}| = r_1 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$, $|\overrightarrow{F_2M}| = r_2 = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$. Из (II.50) находим

$$y^2 = \frac{c^2}{a^2}x^2 - x^2 - c^2 + a^2$$

и подставляем в выражение для r_1 и r_2. Имеем

$$\left.\begin{aligned} r_1 &= \sqrt{\left(a + \frac{c}{a}x\right)^2} = |a + ex| \\ r_2 &= \sqrt{\left(a - \frac{c}{a}x\right)^2} = |a - ex| \end{aligned}\right\} \tag{II.51}$$

где $e = \dfrac{c}{a}$ — параметр, называемый *эксцентриситетом гиперболы*. Заметим, что для гиперболы $e > 1$, так как $c > a$.

Исследуем различные возможности, представляемые равенствами (II.51). Из (II.50) следует, что $\dfrac{x^2}{a^2} \geq 1$, т.е. $|x| \geq a$. Поэтому в зависимости от того, лежит ли $M(x; y)$ в правой полуплоскости ($x > 0$), или в левой ($x < 0$) выражения для (II.51) различные.

Если $x > 0$, то $a + ex > 0$ и $a - ex < 0$, так как, $e > 1$, $x > a$, $ex > a$. Поэтому *в правой полуплоскости* выполнено

$$r_1 = a + ex, \quad r_2 = -a + ex. \tag{II.52}$$

Если $x < 0$, то $a + ex < 0$, так как, $|ex| > a$ и $a - ex > 0$. Поэтому в *в левой полуплоскости* выполнено

$$r_1 = -a - ex, \quad r_2 = a - ex. \tag{II.53}$$

Из этих рассуждений вытекает, что гипербола состоит из двух симметричных ветвей, расположенных соответственно в правой и левой полуплоскостях. Из (II.52) и (II.53) для обеих ветвей выводим инвариантное равенство

$$|r_1 - r_2| = 2a. \tag{II.54}$$

На основании (II.54) можно дать новое определение гиперболы:

> Гипербола есть геометрическое место точек плоскости, модуль разности расстояний от которых до двух фиксированных точек F_1, F_2, называемых фокусами гиперболы есть величина постоянная (не равная нулю и меньшая расстояния между фокусами) .

При установлении формы гиперболы отметим, что оси Ox и Oy являются *осями симметрии*, а их пересечение — *центром симметрии* (центр гиперболы). Поскольку $\dfrac{x^2}{a^2} \geq 1$ ($|x| \geq a$), то ветви гиперболы лежат на плоскости вне полосы $-a < x < a$. Точки пересечения ветвей с осью Ox ($y = 0$, $A_1(-a; 0)$) называются *вершинами* гиперболы. Для гиперболы, заданной уравнением (II.50) ось Ox называется *действительной осью* гиперболы, а ось Oy — *мнимой осью* гиперболы (пересечения нет из - за равенства $-\dfrac{y^2}{b^2} = 1$). В силу симметрий достаточно исследовать форму гиперболы в первой четверти,

$y = \dfrac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$, а затем распространить на всю плоскость. Наряду с указанной ветвью гиперболы целесообразно рассмотреть луч, исходящий из начала координат, с уравнением $Y = \dfrac{b}{a}x$.

Пусть M — точка гиперболы с абсциссой x, N — точка, указанной прямой с той же абсциссой. Для разности ординат имеем

$$Y - y = \frac{b}{a}(x - \sqrt{x^2 - a^2}).$$

При неограниченном возрастании x данная разность монотонно стремится к нулю, так как

Рис. II.30. *Гипербола*

$$\lim_{x\to\infty}(Y - y) = \frac{b}{a}\lim_{x\to\infty}(x - \sqrt{x^2 - a^2}) = \frac{b}{a}\lim_{x\to\infty}\frac{x^2 - x^2 + a^2}{(x + \sqrt{x^2 - a^2})} = 0.$$

Поэтому прямые $y = \pm\dfrac{b}{a}x$ являются *асимптотами* гиперболы

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Для построения асимптот строим прямоугольник со сторонами $x = \pm a$, $y = \pm b$. Асимптоты — прямые, содержащие диагонали прямоугольника. При построении гиперболы удобно построить сначала асимптоты, а затем ветви гиперболы
(Рис. II.30).

Для гиперболы вводятся две прямые, перпендикулярные к оси Ox, с уравнениями $x = \pm\dfrac{a}{e}$, и называемые *директрисами гиперболы.* В силу неравенства $e > 1$ директрисы лежат между вершинами гиперболы. Так же, как и для эллипса, имеет место *утверждение:*

$$\frac{r_1}{d_1} = \frac{r_2}{d_2} = e,$$

где d_1 и d_2 — расстояния от точки гиперболы до соответствующих директрис (Рис. II.31).

Рис. II.31.

Доказательство совершенно аналогично тому, что проведено для эллипса, и поэтому мы приводить его не будем. Приведем лишь формулировку теоремы, которая является фактически еще одним определением гиперболы.

Теорема ТII.6. *Отношение расстояния от любой точки гиперболы до фокуса к расстоянию ее до соответствующей директрисы есть величина постоянная, равная эксцентриситету гиперболы $e > 1$.*

Отметим, что гипербола

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1.$$

называется *сопряженной* по отношению к гиперболе (II.50). Действительной осью сопряженной гиперболы является ось Oy, асимптоты остаются прежними.

II.10 Исследование формы и свойств параболы

Перейдем к установлению геометрических свойств и вида формы параболы

$$y^2 = 2px \quad (p > 0). \tag{II.55}$$

Прежде всего отметим, что кривая лежит в правой полуплоскости ($x \geq 0$) и проходит через начало координат. Рассмотрим точку $F\left(\dfrac{p}{2}; 0\right)$, называемую *фокусом параболы*, и прямую, перпендикулярную к оси Ox, с уравнением $x = -\dfrac{p}{2}$, называемую *директрисой параболы*. Пусть $M(x; y)$ — произвольная точка параболы. Вычислим расстояние

$$\left|\overrightarrow{FM}\right| = r = \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2},$$

подставив y^2 из соотношения (II.55). Получим

$$r = \sqrt{\left(x + \frac{p}{2}\right)^2} = \left|x + \frac{p}{2}\right| = x + \frac{p}{2}. \tag{II.56}$$

Расстояние d от M до директрисы $x = -\dfrac{p}{2}$ также равно $x + \dfrac{p}{2}$. Поэтому для параболы $\dfrac{r}{d} = 1$. Таким образом:

> Парабола есть геометрическое место точек, для которых расстояние до фиксированной точки F (фокуса параболы) равно расстоянию до фиксированной прямой (директрисы параболы).

Так как для эллипса и гиперболы отношение $\dfrac{r}{d}$ есть постоянное число, равное e — эксцентриситету, то и для параболы отношение $\dfrac{r}{d} = e$ — называют *эксцентриситетом*, т.е. для параболы $e = 1$.

Из приведенного рассуждения следует, что эллипс, гипербола и парабола обладают *общим* геометрическим свойством:

> Отношение расстояния r от любой точки M каждой из этих кривых до фокуса к расстоянию d от этой точки M до соответствующей директрисы есть величина постоянная, равная эксцентриситету e кривой.

Форма параболы легко устанавливается с использованием симметрии относительно оси Ox и монотонного возрастания функции $y = \sqrt{2px}$ ((Рис. II.32))

Рис. II.32. *Парабола*

II.11 Полярные уравнения кривых второго порядка

Для вывода единого уравнения эллипса, гиперболы и параболы в *полярной системе координат* воспользуемся установленным единым для этих кривых свойством
$\frac{r}{d} = e.$

Пусть задана какая - либо из перечисленных кривых. Поместим полюс полярной системы координат в фокус F, а полярную ось — по перпендикуляру от директрисы к фокусу (Рис. II.33).

Пусть B — точка пересечения кривой с перпендикуляром к полярной оси, исходящим из фокуса F, а p — длина вектора $\overrightarrow{FB}$, называемая *фокальным параметром.* Согласно свойству $\frac{r}{d} = e$ имеем, что

$$\frac{p}{\left|\overrightarrow{CB}\right|} = \frac{p}{\left|\overrightarrow{EF}\right|} = e.$$

Поэтому $\left|\overrightarrow{EF}\right| = \frac{p}{e}$, а также

$$d = \left|\overrightarrow{DM}\right| = \left|\overrightarrow{EN}\right| = \left|\overrightarrow{EF}\right| + r\cos\varphi = \frac{p}{e} + r\cos\varphi.$$

Подставляя данное выражение в отношение $\dfrac{r}{d} = e$, получим

$$\frac{r}{\dfrac{p}{e} + r\cos\varphi} = e.$$

откуда следует полярное уравнение для рассматриваемых кривых второго порядка ($e < 1$ — эллипс, $e > 1$ — гипербола, $e = 1$ — парабола):

$$r = \frac{p}{1 - e\cos\varphi}. \tag{II.57}$$

Отметим, что при $e > 1$ из - за условия $r > 0$ уравнение (II.57) описывает только одну ветвь гиперболы, внутри которой лежит фокус.

Эллипс, гиперболу и параболу называют *коническими сечениями*, потому что их можно получить путем сечения плоскостями кругового конуса. Если плоскость пересекает только одну полость конуса и параллельна одной из образующих конуса, то получим параболу. Если секущая плоскость пересекает только одну полость конуса и не параллельна ни одной образующей конуса, то коническое сечение будет эллипсом. Когда секущая плоскость перпендикулярна оси конуса, получаем окружность.

Рис. II.33. *К полярному уравнению параболы*

Наконец, если секущая плоскость не проходит через вершину и параллельна оси конуса, то получим гиперболу.

II.12 Касательные к кривым второго порядка

Условия касания

Рассмотрим сначала условия касания прямой и кривой второго порядка, заданной своим каноническим уравнением. Рассмотрение подробно проведем для эллипса. Для гиперболы и параболы все повторяется буквально, и для них мы приведем лишь результат.

Пусть задана прямая $Ax + By + C = 0$ и эллипс

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Считаем $B \neq 0$, так как прямые, перпендикулярные к оси Ox ($B = 0$) и касающиеся эллипса, известны ($x = \pm a$). Совместное рассмотрение системы уравнений

$$\begin{cases} y = -\dfrac{A}{B}x - \dfrac{C}{B} \\ \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1 \end{cases}$$

приводит к квадратному уравнению

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{1}{b^2}\left(\frac{A}{B}x + \frac{C}{B}\right)^2 = 1,$$

корни которого должны совпадать (прямая $Ax + By + C = 0$ касается кривой). Поэтому дискриминант

$$D = \frac{A^2C^2}{B^4b^4} - \left(\frac{1}{a^2} + \frac{A^2}{B^2b^2}\right)\left(\frac{C^2}{B^2b^2} - 1\right) = 0,$$

откуда следует *условие касания прямой $Ax+By+C = 0$ и эллипса $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} = 1$.*

$$A^2a^2 + B^2b^2 = C^2 \tag{II.58}$$

Аналогично рассуждая, получим *условие касания прямой и гиперболы* (II.50)

$$A^2a^2 - B^2b^2 = C^2, \tag{II.59}$$

а также *прямой $y = kx + b$ и параболы $y^2 = 2px$*

$$(k - p)^2 = k^2b^2.$$

Пример ПII.5. *Написать уравнение касательной к эллипсу* $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{16}=1$, *которая была бы перпендикулярна прямой* $2x-3y+1=0$.

Решение. Условие перпендикулярности прямой $Ax+By+C=0$ и прямой $2x-3y+1=0$ записывается в виде $2A-3B=0 \quad \left(A=\dfrac{3}{2}B\right)$, а условия касания: $25A^2+16B^2=C^2$.
Решая совместно данные условия, получим $\left(25\cdot\dfrac{9}{4}+16\right)B^2=C^2$, т.е. $C=\pm\dfrac{17}{2}B$. Подставляя в уравнение прямой значения параметров $A=\dfrac{3}{2}B$, $C=\pm\dfrac{17}{2}B$ и сокращая на общий множитель $\dfrac{1}{2}B$, получим два решения задачи: $3x+2y\pm17=0$.

Канонические уравнения касательной

Приступим теперь к выводу уравнения касательной линии к кривой второго порядка. Рассмотрим произвольную линию γ на плоскости, заданную явным уравнением:

$$y=f(x), \tag{II.60}$$

где $f(x)$ - непрерывно - дифференцируемая функция на отрезке $[a,b]$. Пусть $M_0(x_0,y_0)$ - некоторая точка кривой γ, где $y_0=f(x_0)$. Как известно из математического анализа,

$$y_0' \overset{def}{=} y'|_{x=x_0}=\frac{df(x)}{dx}|_{x=x_0}\Bigg|=\operatorname{tg}\alpha$$

есть тангенс угла наклона касательной к кривой (II.60) в точке $M_0(x_0,y_0)$. Таким образом, уравнение касательной к кривой (II.60) *с точкой касания* $M_0(x_0,y_0)$ можно записать в явном виде:

$$y-y_0=k(x-x_0)\Longrightarrow y-y_0=y_0'(x-x_0). \tag{II.61}$$

Сравнивая явное уравнение прямой (II.61) с с ее общим уравнением, найдем, например, координаты ее вектора нормали:

$$\vec{N}=(y_0',-1). \tag{II.62}$$

Рассмотрим теперь каноническое уравнение эллипса:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,$$

полагая для определенности $a > b$. Поскольку эллипс является центральной фигурой, т.е., при заменах $x \to -x$ или $y \to -y$ свойства эллипса не меняются, то достаточно рассмотреть касательную с точкой касания M_0 в первой четверти, где $x \geq 0, y \geq 0$. В этой четверти:

$$y = b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}.$$

Вычисляя производную от этой функции, найдем:

$$y'_x = -\frac{bx}{a^2\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}}.$$

Пусть теперь $x_0 \geq 0$ -абсцисса точки касания $M_0(x_0, y_0)$, тогда ордината точки касания в первой четверти есть:

$$y_0 = b\sqrt{1 - \frac{x_0^2}{a^2}},$$

откуда найдем полезное соотношение:

$$\sqrt{1 - \frac{x_0^2}{a^2}} = \frac{y_0}{b}.$$

Подставляя это последнее соотношение в выражение для производной в точке касания, найдем:

$$y'_0 = -\frac{b^2}{a^2}\frac{x_0}{y_0}. \qquad \text{(II.63)}$$

Подставляя выражение для y'_0 из (II.63) в уравнение касательной (II.61), приведем последнее к виду:

$$y - y_0 + \frac{b^2}{a^2}\frac{x_0}{y_0}(x - x_0) = 0.$$

Умножая это уравнение на $\dfrac{y_0}{b^2}$ и собирая переменные, получим:

$$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} - \frac{x_0^2}{a^2} - \frac{y_0^2}{b^2} = 0.$$

Рис. II.34. *Касательные к эллипсу*

Учитывая теперь то обстоятельство, что координаты точки касания, x_0, y_0, удовлетворяют уравнению эллипса, получим окончательно *каноническое уравнение касательной к эллипсу*:

$$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1, \qquad \text{(II.64)}$$

где (x_0, y_0) - координаты точки касания к эллипсу, связанные между собой каноническим уравнением эллипса, (x, y) - координаты текущей точки M касательной к эллипсу (см. Рис. II.34).

Очевидно, что совершенно аналогично можно получить *каноническое уравнение касательной к гиперболе*, заданной своим каноническим уравнением

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \Longrightarrow$$

$$\frac{xx_0}{a^2} - \frac{yy_0}{b^2} = 1 \qquad \text{(II.65)}$$

Приступим к выводу уравнения касательной к параболе, заданной своим каноническим уравнением:

$$y^2 = 2px.$$

Продифференцируем это уравнение по переменной x:

$$yy' = p.$$

Поскольку парабола симметрична относительно оси Ox (т.е., свойства ее не изменяются при замене $y \to -y$, то рассмотрим, как и выше, касательную к параболе с точкой касания $M_0(x_0, y_0)$ в первой четверти декартовой системы координат $x_0 \geq 0, y_0 \geq 0$ (при $p > 0$). В этой четверти:

$$y = \sqrt{2px},$$

и производная функции $y(x)$ равна:

$$y' = \frac{p}{y} = \sqrt{\frac{p}{2x}}.$$

Поэтому уравнение касательной с точкой касания $M_0(x_0, y_0)$ есть:

$$y - y_0 = \frac{p}{y_0}(x - x_0).$$

Расписывая это уравнение, получим:

$$yy_0 - px - y_0^2 + px = 0.$$

Используя уравнение параболы, получим окончательно каноническое уравнение касательной:

$$yy_0 = p(x + x_0). \tag{II.66}$$

II.13 Оптические свойства кривых второго порядка

Все кривые второго порядка обладают рядом замечательных *оптических свойств*. Под оптическими здесь понимаются свойства, связанные с отражением лучей света от кривых, так, как если бы эти кривые были зеркальными линиями, а свет бы распространялся в плоскости. При этом важен *закон отражения света*, согласно которому "угол падения луча на зеркало равен углу отражения". Хотя закон отражения сформулирован для плоского зеркала, он применим и для кривого, если его понимать как равенство угла между падающим лучом и направляющим вектором касательной, с одной стороны, отраженным лучом и направляющим вектором касательной, - с другой стороны.

Оптические свойства эллипса

Пусть луч света выходит из одного из фокусов эллипса $\mathcal{E}$ (для определенности левого, F_1) и попадает в точку эллипса $M_0(x_0, y_0)$, для определенности находящуюся в первой четверти $x \geq 0, y \geq 0$. Каноническое уравнение касательной (II.64), проходящей через эту точку, есть:

$$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1,$$

поэтому направляющий вектор касательной имеет координаты:

$$\vec{q} = \left(\frac{y_0}{b^2}; -\frac{x_0}{a^2}\right).$$

Фокальные радиусы-векторы точки M_0: $\vec{r}_1 = \overrightarrow{F_1M_0}$ и $-\vec{r}_2 = \overrightarrow{M_0F_2}$ имеют следующие координаты:

$$\vec{r}_1 = (x_0 + c, y_0); \qquad -\vec{r}_2 = (c - x_0, -y_0).$$

Вычислим косинусы углов между направляющим вектором нормали и указанными фокальными радиусами - векторами точки M_0, $\widehat{\vec{r}_1\,\vec{q}}$ и $-\widehat{\vec{r}_2\,\vec{q}}$:

$$\cos\widehat{\vec{r}_1\,\vec{q}} = \frac{(\vec{r}_1\,\vec{q}\,)}{r_1|\vec{q}|};$$

$$\cos\widehat{\vec{r}_2\,\vec{q}} = \frac{(\vec{r}_2\,\vec{q}\,)}{r_1|\vec{q}|};$$

Рис. II.35. *К оптическим свойствам эллипса*

Вычисляя эти величины с учетом полученных ранее выражений (II.47) для фокальных радиусов r_1, r_2, найдем:

$$\cos\alpha \stackrel{def}{=} \cos\widehat{\vec{r}_1\,\vec{q}} = \frac{cy_0}{a^2b^2|\vec{q}|r_1}(cx_0 + a^2) = \frac{cy_0}{ab^2|\vec{q}|};$$

$$\cos\alpha' \stackrel{def}{=} \cos\widehat{-\vec{r}_2\,\vec{q}} = \frac{cy_0}{a^2b^2|\vec{q}|r_2}(cx_0 - a^2) = \frac{cy_0}{ab^2|\vec{q}|}.$$

Таким образом, для луча, выходящего из точки отражения M_0 и проходящего через второй фокус эллипса:

$$\cos\alpha = \cos\alpha', \tag{II.67}$$

т.е., именно этот луч и является отраженным лучом.

Таким образом, мы доказали теорему (см. Рис. II.35):

Теорема TII.7. *Луч света, испущенный из одного из фокусов эллипса, после отражения от эллипса проходит через второй его фокус.*

При условии идеального отражения луч света, испущенный точечным источником света из одного фокуса, после отражения прошел бы через второй фокус и, отразившись еще раз, снова прошел бы через первый фокус. Этот процесс повторялся бы бесконечно. Частным случаем теоремы TII.7 является оптическое свойство окружности ($\varepsilon = 0$): *Луч света, испущенный из центра окружности, после отражения от нее снова проходит через центр.*

Оптические свойства гиперболы

Поскольку каноническое уравнение гиперболы получается из канонического уравнения эллипса заменой $b^2 \to -b^2$, то произведя указанную замену в приведенных выше вычислениях, докажем теорему (см. Рис. II.36):

Рис. II.36. *К оптическим свойствам гиперболы*

Теорема TII.8. *Луч света, испущенный из одного из фокусов гиперболы, после отражения от гиперболы распространяется так, как если бы он был испущен из другого ее фокуса.*

Это свойство гиперболы (точнее, гиперболоида вращения, используется на практике для создания конусообразных источников света (фар автомобилей, прожекторов и т.п.).[1]

Оптические свойства параболы

Перейдем к исследованию оптических свойств параболы (II.55):

$$y^2 = 2px \quad (p > 0).$$

Напомним, что фокус параболы находится в точке:

$$F(\frac{p}{2}; 0).$$

[1]В связи с этим следует упомянуть о произведении небезызвестного писателя А.Н.Толстого “Гиперболоид инженера Гарина”. Основная сюжетная линия этого произведения вьется вокруг якобы сконструированного указанным инженером прибора "гиперболоида который фокусирует энергию в узкий луч света, с помощью чего авантюристу Гарину удается создать мощное оружие и средство добычи золота. Как мы видим, сюжет повести Толстого основан на незнании им элементарных законов геометрии и оптики. Следует заметить, что таким же образом фабрикуется основная масса так называемой “научно - фантастической литературы”, которая на самом деле к науке не имеет ни малейшего отношения.

Пусть из фокуса F испускается луч света, который попадает в точку M_0 параболы. Фокальный радиус-вектор этой точки есть:

$$\overrightarrow{FM_0} = (x_0 - \frac{p}{2}, \sqrt{2px_0})$$

(для определенности мы положили $y \geq 0$.

Из уравнения касательной (II.66) следует, что направляющий вектор касательной к параболе в точке $M_0(x_0, y_0)$ есть:

$$\vec{q} = (y_0, p).$$

Таким образом, с учетом выражения для фокального радиуса точки M_0 параболы (II.56):

$$r_0 = x_0 + \frac{p}{2}$$

косинус угла падения на параболу луча, вышедшего из ее фокуса, $\cos\alpha$, равен:

$$\cos\alpha = \cos\widehat{\vec{r_0}\,\vec{q}} = \frac{y_0(x_0 + \frac{p}{2})}{|\vec{q}|(x_0 + \frac{p}{2})} = \frac{y_0}{|\vec{q}|}.$$

Вычислим теперь косинус угла между вектором касательной, $\vec{q}$, и ортом оси параболы Ox, $\vec{i} = (1, 0)$:

$$\cos\alpha' = \cos\widehat{\vec{q}\,\vec{i}} = \frac{y_0}{|\vec{q}|}.$$

Таким образом, справедливо соотношение:

$$\cos\ = \cos\alpha',$$

следовательно, отраженный луч света параллелен оси параболы (см. Рис. II.37). Итак, мы доказали теорему:

Теорема TII.9. *Луч света, испущенный из фокуса параболы, после отражения от параболы распространяется вдоль ее оси.*

Это уникальное свойство параболы (точнее говоря, параболоида вращения) используется в оптической и радио - астрономии, а также в радиовещании и телевидении. Параболические антенны или параболические зеркала являются главной частью приборов, принимающих электромагнитные сигналы от удаленных источников, так как соответствующие лучи от удаленных источников излучения являются почти параллельными. Это позволяет при совпадении оси параболоида с направлением на излучающий объект многократно усилить принимаемый электромагнитный сигнал путем его фокусирования в фокусе параболоида.

Рис. II.37. *К оптическим свойствам параболы*

II.14 Диаметры кривых второго порядка

Все кривые II-го порядка обладают замечательными свойствами своих *диаметров*. Исследуем взаимное расположение кривой, Γ II-го порядка и прямой d, заданных на плоскости своими общими уравнениями:

$$\Gamma: \quad a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + b_1x + b_2y + c = 0; \tag{II.68}$$

$$d: \quad Ax + By + C = 0, \tag{II.69}$$

где коэффициенты a_{ij}, а также A, B одновременно не равны нулю. С точки зрения алгебры система уравнений $\{$(II.68), (II.69)$\}$ как система уравнений второго порядка может:

1. Либо не иметь вещественных решений — в этом случае прямая и кривая II-го порядка не пересекаются;

2. Либо иметь одно вещественное решение — в этом случае прямая и кривая II-го порядка касаются в единственной точке;

3. Либо иметь 2 вещественные решения — в этом случае прямая и кривая II-го порядка пересекаются в двух точках.

Условия касания и пересечения подробно рассмотрены в разделе II.12.

Определение OII.8. *Отрезки прямой, заключенные между точками пересечения прямой и кривой II-го порядка, называются диаметрами (хордами) кривых II-го порядка.*

Изучим свойства диаметров кривых второго порядка на примере эллипса, заданного своим каноническим уравнением:

$$\Gamma: \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \tag{II.70}$$

Пусть для определенности большой осью эллипса будет ось Ox, т.е., $a \geq b$. Зададим уравнение прямой d в явном виде:

$$d: \quad y = kx + g, \qquad (g = \text{Const}) \tag{II.71}$$

и найдем точки пересечения прямой d и эллипса Γ, для чего подставим y из (II.71) в уравнение (II.70) и разрешим последнее относительно x:

$$x^2(b^2 + k^2) + x2kga^2 + a^2c^2 = 0 \Longrightarrow$$

$$x_\pm = \frac{-kga^2 \pm \Delta}{b^2 + k^2a^2}, \tag{II.72}$$

где

$$\Delta = a\sqrt{k^2a^2g^2 - c^2(b^2 + k^2a^2)}.$$

При выполнении условия

$$k^2a^2(g^2 - c^2) > c^2b^2 \tag{II.73}$$

прямая d и эллипс G пересекаются в двух точках, M_+ и M_-:

$$x_+ = \frac{-kga^2 + \Delta}{b^2 + k^2a^2}; \quad x_- = \frac{-kga^2 - \Delta}{b^2 + k^2a^2};$$

$$y_+ = kx_+ + g; \qquad y_= kx_- + g.$$

Найдем координаты середины диаметра, точки $M(x, y)$:

$$x = \frac{x_+ + x_-}{2} = -kg\frac{a^2}{b^2 + k^2a^2}; \quad y = \frac{y_+ + y_-}{2} = g\frac{b^2}{b^2 + k^2a^2}. \tag{II.74}$$

Рассмотрим теперь пучок параллельных прямых, пересекающих эллипс, $\Pi(d)$. Прямые этого пучка будут описываться уравнениями вида (II.71) с одинаковыми угловыми коэффициентами k и различными свободными членами g_i:

$$d_i \in \Pi(d): \qquad y = kx + g_i.$$

Таким образом, согласно (II.74) середины диаметров пучка параллельных прямых, $M_i(x_i, y_i)$ имеют координаты:

$$x_i = -kg_i\frac{a^2}{b^2+k^2a^2}; \quad y_i = g_i\frac{b^2}{b^2+k^2a^2}.$$

Вектор $\vec{p}_{ik} = \overrightarrow{M_iM_k}$, соединяющий середины двух диаметров, есть:

$$\vec{p}_{ik} = \frac{g_k - g_i}{b^2+k^2a^2}(-ka^2, b^2).$$

Рис. II.38. *К свойствам диаметров эллипса*

Поскольку все эти векторы коллинеарны, справедлива следующая теорема:

Теорема TII.10. *Геометрическое место середин диаметров кривых второго порядка есть прямая линия.*

Ясно, что для центральных кривых второго порядка указанные прямые проходят через центр симметрии фигуры, что дает возможность геометрическими построениями с помощью циркуля и линейки найти указанный центр.

Глава III

Поверхности и линии в пространстве

III.1 Простейшие задачи аналитической геометрии

Переходим к аналитическому рассмотрению геометрических образов в пространстве относительно прямоугольной системы координат $\Re(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Предварительно остановимся на трех простейших понятиях аналитической геометрии в пространстве, лежащих в основе решений прикладных задач.

Определение OIII.1. *Расстоянием $d(M_1, M_2)$ между двумя точками $M_1(x_1; y_1; z_1)$, $M_2(x_2; y_2; z_2)$ называется модуль вектора $\overrightarrow{M_1M_2}$, т.е.*

$$d(M_1, M_2) = d(M_2, M_1) = |\overrightarrow{M_1M_2}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}. \tag{III.1}$$

Пусть задана упорядоченная пара точек

$$A(x_1; y_1; z_1), \quad B(x_2; y_2; z_2)$$

Проведем прямую линию, проходящую через точки A и B, и выберем на прямой точку $C(x; y; z)$, не совпадающую с точкой B. Рассмотрим векторы $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{CB}$. Они коллинеарны, и мы можем записать

$$\overrightarrow{AC} = \lambda \overrightarrow{CB}. \tag{III.2}$$

Число λ в (III.2) называется *отношением, в котором точка C делит отрезок AB.*

В координатах (III.2) имеет вид

$$x - x_1 = \lambda(x_2 - x), \quad y - y_1 = \lambda(y_2 - y), \quad z - z_1 = \lambda(z_2 - z),$$

откуда находим

$$\lambda = \frac{x - x_1}{x_2 - x} = \frac{y - y_1}{y_2 - y} = \frac{z - z_1}{z_2 - z},$$

а также

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}, \quad z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda}. \tag{III.3}$$

В частности, при $\lambda = 1$ точка C делит отрезок пополам. Координаты середины отрезка будут иметь вид

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}, \quad z = \frac{z_1 + z_2}{2}. \tag{III.4}$$

Часто в приложениях участвует формула для площади треугольника, заданного своими вершинами $A_1(x_1; y_1; z_1)$, $A_2(x_2; y_2; z_2)$,$A_3(x_3; y_3; z_3)$. Напомним ее

$$S_{\triangle} = \frac{1}{2} \left| \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} \right|. \tag{III.5}$$

Перейдем к выяснению геометрического смысла уравнения с тремя переменными. Целесообразно начать с примера. Пусть нам задана сфера с центром в точке $C(a; b; c)$ и *радиуса* R. Сферу можно определить таким образом:

> Сфера это геометрическое место точек пространства, отстоящих от центра сферы на одном и том же расстоянии R.

Если $M(x, y, z)$ — произвольная точка сферы, то $|\overrightarrow{CM}| = R$ или $|\overrightarrow{CM}|^2 = R^2$. В координатах это равенство называется уравнением сферы и выглядит следующим образом:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2. \tag{III.6}$$

В частности, если центр сферы находится в начале координат, уравнение будет иметь вид

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2. \tag{III.7}$$

В аналитической геометрии поверхность рассматривается как множество точек пространства, обладающее определенным свойством. Поэтому, если $M(x, y, z)$ — произвольная точка поверхности, то посредством соотношения, связывающего 3 переменные x, y, x, выражают их общее свойство.

Определение OIII.2. *Соотношение $F(x, y, z) = 0$ называется неявным уравнением поверхности в пространстве ($z = f(x, y)$ — явным уравнением), если ему удовлетворяют координаты любой точки поверхности и не удовлетворяют координаты ни одной точки, не принадлежащей поверхности.*

Заметим, что уравнение $F(x, y, z) = 0$ может иметь особенности и множество точек, координаты которых удовлетворяют ему, может быть пустым, составлять конечное или счетное множество, распадаться на ветви и т.д.

Например, множество действительных точек, удовлетворяющих уравнению
$x^2 + y^2 + z^2 + 1 = 0$, есть пустое множество, уравнение $x^2 + y^2 + z^2 = 0$ определяет одну точку $O(0; 0; 0)$, уравнение $x^2 - z^2 = 0$ может быть представлено в виде $(x - z)(x + z) = 0$ и поверхность распадается на две ветви: $x - z = 0$, $x + z = 0$.

Пусть в уравнение поверхности не входит одна из переменных. Какую поверхность определяет такое уравнение? Чтобы ответить на этот вопрос дадим определение цилиндрической поверхности.

Определение OIII.3. *Цилиндрической поверхностью (цилиндром) называется поверхность, полученная движением прямой, перемещающейся параллельно некоторому вектору и пересекающей во время движения фиксированную линию. Движущаяся прямая называется образующей цилиндрической поверхности*

Пусть, например, уравнение не содержит z и имеет вид $F(x, y) = 0$. На плоскости xOy уравнение определяет линию . Но этому уравнению удовлетворяют также координаты точек пространства, у которых первые две координаты совпадают с координатами точек L, а координата z произвольна, т.е. координаты точек всех прямых, перпендикулярных к плоскости xOy в точках кривой L. Данная поверхность получена движением прямой вдоль L параллельно вектору $\vec{k}$. Итак:

Уравнение $F(x, y) = 0$ определяет цилиндрическую поверхность с образующей параллельной оси Oz.

Аналогично, $F(x, z) = 0$ задает цилиндрическую поверхность с образующей параллельной оси Oy, а $F(y,z)=0$ — цилиндр, образующие которого параллельны оси Ox.

Методы аналитической геометрии и линейной алгебры позволяют выяснить свойства поверхностей, левая часть уравнений которых представляет полиномы первой и второй степени (поверхности, описываемые более сложными уравнениями, изучаются методами математического анализа и дифференциальной геометрии). В связи с этим дадим определение алгебраической поверхности.

Определение OIII.4. *Алгебраической поверхностью m - го порядка называется поверхность, левая часть уравнения которой представляет полином m - степени относительно переменных x, y, z, т.е. сумму слагаемых вида $Ax^p y^q z^r$, где $p+q+r \leq m$*
$(p, q, r \geq 0)$.

Например, $Ax+By+Cz+D=0$ — общее уравнение алгебраической поверхности первого порядка, а $Ax^2+2Bxy+2Cxz+Dy^2+2Eyz+Fz^2+2Gx+2Hy+2Kz+L=0$ — общее уравнение алгебраической поверхности второго порядка.

Линию в пространстве можно рассматривать как пересечение двух поверхностей

$$\left.\begin{array}{l} F_1(x,y,z)=0 \\ F_2(x,y,z)=0 \end{array}\right\} \tag{III.8}$$

(или

$$\left\{\begin{array}{l} z=f_1(x,y) \\ z=f_2(x,y) \end{array}\right.),$$

т.е.

Линия есть геометрическое место точек, координаты которых удовлетворяют системе двух уравнений с тремя неизвестными.

Линию в пространстве в классической механике рассматривают как след движущейся материальной точки, координаты которой есть функции времени t (параметра t)

$$\left.\begin{array}{l} x=x(t) \\ y=y(t) \\ z=z(t) \end{array}\right\} \quad (t \in T) \tag{III.9}$$

В аналитической геометрии от временного смысла параметра отказываются, и t может иметь смысл переменного угла и др.

Уравнения (III.9) носят название параметрических уравнений линии в пространстве.

Пример ПIII.1. *Пусть отрезок OB' длины a равномерно вращается и равномерно движется вдоль оси Oz (Рис. III.39). Точка B' описывает линию, находящуюся на поверхности цилиндра. Она носит название винтовой линии. Если за параметр t выбрать угол поворота отрезка, то параметрические уравнения винтовой линии имеют вид*

Рис. III.39. *Цилиндрическая винтовая линия*

$$\left.\begin{aligned} x &= a\cos t \\ y &= a\sin t \\ z &= bt \end{aligned}\right\} \quad (-\infty < t < +\infty) \tag{III.10}$$

III.2 Прямая в пространстве

Прямая в пространстве полностью определена, если на ней задана точка $M_0(x_0; y_0; z_0)$ (*опорная точка* прямой) и *направляющий вектор* $\vec{p}(l, m, n)$. Пусть $M(x; y; z)$ — *текущая точка* прямой. Тогда векторы $\overrightarrow{M_0M}$ и $\vec{p}$ коллинеарны, и мы можем записать $\vec{r} - \vec{r}_0 = t\vec{p}\,(-\infty < t < +\infty)$ (Рис. III.40а),

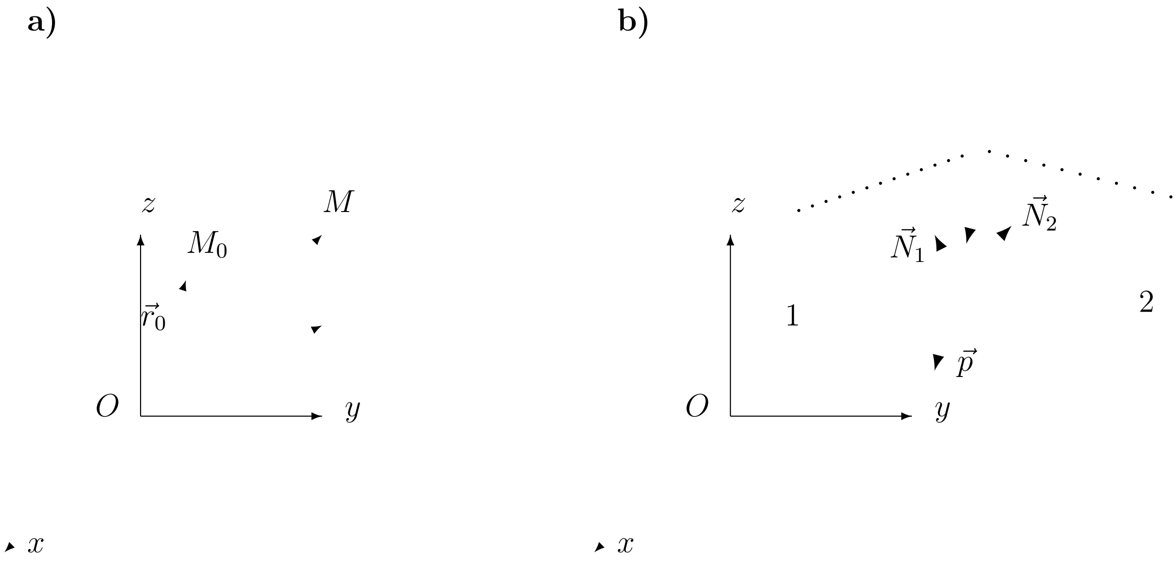


Рис. III.40.

т.е. для радиус - вектора $\vec{r}$ текущей точки имеем

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + t\vec{p} \quad (-\infty < t < +\infty). \tag{III.11}$$

Уравнение (III.11) есть *векторное параметрическое уравнение прямой в пространстве.* В координатной записи (III.11) выглядит следующим образом:

$$\left.\begin{array}{l} x = x_0 + lt \\ y = y_0 + mt \\ z = z_0 + nt \end{array}\right\} \quad (-\infty < t < +\infty). \tag{III.12}$$

Исключим t из (III.12), разрешив их сначала относительно t, а затем приравняв правые части равенств имеем:

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}. \tag{III.13}$$

Уравнения (III.13) носят название *канонических уравнений прямой в пространстве.*Заметим, что если какая - либо координата направляющего вектора равна нулю, то равен нулю и числитель дроби. Например, выражение $\dfrac{z - z_0}{0}$ понимают условно, оно означает равенство $z - z_0 = 0$.

На основании (III.13) легко написать уравнение прямой, проходящей через две точки $M_1(x_1; y_1; z_1)$ и $M_2(x_2; y_2; z_2)$. Первую точку, например, мы принимаем за опорную, а за направляющий вектор $\vec{p} \neq 0$ возьмем вектор $\overrightarrow{M_1M_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$. Поэтому *уравнение прямой через две точки* примет вид

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}. \tag{III.14}$$

III.3 Взаимное расположение прямых в пространстве

В механике часто уравнение прямой записывают в виде момента вектора $\vec{p}$. Поскольку вектор $\vec{r}-\vec{r}_0$ коллинеарен с $\vec{p}$, то их векторное произведение $\left[(\vec{r}-\vec{r}_0)\cdot\vec{p}\right]=0$. Обозначив $\left[\overset{\to}{r_0}\,\vec{p}\right]=\vec{a}$, получим векторное уравнение прямой в виде ‘момента’

$$\left[\overset{\to}{r_0}\,\vec{p}\right]=\vec{a}. \tag{III.15}$$

Используя сведения из векторной алгебры, легко вывести значение косинуса угла между прямыми, подразумевая под ними угол (в пределах от нуля до π) между направляющими векторами прямых $\varphi=\widehat{\overset{\to}{p_1}\,\overset{\to}{p_2}}$. Поэтому

$$\cos\varphi=\frac{\left(\overset{\to}{p_1}\,\overset{\to}{p_2}\right)}{|\vec{p}_1||\vec{p}_2|}=\frac{l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2}{\sqrt{l_1^2+m_1^2+n_1^2}\sqrt{l_2^2+m_2^2+n_2^2}}. \tag{III.16}$$

Теорема TIII.1. *Необходимым и достаточным условием параллельности прямых в пространстве является условие*

$$\left[\overset{\to}{p_1}\,\overset{\to}{p_2}\right]=0\quad\left(\frac{l_1}{l_2}=\frac{m_1}{m_2}=\frac{n_1}{n_2}\right).$$

Доказательство теоремы совпадает дословно с доказательством теоремы о необходимых и достаточных условиях коллинеарности двух векторов. Аналогично имеет место следующая теорема.

Теорема TIII.2. *Необходимым и достаточным условием перпендикулярности двух прямых является условие*

$$\left(\overset{\to}{p_1}\,\overset{\to}{p_2}\right)=0\quad(l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2=0).$$

Как узнать, являются ли две данные прямые скрещивающимися? Если прямые не являются скрещивающимися (т.е. пересекаются или параллельны), то они лежат в одной плоскости и векторы $\overrightarrow{M_1M_2}$, $\vec{p}_1$, $\vec{p}_2$, где M_1 и M_2 — опорные точки прямых, компланарны, т.е.

$$\Delta=\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1\\ l_1 & m_1 & n_1\\ l_2 & m_2 & n_2\end{vmatrix}=0. \tag{III.17}$$

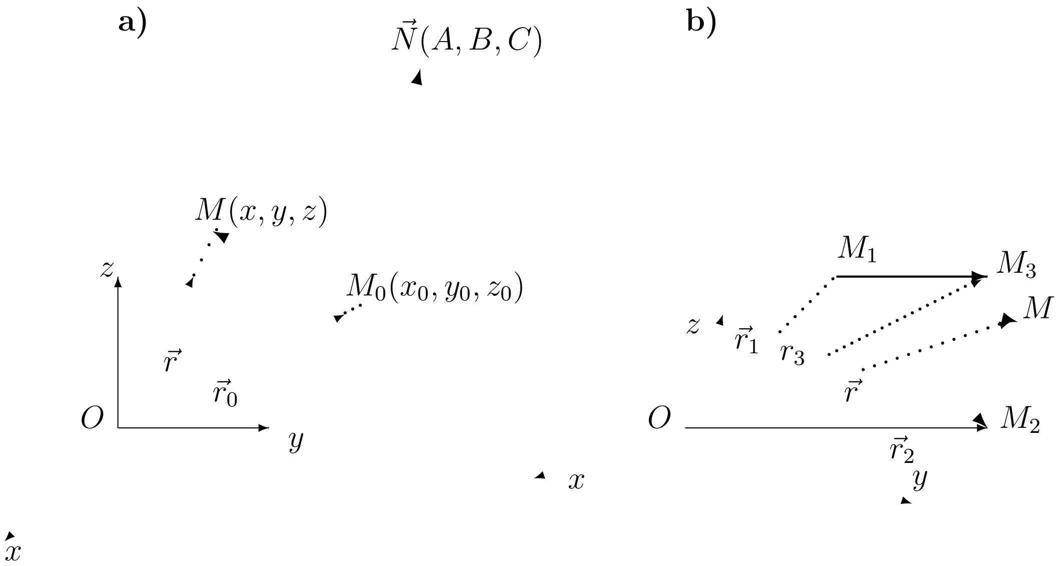


Рис. III.41.

Если $\Delta \neq 0$, то прямые являются скрещивающимися.

Пример ПIII.2. *Лежат ли прямые*

$$\frac{x+1}{2} = \frac{y-1}{0} = \frac{z+2}{-1}, \qquad \frac{x-2}{-1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-5}{0}$$

в одной плоскости?

Решение. Проверим равенство (III.17). Вычисляем определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 7 \\ 2 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 3 \cdot 2 + 2 \cdot 1 + 7 \cdot 4 = 36 \neq 0.$$

Прямые являются скрещивающимися и в одной плоскости не лежат.

III.4 Плоскости в пространстве

Обратимся сейчас к исследованию алгебраической поверхности первой степени. С этой целью рассмотрим некоторую плоскость в пространстве. Ее можно зафиксировать, если задать точку $M_0(x_0; y_0; z_0)$ (*опорная точка плоскости*) и *нормальный* вектор $\vec{N}(A, B, C) \neq \vec{0}$ (вектор, ортогональный к плоскости).

Пусть точка $M(x; y; z)$ — текущая точка плоскости (Рис. III.41a). Вектор $\vec{r} - \vec{r}_0$ ортогонален к $\vec{N}$. Поэтому уравнение

$$(\vec{N}(\vec{r} - \vec{r}_0)) = 0 \tag{III.18}$$

есть *векторное уравнение плоскости с опорной точкой и нормальным вектором* $\vec{N}$. В координатной записи имеем

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0. \qquad \text{(III.19)}$$

Если раскрыть скобки и обозначить $D = -Ax_0 - By_0 - Cz_0$, то приходим к алгебраическому уравнению первого порядка

$$Ax + By + Cz + D = 0. \qquad \text{(III.20)}$$

Обратно, если в прямоугольной системе координат имеем уравнение (III.20), то это будет уравнение некоторой плоскости. В самом деле, уравнение (III.20) есть линейное уравнение с тремя неизвестными. Оно всегда имеет решение. Пусть (x_0, y_0, z_0) — некоторое решение (III.20), т.е. $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D \equiv 0$. Вычитая это тождество из (III.20), получим $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0) = 0$. На левую часть этого соотношения можно смотреть как на скалярное произведение вектора $\vec{N}(A, B, C)$ и вектора $\vec{r} - \vec{r}_0$, где $\vec{r} = \vec{i}x + \vec{j}y + \vec{k}z$ — переменный радиус - вектор, $\vec{r}_0 = \vec{i}x_0 + \vec{j}y_0 + \vec{k}z_0$ — фиксированный вектор, задающий точку $M_0(x_0; y_0; z_0)$, т.е. $(\vec{N}(\vec{r} - \vec{r}_0)) = 0$. Очевидно, что данному уравнению удовлетворяют координаты *любой точки* плоскости, проходящей через M_0 и имеющей нормальный вектор $\vec{N}$, и не удовлетворяют координаты ни одной точки P с радиус - вектором $\vec{r}\,'$, не лежащей на плоскости, так как $\vec{r}\,' - \vec{r}_0$ не ортогонален $\vec{N}$ и, следовательно,
$\left(\vec{N} \cdot (\vec{r} - \vec{r}_0)\right) \neq 0$.

Определение OIII.5. *Уравнение $Ax+By+Cz+D = 0$ называется общим уравнением плоскости в пространстве.*

В зависимости от того, какой из параметров A, B, C, D равен нулю или отличен от нуля, расположение плоскости относительно системы координат будет обладать определенным свойством (параллельность координатной оси, координатной плоскости и т. д.) Например, $Ax + By + Cz + D = 0$ есть уравнение плоскости, проходящей через начало координат. Исследование других частных случаев предоставим читателю и остановимся лишь на видах уравнения плоскости, имеющих наибольшие приложения.

Уравнение в отрезках.

Пусть $A \neq 0$, $B \neq 0$, $C \neq 0$, $D \neq 0$. Тогда общее уравнение (III.20) можно переписать в виде

$$\frac{x}{\left(-\dfrac{D}{A}\right)} + \frac{y}{\left(-\dfrac{D}{B}\right)} + \frac{z}{\left(-\dfrac{D}{C}\right)} = 1.$$

Обозначив $a = -\dfrac{D}{A}, b = -\dfrac{D}{B}, c = -\dfrac{D}{C}$, имеем уравнение плоскости в отрезках

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1. \qquad \text{(III.21)}$$

Плоскость отсекает от осей координат отрезки длиной $|a|$, $|b|$, $|c|$, поскольку уравнению (III.21) удовлетворяют координаты точек $P_1(a;0;0)$, $P_2(0;b;0)$, $P_3(0;0;c)$.

Уравнение плоскости, проходящей через три точки.
Заданы три точки $M_i(x_i;y_i;z_i)$, не лежащие на одной прямой. Пусть $M(x;y;z)$ — текущая точка плоскости. Векторы $\overrightarrow{M_1M}$, $\overrightarrow{M_2M_1}$, $\overrightarrow{M_1M_3}$ компланарны, и, следовательно, смешанное произведение этих векторов равно нулю (Рис. III.41b).

$$((\vec{r} - \vec{r}_1)(\vec{r}_2 - \vec{r}_1)(\vec{r}_3 - \vec{r}_1)) = 0. \qquad \text{(III.22)}$$

Имеем *векторное уравнение плоскости, проходящей через три точки.* В координатной записи (III.22) имеет вид

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0. \qquad \text{(III.23)}$$

Нормированное (нормальное) уравнение плоскости.
Пусть плоскость не проходит через начало координат. Опустим перпендикуляр через начало координат на плоскость и рассмотрим вектор $\overrightarrow{OP} = \vec{p}$. Опустим перпендикуляр из начала координат на плоскость и рассмотрим вектор $\overrightarrow{OP} = \vec{p}$. Пусть $\vec{n} = \vec{i}\cos\alpha + \vec{j}\cos\beta + \vec{k}\cos\gamma$ — орт вектора $\vec{p}$. $M(x,y,z)$ — текущая точка плоскости (Рис. III.42a). Видим, что $(\vec{r} - p\vec{n})$ ортогонален вектору $\vec{n}$ и, следовательно, $\Big((\vec{r} - p\vec{n})\cdot\vec{n}\Big) = 0$. Раскрывая скобки, имеем

$$(\vec{r}\,\vec{n}) - p = 0 \quad (p > 0). \qquad \text{(III.24)}$$

Получили *нормированное* (нормальное) *уравнение плоскости в векторном виде*. В координатной записи (III.24) имеет вид

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0\,(p > 0). \qquad \text{(III.25)}$$

Если уравнение плоскости задано общим уравнением $Ax+By+Cz+D = 0$, то его можно пронормировать, учитывая, что

$$\vec{n} = \frac{\vec{N}}{\epsilon|\vec{N}|} = \frac{A}{\epsilon\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\vec{i} + \frac{B}{\epsilon\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\vec{j} + \frac{C}{\epsilon\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\vec{k},$$

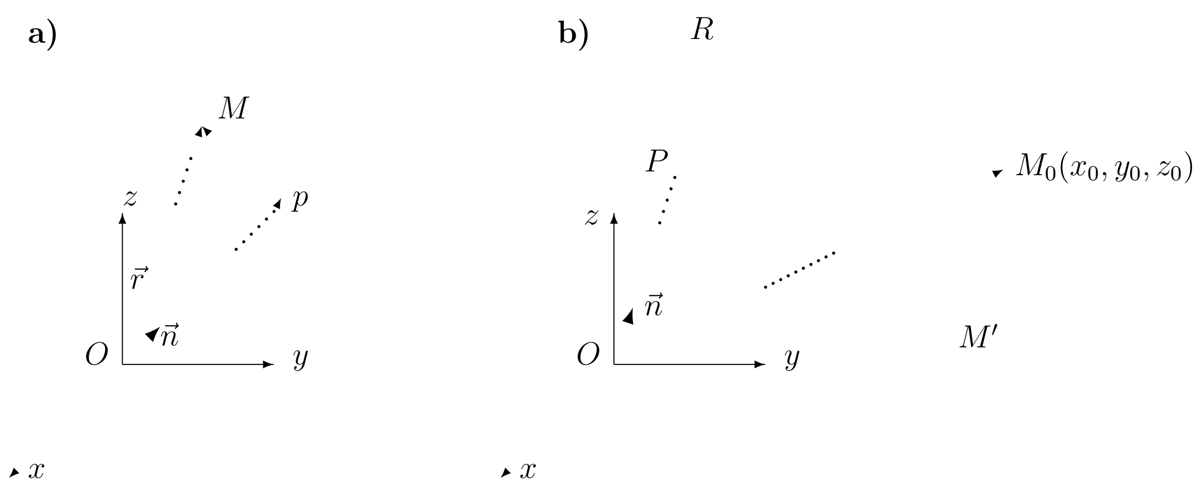


Рис. III.42.

где $\epsilon = +1$, когда $D < 0$, и $\epsilon = -1$, когда $D > 0$.

Итак,

$$\frac{Ax}{\epsilon\sqrt{A^2+B^2+C^2}}+\frac{By}{\epsilon\sqrt{A^2+B^2+C^2}}+\frac{Cx}{\epsilon\sqrt{A^2+B^2+C^2}}+\frac{D}{\epsilon\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=0 \tag{III.26}$$

— *нормированное уравнение плоскости, полученное из общего уравнения.*

Определение OIII.6. *Отклонением δ точки $M_0(x_0; y_0; z_0)$ от плоскости называется число, равное $+d$, где d — расстояние от точки M_0 до плоскости, если M_0 и начало координат находятся по разные стороны плоскости, и равное $-d$, если M_0 и начало координат находятся по одну сторону плоскости.*

Поскольку $\delta = \text{Пр}_{\vec{n}}\,\overrightarrow{OM_0} - p$ (Рис. III.42b), то

$$\delta = (\overrightarrow{OM_0}\cdot\vec{n}) - p = \left(\vec{r}_0\,\vec{n}\right) - p.$$

В координатной записи имеем

$$\delta = x_0\cos\alpha + y_0\cos\beta + z_0\cos\gamma - p. \tag{III.27}$$

Из (III.27) следует, что для расстояния от точки до плоскости имеет место формула

$$d = |x_0\cos\alpha + y_0\cos\beta + z_0\cos\gamma - p|. \tag{III.28}$$

Пример ПIII.3. *Найти расстояние от точки* $M(1,-1,2)$ *до плоскости* $3x-y+z+1=0$.

Решение. Нормируем уравнение плоскости:

$$-\frac{3x}{\sqrt{11}}+\frac{y}{\sqrt{11}}-\frac{z}{\sqrt{11}}-\frac{1}{\sqrt{11}}=0.$$

По (III.28) получаем

$$d=\left|-\frac{3}{\sqrt{11}}-\frac{1}{\sqrt{11}}-\frac{2}{\sqrt{11}}-\frac{1}{\sqrt{11}}\right|=\frac{7}{\sqrt{11}}.$$

Наконец, остановимся на условиях параллельности и перпендикулярности двух плоскостей $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ и $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$. Поскольку параллельность плоскостей означает коллинеарность нормальных векторов плоскостей, то в силу необходимых и достаточных условий коллинеарности двух векторов мы имеем следующее утверждение.

Теорема ТIII.3. *Необходимым и достаточным условием параллельности двух плоскостей является условие*

$$[\vec{N}_1\vec{N}_2]=0\leftrightarrow \mathrm{p}\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1\\ A_2 & B_2 & C_2\end{pmatrix}=1. \tag{III.29}$$

III.5 Взаимное расположение плоскостей

Перпендикулярность двух плоскостей эквивалентна ортогональности их нормальных векторов. Поэтому имеем еще одно утверждение.

Теорема ТIII.4. *Необходимым и достаточным условием перпендикулярности двух плоскостей является условие*

$$(\vec{N}_1\vec{N}_2)=0\Longleftrightarrow A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0. \tag{III.30}$$

Пример ПIII.4. *Найти уравнение плоскости, проходящей через точку* $M_0(1,2,-2)$ *и параллельно плоскости* $3x+2y-z+1=0$.

Решение. Нормальный вектор $\vec{N}_1$ имеет координаты $(3, 2, -1)$. За нормальный вектор искомой плоскости можно взять (ради простоты решения) вектор, совпадающий с $\vec{N}_1$. Поэтому имеем $3(x-1)+2(y-2)-(z+2)=0$ или $3x+2y-z-9=0$.

Пример ПIII.5. *Найти уравнение множества плоскостей, проходящих через точку $M_0(1; 2; -2)$ и перпендикулярных к плоскости $3x+2y-z+1=0$.*

Решение. Из (III.30) следует $3A_2+2B_2-C_2=0$. Находим $C_2=3A_2+2B_2$ и подставим в уравнение $A_2(x-1)+B_2(y-2)+C_2(z+2)=0$. Окончательно имеем: $A_2x+B_2y+(3A_2+2B_2)z=5A_2-2B_2$ — параметрическое семейство плоскостей.

Прямая в пространстве может быть задана также как пересечение двух плоскостей

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases} \tag{III.31}$$

Плоскости пересекаются, если их нормальные векторы не коллинеарны (иначе плоскости параллельны). Поэтому за направляющий вектор $\vec{p}$ прямой может быть взят вектор, полученный от перемножения $\vec{N}_1$ и $\vec{N}_2$ векторным способом (Рис. III.40b). Итак, $\vec{p}=\left[\vec{N_1}\,\vec{N_2}\right]$. За опорную точку искомой прямой можно взять любую тройку чисел, удовлетворяющую системе (III.31). Если $\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \neq 0$, то положив в (III.31) $z=0$ и решая оставшуюся систему двух уравнений с двумя неизвестными, находим x_0 и y_0. Точка с координатами $(x_0; y_0; 0)$ и будет опорной точкой прямой.

Тем самым от уравнения прямой в виде (III.31) мы переходим к каноническим (или параметрическим) уравнениям той же прямой.

Пример ПIII.6. *Прямая задана в виде*

$$\begin{cases} x-y+2z+1=0 \\ x+y+3z+2=0 \end{cases}$$

Написать ее канонические уравнения.

Решение. Положив $z=0$, решаем систему

$$\begin{cases} x-y=-1 \\ x+y=-2 \end{cases}$$

Находим, что $x = -\dfrac{3}{2}$, $y = -\dfrac{1}{2}$. Итак, опорная точка имеет координаты $\left(-\dfrac{3}{2}; -\dfrac{1}{2}; 0\right)$. Найдем направляющий вектор $\vec{p}$

$$\vec{p} = \left[\overrightarrow{N_1}\,\overrightarrow{N_2}\right] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -5\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}.$$

Канонические уравнения прямой имеют вид

$$\frac{x + \dfrac{3}{2}}{-5} = \frac{y + \dfrac{1}{2}}{-1} = \frac{z}{2}.$$

III.6 Взаимное расположение прямой и плоскости в пространстве

Перейдем к рассмотрению ряда задач на взаимное расположение прямой и плоскости. Используя доказанные в векторной алгебре теоремы, проведем 3 утверждения.

Теорема TIII.5. *Необходимым и достаточным условием перпендикулярности прямой и плоскости является условие*

$$\left[\overrightarrow{N}\,\overrightarrow{p}\right] = 0 \quad (u\frac{A}{l} = \frac{B}{m} = \frac{C}{n}).$$

Теорема TIII.6. *Необходимым и достаточным условием параллельности прямой и плоскости является условие*

$$\left(\overrightarrow{N}\,\overrightarrow{p}\right) = 0 \quad (uAl + Bm + Cn = 0).$$

Теорема TIII.7. *Необходимым и достаточным условием принадлежности прямой плоскости является одновременное выполнение условий:*

$$Al + Bm + Cn = 0, \quad Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0.$$

В самом деле, первое условие выполнено в силу теоремы TIII.6, а второе условие означает, что опорная точка прямой принадлежит плоскости и, следовательно, ее координаты удовлетворяют уравнению плоскости.
Пример. Лежит ли прямая

$$\frac{x-1}{-1} = \frac{y+1}{0} = \frac{z-5}{2}$$

на плоскости $2x + 3y + z - 4 = 0$?

Решение. Проверяем первое условие: $2 \cdot (-1) + 3 \cdot 0 + 1 \cdot 2 \equiv 0$. Проверяем второе условие: $2 \cdot 1 + 3 \cdot (-1) + 5 - 4 \equiv 0$. Прямая принадлежит плоскости.
Задача 1. Написать уравнение плоскости, проходящей через прямую

$$\frac{x-x_0}{l} = \frac{y-y_0}{m} = \frac{z-z_0}{n}$$

и точку $M_1(x_1; y_1; z_1)$, не лежащую на прямой.

Пусть $M(x; y; z)$ — текущая точка плоскости. В таком случае векторы $\overrightarrow{M_0M}$ (M_0 — опорная точка прямой), $\overrightarrow{M_0M_1}$ и $\vec{p}$ компланарны. Это значит

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ x_1-x_0 & y_1-y_0 & z_1-z_0 \\ l & m & n \end{vmatrix} = 0. \qquad \text{(III.32)}$$

Это и есть уравнение искомой плоскости.
Задача 2. Написать уравнение плоскости, проходящей через прямую

$$\frac{x-x_0}{l} = \frac{y-y_0}{m} = \frac{z-z_0}{n}$$

и параллельной прямой

$$\frac{x-x_1}{l_1} = \frac{y-y_1}{m_1} = \frac{z-z_1}{n_1} \quad ([\vec{p}\,\overset{\to}{p_1}] \neq \vec{0}).$$

За нормальный вектор плоскости можно взять вектор, равный векторному произведению $\vec{p}$ и $\vec{p}_1$: $\vec{N} = [\vec{p}\,\overset{\to}{p_1}]$. За опорную точку плоскости можно взять опорную точку прямой, через которую проходит плоскость. Поэтому искомое уравнение имеет вид

$$([\vec{p}\,\overset{\to}{p_1}](\vec{r} - \vec{r}_0)) = 0.$$

В координатах имеем

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ l & m & n \\ l_1 & m_1 & n_1 \end{vmatrix} = 0. \tag{III.33}$$

Задача 3. Написать уравнение плоскости, которая перпендикулярна к плоскости $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ и проходит через прямую

$$\frac{x-x_0}{l} = \frac{y-y_0}{m} = \frac{z-z_0}{n}.$$

За нормальный вектор искомой плоскости возьмем $\vec{N} = \left[\vec{p}\,\overset{\rightarrow}{N_1}\right]$, а за опорную точку искомой плоскости — опорную точку прямой, так как плоскость проходит через нее. Имеем, что $(\left[\vec{p}\,\overset{\rightarrow}{N_1}\right](\vec{r}-\vec{r}_0))=0$ или в координатах

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ l & m & n \\ A_1 & B_1 & C_1 \end{vmatrix} = 0. \tag{III.34}$$

Задача 4. Найти координаты точки пересечения прямой

$$\frac{x-x_0}{l} = \frac{y-y_0}{m} = \frac{z-z_0}{n}.$$

и плоскости $Ax+By+Cz+D=0$.

Решение. Запишем параметрические уравнения прямой:

$x=x_0+lt, y=y_0+mt, z=z_0+nt$. Подставив в уравнение плоскости эти значения, получим $A(x_0+lt)+B(y_0+mt)+C(z_0+nt)+D=0$, откуда при $Al+Bm+Cn\neq 0$ найдем значение параметра $t=t'$, которое удовлетворяет данному уравнению. Тогда $x'=x_0+lt', y'=y_0+mt', z'=z_0+nt'$ есть координаты точки пересечения. Если $Al+Bm+Cn=0$, то прямая параллельна плоскости.

Задача 5. Найти расстояние от точки до прямой в пространстве.

Решение. Пусть прямая задана векторным параметрическим уравнением $\vec{r}=\vec{r}_0+t\vec{p}$ с опорной точкой $M_0(x_0;y_0;z_0)$ и точкой $M_1(x_1;y_1;z_1)$ вне прямой. Опустим из точки M_1 перпендикуляр M_1M_1' (42a). Совместим начало направляющего вектора с опорной точкой M_0 и построим параллелограмм на векторах $\vec{p}$ и $\overrightarrow{M_0M_1}$. Тогда расстояние d от точки M_1 до прямой мы можем найти, разделив площадь параллелограмма на длину основания $|\vec{p}|$.

Площадь параллелограмма, как известно, совпадает с модулем векторного произведения $\overrightarrow{M_0M_1}\cdot\vec{p}$. Поэтому

$$d = \frac{|(\vec{r}_1-\vec{r}_0)\vec{p}|}{|\vec{p}|}. \tag{III.35}$$

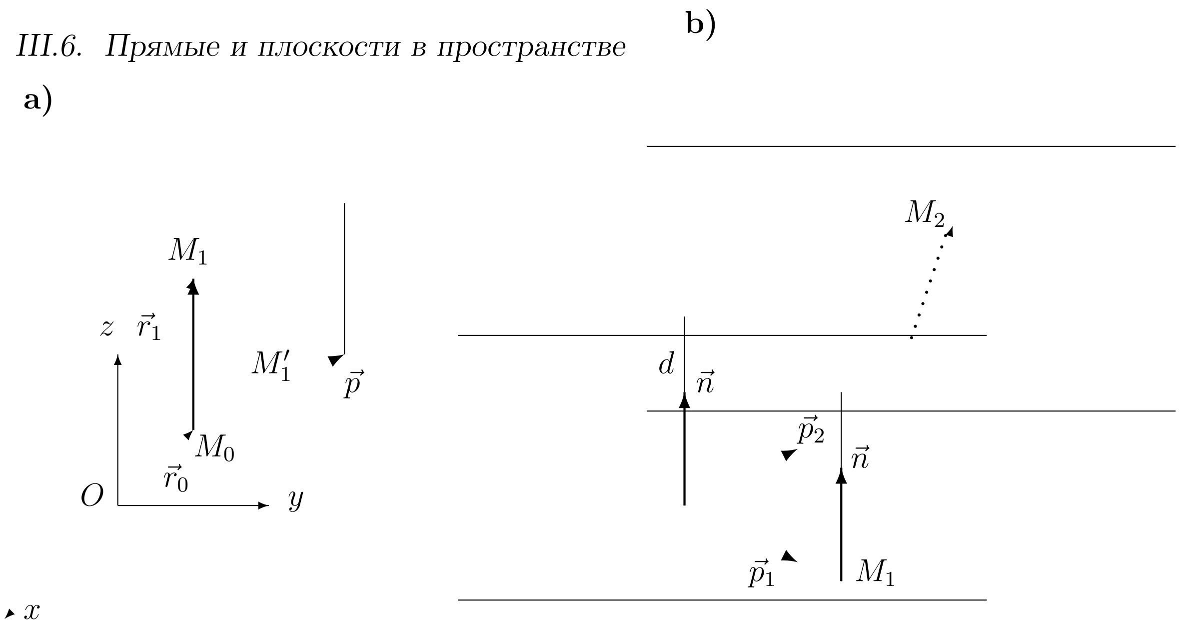


Рис. III.43.

Пример ПIII.7. *Требуется найти расстояние от точки* $M_1(1,-1,2)$ *до прямой*

$$\frac{x+1}{0}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-3}{2}$$

.

Имеем

1. $[(\vec r_1-\vec r_0)\vec p]=\begin{vmatrix}\vec i & \vec j & \vec k\\ 2 & -2 & -1\\ 0 & 1 & 2\end{vmatrix}=-3\vec i-4\vec j+2\vec k;$
2. $|[(\vec r_1-\vec r_0)\vec p]|=\sqrt{9+16+4}=\sqrt{29};$
3. $|\vec p|=\sqrt{0^2+1^2+2^2}=\sqrt5$
4. $d=\sqrt{\dfrac{29}{5}}.$

Задача 6. Найти расстояние между прямыми в пространстве. Если прямые пересекаются или параллельны (условие (III.17)), то в первом случае расстояние равно нулю, а во втором — расстояние между прямыми равно расстоянию от опорной точки первой прямой до второй прямой и вычисляется по формуле (III.35).

Пусть прямые

$$\frac{x-x_1}{l_1}=\frac{y-y_1}{m_1}=\frac{z-z_1}{n_1}\quad\text{и}\quad\frac{x-x_1}{l_2}=\frac{y-y_2}{m_2}=\frac{z-z_2}{n_2}$$

скрещивающиеся. Для них определитель (III.17) отличен от нуля. Кратчайшее расстояние между ними равно расстоянию между параллельными плоскостями, проходящими соответственно через первую и вторую прямые. Очевидно, за нормальный вектор $\vec{N}$ к плоскости может быть выбран вектор $\left[\vec{p_1}\,\vec{p_2}\right]$. Опорные точки $M_1(x_1; y_1; z_1)$, $M_2(x_2; y_2; z_2)$ прямых могут быть взяты за опорные точки плоскостей. Уравнения плоскостей будут иметь вид

$$(\left[\vec{p_1}\,\vec{p_2}\right](\vec{r}-\vec{r}_1)) = 0, \quad (\left[\vec{p_1}\,\vec{p_2}\right](\vec{r}-\vec{r}_2)) = 0.$$

Искомое расстояние будет равно модулю проекции вектора $\overrightarrow{M_1M_2}$ на $\vec{n} = \dfrac{\vec{N}}{|\vec{N}|}$ (42b) Окончательно имеем

$$d = |\text{Пр}_{\vec{n}}\,\overrightarrow{M_1M_2}| = |((\vec{r}_2-\vec{r}_1)\vec{n})| = \frac{|(\vec{r}_2-\vec{r}_1)\vec{p}_1\vec{p}_2|}{|\left[\vec{p_1}\,\vec{p_2}\right]|}. \tag{III.36}$$

Заметим, что в числителе дроби (III.36) стоит объем параллелепипеда, построенного на векторах, $\vec{p}_1\vec{p}_2, \overrightarrow{M_1M_2}$, а в знаменателе площадь параллелограмма. Поэтому кратчайшее расстояние совпадает с длиной перпендикуляра, опущенного из вершины параллелепипеда $(\vec{p}_1, \vec{p}_2, \overrightarrow{M_1m_2})$ на основание $(\vec{p}_1, \vec{p}_2)$.

III.7 Исследование формы поверхностей второго порядка

Будем исследовать формы поверхностей второго порядка методом параллельных сечений по их каноническим уравнениям. Строгая классификация поверхностей второго порядка будет дана ниже с использованием методов линейной алгебры.

1. Эллипсоид:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (a>0,\, b>0,\, c>0). \tag{III.37}$$

Поскольку из (III.37) следует, что $|x| \leq a, |y| \leq b, |z| \leq c$, то эллипсоид заключен в прямоугольном параллелепипеде со сторонами $2a, 2b, 2c$. Координатные плоскости являются плоскостями симметрии. Рассечем поверхность плоскостями $z = h\,(|h| \leq c)$. Получим кривые с уравнениями

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{h^2}{c^2}, \quad z = h.$$

Это эллипс с полуосями $a\sqrt{1 - \frac{h^2}{c^2}}$ и $b\sqrt{1 - \frac{h^2}{c^2}}$. При $h = 0$ эллипс имеет наибольшие полуоси. Когда $|h|$ растет, то полуоси эллипсов уменьшаются и при $|h| = c$ эллипсы вырождаются в точки $A_1(0; 0; c)$ и $A_2(0; 0; -c)$ (Рис. III.44). Аналогичная картина возникает, если рассекать эллипсоид плоскостями, перпендикулярными к оси Ox и Oy.

Рис. III.44. *Эллипсоид*

2. *Однополостной гиперболоид:*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Координатные плоскости являются плоскостями симметрии (при замене x на $-x$, y на $-y$, z на $-z$ уравнение не меняется). Рассекаем плоскостями, параллельными плоскости $xOy : z = h$. Получим линии сечения с уравнениями

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 + \frac{h^2}{c^2}, \, z = h \quad (-\infty < h < +\infty).$$

Это эллипсы, полуоси которых

$$a\sqrt{1 + \frac{h^2}{c^2}}, \, b\sqrt{1 + \frac{h^2}{c^2}}$$

растут вместе с ростом $|h|$.

Наименьший эллипс имеем при $h = 0$ (плоскость xOy). Он носит название *горлового* эллипса (Рис. III.45) Сечение плоскостями $x = 0$, $y = 0$ дают нам гиперболы

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Точки этих гипербол являются вершинами эллипсов, получаемых при сечении поверхности плоскостями $z = h$.

Рис. III.45. *Однополостной гиперболоид*

3. *Двуполостной гиперболоид:*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1.$$

Координатные плоскости являются плоскостями симметрии. Сечения $z = h$ дают линии с уравнениями

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{h^2}{c^2} - 1, \; z = h.$$

При $|h| < c$ имеем мнимые эллипсы. Следовательно, поверхность расположена выше плоскости $z = c$ и ниже плоскости $z = -c$. При $|h| \geq c$ получаем вещественные эллипсы, полуоси которых

$$a\sqrt{\frac{h^2}{c^2} - 1}, \; b\sqrt{\frac{h^2}{c^2} - 1}$$

растут вместе с ростом $|h|$.

Рис. III.46. *Двуполостной гиперболоид*

При сечении плоскостями $x = 0$ и $y = 0$ имеем сопряженные гиперболы

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1, \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1,$$

в точках которых лежат вершины эллипсов, получаемых сечениями $z = h$ ($|h| \geq c$) Рис. III.46.

4. *Эллиптический параболоид:*

$$z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}.$$

Плоскости yOz и xOz являются плоскостями симметрии. Поверхность проходит через начало координат и расположена над плоскостью xOy, так как $z \geq 0$. Сечения $z = h$ дают эллипсы

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = h,$$

полуоси которых $a\sqrt{h}$, $b\sqrt{h}$ растут с ростом h(Рис. III.47). При сечении плоскостями $x = 0$ и $y = 0$ имеем параболы

$$z = \frac{y^2}{b^2}, \quad z = \frac{x^2}{a^2},$$

точки которых являются вершинами указанных выше эллипсов.

Рис. III.47. *Эллиптический параболоид*

5.*Гиперболический параболоид:*

$$z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}.$$

Плоскости yOz и xOz являются плоскостями симметрии. Рассечем поверхность плоскостью $y = 0$. В плоскости xOz получим параболу $z = \dfrac{x^2}{a^2}$.

Сечение плоскостью $x = 0$ дает нам в плоскости yOz параболу $z = -\dfrac{y^2}{b^2}$, ветви которой направлены вниз.

Сечение координатной плоскостью $z = 0$ есть пара пересекающихся прямых

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0 \quad \left(y = \pm\frac{b}{a}x\right).$$

Сечение плоскостями $z = h$ дает гиперболы с уравнениями

$$\frac{x^2}{ha^2} - \frac{y^2}{hb^2} = 1,$$

причем при $h > 0$ ветви расположены вдоль оси Ox, а при $h < 0$ ветви расположены вдоль оси Oy. Построив соответствующие сечения, мы получим вид гиперболического параболоида (Рис. III.48).

Рис. III.48. *Гиперболический параболоид*

6. *Эллиптический конус.:*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0.$$

Рис. III.49. *Эллиптический конус*

7. Цилиндры второго порядка.

Для примера приведем лишь цилиндры, с образующими, параллельными оси Oz:
(a) эллиптический цилиндр: $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$;
(b) гиперболический цилиндр: $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$;
(c) параболический цилиндр: $y^2 = 2px$. Поскольку кривые второго порядка изучены нами ранее, то вид цилиндров устанавливается легко (Рис. III.50). Аналогично обстоит дело, когда отсутствует какая - либо другая переменная.

Поверхность симметрична относительно всех координатных плоскостей. Сечения плоскостями $z = h$ дают нам эллипсы

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{h^2}{c^2}$$

с полуосями $\dfrac{|h|a}{c}$, $\dfrac{|h|b}{c}$. Полуоси эллипсов растут с ростом $|h|$. При $h = 0$ имеем точку (начало координат). Сечения плоскостями $x = 0$ и $y = 0$ дают соответственно пару прямых $z = \pm\dfrac{c}{b}y$ и $z = \pm\dfrac{c}{a}x$. Вид эллиптического конуса дан на Рис. III.49.

Рис. III.50. *Эллиптический цилиндр*

Если нужно получить уравнение общей цилиндрической поверхности с образующими, параллельными вектору $\vec{p}(l, m, n)$ и проходящими через точки линии L: $\begin{cases} F_1(x,y,z)=0 \\ F_2(x,y,z)=0 \end{cases}$, то поступаем следующим образом. Напишем уравнение образующей $\dfrac{X-x}{l}=\dfrac{Y-y}{m}=\dfrac{Z-z}{n}$, где x,y,z — координаты переменной точки линии L. Затем из четырех уравнений

$$\begin{cases} F_1(x,y,z)=0 \\ F_2(x,y,z)=0 \\ \dfrac{X-x}{l}=\dfrac{Y-y}{m}=\dfrac{Z-z}{n} \end{cases}$$

исключим переменные x,y,z. В результате получим уравнение искомой цилиндрической поверхности $\Phi(X,Y,Z)=0$.

III.8 Криволинейные координаты в евклидовом пространстве

При исследовании различных фигур в пространстве часто бывает удобно применять системы координат, отличные от декартовых, т.е., определять положение любой точки, M, упорядоченным набором трех чисел (u,v,w) *однозначно* связанных с декартовыми координатами точки (x,y,z). Таким образом, зададим три непрерывные функции трех переменных:

$$\begin{cases} x = F(u,v,w)\,; \\ \\ y = G(u,v,w)\,; \\ \\ z = H(u,v,w) \end{cases} \tag{III.38}$$

Выясним, каким условиям должны удовлетворять функции $F(u,v,w)$, $G(u,v,w)$ и $H(u,v,w)$. Во - первых, как мы указали, F,G,H должны быть функциями своих аргументов, т.е., каждой тройке чисел $(u,v,w)\in\mathcal{D}$ из некоторой *области* $\mathcal{D}$ должна соответствовать одна и только одна тройка чисел $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$. Однако, это соответствие должно быть и *взаимно однозначным*, т.е., каждой тройке чисел $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ должна соответствовать одна и только одна тройка чисел (u,v,w).

Фиксируя значения переменных $v=v_0, w=w_0\in\mathcal{D}$ и изменяя переменную u в области $\mathcal{D}$, получим:

$$\begin{cases} x = F(u, v_0, w_0)\,; \\ y = G(u, v_0, w_0)\,; \\ z = H(u, v_0, w_0) \end{cases}, \tag{III.39}$$

т.е., получим:

$$x = x(u);\; y = y(u);\; z = z(u) \Longrightarrow \vec{r} = \vec{r}(u) \tag{III.40}$$

параметрическое уравнение кривой линии, где параметром служит новая координата u. Эта линия называется *координатной линией* u. Аналогично получим координатные линии v и w. Система координат, построенная таким образом, называется *криволинейной системой координат.*

Заметим, что строго говоря, криволинейные координаты получаются лишь в том случае, когда функции (III.38) не являются линейными функциями переменных u, v, w. В последнем же случае, когда:

$$\begin{cases} x = C^1_{\prime 1}u + C^1_{\prime 2}v + C^1_{\prime 3}w + x^0\,; \\ y = C^2_{\prime 1}u + C^2_{\prime 2}v + C^2_{\prime 3}w + y^0\,; \\ z = C^3_{\prime 1}u + C^3_{\prime 2}v + C^3_{\prime 3}w + z^0 \end{cases}, \tag{III.41}$$

где $C^i_{\prime k}$, $(i, k = \overline{1,3})$, x^0, y^0, z^0 - некоторые числа, система координат (u, v, w) называется *косоугольной* или *аффинной.*

Выясним, что означает указанное выше условие взаимной однозначности соответствия. Дифференцируя по параметру u радиус - вектор точки $M(x, y, z)$ (III.40) и придавая затем переменной u фиксированное значение $u = u_0 \in \mathcal{D}$, получим согласно геометрическому смыслу производной вектор, касательный к координатной линии u в точке $M_0(\vec{r}_0)$, где $\vec{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$; $x_0 = F(u_0, v_0, w_0)$, $y_0 = G(u_0, v_0, w_0)$, $z_0 = H(u_0, v_0, w_0)$,

$$\vec{\tau}_u = \left(\frac{d}{du}F(u, v_0, w_0)\bigg|_{u=u_0}, \frac{d}{du}G(u, v_0, w_0)\bigg|_{u=u_0}, \frac{d}{du}H(u, v_0, w_0)\bigg|_{u=u_0}\right) \Longrightarrow$$

$$\vec{\tau}_u = \left(\frac{\partial F}{\partial u}, \frac{\partial G}{\partial u}, \frac{\partial H}{\partial u}\right)_{u=u_0, v=v_0, w=w_0}. \tag{III.42}$$

Аналогично получим векторы $\vec{\tau}_v$ и $\vec{\tau}_w$, касательные к координатным линиям v и w, соответственно:

$$\vec{\tau}_v = \left(\frac{\partial F}{\partial v}, \frac{\partial G}{\partial v}, \frac{\partial H}{\partial v}\right)_{u=u_0, v=v_0, w=w_0}; \tag{III.43}$$

$$\vec{\tau}_w = \left(\frac{\partial F}{\partial w}, \frac{\partial G}{\partial w}, \frac{\partial H}{\partial w}\right)_{u=u_0, v=v_0, w=w_0}. \tag{III.44}$$

Для того, чтобы указанное соответствие было взаимно однозначным в каждой точке M_0, необходимо и достаточно, чтобы на касательных векторах $\vec{\tau}_u$, $\vec{\tau}_v$, $\vec{\tau}_w$ в каждой точке M_0 можно было построить координатную систему, т.е., чтобы эти векторы были линейно независимыми в каждой точке M_0.

Таким образом, необходимым и достаточным условием взаимной однозначности соответствия (III.38) является:

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} \stackrel{def}{=} \left.\begin{vmatrix} \dfrac{\partial F}{\partial u} & \dfrac{\partial G}{\partial u} & \dfrac{\partial H}{\partial u} \\[2ex] \dfrac{\partial F}{\partial v} & \dfrac{\partial G}{\partial v} & \dfrac{\partial H}{\partial v} \\[2ex] \dfrac{\partial F}{\partial w} & \dfrac{\partial G}{\partial w} & \dfrac{\partial H}{\partial w} \end{vmatrix}\right|_{M_0} \neq 0. \tag{III.45}$$

Определитель

$$J = \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}$$

в соотношении (III.45) называется *якобианом преобразования (III.38)*. Таким образом, якобиан преобразования должен быть отличен от нуля.

Точки M_*, в которых якобиан обращается в нуль или не существует, называются *особыми точками криволинейной системы координат*. Практически все криволинейные координаты имеют особые точки. Заметим, что область $\mathcal{D}$ изменения переменных (u,v,w) определяется из требования взаимной однозначности соответствия.

Рассмотрим некоторые, наиболее распространенные криволинейные системы координат.

Цилиндрические координаты

Для цилиндрических координат (ρ, φ, z) формулы связи (III.38) имеют вид:

$$\begin{cases} x &= \rho\cos\varphi\,; \\ y &= \rho\sin\varphi\,; \\ z &= z. \end{cases} \tag{III.46}$$

Таким образом, при фиксированной координате z координаты ρ, φ совпадают с полярными координатами на плоскости (см. Рис. III.51).

Нетрудно видеть, что для того, чтобы данная система координат покрывала все евклидово пространство точек, необходимо, чтобы переменные ρ, φ, z изменялись в следующих пределах:

$$\rho \in [0, +\infty); \quad \varphi \in [0, 2\pi), \quad z \in (-\infty, +\infty). \tag{III.47}$$

Вычисляя якобиан преобразования (III.46), найдем:

$$J = \rho.$$

Поэтому все точки с $\rho = 0$ являются особыми точками цилиндрической системы координат. Однако, очевидно, что такая точка всего одна — это начало декартовой системы координат: $O(0, 0, 0)$. Особенность этой точки состоит в том, что этой точке соответствуют любые значения *полярного угла* φ. В таких случаях, будем говорить, что координатная особенность несущественная. Ось Oz называется *полярной осью цилиндрической системы координат.*

Обратный переход от цилиндрических координат к декартовым осуществляется с помощью формул:

$$\begin{cases} \rho &= \sqrt{x^2 + y^2}\,; \\ \varphi &= \operatorname{arctg}\frac{y}{x}\,; \\ z &= z \end{cases} . \tag{III.48}$$

При этом надо помнить, что полярный угол изменяется в пределах $[0, 2\pi)$.

Наиболее просто в цилиндрических координатах записываются уравнение поверхностей вращения. Для этого необходимо направить полярную ось цилиндрической системы координат вдоль оси вращения поверхности. Координатные линии $\varphi = \mathrm{Const}$ называются *меридианами поверхности вращения*, а линии $z = \mathrm{Const}$ — *ее параллелями.*

Сферические координаты

Для сферической системы координат (r, φ, θ) формулы связи (III.38) принимают вид (см. Рис Рис. III.51):

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi\cos\theta\,; \\ y = r\sin\varphi\cos\theta\,; \\ z = r\sin\theta. \end{cases} \tag{III.49}$$

Нетрудно видеть, что для того, чтобы данная система координат покрывала все евклидово пространство точек, необходимо, чтобы переменные r, φ, θ изменялись в следующих пределах:

$$r \in [0, +\infty); \quad \varphi \in [0, 2\pi), \quad \theta \in \left(-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right). \tag{III.50}$$

Вычисляя якобиан преобразования, найдем:

$$J = r^2\cos\theta.$$

Поэтому все точки с $r = 0$ или (и) $\theta = -\pi/2, +\pi/2$ являются особыми точками сферической системы координат. Очевидно, что все эти точки лежат на оси Oz — это, во - первых, начало декартовой системы координат: $O(0,0,0)$, и кроме того все точки, соответствующие значениям $\theta = \pm\pi/2$. Эти координатные особенности также являются несущественными.

Обратный переход от сферических координат к декартовым осуществляется с помощью формул:

$$\left\{\begin{array}{lcl} r & = & \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,; \\ \varphi & = & \operatorname{arctg}\frac{y}{x}\,; \\ \theta & = & \dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \end{array}\right. . \qquad \text{(III.51)}$$

Рис. III.51. *Цилиндрическая и сферическая системы координат*

Наиболее просто в цилиндрических координатах записываются уравнение сферы: $r = a (= \mathrm{Const})$.

Глава IV

Сведения из линейной алгебры

В этой главе в качестве справочного материала мы приведем необходимые сведения из линейной алгебры, опуская доказательство теорем.

IV.1 Определители и матрицы

Таблица чисел

$$A = \begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 & \dots & a_n^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & \dots & a_n^2 \\ . & . & \dots & . \\ a_1^m & a_2^m & \dots & a_n^m \end{pmatrix} = 0 \tag{IV.1}$$

называется *матрицей* системы уравнений. Она имеет m строк и n столбцов. Если $m = n$, то матрица называется *квадратной*, если же $m \neq n$ — *прямоугольной*. Числа a_j^i называются *элементами* матрицы.

Матрица, содержащая только одну строку, называется *матрицей - строкой* (с n элементами)

$$A = (a_1, a_2, \dots, a_n) \tag{IV.2}$$

Матрица, содержащая один столбец, называется *матрицей - столбцом* (с m элементами)

$$A = \begin{pmatrix} a^1 \\ a^2 \\ . \\ . \\ . \\ a^m \end{pmatrix}. \tag{IV.3}$$

Если в (IV.3) все $a^i = 0$, то имеем *нуль - столбец*, обозначаемый символом

0. Два столбца

$$A = \begin{pmatrix} a^1 \\ a^2 \\ . \\ . \\ a^m \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b^1 \\ b^2 \\ . \\ . \\ b^m \end{pmatrix} \tag{IV.4}$$

считаем равными (пишем $A = B$), если $a^i = b^i$ $(\overline{1,m})$. Если хотя бы одно из чисел a^k (k — фиксированно) не совпадает с соответствующим числом b^k, то столбцы считаются *различными* ($A \neq B$). Под *суммой* столбцов A и B (пишем $A + B$) понимаем столбец

$$\begin{pmatrix} a^1 + b^1 \\ a^2 + b^2 \\ . \\ . \\ . \\ a^m + b^m \end{pmatrix}. \tag{IV.5}$$

Под *умножением* столбца A на число $\lambda \in K$ (пишем λA) понимаем столбец вида

$$\begin{pmatrix} \lambda a^1 \\ \lambda a^2 \\ . \\ . \\ . \\ \lambda a^m \end{pmatrix} \tag{IV.6}$$

Введенные операции позволяют рассматривать *линейные комбинации* матриц - столбцов. Пусть имеем k столбцов

$$A_1 = \begin{pmatrix} a_1^1 \\ . \\ . \\ . \\ a_1^m \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} a_2^1 \\ . \\ . \\ . \\ a_2^m \end{pmatrix}, \ldots, A_k = \begin{pmatrix} a_k^1 \\ . \\ . \\ . \\ a_k^m \end{pmatrix}.$$

Линейной комбинацией столбцов $A_1, \ldots, A_k$ с коэффициентами $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$

(пишем $\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 + \ldots + \lambda_k A_k$) называется столбец вида

$$\begin{pmatrix} \sum\limits_{j=1}^{k} \lambda_j a_j^1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \sum\limits_{j=1}^{k} \lambda_j a_j^m \end{pmatrix} \tag{IV.7}$$

Столбцы $A_1, \ldots, A_k$ называются *линейно - зависимыми*, если существуют такие числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$, среди которых хотя бы одно отлично от нуля, что выполнено

$$\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 + \ldots + \lambda_k A_k = 0 \quad (0 - \text{н} -).$$

Если равенство $\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 + \ldots + \lambda_k A_k = 0$ выполнено тогда и только тогда, когда $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0, \ldots, \lambda_k = 0$, то система матриц - столбцов $\{A_1, \ldots, A_k\}$ называется *линейно - независимой*.

Например, система столбцов

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

является *линейно - зависимой*, так как $A_1 + 2A_2 - A_3 = 0$, а система столбцов

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

является *линейно - независимой*, поскольку из соотношения $\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 + \lambda_3 A_3 = 0$ на основании равенства матриц - столбцов следует

$$\left.\begin{array}{l} \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ 2\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_3 = 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0.$$

Очевидно, если между столбцами $A_1, \ldots, A_k$ $(k > 1)$ существует линейная зависимость, то *один из этих столбцов является линейной комбинацией других*. В самом деле, пусть выполнено $\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 + \ldots + \lambda_k A_k = 0$, где, например, $\lambda_1 \neq 0$. Тогда

$$A_1 = \left(-\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right) A_2 + \ldots + \left(-\frac{\lambda_k}{\lambda_1}\right) A_k.$$

Обратно, *если какой - либо столбец есть линейная комбинация других, то данная система столбцов линейно - зависима.*

Действительно, пусть $A_1 = \mu_2 A_2 + \ldots + \mu_k A_k$. Тогда имеем

$$(-1)A_1 + \mu_2 A_2 + \ldots + \mu_k A_k = 0,$$

где первый коэффициент отличен от нуля.

Все приведенное выше для матриц - столбцов тривиальным образом переносится и для матриц - строк, если ввести в рассмотрение нуль - строку $0 = [0, 0, \ldots, 0]$, сумму $A + B = [a_1 + b_1, \ldots, a_n + b_n]$, умножение на число $\lambda A = [\lambda a_1, \ldots, \lambda a_n]$.

Сформулируем правило согласно которому каждой квадратной матрице $A = (a^i_j) \quad (i, j = \overline{1, n})$ сопоставим число, называемое *дискриминантом* (определителем n - го порядка) матрицы. Это число обозначают символом $\det \|A\|$, а сам определитель обозначают так:

$$\det A = \begin{vmatrix} a^1_1 & a^1_2 & \ldots & a^1_n \\ a^2_1 & a^2_2 & \ldots & a^2_n \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ a^n_1 & a^n_2 & \ldots & a^n_n \end{vmatrix}.$$

Термин *вычислить* (раскрыть) определитель означает указать данное число, следуя сформулированному ниже определению детерминанта с использованием свойств определителей.

Для введения детерминанта используем *альтернатор* $\delta^{i_1 i_2 \ldots i_k}_{j_1 j_2 \ldots j_k}$ $(i_1, i_2, \ldots, i_k, j_1, j_2, \ldots, j_k = \overline{1, n})$. Он определяется следующими условиями: $\delta^{i_1 i_2 \ldots i_k}_{j_1 j_2 \ldots j_k} = \pm 1$, если $j_1, j_2, \ldots, j_k$ есть некоторая перестановка значений индексов $i_1, i_2, \ldots, i_k$, считая, что все эти значения различны; при этом берется $+1$, если перестановка *четная*, и -1, если она *нечетная*. Во всех остальных случаях $\delta^{i_1 \ldots i_k}_{j_1 \ldots j_k} = 0$ (т.е. если среди значений $i_1, i_2 \ldots, i_k$ или среди значений $j_1, j_2, \ldots, j_k$ есть одинаковые, а также если среди значений $i_1, i_2 \ldots, i_k$ есть такие, каких нет среди $j_1, j_2, \ldots, j_k$ и наоборот).

Так, при $k = 1$ имеем альтернатор $\delta^i_j = \begin{cases} 1, i = j \\ 0, i \neq j \end{cases}$, называемый *символом Кронекера.*

IV.2 Свойства определителей

Определение OIV.1. *Детерминантом (определителем) матрицы A называется число:*

$$\det A = \sum_{i_1,\dots,i_n=1}^{n} \delta^{12\dots n}_{i_1 i_2 \dots i_n} a_1^{i_1} a_2^{i_2} \dots a_n^{i_n}.$$

Поскольку существует $n!$ перестановок, то, согласно определению альтернатора:

> Определитель есть сумма $n!$ произведений элементов матрицы, выбранных по одному из каждого столбца на различных строках и взятых со знаком плюс в случае четной перестановки номеров строк и со знаком минус в случае нечетной перестановки.

Пример ПIV.1. *вычисления определителя второго порядка*

$$\begin{vmatrix} a_1^1 & a_2^1 \\ a_1^2 & a_2^2 \end{vmatrix} = \sum_{i_1,i_2=1}^{2} \delta^{12}_{i_1 i_2} a_1^{i_1} a_2^{i_2} = \delta^{12}_{11} a_1^1 a_2^1 + \delta^{12}_{12} a_1^1 a_2^2 + \delta^{12}_{21} a_1^2 a_2^1 + \delta^{12}_{22} a_1^2 a_2^2.$$

По определению альтернатора $\delta^{12}_{11} = 0, \delta^{12}_{12} = 1, \delta^{12}_{21} = -1$. Поэтому для любого определителя второго порядка имеем

$$\begin{vmatrix} \overset{+}{\mathbf{a}} & \mathbf{b} \\ \mathbf{c} & \mathbf{d} \end{vmatrix} = ad - cb.$$

Пример ПIV.2. *вычисления определителя третьего порядка (члены с нулевым альтернатором не пишем)*

$$\begin{vmatrix} a_1^1 & a_2^1 & a_3^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 \\ a_1^3 & a_2^3 & a_3^3 \end{vmatrix} = \sum_{i_1,i_2,i_3=1}^{3} \delta^{123}_{i_1 i_2 i_3} a_1^{i_1} a_2^{i_2} a_3^{i_3} = \delta^{123}_{123} a_1^1 a_2^2 a_3^3 + \delta^{123}_{132} a_1^1 a_2^3 a_3^2 + \delta^{123}_{213} a_1^2 a_2^1 a_3^3 + \delta^{123}_{231} a_1^2 a_2^3 a_3^1 +$$

$$+ \delta^{123}_{312} a_1^3 a_2^1 a_3^2 + \delta^{123}_{321} a_1^3 a_2^2 a_3^1.$$

Используя определение альтернатора, приходим к правилу Саррюса вычисления определителя третьего порядка

$$\begin{array}{ccc} + & + & + \\ \end{array}$$
$$\left|\begin{array}{ccc} \mathbf{a} & \mathbf{b} & \mathbf{c} \\ \mathbf{d} & \mathbf{e} & \mathbf{f} \\ \mathbf{g} & \mathbf{h} & \mathbf{k} \end{array}\right| \begin{array}{cc} \mathbf{a} & \mathbf{b} \\ \mathbf{d} & \\ \mathbf{g} & \mathbf{h} \end{array} = aek + bfg + cdh - gec - hfa - kdb.$$
$$\begin{array}{ccc} - & - & - \\ \end{array}$$

Рассмотрим матрицу из m строк и n столбцов

$$A = \begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 & ... & a_n^1 \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ a_1^m & a_2^m & ... & a_n^m \end{pmatrix}.$$

Ей можно сопоставить матрицу из n строк и m столбцов, у которой каждая строка является столбцом матрицы A с тем же номером. Эту матрицу

$$A = \begin{pmatrix} a_1^1 & a_1^2 & ... & a_1^m \\ a_2^1 & a_2^2 & ... & a_2^m \\ . & . & . & . \\ a_n^1 & a_n^2 & ... & a_n^m \end{pmatrix}.$$

называют *транспонированной* матрицей и обозначают символом A^T, а переход от A к B — *транспонированием.* В случае квадратных матриц транспонирование можно определить как поворот вокруг главной диагонали.

Элементы b_j^i транспонированной матрицы связаны с элементами матрицы A соотношением $b_j^i = a_i^j$ $(i = \overline{1, n}; j = \overline{1, m})$.

Свойство $\bar{\mathrm{C}}$IV.1. *При транспонировании квадратной матрицы значение определителя не меняется, т.е.* $\det A^T = \det A$.

Это свойство позволяет формулировать и доказывать свойства определителей с использованием лишь столбцов определителя. Автоматически все переносится и на его строки.

Свойство $\bar{\mathrm{C}}$IV.2. *При перестановке двух столбцов (строк) в матрице ее детерминант меняет знак.*

Обратимся к более общему случаю, когда меняются местами s-й и l-й столбец, между которыми находится k столбцов. Такую перестановку можно осуществить последовательными перестановками s-го столбца с соседними столбцами, двигаясь к l-му столбцу на его место. Понадобится $k+1$ перестановок. Передвигая после этого аналогичным образом l-й столбец на место s-го, произведем еще k перестановок. Определитель получит множитель $(-1)^{2k+1}$, т.е. изменит свой знак на противоположный.

Следствие CIV.1. *Определитель, имеющий два одинаковых столбца (строки) равен нулю.*

В самом деле, переставляя одинаковые столбцы, мы, с одной стороны, не изменим определителя, а, с другой, в силу свойства $\bar{\text{C}}$IV.2 он изменяет знак на противоположный, т.е. $\det\|A\| = -\det\|A\|$.

Свойство $\bar{\text{C}}$IV.3. *Если элементы s-го столбца матрицы A представляют собой линейную комбинацию вида $a^i_s = \lambda_1 a^i_{1s} + \lambda_2 a^i_{2s} + \ldots + \lambda_k a^i_{ks}$, то* $\det A = \lambda_1 \det A_1 + \lambda_2 \det A_2 + \ldots +$
$+ \lambda_k \det A_k$*, где матрицы $A_1, \ldots, A_k$ получаются из матрицы A путем замены а-го столбца на элементы $a^i_{1s}, a^i_{2s}, \ldots, a^i_{ks}$.*

Следствие CIV.2. *Общий множитель у всех элементов столбца (строки) можно вынести за знак определителя, т.е. если $a^i_s = \lambda \overset{*}{a}{}^i_s$, то $\det A = \lambda \det \overset{*}{A}$.*

Свойство $\bar{\text{C}}$IV.4. *Если какой - либо столбец (строка) есть линейная комбинация других столбцов (строк), то определитель равен нулю.*

Свойство $\bar{\text{C}}$IV.5. *Определитель не изменится, если к элементам столбца (строки) прибавить соответствующие элементы другого столбца (строки), умноженного на какое - либо число.*

Пример ПIV.3. *Требуется вычислить определитель*

$$\triangle = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ 1 & x_1 & a_2 & \dots & a_n \\ 1 & a_1 & x_2 & \dots & a_n \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ 1 & a_1 & a_2 & \dots & x_n \end{vmatrix}$$

Умножая последовательно первый столбец на $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1$ и вычитая результат после каждого умножения из $(n+1)$-го, n-го и т.д. столбцов, получим по свойству [$\bar{C}$IV.5]

$$\triangle = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & x_1 - a_1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & a_1 & x_2 - a_2 & \dots & a_n \\ . & . & . & . & . \\ 1 & 0 & 0 & \dots & x_n - a_n \end{vmatrix}.$$

Вычитая первую строку из всех остальных, мы придем к определителю, у которого все элементы, за исключением главной диагонали (она останется неизменной), нули. Из всех $(n+1)!$ произведений ненулевым останется лишь одно произведение элементов по главной диагонали. В итоге $\triangle = (x_1 - a_1)(x_2 - a_2)\dots(x_n - a_n)$.

Важную роль в теории определителей играют понятия *алгебраического дополнения и минора* соответствующих фиксированному элементу a_s^k. Чтобы их ввести в рассмотрение, зафиксируем s-ый столбец и представим определитель как сумму n слагаемых, вынося в качестве множителя элементы s-го столбца

$$\det A = \sum \delta^{1\dots s\dots n}_{i_1\dots i_s\dots i_n} a_1^{i_1}\dots a_s^{i_s}\dots a_n^{i_n} = a_s^1 \sum \delta^{1\dots s\dots n}_{i_1\dots 1\dots i_n} a_1^{i_1}\dots a_{s-1}^{i_{s-1}} a_{s+1}^{i_{s+1}}\dots a_n^{i_n} +$$

$$+ a_s^2 \sum \delta^{1\dots s\dots n}_{i_1\dots 2\dots i_n} a_1^{i_1}\dots a_{s-1}^{i_{s-1}} a_{s+1}^{i_{s+1}}\dots a_n^{i_n} + \dots + a_s^n \sum \delta^{1\dots s\dots n}_{i_1\dots n\dots i_n} a_1^{i_1}\dots a_{s-1}^{i_{s-1}} a_{s+1}^{i_{s+1}}\dots a_n^{i_n}.$$

Обозначим соответственно суммы, стоящие после множителей $a_s^1, \dots, a_s^n$ через $A_s^1, A_s^2, \dots, A_s^n$, и назовем их *алгебраическими дополнениями* элементов $a_s^1, a_s^2 \dots, a_s^n$.

Итак,

$$\det A = a_s^1 A_s^1 + a_s^2 A_s^2 + \ldots + a_s^n A_s^n = \sum_{k=1}^{n} a_s^k A_s^k. \tag{IV.8}$$

Формула (IV.8) носит название *разложения определителя по элементам s-го столбца.*

Приведенное выше определение алгебраического дополнения A_s^k не имеет конструктивного характера, удобного для вычисления. Чтобы преодолеть эту трудность, дадим определение *минора* M_s^k элемента a_s^k и установим связь между алгебраическим дополнением A_s^k и минором M_s^k.

Определение OIV.2. *Если в определителе мысленно вычеркнуть s-ый столбец и k-ю строку, то оставшийся определитель $(n-1)$-го порядка называется минором элемента a_s^k и обозначается символом M_s^k.*

Теорема TIV.1. *Имеет место следующая связь между алгебраическими дополнениями и соответствующими минорами:*

$$A_s^k = (-1)^{k+s} M_s^k. \tag{IV.9}$$

Пример ПIV.4. *Вычислить алгебраическое дополнение $A\alpha$ элемента α в определителе*

$$\triangle = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 2 & \alpha & 0 & \beta \\ -1 & 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} \tag{IV.10}$$

Согласно формуле (IV.9) имеем

$$A(\alpha) = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^5 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1 = -2.$$

Пример ПIV.5. *Разложить определитель IV.10 по элементам третьего столбца и вычислить его*

$$\triangle = 2\cdot(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & \alpha & \beta \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} + (-1)(-1)^{4+3}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & \alpha & \beta \end{vmatrix} = 4 - 2\alpha + \beta.$$

Наконец, приведем два следующих замечания.

Замечание 1. В силу свойства $\bar{\text{C}}$IV.1 имеет место аналогичная формуле (IV.8) формула разложения определителя по элементам строки

$$\det A = \sum_{k=1}^{n} a^l_k A^l_k \quad (l - \text{ф!}). \tag{IV.11}$$

*Замечание 2.*Пусть определитель имеет два одинаковых столбца (например, j-й и s-й, т.е. $a^k_j = a^k_s$ $(k = \overline{1,n})$). Он, как указано выше, равен нулю. Разложим его по элементам j-го столбца. Имеем

$$a^1_s A^1_j + a^2_s A^2_j + \ldots + a^n_s A^n_j = 0 \quad (j \neq s). \tag{IV.12}$$

Этот результат можно сформулировать так:

> Сумма произведений элементов какого - либо столбца (строки) на алгебраические дополнения соответствующих элементов другого столбца (строки) всегда равна нулю.

IV.3 Свойства матриц

В матрице $A = (a^i_j)$ $(i = \overline{1,m}; j = \overline{1,n})$ зафиксируем p произвольно выбранных строк и p произвольно выбранных столбцов матрицы. Из элементов, стоящих на пересечении выбранных строк и столбцов, построим квадратную матрицу p-го порядка A_p.

Определение OIV.3. *Детерминант матрицы A_p называется минором p-го порядка матрицы A.*

Например, для матрицы $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ имеем следующие миноры второго порядка

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix},$$

а миноры первого порядка совпадают с элементами матрицы.

Определение OIV.4. *Число r называется рангом матрицы A (пишем ранг $A = r$), если у нее имеется хотя бы один минор r-го порядка, отличный от нуля, а все миноры $(r+1)$-го порядка (следовательно, в силу формулы разложения (IV.8)) $(r+2)$-го порядка и т.д.)равны нулю. При этом всякий отличный от нуля минор r-го порядка называется базисным, а соответственно столбцы и строки матрицы A называются базисными столбцами и строками.*

Пример ПIV.6. *Найти ранг матриц*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Очевидно, что ранг $A = 1$. Ранг $B = 1$, так как все миноры второго порядка равны нулю. Ранг $C = 2$, ибо существует минор

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \left(m \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \right),$$

который отличен от нуля, а все миноры третьего порядка содержат нулевую строку и поэтому обращаются в нуль. В матрице C каждый из указанных миноров 2-го порядка может быть выбран за базисный минор.

Теорема TIV.2. *(о базисном миноре). Любой столбец (строка) матрицы A есть линейная комбинация ее базисных столбцов (строк).*

Перейдем к следствиям из этой теоремы.

Следствие CIV.3. *Пусть дана квадратная матрица A и известно, что* $\det A = 0$. *Это означает, что ранг $A < n$, и, следовательно, по крайней мере один из столбцов (строк) является (на основании теоремы о базисном* *миноре) линейной комбинацией остальных столбцов (строк), что говорит о линейной зависимости столбцов определителя. Учитывая свойство $\bar{C}IV.4$ для определителей и только что полученный факт, можно сделать вывод:*

> *Детерминант матрицы A равен нулю тогда и только тогда, когда его столбцы (строки) линейно - зависимы.*

Следствие CIV.4. *Ранг матрицы равен максимальному числу линейно - независимых столбцов (строк) матрицы.*

> Максимальное число линейно - независимых столбцов матрицы всегда совпадает, с максимальным числом линейно - независимых строк матрицы и равно ее рангу.

На основании этого следствия можно дать второе определение ранга матрицы.

Определение OIV.5. *Рангом матрицы называется максимальное число линейно - независимых столбцов (строк) этой матрицы.*

Следствие CIV.5. *Ранг матрицы не изменится, если (1) переставить местами столбцы (строки); (2) умножить столбец (строку) на число, отличное от нуля; (3) прибавить к столбцу (строке) другой столбец (строку), умноженный на некоторый общий множитель.*

Преобразования (1) - (3), не меняющие ранга матрицы, позволяют дать следующий конструктивный метод нахождения ранга матрицы. Пусть в матрице $A = (a^i_j)$ $(i = \overline{1,m}; j = \overline{1,n})$ имеется элемент $\alpha_1 \neq 0$. Переставляя строки и столбцы, поместим его в левом верхнем углу. Затем, вычитая из каждой строки матрицы первую строку, умноженную на соответствующий множитель, обратим в нуль все оставшиеся элементы первого столбца. Аналогичную операцию проводим и со столбцами, обращая в нуль все элементы первой строки. Имеем

$$A = \begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 & ... & a_n^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & ... & a_n^2 \\ . & . & . & . \\ a_m^1 & a_2^m & ... & a_n^m \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & b_2^2 & ... & b_n^2 \\ . & . & . & . \\ 0 & b_2^m & ... & b_n^m \end{pmatrix}.$$

Знак $\sim$ означает *эквивалентность* матриц в смысле неизменности ранга у обеих матриц. Аналогично поступаем с матрицей $B = (b_j^i)$ $(i = \overline{2,m}; j = \overline{2,n})$. В итоге мы придем к матрице вида

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & & & & . & \\ & \alpha_2 & 0 & & . & 0 \\ & & . & & . & 0 \\ & & & \alpha_r & . & \\ . & . & . & . & . & \\ & & 0 & & . & 0 \end{pmatrix}.$$

Число не равных нулю и расположенных по главной диагонали блока элементов совпадает с рангом матрицы A.

Пример ПIV.7. *Найти ранг матрицы*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & 6 \\ 1 & 5 & 3 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 & 6 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & 5 & 3 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 2 & 11 \\ 0 & 7 & 2 & 11 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ранг матрицы A равен двум.

IV.4 Сведения из теории систем линейных уравнений

Под системой m линейных уравнений с n неизвестными понимается m рассматриваемых в совокупности соотношений вида

$$\left.\begin{array}{l} a_1^1x^1 + a_2^1x^2 + \ldots + a_n^1x^n = b^1 \\ a_1^2x^2 + a_2^2x^2 + \ldots + a_n^2x^n = b^2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_1^mx^1 + a_2^mx^2 + \ldots + a_n^mx^n = b^m \end{array}\right\} \tag{IV.13}$$

или в краткой форме

$$\sum_{j=1}^{n} a_j^i x^j = b^j \quad (i = \overline{1, m}), \tag{IV.14}$$

где $a_j^i \in K$ — *коэффициенты системы*, $b^i \in K$ — *свободные члены*, а $x^j \in K$ — *неизвестные*, подлежащие определению. Рассмотрим систему вида (IV.13). *Решением системы* (IV.13) называется матрица - столбец

$$X = \begin{pmatrix} c^1 \\ c^2 \\ . \\ . \\ . \\ c^n \end{pmatrix},$$

если после подстановки чисел $c^1, \ldots, c^n$ вместо неизвестных $x^1, \ldots, x^n$ соотношения в (IV.13) обращаются в тождества. При этом решения

$$X_1 = \begin{pmatrix} c_1^1 \\ c_1^2 \\ . \\ . \\ . \\ c_1^n \end{pmatrix}, \quad X_2 = \begin{pmatrix} c_2^1 \\ c_2^2 \\ . \\ . \\ . \\ c_2^n \end{pmatrix}$$

считаются *различными*, если $X_1 \neq X_2$.

Система называется *определенной*, если она имеет *единственное решение*, и *неопределенной*, если имеются по крайней мере два различных решения. В случае отсутствия решений система называется *несовместной*, при наличии решений — *совместной*. Например, система

$$\left\{\begin{array}{l} x^1 - x^2 - x^3 = 0 \\ x^1 + x^2 + x^3 = 0 \end{array}\right.$$

является неопределенной, так как

$$X_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad X_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

— два различных решения указанной системы.

Система уравнений

$$\begin{cases} x^1 + x^2 - 2x^3 = 0 \\ -x^1 - x^2 + 2x^3 = 0 \end{cases}$$

является несовместной системой, так как правые части обоих уравнений одинаковы, а левые отличаются знаком.

В теории систем линейных уравнений рассматривают три основные задачи: (1). Выяснить, является ли система совместной или несовместной. (2). Если система совместна, то является она определенной или неопределенной. В случае определенной системы необходимо указать способ нахождения ее единственного решения. (3). В случае неопределенной системы описать все множество ее решений.

При решении этих задач важную роль играют два понятия: (1) детерминант (определитель) квадратной матрицы и (2) ранг матрицы. Рассмотрим систему n уравнений с m неизвестными, когда определитель матрицы системы отличен от нуля. Наша цель состоит в доказательстве, что такая система уравнений всегда совместна и имеет единственное решение.

Пусть задана система уравнений $\sum\limits_{j=1}^{n} a^i_j x^j = b^i$ $(i = \overline{1,n})$, где $A = (a^i_j)$ — матрица системы и $\det A \neq 0$.

Покажем, что система совместна. С этой целью рассмотрим набор чисел $c^s = \dfrac{\Delta_s}{\det A}$ $(s = \overline{1,n})$, где Δ_s есть определитель вида

$$\Delta_s = \begin{vmatrix} a^1_1 & ... & b^1 & ... & a^1_n \\ a^2_1 & ... & b^2 & ... & a^2_n \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ a^n_1 & ... & b^n & ... & a^n_n \end{vmatrix}, \tag{IV.15}$$

т.е. в матрице A s-ый столбец заменен столбцом из свободных членов системы. Подставим числа c^s вместо неизвестных x^s в систему уравнений, заметив предварительно, что разложение детерминанта (IV.15) по элементам

s-го столбца дает следующее выражение: $\Delta_s = \sum\limits_{k=1}^{n} b^k A_s^k$, где A_s^k — алгебраические дополнения элементов s-го столбца матрицы A. Имеем

$$\sum_{j=1}^{n} a_j^i c^j = \sum_{j=1}^{n} a_j^i \frac{\Delta_j}{\det A} = \frac{1}{\det A} \sum_{j=1}^{n} a_j^i \sum_{k=1}^{n} b^k A_j^k = \frac{1}{\det A} \sum_{k=1}^{n} b^k \sum_{j=1}^{n} a_j^i A_j^k. \tag{IV.16}$$

Вспомнив формулу (IV.8) и замечание 2 параграфа IV.2, мы получим, что

$$\sum_{j=1}^{n} a_j^i A_j^k = \begin{cases} \det A, & \mathrm{i} = \mathrm{k}, \\ 0, & \mathrm{i} \neq \mathrm{k}. \end{cases} \tag{IV.17}$$

Поэтому при суммирование по k в правой части (IV.16) останется лишь одно слагаемое, равное $b^i \cdot \det A$, т.е.

$$\sum_{j=1}^{n} a_j^i c^j = \frac{1}{\det A} \cdot b^i \cdot \det A = b^i$$

имеем тождественное выполнение уравнений системы.

Итак,

$$X = \begin{pmatrix} \dfrac{\Delta_1}{\det A} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \dfrac{\Delta_n}{\det A} \end{pmatrix} \tag{IV.18}$$

есть решение системы (IV.15). Докажем, что оно единственное. **Доказательство:** $\langle\langle$ Предположим, что имеется решение $x^s = \overline{c^s}$, отличное от IV.18. Имеем n тождеств $\sum\limits_{j=1}^{n} a_j^i \overline{c^s} \equiv b^i$ $(i = \overline{1,n})$. Умножим каждое тождество на алгебраические дополнения A_s^i (s — фиксировано) и просуммируем их по индексу i от 1 до n. Имеем следующие тождества:

$$\sum_{i=1}^{n} A_s^i \sum_{j=1}^{n} a_j^i \overline{c^j} = \sum_{i=1}^{n} b^i A_s^i \quad (s = \overline{1,n})$$

или

$$\sum_{j=1}^{n} \overline{c^j} \sum_{i=1}^{n} a_j^i A_s^i = \Delta_s \quad (s = \overline{1,n}). \tag{IV.19}$$

В силу (IV.8) и (IV.10) вытекает, что $\overline{c^s}\det A = \Delta_s \quad (s = \overline{1,n})$. Единственность решения системы доказана. Оно всегда имеет вид (IV.18) и носит название *формул Крамера*. $\rangle\rangle$

Исследование более общих систем линейных уравнений, чем системы вида (IV.15), приводит нас к введению важнейшего понятия *ранга матрицы*.

Пусть задана система уравнений

$$\sum_{j=1}^{n} a^i_j x^j = b^i \quad (i = \overline{1,m}).$$

Если хотя бы одно из чисел b^i отлично от нуля, то система называется *неоднородной*. Если все свободные члены b^i равны нулю, то система называется *однородной*.

Перейдем к установлению условий совместности неоднородной системы уравнений. Ее можно записать в виде

$$x^1\begin{pmatrix} a^1_1 \\ a^2_1 \\ . \\ . \\ . \\ a^m_1 \end{pmatrix} + x^2\begin{pmatrix} a^1_2 \\ a^2_2 \\ . \\ . \\ . \\ a^m_2 \end{pmatrix} + \ldots + x^n\begin{pmatrix} a^1_n \\ a^2_n \\ . \\ . \\ . \\ a^m_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b^1 \\ b^2 \\ . \\ . \\ . \\ b^m \end{pmatrix}. \qquad \text{(IV.20)}$$

Кроме матрицы системы $A = (a^i_j)$ будем рассматривать *расширенную* матрицу системы

$$B = \begin{pmatrix} a^1_1 & \ldots & a^1_n & b^1 \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ a^m_1 & \ldots & a^m_n & b^m \end{pmatrix}$$

Теорема TIV.3. *(Кронекера - Капелли)Для того, чтобы неоднородная система линейных уравнений была совместна, необходимо и достаточно, чтобы ранг матрицы системы и ранг расширенной матрицы совпадали.*

Пример ПIV.8. *Совместна ли система уравнений ?*

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 1, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 0, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 1. \end{cases}$$

Решение:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & . & 1 \\ 1 & -1 & 2 & . & 0 \\ 2 & 1 & -1 & . & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & . & 1 \\ 0 & -3 & 5 & . & -1 \\ 0 & -3 & 5 & . & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & . & 1 \\ 0 & -3 & 5 & . & -1 \\ 0 & 0 & 0 & . & 0 \end{pmatrix}.$$

Ранг $A =$ *ранг* $B = 2$. *Система совместна.*

Обратимся к рассмотрению однородных систем уравнений $\sum\limits_{j=1}^{n} a_j^i x^j = 0$ $(i = \overline{1,m})$. Такая система всегда совместна, так как набор $0, 0, \ldots, 0$ всегда удовлетворяет системе. Нулевое решение называется *тривиальным* и нас не интересует.

Поставим вопрос об условиях *нетривиальной совместности* однородной системы уравнений. Ответ дает следующее утверждение.

Теорема TIV.4. *Для того, чтобы однородная система линейных уравнений была нетривиально совместна, необходимо и достаточно, чтобы ранг матрицы системы был меньше числа неизвестных.*

Как описать все множество решений системы линейных уравнений? Чтобы ответить на этот вопрос, дадим определение общего решения для системы линейных уравнений.

Определение OIV.6. *Общим решением называется набор функций* $\phi_1(a, b, c^1, \ldots, c^q), \ldots, \phi_n(a, b, c^1, \ldots, c^q)$, *зависящих от коэффициентов системы, свободных членов и* q *числовых параметров, удовлетворяющий двум условиям: (1) подстановка* $\phi_1, \ldots, \phi_n$ *в систему вместо* $x^1, \ldots, x^n$ *обращает уравнения в тождества; (2) любое решение системы может быть получено из этого набора путем фиксирования определенных значений параметров* $c^1, \ldots, c^q$.

Как конструктивно найти общее решение системы? Предлагается следующий метод.

Пусть r — ранг матрицы системы. За счет перенумерации переменных и уравнений можно добиться того, что базисный минор матрицы эквивалентной системы уравнений будет находиться в левом верхнем углу матрицы. Все дальнейшие рассуждения проводятся для этого случая.

Рассмотрим первые r уравнений системы (IV.20) и перепишем их в следующем виде

$$\begin{cases} a_1^1 x^1 + \ldots + a_r^1 x^r = b^1 - a_{r+1}^1 c^{r+1} - \ldots - a_n^1 c^n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_1^r x^1 + \ldots + a_r^r x^r = b^r - a_{r+1}^1 c^{r+1} - \ldots - a_n^1 c^n \end{cases} \tag{IV.21}$$

Здесь переменные $x^{r+1}, \ldots, x^n$ являются параметрами и обозначены через $c^{r+1}, \ldots, c^n$ $(c^q \in K, q = \overline{r+1, n})$.

Определитель Δ данной системы уравнений совпадает с базисным минором и, применяя формулы Крамера, получим

$$x^p = \frac{\Delta_p}{\Delta} \quad (p = \overline{1, r}), \tag{IV.22}$$

где

$$\Delta_p = \begin{vmatrix} a_1^1 \ldots & \overbrace{b^1 - \sum\limits_{q=r+1}^{n} a_q^1 c^q}^{p} & \ldots a_r^1 \\ a_1^2 \ldots & b^2 - \sum\limits_{q=r+1}^{n} a_q^2 c^q & \ldots a_r^2 \\ . & . & . \\ a_1^r \ldots & b^r - \sum\limits_{q=r+1}^{n} a_q^r c^q & \ldots a_r^r \end{vmatrix} \tag{IV.23}$$

Из приведенных рассуждений следует, что набор чисел $\dfrac{\Delta_1}{\Delta}, \ldots, \dfrac{\Delta_r}{\Delta}, c^{r+1}, \ldots, c^n$, подставленных вместо неизвестных, обращает в тождество первые r уравнений системы линейных уравнений (IV.20). Покажем, что этот набор обращает в тождества и оставшиеся $(m - r)$ уравнений рассматриваемой неоднородной системы. С этой целью вспомним, что $(r + 1)$-я, $\ldots, m$-я строка расширенной матрицы есть линейная комбинация первых r базисных строк. Для системы линейных уравнений это означает, что каждое уравнение, начиная с $(r+1)$-го и кончая m-ым, есть линейная комбинация первых r уравнений. Вследствие тождественного удовлетворения рассматриваемым набором первых r уравнений тождественно удовлетворяются и оставшиеся $(m - r)$ уравнений системы.

Итак, матрица - столбец

$$X = \begin{pmatrix} \dfrac{\Delta_1}{\Delta} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \dfrac{\Delta_r}{\Delta} \\ c^{r+1} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ c^n \end{pmatrix} \tag{IV.24}$$

есть решение исследуемой системы уравнений.

Докажем, что X задает общее решение системы. Для этого нам необходимо показать, что *любое* решение системы содержится в X при определенных значениях параметров $c^{r+1}, \dots, c^n$.

Пусть набор $\overline{c}^{\,1}, \overline{c}^{\,2}, \dots, \overline{c}^{\,n}$ — некоторое решение системы. Оно является также решением системы (IV.21). Зафиксируем в правой части (IV.21) значения параметров c^q, положив, $c^{r+1} = \overline{c}^{\,r+1}, \dots, c^n = \overline{c}^{\,n}$. Как известно, по формулам Крамера решение определяется *однозначным* образом. Поэтому с необходимостью числа $\overline{c}^{\,p}$ $(p = \overline{1, r})$ будут совпадать с числами $\dfrac{\overline{\Delta}_p}{\Delta}$, где за Δ_p обозначены определители (IV.23), у которых вместо параметров c^q выступают фиксированные значения $\overline{c}^{\,q}$ $(q = \overline{r+1, n})$.

Пример ПIV.9. *Решить систему уравнений*

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 1 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 1. \end{cases}$$

Разбирая предыдущий пример, мы показали, что система совместна. Ранг основной и расширенной матриц равен двум. Минор второго порядка в левом верхнем углу

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -3$$

является базисным.

Поступаем согласно разработанному алгоритму. Имеем

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 1 + 3c_3 \\ x_1 - x_2 = -2c_3, \end{cases}$$

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 1+3c_3 & 2 \\ -2c_3 & -1 \end{vmatrix}}{-3} = \frac{1}{3}(1 - c_3),$$

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1+3c_3 \\ 1 & -2c_3 \end{vmatrix}}{-3} = \frac{1}{3}(5c_3 + 1).$$

Получили общее решение системы.

При нахождения общего решения однородной системы линейных уравнений важную роль играют понятия *нормальной фундаментальной системы решений* и *фундаментальной системы решений.*

Пусть, задана однородная система $\sum\limits_{j=1}^{n} a^i_j x^j = 0$ $(i = \overline{1,m})$. Пусть ранг матрицы $A = (a^i_j)$ равен r. Согласно предложенному выше методу решение системы находится по формулам (IV.24), где в определителях Δ_p необходимо положить $b^p = 0$ $(p = \overline{1,r})$.

Зададимся $(n-r)$ наборами значений параметров $c^{r+1}, \ldots, c^n$, фиксируя их следующим образом:

$$\begin{pmatrix} c^{r+1}_1 \\ c^{r+2}_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ c^n_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} c^{r+1}_2 \\ c^{r+2}_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ c^n_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} c^{r+1}_{n-r} \\ c^{r+2}_{n-r} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ c^n_{n-r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{IV.25}$$

Этим наборам, согласно (IV.24), будет соответствовать $(n-r)$ решений

$$X_1 = \begin{pmatrix} x_1^1 \\ . \\ . \\ . \\ x_1^r \\ 1 \\ 0 \\ . \\ . \\ . \\ 0 \end{pmatrix}, \quad X_2 = \begin{pmatrix} x_2^1 \\ . \\ . \\ . \\ x_2^r \\ 0 \\ 1 \\ . \\ . \\ . \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \ldots X_{n-r} = \begin{pmatrix} x_{n-r}^1 \\ . \\ . \\ . \\ x_{n-r}^r \\ 0 \\ 0 \\ . \\ . \\ . \\ 1 \end{pmatrix}, \tag{IV.26}$$

где $x^{\,p}_{\,1}, \ldots, x^{\,p}_{\,n-r}$ подсчитываем по формулам (IV.22), с учетом фиксированных значений c^q $(q = \overline{r+1, n})$. Они имеют вид

$$x_1^p = \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} a_1^1 & \ldots & (-a_{r+1}^1) & \ldots & a_r^1 \\ a_1^2 & \ldots & (-a_{r+1}^2) & \ldots & a_r^2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_1^r & \ldots & \underbrace{(-a_{r+1}^r)}_{p} & \ldots & a_r^r \end{vmatrix}, \ldots,$$

$$x_{n-r}^p = \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} a_1^1 & \ldots & (-a_n^1) & \ldots & a_r^1 \\ a_1^2 & \ldots & (-a_n^2) & \ldots & a_r^2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_1^r & \ldots & \underbrace{(-a_n^r)}_{p} & \ldots & a_r^r \end{vmatrix}. \tag{IV.27}$$

Система полученных решений образует линейно - независимую систему матриц - столбцов, так как в матрице, содержащий n строк и $n-r$ столбцов

$$\begin{pmatrix} x_1^1 & x_2^1 & \ldots & x_{n-r}^1 \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ x_1^r & x_2^r & \ldots & x_{n-r}^r \\ 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix},$$

имеется минор $(n-r)$-го порядка

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ . & . & \ldots & . \\ . & . & \ldots & . \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{vmatrix},$$

отличный от нуля.

Определение OIV.7. *Система решений (IV.26) однородной системы линейных уравнений, соответствующая $(n-r)$ наборам (IV.25), параметров c^q $(q=\overline{r+1,n})$, называется нормальной фундаментальной системой решений.*

Теорема TIV.5. *Общее решение однородной системы уравнений есть линейная комбинация с произвольными постоянными нормальной фундаментальной системы решений.*

В самом деле, рассматривая общее решение (IV.24), где в определителях Δ_p постоянные b^i $(i=\overline{1,m})$ равны нулю, используя свойство $\bar{\text{C}}$IV.3 определителей, получим

$$\begin{cases} x^p = \dfrac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} a_1^1 & \ldots & (-a_{r+1}^1 c^{r+1}) & \ldots & a_r^1 \\ . & \ldots & . & \ldots & . \\ . & \ldots & . & \ldots & . \\ . & \ldots & . & \ldots & . \\ a_1^r & \ldots & \underbrace{(-a_{r+1}^r c^{r+1})}_{p} & \ldots & a_r^r \end{vmatrix} + \ldots + \dfrac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} a_1^1 & \ldots & (-a_n^1 c^n) & \ldots & a_r^1 \\ . & \ldots & . & \ldots & . \\ . & \ldots & . & \ldots & . \\ a_1^r & \ldots & \underbrace{(-a_n^r c^n)}_{p} & \ldots & a_r^r \end{vmatrix} \\ \\ x^q = c^q(q=\overline{r+1,n}; p=\overline{1,r}) \end{cases} \tag{IV.28}$$

или

$$\begin{cases} x^p = c^{r+1}\left(\dfrac{\Delta_p^1}{\Delta}\right) + c^{r+2}\left(\dfrac{\Delta_p^2}{\Delta}\right) + \ldots + c^n\left(\dfrac{\Delta_p^{n-r}}{\Delta}\right) \\ \\ x^q = c^q(q=\overline{r+1,n}; p=\overline{1,r}) \end{cases}, \tag{IV.29}$$

где

$$\Delta_p^1 = \begin{vmatrix} a_1^1 & \dots & (-a_{r+1}^1) & \dots & a_r^1 \\ . & \dots & . & \dots & . \\ . & \dots & . & \dots & . \\ a_1^r & \dots & \underbrace{(-a_{r+1}^r)}_{p} & \dots & a_r^r \end{vmatrix}, \dots, \Delta_p^{n-r} = \begin{vmatrix} a_1^1 & \dots & (-a_n^1) & \dots & a_r^1 \\ . & \dots & . & \dots & . \\ . & \dots & . & \dots & . \\ a_1^r & \dots & (-a_n^r) & \dots & a_r^r \end{vmatrix}.$$

С учетом (IV.26), (IV.27) общее решение (IV.29) может быть записано в виде

$$X = c^{r+1}X_1 + c^{r+2}X_2 + \dots + c^n X_{n-r}, \tag{IV.30}$$

что и доказывает теорему.

Зададимся сейчас $(n-r)$ наборами параметров $c^{r+1}, \dots, c^n$, фиксируя их произвольным образом

$$\begin{pmatrix} \overset{*}{c}{}_1^{r+1} \\ . \\ . \\ . \\ \overset{*}{c}{}_1^{n} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \overset{*}{c}{}_2^{r+1} \\ . \\ . \\ . \\ \overset{*}{c}{}_2^{n} \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} \overset{*}{c}{}_{n-r}^{r+1} \\ . \\ . \\ . \\ \overset{*}{c}{}_{n-r}^{n} \end{pmatrix} \tag{IV.31}$$

с одним лишь условием, чтобы детерминант матрицы

$$N = \begin{pmatrix} \overset{*}{c}{}_1^{r+1} & \overset{*}{c}{}_2^{r+1} & \dots & \overset{*}{c}{}_{n-r}^{r+1} \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ \overset{*}{c}{}_1^{n} & \overset{*}{c}{}_2^{n} & \dots & \overset{*}{c}{}_{n-r}^{n} \end{pmatrix}$$

был отличен от нуля.

Наборам (IV.31) отвечает $(n-r)$ линейно - независимых (из - за $\det N \neq 0$) решений

$$\overset{*}{X}_1 = \begin{pmatrix} \overset{*}{x}{}_1^{1} \\ . \\ . \\ \overset{*}{x}{}_1^{r} \\ \overset{*}{c}{}_1^{r+1} \\ . \\ . \\ \overset{*}{c}{}_1^{n} \end{pmatrix}, \overset{*}{X}_2 = \begin{pmatrix} \overset{*}{x}{}_2^{1} \\ . \\ . \\ \overset{*}{x}{}_2^{r} \\ \overset{*}{c}{}_2^{r+1} \\ . \\ . \\ \overset{*}{c}{}_2^{n} \end{pmatrix}, \dots, \overset{*}{X}_{n-r} = \begin{pmatrix} \overset{*}{x}{}_{n-r}^{1} \\ . \\ . \\ \overset{*}{x}{}_{n-r}^{r} \\ \overset{*}{c}{}_{n-r}^{r+1} \\ . \\ . \\ \overset{*}{c}{}_{n-r}^{n} \end{pmatrix}. \tag{IV.32}$$

Система решений (IV.32), отвечающая наборам (IV.31) параметров $c^{r+1}, \ldots, c^n$, при условии $\det N \neq 0$, называется фундаментальной системой решений.

Как и выше, можно доказать:

> Общее решение однородной системы линейных уравнений есть линейная комбинация с произвольными постоянными фундаментальной системы решений.

Доказательство приводить не будем, заметив только, что каждое из $\overset{*}{X}_s$ $(s = \overline{1, n-r})$ по доказанной выше теореме есть конкретная линейная комбинация нормальной фундаментальной системы решений.

Из - за линейной независимости систем $\{X_s\}$ и $\{\overset{*}{X}_s\}$ каждое из X_s также представляет собой фиксированную линейную комбинацию матриц - столбцов $\overset{*}{X}_s$ (ее конкретный вид может быть получен по формулам Крамера). Подстановка этих комбинаций в (IV.30) приведет нас к желаемому результату.

В заключении вернемся к неоднородным системам линейных уравнений $\sum\limits_{j=1}^{n} a^i_j x^j = b^i$ $(i = \overline{1, m})$. Система $\sum\limits_{j=1}^{n} a^i_j x^j = 0$ $(i = \overline{1, m})$ с той же матрицей $A = (a^i_j)$ называется однородной системой, соответствующей рассматриваемой неоднородной системе.

Теорема TIV.6. *Общее решение неоднородной системы есть сумма частного решения неоднородной системы и общего решения соответствующей однородной системы.*

В самом деле, пусть

$$X_0 = \begin{pmatrix} x_0^1 \\ x_0^2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_0^n \end{pmatrix}$$

— частное решение неоднородной системы

$$\sum_{j=1}^{n} a^i_j x^j_0 \equiv b^i \quad (i = \overline{1, m}).$$

Вместо неизвестных x^j в неоднородной системе введем новые неизвестные y^j, положив $x^j = x_0^j + y^j$. Имеем

$$\sum_{j=1}^{n} a_j^i (x_0^j + y^j) = \sum_{j=1}^{n} a_j^i x_0^j + \sum_{j=1}^{n} a_j^i y^j = b^i \quad (i = \overline{1, m}).$$

Поскольку $\sum\limits_{j=1}^{n} a_j^i x_0^j \equiv b^i$, то получаем, что

$$\sum_{j=1}^{n} a_j^i y^j = 0 \quad (i = \overline{1, m}).$$

Неизвестные y^j являются неизвестными для соответствующей однородной системы. Пусть Y — общее решение этой системы уравнений, найденное по формуле (IV.30). Тогда для неоднородной системы общее решение имеет вид

$$X = X_0 + \sum_{s=1}^{n-r} c^{r+s} X_s, \tag{IV.33}$$

где $\{X_s\}$ образуют нормальную фундаментальную систему решений (фундаментальную систему решений).

Часть II

Задачи аналитической геометрии

Глава V

Задачи на векторные операции

V.1 Основные формулы векторной алгебры

1. Сумма векторов *Суммой векторов* $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ *и* $\vec{b} = \overrightarrow{BC}$ *называется вектор* $\vec{c} = \overrightarrow{AC}$ *(см. Рис. V.52). Это правило называется правилом треугольника.*

Для получения разности векторов $\vec{a} - \vec{b}$ необходимо в определении суммы векторов заменить вектор $\vec{b}$ на противоположный $(-\vec{b})$. Удобнее поэтому применять *правило параллелограмма*, согласно которому сумма и разность векторов определяются диагоналями параллелограмма, построенного на данных векторах как на сторонах (см. Рис. V.53).

2. Координаты вектора в базисе *Координатами вектора* $\vec{x}$ *в базисе* $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ *называется упорядоченная тройка чисел* (x^1, x^2, x^3), *таких что:*

$$\vec{x} = x^1\vec{e}_1 + x^2\vec{e}_2 + x^3\vec{e}_3 \,. \tag{V.1}$$

На плоскости это будет парой чисел (x^1, x^2):

$$\vec{x} = x^1\vec{e}_1 + x^2\vec{e}_2 \,. \tag{V.2}$$

Необходимо помнить, что базисом может быть лишь линейно независимая система векторов и их число, n, должно совпадать с размерностью пространства (на плоскости $n = 2$ и базисом может являться любая пара неколлинеарных векторов $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$. Для того, чтобы выяснить, образует ли данная система трех (двух) векторов базис, достаточно вычислить определитель, составленный из координат этих векторов.

3 *При сложении (вычитании) векторов их соответствующие координаты складываются (вычитаются):*

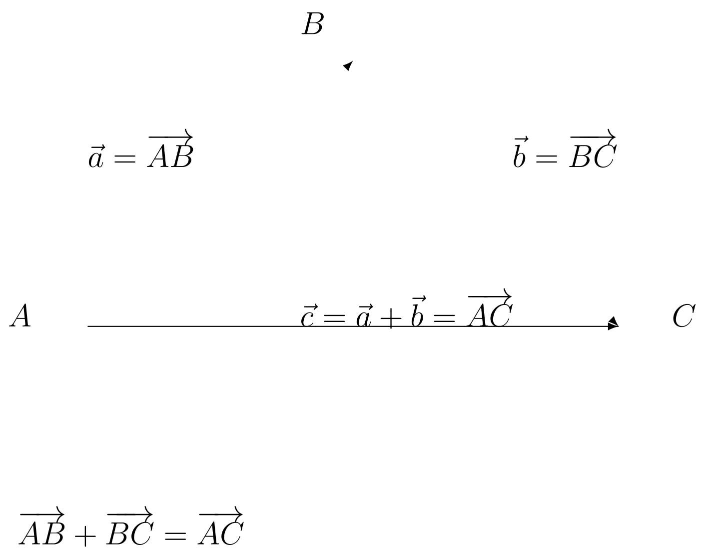


Рис. V.52. *Сумма векторов (правило треугольника)*

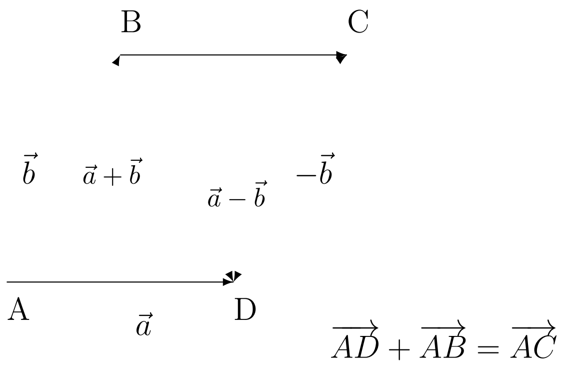


Рис. V.53. *Правило параллелограмма*

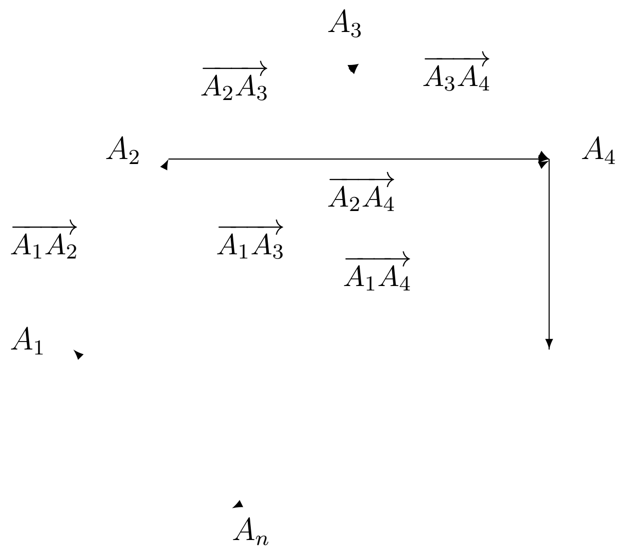


Рис. V.54. *Основное векторное равенство для многоугольников*

Пусть: $\vec{x} = (x^1, x^2, x^3)$, $\vec{y} = (y^1, y^2, y^3)$, тогда:

$$\vec{x} \pm \vec{y} = \vec{z} = (x^1 \pm y^1, x^2 \pm y^2, x^3 \pm y^3). \tag{V.3}$$

4. Основное векторное равенство для многоугольников *Сумма векторов, являющихся сторонами любой замкнутой ломаной, причем таких, что начало каждого последующего совпадает с концом предыдущего, равна нуль-вектору (см. Рис. V.54):*

$$\overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{A_2A_3} + \ldots \overrightarrow{A_{n-1}A_n} + \overrightarrow{A_nA_1} = \vec{0}. \tag{V.4}$$

5. Произведение вектора на число *Произведением $\alpha\vec{a}$ (или также $\vec{a}\alpha$) вектора $\vec{a}$ на число α называется вектор, модуль которого равен произведению модуля вектора $\vec{a}$ на число α; он параллелен вектору $\vec{a}$ или лежит с ним на одной прямой и направлен также, как вектор $\vec{a}$, если α - число положительное, и противоположное вектору $\vec{a}$, если α - число отрицательное. При умножении вектора на число его координаты умножаются на это число.*

$$\lambda\vec{x} = (\lambda x^1, \lambda x^2, \lambda x^3). \tag{V.5}$$

6. Коллинеарные векторы *Векторы, лежащие на одной прямой или на параллельных прямых, называются коллинеарными.*

Признаком коллинеарности двух векторов

$$\vec{a} = (x_1; y_1; z_1), \quad \vec{b} = (x_2; y_2; z_2)$$

является пропорциональность их координат:

$$\frac{x_2}{x_1} = \frac{y_2}{y_1} = \frac{z_2}{z_1}.$$

Координаты точки

1. *Системой координат называется совокупность точки O и векторного базиса, $\Re\{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$. Точка O называется началом аффинной системы координат.*

2. *Координатами точки M относительно системы координат $\Re\{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ называется координаты ее радиуса вектора $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$:*

$$M(x^1, x^2, x^3) \Longleftrightarrow \overrightarrow{OM} = x^1\vec{e}_1 + x^2\vec{e}_2 + x^3\vec{e}_3\,. \tag{V.6}$$

3. *Координаты геометрического вектора $\overrightarrow{AB}$ равны разности координат начала и конца отрезка $[AB]$:*

$$\overrightarrow{AB} = (x^1_B - x^1_A, x^2_B - x^2_A, x^3_B - x^3_A). \tag{V.7}$$

4. Координаты точки, делящей отрезок в данном отношении. *Если точка $M(x^1, x^2, x^3)$ делит отрезок $[AB]$ в отношении λ, т.е.:*

$$\overrightarrow{AM} = \lambda\overrightarrow{MB}, \tag{V.8}$$

то координаты этой точки находятся из соотношений:

$$x^1 = \frac{x^1_A + \lambda x^1_B}{1+\lambda},\ x^2 = \frac{x^2_A + \lambda x^2_B}{1+\lambda};\ x^3 = \frac{x^3_A + \lambda x^3_B}{1+\lambda}. \tag{V.9}$$

V.1.1 Проекция вектора на направление

Осью ℓ будем называть прямую с заданным на ней направлением $\vec{q}$.

Определение проекции *Проекцией вектора $\overrightarrow{AB}$ на ось ℓ:*

$$\text{Пр}_{\vec{q}}\, \overrightarrow{AB}$$

называется длина отрезка $A'B'$ этой оси, заключенного между основаниями перпендикуляров, опущенных из A и B на ось, взятая со знаком плюс, если направление $\overrightarrow{A'B'}$ совпадает с направлением $\vec{q}$, и взятая со знаком минус, если направление вектора $\overrightarrow{A'B'}$ и $\vec{i}$ противоположны.

<u>**Свойства проекции**</u>

1 *Проекция вектора на ось равна длине вектора, умноженного на косинус угла α.*

2 *При умножении вектора на число λ его проекция умножается на то же число.*

3 *Проекция суммы двух векторов на ось равна сумме проекций этих векторов на ту же ось.*

4 *Проекция суммы векторов на направление $\vec{u}$ равна сумме их проекций:*

$$\text{Пр}_{\vec{u}}\, (\vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \ldots + \vec{a}_n) = \text{Пр}_{\vec{u}}\, \vec{a}_1 + \text{Пр}_{\vec{u}}\, \vec{a}_2 + \ldots + \text{Пр}_{\vec{u}}\, \vec{a}_n.$$

5 *При умножении вектора на число его проекция умножается на то же число:*

$$\text{Пр}_{\vec{u}}\, (\vec{\alpha}) = \alpha \text{Пр}_{\vec{u}}\, \vec{a}.$$

V.1.2 Скалярное произведение векторов

Скалярное произведение векторов *Скалярным произведением двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ $(\big(\vec{a}\ \vec{b}\big))$ называется число, равное произведению длин этих векторов на косинус угла между ними:*

$$\left(\vec{a}\,\vec{b}\right) = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\widehat{\vec{a}\,\vec{b}}. \tag{V.10}$$

Связь скалярного произведения и проекции *Скалярное произведение можно выразить через проекции:*

$$\left(\vec{a}\,\vec{b}\right) = |\vec{a}|\text{Пр}_{\vec{a}}\,\vec{b} = |\vec{b}|\text{Пр}_{\vec{b}}\,\vec{a}. \tag{V.11}$$

и обратно:

$$\text{Пр}_{\vec{b}}\,a = \frac{\left(\vec{a}\,\vec{b}\right)}{|\vec{b}|}. \tag{V.12}$$

Свойства скалярного произведения

1. *Скалярное произведение симметрично:*

$$\left(\vec{a}\,\vec{b}\right) = \left(\vec{b}\,\vec{a}\right); \tag{V.13}$$

2. *линейно по каждому из сомножителей:*

$$\Big((\lambda\vec{a} + \mu\vec{b})\cdot\,\vec{c}\Big) = \lambda\left(\vec{a}\,\vec{c}\right) + \mu\left(\vec{b}\,\vec{c}\right); \tag{V.14}$$

3. *два ненулевых вектора ортогональны друг другу тогда и только тогда, когда их скалярное произведение равно нулю:*

$$\left(\vec{a}\,\vec{b}\right) = \vec{0} \Longleftrightarrow \vec{a}\perp\vec{b}. \tag{V.15}$$

4. *Длину вектора можно выразить через скалярное произведение вектора на себя (скалярный квадрат вектора):*

$$\left(\vec{a}\,\vec{a}\right) = \vec{a}^{\,2} \Longrightarrow |\vec{a}| = \sqrt{\left(\vec{a}\,\vec{a}\right)}. \tag{V.16}$$

5. Угол между векторами. *Углом $\alpha = \widehat{\vec{a}\,\vec{b}}$ между ненулевыми векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется наименьший угол между этими векторами, приведенными к общему началу. Этот угол изменяется на промежутке $[0,\pi]$.*

Если $\widehat{\vec{a}\,\vec{b}} = 0$*, векторы* $\vec{a}$ *и* $\vec{b}$ *являются сонаправленными, если* $\widehat{\vec{a}\,\vec{b}} = \pi$*, векторы* $\vec{a}$ *и* $\vec{b}$ *являются противоположно направленными.*

Ортонормированный базис

1. *Вектор единичной длины*

$$(\vec{e}\,\vec{e}) = 1.$$

называется ортом.

2. *Базис называется ортонормированным, если все его векторы взаимно ортогональны и имеют единичную длину (орты):*

$$\left(\vec{e}_i \cdot \vec{e}_k\right) = \delta_{ik} = (1, i = k; 0, i \neq k). \tag{V.17}$$

3. *В дальнейшем будем обозначать орты ортонормированного базиса трехмерного пространства посредством* $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$:

$$|\vec{i}| = |\vec{j}| = |\vec{k}| = 1, \tag{V.18}$$

$$(\vec{i}\,\vec{j}) = (\vec{j}\,\vec{k}) = (\vec{i}\,\vec{k}) = 0. \tag{V.19}$$

4. *Система координат (репер), являющаяся совокупностью точки* O *и ортонормированного базиса* $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$*, называется прямоугольной декартовой системой координат, а точка* O *- ее началом. В этой системе координат произвольный вектор* $\vec{r}$ *принято записывать в одном из двух эквивалентных видов:*

$$\vec{r} = \vec{i}x + \vec{j}y + \vec{k}z$$

или

$$\vec{r} = (x, y, z).$$

Запись скалярного произведения в ортонормированном базисе

Пусть в ортонормированном базисе $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ имеют координаты:

$$\vec{a} = (x_a, y_a, z_a), \qquad \vec{b} = (x_b, y_b, z_b).$$

1. *Координатная запись скалярного произведения:*

$$\left(\vec{a}\,\vec{b}\right) = x_a x_b + y_a y_b + z_a z_b. \tag{V.20}$$

2. *Длина вектора:*

$$|\vec{a}| = \sqrt{\left(\vec{a}\,\vec{a}\right)} = \sqrt{x_a^2 + y_a^2 + z_a^2}. \tag{V.21}$$

3. *Косинус угла между ненулевыми векторами:*

$$\cos\widehat{\vec{a}\,\vec{b}} = \frac{\left(\vec{a}\,\vec{b}\right)}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \frac{x_a x_b + y_a y_b + z_a z_b}{\sqrt{x_a^2 + y_a^2 + z_a^2}\sqrt{x_b^2 + y_b^2 + z_b^2}}. \tag{V.22}$$

V.1.3 Векторное произведение векторов

Определение. *Векторным произведением векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется вектор $\vec{x}$, который:(1) перпендикулярен к плоскости векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$; (2) $|\vec{x}| = |\vec{a}||\vec{b}|\sin\widehat{\vec{a}\,\vec{b}}$; (3) направлен так, что тройка $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{x})$ — правая .*

Свойства векторного произведения

1. Антисимметричность

$$\left[\vec{a}\,\vec{b}\right] = -\left[\vec{b}\,\vec{a}\right]. \tag{V.23}$$

2. Линейность по каждому аргументу

$$\left[(\lambda\vec{a} + \mu\vec{b})\cdot\vec{c}\right] = \lambda\left[\vec{a}\,\vec{c}\right] + \mu\left[\vec{b}\,\vec{c}\right]. \tag{V.24}$$

3. Модуль векторного произведения *численно равен площади параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$.*

4. *Необходимым и достаточным условием коллинеарности двух векторов является равенство нулю их векторного произведения:*

$$\vec{a} = \lambda\vec{b} \Longleftrightarrow \left[\,\vec{a}\;\vec{b}\,\right] = \vec{0}. \tag{V.25}$$

5. Координатная запись векторного произведения *В ортонормированном базисе:*

$$\left[\,\vec{a}\;\vec{b}\,\right] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_a & y_a & z_a \\ x_b & y_b & z_b \end{vmatrix}. \tag{V.26}$$

6. *Формула площади треугольника ABC*
Пусть декартовы координаты вершин треугольника равны:

$$A(x_A, y_A, z_A); \quad B(x_B, y_B, z_B); \quad C(x_C, y_C, z_C).$$

Тогда:

$$S_{\triangle} = \frac{1}{2}|\left[\,\vec{a}\;\vec{b}\,\right]| = \frac{1}{2}|\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_B - x_A & y_B - y_A & z_B - z_A \\ x_C - x_A & y_C - y_A & z_C - z_A \end{vmatrix}|. \tag{V.27}$$

7. Площадь треугольника на плоскости:

$$S_{\triangle} = \frac{1}{2}|\begin{vmatrix} x_B - x_A & y_B - y_A \\ x_C - x_A & y_C - y_A \end{vmatrix}| = \frac{1}{2}\left((x_2 - x_)(y_3 - y_1) - (y_2 - y_1)(x_3 - x_1)\right). \tag{V.28}$$

V.1.4 Смешанное произведение векторов

Определение *Смешанным произведением трех векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ называется* **число**, *получаемое от умножения вектора $\left[\,\vec{a}\;\vec{b}\,\right]$ скалярно на $\vec{c}$. Оно обозначается символом $\left(\vec{a},\, \vec{b},\, \vec{c}\right)$, т.е.:*

$$\left(\vec{a},\, \vec{b},\, \vec{c}\right) \stackrel{def}{=} \Big(\left[\,\vec{a}\;\vec{b}\,\right] \cdot c\Big). \tag{V.29}$$

Свойства смешанного произведения

1. Симметричность по отношению к перестановке векторного произведения:

$$(\left[\,\vec{a}\;\vec{b}\,\right]\vec{c}) = (\vec{a}\left[\,\vec{b}\;\vec{c}\,\right]) = (\left[\,\vec{b}\;\vec{c}\,\right]\vec{a}). \tag{V.30}$$

2. Перестановка элементов:

$$\left(\overrightarrow{a},\ \overrightarrow{b},\ \overrightarrow{c}\right) = \left(\overrightarrow{b},\ \overrightarrow{c},\ \overrightarrow{a}\right) = \left(\overrightarrow{c},\ \overrightarrow{a},\ \overrightarrow{b}\right) =$$
$$= -\left(\overrightarrow{b},\ \overrightarrow{a},\ \overrightarrow{c}\right) = -\left(\overrightarrow{a},\ \overrightarrow{c},\ \overrightarrow{b}\right) = -\left(\overrightarrow{c},\ \overrightarrow{b},\ \overrightarrow{a}\right). \tag{V.31}$$

3. Условие компланарности. *Тройка векторов $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ компланарна тогда и только тогда, когда их смешанное произведение равно нулю:*

$$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \quad \Longleftrightarrow \left(\overrightarrow{a},\ \overrightarrow{b},\ \overrightarrow{c}\right) = 0. \tag{V.32}$$

4. Координатная запись смешанного произведения. *В ортонормированном базисе:*

$$\left(\overrightarrow{a},\ \overrightarrow{b},\ \overrightarrow{c}\right) = \begin{vmatrix} x_a & y_a & z_a \\ x_b & y_b & z_b \\ x_c & y_c & z_c \end{vmatrix}. \tag{V.33}$$

5. Геометрическое значение смешанного произведения *Модуль смешанного произведения векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ равен объему параллелепипеда, построенного на этих векторах как на ребрах (см. Рис. V.55).*
Пусть A, B, C, D — какие-либо вершины многогранника, не принадлежащие одной грани, и пусть координаты этих вершин обозначаются соответственно их названиям. Тогда:

$$V = \left\| \begin{matrix} x_B - x_A & y_B - y_A & z_B - z_A \\ x_C - x_A & y_B - y_A & z_C - z_A \\ x_D - x_A & y_D - y_A & z_C - z_A \end{matrix} \right\|. \tag{V.34}$$

При этом надо помнить соотношение между объемами простейших многогранников с одинаковыми соответствующими ребрами:

$$V = \frac{1}{3}V.$$

V.1.5 Двойное векторное произведение

Двойным векторным произведением векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ называется выражение вектор

$$\left[\overrightarrow{a}\ \left[\overrightarrow{b}\,\overrightarrow{c}\right]\right]$$

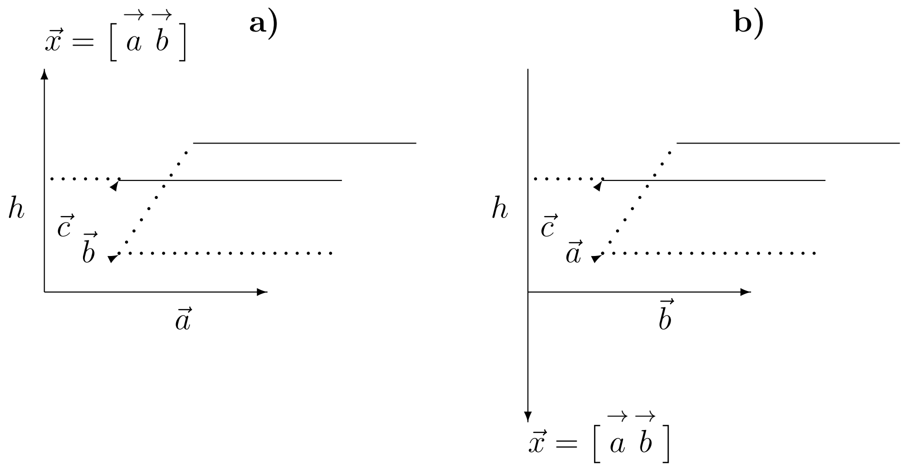


Рис. V.55. *Смешанное произведение трех векторов*

.

Формула ABC=BAC-CAB *Справедлива формула:*

$$[\vec{a}\,[\vec{b}\,\vec{c}\,]\,] = \vec{b}(\vec{a}\,\vec{c}\,) - \vec{c}(\vec{a}\,\vec{b}\,). \tag{V.35}$$

Вследствие этой формулы двойное векторное произведение сводится к известным операциям.

V.2 Задачи на векторные операции

Пример ПV.1. *Пусть $\vec{x} = 3\vec{a} - 4\vec{b} + 2\vec{c}$ и известно, что векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ образуют базис трехмерного пространства.*
1. Найти координаты вектора $\vec{x}$ в базисе $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$.
2. Доказать, что векторы

$$\vec{p} = 2\vec{a} - \vec{b} + \vec{c},\ \vec{q} = \vec{a} + 2\vec{b} - \vec{c},\ \vec{r} = -\vec{a} + \vec{b} - 2\vec{c}$$

также образуют базис.

Решение

1. Из (V.1) следует, что координаты вектора $\vec{x}$ в базисе $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ есть коэффициенты разложения вектора $\vec{x}$ по этому базису, т.е., они равны $\vec{x} = (3, -4, 2)$.
2. Аналогично найдем координаты векторов $\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}$ в базисе $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$:

$$\vec{p} = (2, -1, 1), \quad \vec{q} = (1, 2, -1), \quad \vec{r} = (-1, 1, -2).$$

Проверим, образуют ли эти векторы базис трехмерного пространства, для чего составим из их координат определитель, в котором каждому вектору соответствует столбец:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \end{vmatrix}.$$

Вычисляя, найдем:

$$\Delta = -6 \neq 0,$$

следовательно, векторы $\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}$ линейно независимы, т.е., образуют базис трехмерного пространства.

Пример ПV.2. *В ортонормированном базисе даны векторы $\vec{a} = (1, 2, -2)$ и $\vec{b} = (2, -4, 4)$. Найти длины этих векторов, угол между ними и проекцию вектора $\vec{a}$ на направление $\vec{b}$ и площадь параллелограмма, построенного на этих векторах как на сторонах.*

Решение

1. *Найдем длины векторов:*

$$|\vec{a}| = \sqrt{1^2 + 2^2 + (-2)^2} = 3;$$
$$|\vec{b}| = 2\sqrt{1^2 + (-2)^2 + 2^2} = 2 \cdot 3 = 6.$$
$$\left(\vec{a}\ \vec{b}\right) = 1 \cdot 2 + 2 \cdot (-4) + (-2) \cdot 4 = -14.$$

2. *Найдем косинус угла между векторами:*

$$\cos \widehat{\vec{a}\ \vec{b}} = \frac{\left(\vec{a}\ \vec{b}\right)}{|\vec{a}||\vec{b}|} == \frac{-14}{18} = -\frac{7}{9}$$

— угол тупой.

3. *Найдем проекцию:*

$$\text{Пр}_{\vec{b}}\,\vec{a} = \frac{(\vec{a}\,\vec{b})}{|\vec{b}|} = \frac{-14}{3}.$$

4. *Найдем векторное произведение:*

$$[\vec{a}\,\vec{b}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & -2 \\ 2 & -4 & 4 \end{vmatrix} = 0\cdot\vec{i} - 8\cdot\vec{j} - 8\cdot\vec{k} = -8(0,1,1).$$

5. *Найдем площадь параллелограмма:*

$$S = |[\vec{a}\,\vec{b}]| = 8\sqrt{2}.$$

Пример ПV.3. *Для предыдущего примера найти вектор $\vec{c}$, делящий пополам угол $\widehat{\vec{a}\,\vec{b}}$.*

Поскольку вектор $\vec{c}$ должен лежать в одной плоскости с векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$, должно быть:

$$\vec{c} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{b}.$$

Так как

$$\widehat{\vec{a}\,\vec{c}} = \widehat{\vec{c}\,\vec{b}} \Longrightarrow \frac{(\vec{a}\,\vec{c})}{|\vec{a}|} = \frac{(\vec{c}\,\vec{b})}{|\vec{b}|}.$$

Таким образом, получаем уравнение для определения коэффициентов λ, μ:

$$\lambda|\vec{a}| + \mu\frac{(\vec{a}\,\vec{b})}{|\vec{a}|} = \lambda\frac{(\vec{a}\,\vec{b})}{|\vec{b}|} + \mu|\vec{b}|.$$

Подставляя сюда результаты предыдущего примера, получим:

$$3\lambda - \frac{14}{3}\mu = -\frac{7}{3}\lambda + 6\mu.$$

Таким образом, получим:

$$16\lambda = 32\mu \Longrightarrow \lambda = 2\mu.$$

Полагая, например, $\mu = 1$, получим: $\lambda = 2$. Таким образом:

$$\vec{c} = 2\vec{a} + \vec{c} = (4,0,0) \Longrightarrow \vec{c} = (1,0,0) = \vec{i}.$$

Пример ПV.4. *Даны вершины тетраэдра:*

$$A(1,-1,1);\ B(3,1,2);\ C(2,-3,3);\ D(1,2,5).$$

Найти объем тетраэдра, площадь его основания ABC и высоту, опущенную из вершины D на это основание.

Решение

1. *Найдем векторы, соответствующие ребрам тетраэдра:*

$$\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A) = (2,2,1);$$
$$\overrightarrow{AC} = (1,-2,2); \quad \overrightarrow{BC} = (-1,-4,1);$$
$$\overrightarrow{AD} = (0,3,4).$$

2. *Найдем длины ребер:*

$$|\overrightarrow{AB}| = 3; \quad |\overrightarrow{AC}| = 3; \quad |\overrightarrow{AD}| = 5; \quad |\overrightarrow{BC}| = 3\sqrt{2}.$$

3. *Найдем векторное произведение:*

$$\vec{p} = \left[\,\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}\,\right] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \end{vmatrix} = (6,-3,-6) = 3(2,-1,-2).$$

4. *Найдем площадь основания тетраэдра:*

$$S_\Delta = \frac{1}{2}\left|\left[\,\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}\,\right]\right| = \frac{9}{2}.$$

5. *Найдем смешанное произведение:*

$$\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\right) = \left(\vec{p} \cdot \overrightarrow{AC}\right) = -33.$$

6. *Находим объем тетраэдра:*

$$V = \frac{1}{6}\left|\left(\overrightarrow{AB},\, \overrightarrow{AC},\, \overrightarrow{AD}\right)\right| = \frac{11}{2}.$$

7. *Найдем высоту:*

$$h = \frac{3V}{S} = \frac{11}{3}.$$

Глава VI

Задачи на прямые и плоскости

VI.1 Основные определения и теоремы

VI.1.1 Прямые линии

1. Определение прямой. *Прямой $d = d(M_0; \vec{q})$, проходящей через точку M_0 в направлении $\vec{q}$, называется геометрическое место точек M, таких что:*

$$\overrightarrow{M_0M} = \lambda\vec{q}. \tag{VI.1}$$

Точка M_0 называется опорной точкой прямой, вектор $\vec{q}$ — направляющим вектором этой прямой, а число λ, пробегающее **все** *множество действительных чисел, - параметром.*

2. Параметрические уравнения прямой *Пусть в декартовой системе координат текущая M и опорная M_0 точки прямой имеют координаты:*

$$M(x, y, z); \qquad M_0(x_0, y_0, z_0),$$

а направляющий вектор прямой $\vec{q}$ в базисе $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ имеет координаты

$$\vec{q} = (l, m, n).$$

Тогда векторное равенство (VI.1) можно записать в виде параметрических уравнений прямой:

$$\left\{\begin{array}{rcl} x & = & x_0 + \lambda l\,; \\ y & = & y_0 + \lambda m\,; \\ z & = & z_0 + \lambda n \end{array}\right. \quad (\quad) :\Longrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x & = & x_0 + \lambda l\,; \\ y & = & y_0 + \lambda m \end{array}\right. \tag{VI.2}$$

3. Канонические уравнения прямой. *После исключения из (VI.2) параметра λ получаются канонические уравнения прямой:*

$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}; \quad (\ ):\Longrightarrow \frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}. \tag{VI.3}$$

VI.1.2 Взаимное расположение прямых на плоскости

1. Общее уравнение прямой на плоскости. *Общее уравнение прямой на плоскости можно записать в одном из двух эквивалентных видов:*

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)=0, \tag{VI.4}$$

или:

$$Ax+By+C=0, \tag{VI.5}$$

где A, B одновременно не обращаются в нуль.

4. Связь коэффициентов общего и параметрического уравнения. *Коэффициенты A, B связаны с координатами (l, m) направляющего вектора прямой $\vec{q}$ соотношениями:*

$$A=-\nu l, \quad B=\nu m, \qquad (\nu \neq 0). \tag{VI.6}$$

5. Геометрический смысл коэффициентов общего уравнения. *Коэффициенты при неизвестных равны координатам вектора $\vec{N}$ нормали прямой d:*

$$\vec{N}=(A, B), \quad (\vec{N}\vec{q})=0. \tag{VI.7}$$

При этом общее уравнение прямой можно записать в эквивалентной векторной формулировке:

$$\left(\vec{N}\cdot\overrightarrow{M_0M}\right)=0. \tag{VI.8}$$

6. Теорема о взаимном расположении прямых на плоскости. *Две прямые d_1 и d_2, заданные своими общими уравнениями:*

$$d_1:\ A_1x+B_1y+C_1=0; \qquad A_2x+B_2y+C_2=0$$

пересекаются в единственной точке, если:

$$\frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2},$$

параллельны, если:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2}$$

и совпадают, если:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}.$$

7. Нормированное уравнение прямой. *Введем нормирующий множитель* μ :

$$\mu = -\operatorname{sgn}(C)\frac{1}{\sqrt{A^2+B^2}}, \tag{VI.9}$$

выбирая знак этого множителя противоположным знаку свободного члена общего уравнения прямой. Тогда умножая на μ *общее уравнение прямой, получим нормированное уравнение прямой:*

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0, \tag{VI.10}$$

где α *- угол между нормалью к прямой, проведенной из начала координат, и осью* Ox, *а* p *- расстояние от начала координат до прямой:*

$$\cos\alpha = -\operatorname{sgn}(C)\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}};\ \sin\alpha = -\operatorname{sgn}(C)\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}};\ p = \frac{|C|}{\sqrt{A^2+B^2}}. \tag{VI.11}$$

8. Отклонение точки от прямой. *Отклонением* δ *точки* M_0 *от прямой называется число, равное* $+d$, *если* M_0 *и начало координат находятся по разные стороны прямой, и равное* $-d$, *если* M_0 *и начало координат находятся по одну сторону от прямой.*

Отклонение вычисляется по формуле:

$$\delta = x_0\cos\alpha + y_0\sin\alpha - p, \tag{VI.12}$$

если (x_0, y_0) *— координаты точки* M_0.

9. Угол между прямыми. *Углом между прямыми называется угол между их направляющими (нормальными) векторами:*

$$\cos\widehat{d_1,\, d_2} = \frac{\left(\vec{q}_1\,\cdot\,\vec{q}_2\right)}{|\vec{q}_1\,||\vec{q}_2\,|}; \quad \cos\widehat{d_1,\, d_2} = \frac{\left(\vec{N}_1\,\cdot\,\vec{N}_2\right)}{|\vec{N}_1\,||\vec{N}_2\,|}. \tag{VI.13}$$

Угол между прямыми определен с точностью до π.

10. Расстояние между параллельными прямыми. *Если уравнения двух параллельных прямых приведены к общим уравнениям с одинаковыми коэффициентами при неизвестных, то расстояние между прямыми вычисляется по формуле:*

$$\rho_{d_1,d_2} = \frac{|C_2 - C_1|}{\sqrt{A^2 + B^2}}. \tag{VI.14}$$

VI.1.3 Прямые линии в пространстве

1. Теорема о взаимном расположении прямых в пространстве. *Две прямые* $d_1(M_1,;\vec{q}_1\,)$ *и* $d_2(M_2;\vec{q}_2\,)$ *в пространстве могут*

а. *лежать в одной плоскости при выполнении условия:*

$$\left(\vec{q}_1\,,\,\vec{q}_2\,,\,\overrightarrow{M_1M_2}\right) = 0 \tag{VI.15}$$

б. *скрещиваться при выполнении условия:*

$$\left(\vec{q}_1\,,\,\vec{q}_2\,,\,\overrightarrow{M_1M_2}\right) \neq 0. \tag{VI.16}$$

2. *В случае (VI.15), когда прямые лежат в одной плоскости, они могут*

а. *пересекаться при выполнении условия:*

$$\left[\vec{q}_1\,\cdot\,\vec{q}_2\,\right] \neq \vec{0}, \tag{VI.17}$$

б. *быть параллельными при выполнении условий:*

$$\left[\vec{q}_1 \cdot \vec{q}_2\right] = \vec{0}; \quad \left[\vec{q}_1 \cdot \overrightarrow{M_1M_2}\right] \neq \vec{0}, \tag{VI.18}$$

в. *или совпадать при выполнении условий:*

$$\left[\vec{q}_1 \cdot \vec{q}_2\right] = \vec{0}; \quad \left[\vec{q}_1 \cdot \overrightarrow{M_1M_2}\right] = \vec{0}. \tag{VI.19}$$

3. Расстояние между скрещивающимися прямыми. *Расстояние между скрещивающимися прямыми находится по формуле:*

$$\rho_{d_1,d_2} = \frac{\left|\left(\vec{q}_1, \vec{q}_2, \overrightarrow{M_1M_2}\right)\right|}{\left|\left[\vec{q}_1 \cdot \vec{q}_2\right]\right|}. \tag{VI.20}$$

4. Расстояние между параллельными прямыми. *Расстояние между параллельными прямыми в пространстве находится по формуле:*

$$\rho_{d_1 \| d_2} = \frac{\left|\left[\vec{q}_1 \cdot \overrightarrow{M_1M_2}\right]\right|}{|\vec{q}_1|}. \tag{VI.21}$$

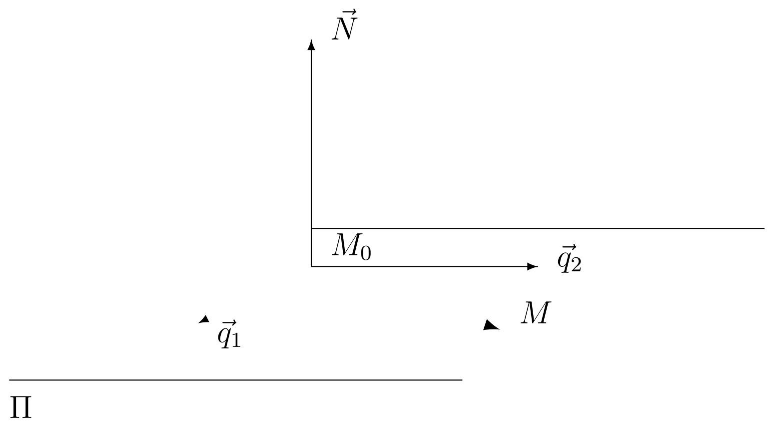
VI.1.4 Плоскости

Определение плоскости. *Плоскостью* $\Pi(M_0; \vec{q}_1, \vec{q}_2)$, *проходящей через точку* M_0 *в двумерном направлении* $\{\vec{q}_1, \vec{q}_2\}$, *называется геометрическое место точек* M *пространства, таких что:*

$$\overrightarrow{M_0M} = \lambda_1\vec{q}_1 + \lambda_2\vec{q}_2, \tag{VI.22}$$

где M_0 *— опорная точка плоскости,* $\vec{q}_1, \vec{q}_2$ *— направляющие векторы плоскости, которыми могут служить любые неколлинеарные векторы,* λ_1, λ_2 *— параметры, которые независимо пробегают все множество действительных чисел*
(см. Рис. VI.56).

Каждой паре значений параметров соответствует одна и только одна точка плоскости.



$\Pi(M_0; \vec{q}_1, \vec{q}_2)$

Рис. VI.56. *Плоскость в пространстве*

2. Параметрические уравнения плоскости. *Пусть в декартовой системе координат:*

$$M_0(X_0, y_0, z_0); \quad M(x, y, z); \quad \vec{q}_1 = (l_1, m_1, n_1); \quad \vec{q}_2 = (l_2, m_2, n_2).$$

Тогда параметрические уравнения плоскости $\Pi(M_0, \vec{q}_1, \vec{q}_2)$ *принимают вид:*

$$\begin{cases} x = \lambda_1 l_1 + \lambda_2 l_2 \,; \\ y = \lambda_1 m_1 + \lambda_2 m_2 \,; \\ z = \lambda_1 n_1 + \lambda_2 n_2 \end{cases} . \tag{VI.23}$$

3. Другой вид уравнения плоскости. *Определение (VI.22) можно записать в виде условия компланарности векторов* $\vec{q}_1, \vec{q}_2, \overrightarrow{M_0M}$*:*

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix} = 0. \tag{VI.24}$$

4. Другое определение плоскости. *Плоскостью* $\Pi(M_0; \vec{N})$*, проходящей через точку* M_0 *перпендикулярно вектору* $\vec{N}$*, называется геометрическое место точек* M *пространства, таких что:*

$$\left(\overrightarrow{M_0M} \cdot \vec{N} \right) = 0. \tag{VI.25}$$

Ненулевой вектор $\vec{N}$ *называется вектором нормали (нормальным вектором) плоскости* Π. *(См. Рис. VI.56.)*

5. Общее уравнение плоскости. *Пусть нормальный вектор имеет координаты:*

$$\vec{N} = (A, B, C).$$

Тогда общее уравнение плоскости $\Pi(M_0; \vec{N})$ *согласно определению (4) можно записать в одном из эквивалентных видов:*

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0, \tag{VI.26}$$

или:

$$Ax + By + Cz + D = 0. \tag{VI.27}$$

6. Связь между вектором нормали и направляющими векторами:

$$\vec{N} = \left[\vec{q_1} \cdot \vec{q_2} \right]. \tag{VI.28}$$

Формула (VI.28) устанавливает соответствие между уравнениями плоскости (VI.24) и (VI.26).

7. Нормированное уравнение плоскости. *Нормированное уравнение плоскости получается умножением общего уравнения плоскости (VI.27) на нормирующий множитель* μ :

$$\mu = -\operatorname{sgn}(D)\frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \tag{VI.29}$$

(знак нормирующего множителя выбирается противоположным знаку свободного члена) и имеет вид:

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0, \tag{VI.30}$$

где α, β, γ *- углы между нормалью плоскости, проведенной из начала координат, а* p *— расстояние от начала координат до плоскости:*

$$\cos\alpha = -sgn(D)\frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}; \quad \cos\beta = -\operatorname{sgn}(D)\frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}};$$

$$\cos\gamma = -\operatorname{sgn}(D)\frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}; \quad p = \frac{|D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}. \tag{VI.31}$$

Аналогично (VI.12) определяется отклонение и расстояние точки от плоскости.

VI.1.5 Взаимное расположение плоскостей

1. Теорема о взаимном расположении плоскостей. *Две плоскости* $\Pi_1(M_1; \vec{N}_1)$ *и* $\Pi_2(M_2; \vec{N}_2)$ *в трехмерном пространстве*

а. *могут пересекаться при:*

$$\left[\vec{N}_1 \cdot \vec{N}_2 \right] \neq \vec{0}, \tag{VI.32}$$

б. *быть параллельными при:*

$$\left[\vec{N}_1 \cdot \vec{N}_2 \right] = \vec{0} \qquad \left(\vec{N}_1 \, , \, \vec{N}_2 \, , \, \overrightarrow{M_1M_2} \right) \neq 0 \tag{VI.33}$$

в. *или совпадать при:*

$$\left[\vec{N}_1 \cdot \vec{N}_2 \right] = \vec{0} \qquad \left(\vec{N}_1 \, , \, \vec{N}_2 \, , \, \overrightarrow{M_1M_2} \right) = 0. \tag{VI.34}$$

2. *Если плоскости заданы своими общими уравнениями, то они пересекаются, если коэффициенты при координатах непропорциональны; параллельны, если:*

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} \neq \frac{D_1}{D_2} \tag{VI.35}$$

и совпадают, если:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = \frac{D_1}{D_2}. \tag{VI.36}$$

3. Угол Θ между плоскостями. *Угол между плоскостями* $\Pi_1(M_1; \vec{N}_1)$ *и* $\Pi_2(M_2; \vec{N}_2)$ *определяется как угол между их нормальными векторами:*

$$\widehat{\Pi_1\Pi_2} = \widehat{\vec{N}_1 \, \vec{N}_2} \Longrightarrow \cos\Theta = \frac{\left(\vec{N}_1 \cdot \vec{N}_2 \right)}{|\vec{N}_1 \, || \vec{N}_2 \, |}. \tag{VI.37}$$

4. Прямая пересечения плоскостей. *Прямая d пересечения плоскостей $\Pi_1(M_1; \vec{N}_1)$ и $\Pi_2(M_2; \vec{N}_2)$ есть $d(M_0; \vec{q})$, где $M_0(x_0, y_0, z_0)$ - любая общая точка этих плоскостей, а направляющий вектор $\vec{q}$ равен:*

$$\vec{q} = \left[\vec{N}_1 \cdot \vec{N}_2 \right]. \qquad \text{(VI.38)}$$

5. Расстояние между параллельными плоскостями. *Пусть общие уравнения параллельных плоскостей приведены к виду с одинаковыми коэффициентами при координатах:*

$$Ax + By + Cz + D_1 = 0\,;$$

$$Ax + By + Cz + D_2 = 0.$$

Тогда расстояние между плоскостями находится по формуле:

$$\rho_{\Pi_1\Pi_2} = \frac{|D_2 - D_1|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}. \qquad \text{(VI.39)}$$

VI.1.6 Взаимное расположение прямой и плоскости

1. Теорема о взаимном расположении прямой и плоскости в пространстве. *Прямая $d(M_1; \vec{q})$ может:*

а. *пересекаться с плоскостью $\Pi(M_2; \vec{N})$ в единственной точке при:*

$$\left(\vec{q}\,\vec{N} \right) \neq 0; \qquad \text{(VI.40)}$$

б. *быть параллельной этой плоскости при:*

$$\left(\vec{q}\,\vec{N} \right) = 0 \qquad \left[\vec{q} \cdot \overrightarrow{M_1M_2} \right] \neq \vec{0}, \qquad \text{(VI.41)}$$

в. *лежать в этой плоскости при:*

$$\left(\vec{q}\,\vec{N} \right) = 0 \qquad \left[\vec{q} \cdot \overrightarrow{M_1M_2} \right] = \vec{0}. \qquad \text{(VI.42)}$$

2. Угол между прямой и плоскостью. *Углом α между прямой $d(M_1; \vec{q})$ и плоскостью $\Pi(M_2; \vec{N})$ называется угол между направляющим вектором* *этой прямой и его ортогональной проекцией на плоскость* П. *Таким образом:*

$$\sin\alpha = \frac{(\vec{q}\,\vec{N})}{|\vec{q}||\vec{N}|}. \tag{VI.43}$$

3. Расстояние между параллельными прямой и плоскостью. *Расстояние между прямой и плоскостью можно определить, как расстояние от опорной точки прямой до плоскости:*

$$\rho_{d,\Pi} = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \tag{VI.44}$$

или как длину проекции вектора $\overrightarrow{M_1M_2}$ *на направление нормали* $\vec{N}$*:*

$$\rho_{d,\Pi} = \frac{|\left(\overrightarrow{M_1M_2}\cdot\,\vec{N}\right)|}{|\vec{N}|} = \frac{|\left(\vec{q}_1\,,\,\vec{q}_2\,,\,\overrightarrow{M_1M_2}\right)|}{|\vec{N}|}. \tag{VI.45}$$

VI.2 Евклидовы задачи планиметрии

Пример ПVI.1. *Прямая* d_1 *проходит через точку* $A(1,2)$ *в направлении* $\vec{q} = (3,-4)$, *прямая* d_2 *задана своим общим уравнением:*

$$4x + 3y - 15 = 0,$$

а прямая d_3 *своими каноническими уравнениями:*

$$\frac{x-2}{4} = \frac{y-3}{3}.$$

Провести полное исследование взаимного расположения прямых d_1 *и* d_2 *и* d_1 *и* d_3.

Решение

Направляющий вектор прямой d_1 есть $\vec{q} = (3,-4)$, а, значит, ее нормальный вектор $\vec{N}_1 = (4,3)$. Нормальный вектор прямой d_2 есть

$$\vec{N}_2 = (4,3),$$

- значит, эти прямые параллельны или совпадают. Запишем общее уравнение прямой d_1:

$$4(x-1)+3(x-2)=0 \Longrightarrow 4x+3y-10=0.$$

Так как свободные члены общих уравнений прямых не пропорциональны, прямые d_1 и d_2 параллельны. Расстояние между ними равно:

$$\rho_{d_1,d_2}=\frac{|-15-(-10)|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{5}{5}=1.$$

Прямая d_3 проходит через точку $(2,3)$ в направлении $(4,3)$, поэтому вектор нормали этой прямой есть $\vec{N}_3=(-3,4)$, а ее общим уравнением будет:

$$-3(x-2)+4(y-3)=0 \Longrightarrow -3x+4y-2=0.$$

Так как:

$$\left(\vec{N}_1\cdot\vec{N}_3\right)=4\cdot(-3)+3\cdot 4=0,$$

то прямые d_1 и d_3 перпендикулярны. Точка их пересечения находится совместным решением двух уравнений:

$$\begin{cases} 4x+3y-10 &= 0\,; \\ -3x+4y-2 &= 0 \end{cases}.$$

Решая эту систему, найдем точку пересечения:

$$M\left(\frac{34}{25},\frac{38}{25}\right).$$

Пример ПVI.2. *На плоскости дан треугольник ΔABC своими вершинами:*

$$A(1,2);\quad B(4,6);\quad C(8,3).$$

Найти уравнения высоты, медианы и биссектрисы, выходящих из вершины B, а также длину этой высоты и угол $\angle B$.

Решение

1.Найдем векторы, соответствующие сторонам треугольника:

$$\overrightarrow{AB}=(3,4);\quad \overrightarrow{BC}=(4,-3);\quad \overrightarrow{AC}=(7,1).$$

Так как

$$\left(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}\right) = 3\cdot 4 + 4\cdot(-3) = 0,$$

то угол B прямой: $\angle B = \frac{\pi}{2}$.

2. Найдем уравнение высоты. *Уравнение высоты (BD) получается как уравнение прямой, проходящей через точку B перпендикулярно вектору $\vec{N} = \overrightarrow{AC}$:*

$$\left(\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BM}\right) = 0 \Longrightarrow 7(x-4) + 1(y-6) = 0 \Longrightarrow$$

$$(AC):\ 7x + y - 34 = 0.$$

3. Найдем высоту h. *Учтем, что вектор нормали к прямой (AC) получается из координат этого вектора по правилу:*

$$\vec{q} = (l, m) \Longrightarrow \vec{N} = (-m, l).$$

Таким образом, найдем вектор нормали:

$$\vec{N}_1 = (-1, 7)$$

и уравнение прямой (AC):

$$(AC):\ -1(x-1) + 7(y-2) = 0 \Longrightarrow -x + 7y - 13 = 0.$$

Приведем это уравнение к нормированному виду ($\sqrt{50} = 5\sqrt{2}$):

$$(AC):\ -\frac{1}{5\sqrt{2}}x + \frac{7}{5\sqrt{2}}y - \frac{13}{5\sqrt{2}} = 0.$$

Таким образом, отклонение точки B от прямой (AC) равно:

$$\delta_B = \frac{-1\cdot 4 + 7\cdot 6 - 13}{5\sqrt{2}} = \frac{14}{5\sqrt{2}}.$$

Это и будет длиной высоты h.

4. Найдем уравнение медианы. *Найдем координаты середины отрезка $[AC]$, точки E:*

$$x_E = \frac{1+8}{2} = \frac{9}{2};\quad y_E = \frac{2+3}{2} = \frac{5}{2}.$$

Таким образом:

$$\overrightarrow{BE} = (\frac{1}{2}, -\frac{7}{2}) \Longrightarrow \vec{q} = (1, -7).$$

Запишем уравнение медианы (BE)*:*

$$\frac{x-4}{1} = \frac{y-6}{-7} \Longrightarrow 7x + y - 34 = 0.$$

5. Найдем уравнение биссектрисы. *Биссектрису* d_1 *угла* B *определим как геометрическое место точек, равноудаленных от прямых* (AB) *и* (BC)*. Запишем уравнения прямых* (AB) *и* (CD)*:*

$$(AB): \ \frac{x-1}{3} = \frac{y-2}{4} \Longrightarrow 4x - 3y + 2 = 0;$$

$$(BC): \ \frac{x-4}{4} = \frac{y-6}{-3} \Longrightarrow 3x + 4y - 36 = 0.$$

Нормируем эти уравнения:

$$(AB): \ \frac{-4x + 3y - 2}{5} = 0;$$

$$(BC): \ \frac{3x + 4y - 36}{5} = 0.$$

Таким образом, биссектрисы угла B *(их две) определятся уравнениями:*

$$\delta_{d_1,(AB)} = \pm\delta_{d_1,(BC)}.$$

Нам необходимо выбрать знак, соответствующий биссектрисе внутреннего угла треугольника — в этом случае отклонения имеют разные знаки. Таким образом, найдем уравнение биссектрисы:

$$d_1 : x - 7y + 38 = 0.$$

VI.3 Евклидовы задачи стереометрии

Пример ПVI.3. *Исследовать взаимное расположение прямых* $d_1(M_1, \vec{q}_1)$ *и* $d_2(M_2, \vec{q}_2)$*, если:*

$$M_1(1, 2, 5); \quad \vec{q}_1 = (-2, 1, 2); \quad M_2(5, 6, 3); \quad \vec{q}_2 = (-1, 2, 2).$$

Решение

1. Выясним, лежат ли две прямые в одной плоскости. *Найдем вектор*

$$\overrightarrow{M_1M_2} = (4, 4, -2) = 2(2, 2, -1)$$

и вычислим смешанное произведение:

$$\left(\vec{q}_1\,,\,\vec{q}_2\,,\,\overrightarrow{M_1M_2}\right) = 2\cdot\begin{vmatrix} -2 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -6 \neq 0.$$

Таким образом, прямые d_1 и d_2 — скрещивающиеся.

2. Найдем расстояние между прямыми. *Для этого сначала вычислим векторное произведение:*

$$\left[\,\vec{q}_1\,\cdot\,\vec{q}_2\,\right] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = (-2, 2, -3).$$

Найдем теперь расстояние:

$$\rho_{d_1,d_2} = \frac{\left|\left(\vec{q}_1\,,\,\vec{q}_2\,,\,\overrightarrow{M_1M_2}\right)\right|}{\left|\left[\,\vec{q}_1\,\cdot\,\vec{q}_2\,\right]\right|} = \frac{6}{\sqrt{17}}.$$

3. Найдем косинус угла между прямыми. *Косинус угла вычислим по формуле:*

$$\cos\alpha = \frac{\left(\,\vec{q}_1\,\cdot\,\vec{q}_2\,\right)}{|\vec{q}_1\,||\vec{q}_2\,|} = \frac{8}{9}.$$

Пример ПVI.4. *Исследовать взаимное расположение плоскости:*

$$\Pi:\; 4x - 2y + 4z + 25 = 0$$

и прямых:

$$d_1: \ \frac{x-2}{1} = \frac{y-4}{4} = \frac{z-1}{1},$$
$$d_2: \ \frac{x-3}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{-2}.$$

<u>Решение</u>

1. Найдем координаты необходимых нам векторов. *По коэффициентам уравнений восстановим нормальный вектор плоскости $\vec{N}$ и направляющие векторы прямых $\vec{q_1}$, $\vec{q_2}$:*

$$\vec{N} = (4, -2, 4) \Longrightarrow \vec{N} = (2, -1, 2);$$
$$\vec{q_1} = (1, 4, 1); \qquad \vec{q_2} = (2, 1, -2).$$

2. Найдем координаты опорной точки плоскости. *Для этого найдем любое решение уравнения плоскости. Например, можно положить: $x = z = 0$, тогда найдем $y = 25/2$. Таким образом,*

$$M_0 = (0, \frac{25}{2}, 0)$$

является опорной точкой плоскости.

3. Найдем скалярные произведения.

$$\left(\vec{q_1} \cdot \vec{N} \right) = 0,$$

таким образом, прямая d_1 параллельна плоскости или лежит в ней.

$$\left(\vec{q_2} \cdot \vec{N} \right) = -1 \neq 0,$$

Следовательно, прямая d_2 пересекается с плоскостью в точке.

4. Вычислим вектор, соединяющий опорные точки Π и d_1:

$$\overrightarrow{M_0M_1} = \left(4, -\frac{17}{2}, 1 \right).$$

Очевидно, что этот вектор не коллинеарен направляющему вектору прямой $\vec{q}_1$ *, следовательно, прямая* d_1 *параллельна плоскости* Π.

5. Найдем расстояние от прямой до плоскости. *Для этого нормируем уравнение плоскости* ($\mu = -1/6$)*:*

$$-\frac{2}{3}x + \frac{1}{3}y - \frac{2}{3}z - \frac{25}{6} = 0.$$

Отклонение точки M_1 *от плоскости равно:*

$$\delta_{M_1} = -\frac{4}{3} + \frac{4}{3} - \frac{2}{3} - \frac{25}{6} = -\frac{29}{6}$$

Таким образом, расстояние от прямой d_1 *до плоскости равно:* $\rho = 29/6$.

6. Найдем точку пересечения F прямой d_2 с плоскостью. *Для этого запишем уравнения прямой в параметрическом виде:*

$$\begin{aligned} x &= 3 + 2t\,; \\ y &= 1 + t\,; \\ z &= 1 - 2t \end{aligned}$$

и подставим переменные x, y, z *в уравнение плоскости:*

$$4(3 + 2t) - 2(1 + t) + 4(1 - 2t) + 25 = 0,$$

откуда найдем:

$$t = \frac{39}{2}.$$

Подставляя найденное значение параметра в параметрические уравнения прямой, найдем координаты точки пересечения:

$$F = \left(42, \frac{41}{2}, -38\right).$$

7. Найдем угол между прямой d_2 и плоскостью. *Угол вычисляем по формуле:*

$$\sin\alpha = \frac{\left(\vec{q}_2 \cdot \vec{N}\right)}{|\vec{q}_2\,||\vec{N}|}.$$

Таким образом получим:

$$\sin\alpha = \frac{4-1-4}{3\cdot 3} = -\frac{1}{9}.$$

Пример ПVI.5. *Исследовать взаимное расположение плоскостей:*

$$\Pi_1 : \ 2x - 2y + z - 21 = 0;$$

$$\Pi_2 : \ x + 2y - 2z + 9 = 0.$$

1. Найдем нормальные векторы плоскостей.

$$\vec{N}_1 = (2, -2, 1); \qquad \vec{N}_2 = (1, 2, -2).$$

2. Вычислим векторное произведение нормальных векторов.

$$\vec{q} = \left[\, \vec{N}_1 \cdot \vec{N}_2 \,\right] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \end{vmatrix} = (2, 5, 6).$$

Векторы неколлинеарны, значит плоскости пересекаются по прямой.

3. Найдем прямую пересечения. *Для этого найдем ее опорную точку — какое-либо совместное решение уравнений плоскостей. Положим, например, $z = 0$. Тогда уравнения плоскостей примут вид:*

$$2x - 2y - 21 = 0; \ x + 2y + 9 = 0 \Longrightarrow 3x - 12 = 0 \Longrightarrow x = 4; y = -\frac{13}{2}.$$

Таким образом,

$$M_0 = (4, -\frac{13}{2}, 0).$$

Направляющий вектор прямой пересечения есть вектор $\vec{q}$. Запишем канонические уравнения прямой:

$$d = \Pi_1 \cap \Pi_2 : \ \frac{x-4}{2} = \frac{y + \dfrac{13}{2}}{5} = \frac{z}{6}.$$

4. Найдем угол между плоскостями. *Косинус этого угла равен:*

$$\cos\Theta = \frac{\left(\vec{N}_1 \cdot \vec{N}_2\right)}{|\vec{N}_1\,||\vec{N}_2\,|} = 0.$$

Таким образом, плоскости Π_1 *и* Π_2 *пересекаются под прямым углом.*

Глава VII

Задачи на кривые II-го порядка на евклидовой плоскости

VII.1 Основные факты теории кривых II-го порядка

VII.1.1 Канонические уравнения кривых второго порядка

Существуют три и только три типа кривых второго порядка: эллипс, гипербола, парабола. При надлежащем выборе декартовой системы координат их уравнения можно записать в следующих канонических формах.

1. Каноническое уравнение эллипса. *Пусть a и b - положительные параметры. Тогда каноническое уравнение эллипса имеет вид:*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \tag{VII.1}$$

2. Каноническое уравнение гиперболы. *Каноническое уравнение гиперболы с главной осью Ox имеет вид:*

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \tag{VII.2}$$

а каноническое уравнение сопряженной гиперболы (с главной осью Oy) имеет вид:

$$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \tag{VII.3}$$

3. Каноническое уравнение параболы. *Пусть p — положительный параметр. Тогда каноническое уравнение параболы с осью Ox имеет вид:*

$$y^2 = 2px. \tag{VII.4}$$

VII.1.2 Элементы кривых второго порядка

1. Элементы эллипса *Главной осью эллипса является его бо́льшая ось. Пусть $a > b$. В этом случае главной осью эллипса является ось Ox. Введем число*

$$c = \sqrt{a^2 - b^2} < a, \tag{VII.5}$$

а также число

$$\epsilon = \frac{c}{a} < 1, \tag{VII.6}$$

которое называется эксцентриситетом эллипса. Введем на главной оси эллипса две точки:

$$F_1(-c, 0) \qquad\qquad F_2(c, 0),$$

которые называются фокусами эллипса. В случае, когда $b > a$ числа c и ϵ вычисляются по формулам (VII.5) и (VII.6), в которых необходимо поменять местами числа a и b. Главной осью в этом случае будет ось Oy, на которой и будут расположены фокусы.

2. Директрисы эллипса. *Прямые d_1, d_2, перпендикулярные главной оси эллипса:*

$$d_{1,2}: \qquad x = \pm\frac{a}{\epsilon} \quad (= \pm\frac{a^2}{c}) \tag{VII.7}$$

называются директрисами эллипса.

3. Касательные к эллипсу. *Каноническое уравнение касательной к эллипсу с точкой касания $M_0(x_0, y_0)$ имеет вид:*

$$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1. \tag{VII.8}$$

4. Элементы гиперболы *Главной осью гиперболы является та, которой соответствует знак + в каноническом уравнении гиперболы. Введем число*

$$c = \sqrt{a^2 + b^2} > a, b, \tag{VII.9}$$

а также число

$$\epsilon = \frac{c}{a} > 1, \tag{VII.10}$$

которое называется эксцентриситетом эллипса. Введем на главной оси гиперболы две точки:

$$F_1(-c,0) \qquad\qquad F_2(c,0),$$

которые называются фокусами гиперболы. Прямые d_1, d_2, *перпендикулярные главной оси гиперболы:*

$$d_{1,2}: \qquad x = \pm\frac{a}{\epsilon} \quad (= \pm\frac{a^2}{c}) \tag{VII.11}$$

называются директрисами гиперболы.

5. Касательные к гиперболе. *Каноническое уравнение касательной к гиперболе с точкой касания* $M_0(x_0, y_0)$ *имеет вид:*

$$\frac{xx_0}{a^2} - \frac{yy_0}{b^2} = 1. \tag{VII.12}$$

6. Асимптоты гиперболы. *Прямые:*

$$y = \pm\frac{b}{a}x \tag{VII.13}$$

являются асимптотами гиперболы.

7. Элементы параболы *Точка* $M(p/2, 0)$ *называется фокусом параболы, а прямая* d, *перпендикулярная его оси:*

$$d: \qquad x = -\frac{p}{2}, \tag{VII.14}$$

называется директрисой параболы. Каноническое уравнение касательной к параболе с точкой касания $M_0(x_0, y_0)$ *имеет вид:*

$$yy_0 = p(x + x_0). \tag{VII.15}$$

VII.1.3 Фокальные свойства кривых II-го порядка

1. Фокальное свойство эллипса. *Введем фокальные радиусы точки* M *кривой II-го порядка:*

$$\rho_{1,2} = |\overrightarrow{F_{1,2}M}|. \tag{VII.16}$$

Тогда имеет место утверждение: Сумма фокальных радиусов эллипса есть величина постоянная, равная большой оси эллипса:

$$\rho_1 + \rho_2 = 2a. \tag{VII.17}$$

2. Фокальное свойство гиперболы. *Для гиперболы имеет место аналогичное утверждение: Модуль разности фокальных радиусов эллипса есть величина постоянная, равная главной оси гиперболы:*

$$|\rho_1 - \rho_2| = 2a. \tag{VII.18}$$

Для параболы аналогичное свойство отсутствует.

VII.1.4 Директориальные свойства кривых II-го порядка

Директориальные свойства всех кривых II-го порядка совпадают;

1. *Отношение фокального радиуса любой точки кривой второго порядка к расстоянию d от этой точки до соответствующей директрисы есть величина постоянная, равная эксцентриситету кривой:*

$$\frac{|\overrightarrow{FM}|}{d} = \epsilon. \tag{VII.19}$$

VII.1.5 Оптические свойства кривых II-го порядка

1. Оптическое свойства эллипса. *Луч света, испущенный из одного из фокусов эллипса, после отражения от эллипса проходит через второй его фокус.*

2. Оптическое свойства гиперболы. *Луч света, испущенный из одного из фокусов гиперболы, после отражения от гиперболы распространяется так, как если бы он был испущен из второго ее фокуса.*

3. Оптическое свойства параболы. *Луч света, испущенный из из фокуса параболы, отражается от параболы параллельно ее оси.*

VII.1.6 Полярное уравнение кривых второго порядка

1. *Если поместить полюс полярной системы координат в фокус кривой второго порядка, а в качестве полярной оси выбрать главную ось этой кривой, то уравнение кривой II-го порядка можно записать в полярных координатах в виде:*

$$\rho = \frac{p}{1 + \epsilon \cos \varphi}. \tag{VII.20}$$

VII.2 Задачи о кривых II-го порядка

В качестве примера решим наиболее типичную задачу.

Пример ПVII.1. *Известно, что прямая*

$$d: \; 3x - 4y + 5 = 0$$

является директрисой эллипса с эксцентриситетом $\epsilon = 1/2$ *и что точка* $F_1(-5, 10)$ *является соответствующим фокусом эллипса. Найти уравнение эллипса и его элементы.*

Решение

Нормируем уравнение директрисы:

$$\frac{-3}{5}x + \frac{4}{5}y - 1 = 0.$$

Отклонение фокуса F_1 от директрисы равно:

$$\delta_{F_1} = (-5)\frac{-3}{5} + 10\frac{4}{5} - 1 = 10.$$

Таким образом, расстояние от фокуса F_1 до соответствующей директрисы равно 10. Но с другой стороны расстояние от фокуса до соответствующей директрисы равно:

$$\frac{a}{\epsilon} - c = \frac{a^2}{c} - c = \frac{a^2 - c^2}{c} = \frac{b^2}{c}.$$

Из соотношения

$$\epsilon = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} = \frac{1}{2}$$

получаем:

$$b = \frac{\sqrt{3}}{2} a.$$

Подставляя этот результат в выражение для расстояния от фокуса до директрисы, найдем:

$$a = \frac{10}{3}; \quad b = \frac{5}{\sqrt{3}}, \quad c = \frac{5}{3}.$$

Направляющий вектор директрисы равен:

$$\vec{q} = (4, 3),$$

поэтому уравнение главной оси эллипса есть:

$$4(x+5) + 3(y-10) = 0 \Longrightarrow 4x + 3y - 10 = 0.$$

Пусть теперь $M(x_0, y_0)$ - произвольная точка эллипса. Тогда отклонение этой точки от данной директрисы есть:

$$\delta_M = \frac{-3}{5} x_0 + \frac{4}{5} y_0 - 1,$$

а соответствующее расстояние равно:

$$\rho_{M_0} = \left| \frac{-3}{5} x_0 + \frac{4}{5} y_0 - 1 \right|.$$

Расстояние от фокуса до точки M_0 равно:

$$\rho_1 = \sqrt{(x_0 + 5)^2 + (y - 10)^2}.$$

Из директориального свойства эллипса получим:

$$\rho_1^2 = \epsilon^2 \rho_{M_0}^2.$$

Таким образом, подставляя сюда найденные выражения, получим:

$$(3x_0 - 4y_0 + 5)^2 = \frac{25}{4} \left((x_0 + 5)^2 + (y_0 - 10)^2 \right).$$

Перенося все члены в одну часть уравнения, получим уравнение второго порядка относительно переменных (x_0, y_0) — это и будет искомое уравнение эллипса. Поскольку полученное уравнение весьма громоздко, мы не будем его приводить здесь. Отметим лишь, что в канонической системе координат, в которой ось Ox направлена вдоль вектора $\vec{N} = (-4, 3)$ (а начало координат нетрудно найти, зная элементы эллипса), каноническое уравнение эллипса имеет вид:

$$\frac{3x'^{\,2}}{25} + \frac{9y'^{\,2}}{100} = 1.$$

Литература

[1] Игнатьев Ю.Г. *Аналитическая геометрия. Курс лекций. I семестр.* Компьютерная версия, Казань, 2000.

[2] Игнатьев Ю.Г. *Аналитическая геометрия. Курс лекций. II семестр.* Компьютерная версия, Казань, 2001.

[3] Игнатьев Ю.Г. *Проективная геометрия. Курс лекций. III семестр.* Компьютерная версия, Казань, 2001.

[4] Игнатьев Ю.Г. *Аффинная геометрия. Курс лекций. II семестр.* Компьютерная версия, Казань, 1997.

[5] А.П.Норден. *Дифференциальная геометрия*, Москва, Учпедгиз, 1948

[6] А.П.Норден, *Лекции по дифференциальной геометрии*, Москва, Учпедгиз, 1965.

[7] А.П.Норден, *Краткий курс дифференциальной геометрии*, Москва, “Наука”, 1962.

[8] Б.А.Дубровин, С.П.Новиков, А.Т.Фоменко, *Современная геометрия*, Москва, “Наука”, 1979; Главы 1, 2.

[9] *Сборник задач и упражнений по дифференциальной геометрии* , под редакцией В.Т.Воднева, Минск, “Высшая школа”, 1970.

[10] П.К.Рашевский. *Риманова геометрия и тензорный анализ*, М., “Наука”, 1964.

[11] Л.П.Эйзенхарт. *Риманова геометрия*, М, “ГИФМЛ”, 1948.

[12] Базылев В.Т., Дуничев К.И., Иваницкая В.П. *Геометрия. II.* М., “Просвещение”, 1975.

[13] Атанасян Л.С., Базылев В.Т. *Геометрия. Часть II.* М., “Просвещение”, 1987.

[14] Погорелов А.В. *Геометрия.* М., “Наука”, 1984.

[15] Беклемишева Л.А., Петрович А.Ю., Чубаров И.А. *Сборник задач по аналитической геометрии и линейной алгебре.* М., “Наука”, 1987.

[16] Базылев В.Т., Дуничев К.И., Иваницкая В.П., Кузнецова Г.Б., Майоров В.М., Скопец З.А. *Сборник задач по геометрии.* М., “Просвещение”, 1990.

Аналитическая геометрия. Учебное пособие. I семестр.

Автор - **Ю.Г. Игнатьев**, доктор физ.-мат. наук, профессор,
заслуженный деятель науки РТ
Редактор - **А.Р. Самигуллина**

Научно-исследовательская лаборатория
«Информационных технологий в математическом образовании»
Казанского (Приволжского) федерального университета
420035, г. Казань, ул. Кремлевская, 35
Компьютерный набор и верстка в издательской системе $\LaTeX 2\epsilon$ В.И. Ковтун.
Стилевое оформление «*BIBLIO*» Ю.Г. Игнатьева