АКАДЕМИЯ ПЕДАГОГИЧЕСКИХ НАУК РСФСР
НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ИНСТИТУТ МЕТОДОВ ОБУЧЕНИЯ

Н. В. АНДРЕЕВСКИЙ

МЕТОДЫ, ФОРМЫ И СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ МАТЕМАТИЧЕСКИХ КРУЖКОВ ПО ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКЕ И НАЧАЛАМ ВЫСШЕЙ

АВТОРЕФЕРАТ
ДИССЕРТАЦИИ НА СОИСКАНИЕ УЧЕНОЙ СТЕПЕНИ
КАНДИДАТА ПЕДАГОГИЧЕСКИХ НАУК

МОСКВА
1954

МЕТОДЫ, ФОРМЫ И СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ МАТЕМАТИЧЕСКИХ КРУЖКОВ ПО ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКЕ И НАЧАЛАМ ВЫСШЕЙ

Переходный период от социализма к коммунизму остро ставит перед школой вопрос о воспитании у подрастающего поколения черт творческой инициативной личности. «Будущность,— говорит И. В. Сталин,— принадлежит молодежи от науки.» * Воспитание таких качеств у молодежи в области научной работы должно начинаться со школьной скамьи. Большие возможности для осуществления этой задачи в школьном возрасте открывают самодеятельные внеклассные организации учащихся.

В своей работе автор останавливается на методах, формах и содержании работы школьного математического кружка, понимая в основном под словом «школьный» — объединение учащихся уровня знаний 9-го и 10-го классов.

Свои опыты работы руководителя математического кружка автор проводил в течение нескольких лет (1912—1916) в стенах средней школы, а, с переходом в высшую, в течение многих лет (1934—1953) — на первых двух курсах втуза (Геодезический институт в Москве).

Во введении автор знакомит с календарным планом последних двух лет работы руководимого им кружка, перечисляет темы докладов студенческого кружка и дает краткую характеристику проводимых методов его работы. В дополнение приводятся образцы задач, регулярно помещаемых в «математическом уголке» стенгазеты.

Первую главу занимает краткий исторический очерк развития реформистского движения в преподавании математики в средней школе в дореволюционной России и характеристика этапов развития методов обучения в советской школе. На основании документальных данных устанавливается самостоятельность развития передовых идей в области преподавания математики в дореволюционное время. Отмечается роль пере-

---

* Речь на приеме в Кремле работников высшей школы 17 мая 1938 года.

довых педагогов-математиков (Вс. Шереметевский и др.) в проведении в школьные программы идей функциональной зависимости.

Во второй главе дается историческая справка о случайном проникновении идеи математического кружка в практику некоторых школ царского времени (математические съезды).

Только с победой Великой Октябрьской социалистической революции создаются благоприятные условия для развития и этой формы самодеятельности молодежи. С освобождением страны от интервентов и неуклонным ростом материального богатства страны менялись методика и содержание работы широко развившейся сети пришкольных предметных кружков. Для советской школы двадцатых годов характерным был выбор тематики для бесед и рефератов в кружке. Исходным материалом по преимуществу служили популярная книга или журнальная статья с описанием какого-либо производства или даже непосредственное наблюдение на месте при посещении фабрики и завода. Роль руководителя состояла лишь в том, что он наталкивал школьника на математическую сторону вопроса. После исторического Постановления ЦК ВКП(б) от 5 сентября 1931 г. о школе меняется содержание и методика работы, как в классе, так и во внеклассной работе. Основным методом работы кружка является математический доклад, как таковой. В середине тридцатых годов появляются обстоятельные статьи в педагогических журналах и монографическая литература, посвященные теории и обмену практическим опытом ведения предметных математических кружков. Математический кружок становится обычной принадлежностью школы.

В главе III ставится вопрос, как организовать кружок. Автор полагает, что ячейкой кружка может быть небольшая группа инициаторов. По мере работы она обрастает новыми членами и превращается в кружок, состоящий из действительных членов. Действительные члены принимают в свою среду новых равноправных членов. Этот набор можно возложить на представителей классов и групп, и прежде всего на членов комсомола, обычно наиболее активных учащихся, хорошо знающих свою среду. Кружок должен иметь свой писанный устав, существование которого придает организации кружка солидность и определенность. Согласно уставу общее собрание членов выбирает бюро кружка (из трех членов) и председателей секций сроком на 1 год. Обязанностью председателя и его заместителя является ведение собраний и решение организационных вопросов. Секретарь кружка ведет протокол собраний. Выработанный автором устав приложен к работе. Для прочности организации следует соблюдать ритмичность в работе кружка, т. е. точное выполнение сроков назначаемых собраний (и выпуска журнала) и плана намеченных на полугодие выступлений. Необходимым условием нормальной работы кружка является наличие закрепленной за ним комнаты, по крайней мере, на часы собраний, а лучше на постоянное время (математический кабинет). Продолжительность собрания 1½—2 часа и промежуток между собраниями 2 недели.

В главе IV автор останавливается на принципиальном вопросе: какие задачи должна ставить перед собой организация предметного школьного кружка, в частности, математического.

Кружок в своей работе имеет две цели: образовательную и воспитательную. Кружок способствует оживлению интереса к предметам физико-математического цикла, пополняет и углубляет познания учащихся, как в вопросах классной программы, так и в вопросах, выходящих за пределы официальных программ, способствует развитию логического мышления и умения связно излагать свои мысли в форме устного доклада или статьи в журнале кружка. Не менее важны воспитательные задачи кружка: воспитание инициативы («самостоятельность головы» по выражению Ушинского), изжитие идеологических пережитков капитализма и привитие научно-диалектического мировоззрения, личных черт поведения, характерных для переходного периода от социализма к коммунизму. «Учение, воспитание и образование новых поколений, которые будут создавать коммунистическое общество, не могут быть старыми» (Ленин, XXX, изд. III, стр. 403).

В главе V автор отмечает основные моменты в подготовке и реализации ученического доклада. Подготовку доклада следует начать с отбора темы и выбора докладчика. Для начала можно начать с небольших по объему выступлений или, что лучше, сложную и большую тему разлагать в цепь небольших докладов. Чтобы учащийся легче и лучше овладел литературным материалом при подготовке к докладу, следует точно инструктировать его в отношении изучаемой им литературы и дать общие указания по технике работы над научной статьей или книгой. Когда реферат написан, руководитель проводит подробную предварительную консультацию с референтом, корректируя содержание доклада, как с научной, так и с идеологической стороны, и указывает, так сказать, правила поведения докладчика во время зачитывания доклада. Доклад проводится обычно устно (на память), но математические чертежи, таблицы и формулы удобнее иметь заранее написанными на доске. Для оживления прений желательно назначить одного или двух оппонентов к докладчику. Для повышения интереса к докладу целесообразно за несколько дней до выступления вывесить в витрине кружка тезисы доклада и перечень литературных источников. Выступлению докладчика должно предшествовать вступительное слово руководителя, отмечающего научное (или учебное) значение поставленной темы. Прочитанный доклад обычно завершается поправками, дополнениями и замечаниями руководителя в заключительном слове. Желательно создать вокруг доклада живой обмен мыслей слушателей. В качестве конкретного примера автор дает описание одного собрания кружка, руководимого им на 1-м курсе Геодезического института на тему: «Простые числа и их история».

Поскольку математика своими корнями глубоко внедряется в познание множества явлений общественной жизни человека, природы и техники, а ее история тесно увязана с историей человеческого труда, то все это обеспечивает универсальность ее приложений и дает возможность выбором тематики обеспечивать удовлетворение самых различных наклонностей и интересов кружковцев.

В главах V—XV автором рассматриваются следующие формы работы кружка:

1. Индивидуальная работа каждого члена: доклад и сочинение (V гл.).

2. Коллективная работа по изданию математического журнала или стенгазеты (VI гл.).

3. Секция по изготовлению математических пособий (VIII гл.).

4. Геодезическая секция по съемке плана и маркировании участка (IX гл.).

5. Математическая экскурсия в музей по искусству (X гл.).

6. Экскурсия в природу (XI гл.).

7. Производственная экскурсия (XII гл.).

8. Оборонная секция (XIII гл.).

9. Подготовка к школьной математической олимпиаде (VII гл.).

10. Математика малых форм: математические игры, вечера и оформление кабинета (XIV гл.).

Остановимся на каждой из форм работы.

Основной формой работы кружка автор считает выступление членов кружка на общем (или секционном) собрании кружка. С одной стороны, юношеский доклад должен быть действительно научным выступлением, а с другой — задача юношеского доклада коренным образом отличается от строго научного доклада взрослого перед аудиторией. Как сказано выше, основной задачей ученического доклада является воспитание в сознании и характере учащегося умственных и моральных качеств. Вот почему успешность работы кружка зависит не только от индивидуальных свойств докладчика, но также от умелости руководителя кружка.

В главе III автор подробно останавливается на особенностях руководства кружком. Работа руководителя кружка требует от него гораздо большего количества знаний и затраты труда, чем это достаточно для рядового преподавателя. Причиною этого является, с одной стороны, обширность и разнообразность тематики, а, с другой — сложность методики руководства работой. Автор полагает, что успешность индивидуального руководства кружковой работой отдельного преподавателя повысится, если, наряду с личной его работой над самим собой, будет протекать его работа в коллективе соревнующихся руководителей математических кружков и общение с руководителями кружков иных специальностей (физика, естествознание, история и т. п.).

Математический журнал (или стенгазета) имеет целью придать внеклассной работе кружка массовый характер. С помощью своего органа печати математический кружок знакомит своих товарищей с работой кружка и привлекает новых членов. Эта форма работы может удовлетворять разнообразным запросам и наклонностям членов кружка и воспитывает умение работать в коллективе. Автор дает перечень возможных отделов журнала: передовая, небольшие научные сообщения, переводы статей, примеры и задачи, легкая математика, хроника, объявление о выходе следующего номера.

Секция математических приборов выполняет в математической мастерской заказы, получаемые ею от математического кабинета, а также обслуживает нужды докладчиков в демонстрационном материале (например, модель выпуклого многогранника для иллюстрации формулы Эйлера $В + Г = Р + 2$). Эта секция классифицирует и хранит пособия математического кабинета кружка.

Геодезическая секция организует «измерительные работы» на местности. С помощью покупных и самодельных геодезических инструментов члены кружка, организованные в небольшие бригады, производят снятие плана местности, маркируют участок для разбивки сада. Стимулом для такой работы является ее целенаправленность. Для простейших геодезических работ при планировке плодово-ягодных посадок, лесозащитных насаждений, озеленения улиц города может оказаться очень удобным прибор, называемый «шнуром с тремя кольцами». При всей своей несложности он позволяет решать задачи маркировки местности. Простейшие из них автор дает в систематическом порядке.

В трех главах (X, XI, XII) рассматривается методика математических экскурсий: в музей, в природу и на производство.

Экскурсия первой своей целью ставит выработку в сознатении члена экскурсии основ научного диалектического мышления и обогащение знанием новых фактов с помощью наглядно наблюдаемых экспонатов.

Музей изобразительных искусств имени А. С. Пушкина является обладателем самого древнего в мире египетского математического папируса, содержание которого было расшифровано трудами русских ученых (Струве, Тураева и др.). Ознакомление с этим научным сокровищем может послужить поводом для историко-математической беседы по истории математики в древности и самостоятельных выступлений учащихся.

В этом же музее имеются памятники древнегреческой скульптуры, макеты классической архитектуры. В основу последних было положено правило «Золотого сечения». Автор останавливается на математической его стороне и попутно приводит способ решения задачи с помощью перегибания бумаги (способ индуса С. Роу).

Отдельной темой музейной экскурсии является демонстрация законов линейной перспективы на экспонатах классической станковой живописи того же музея.

Математическая экскурсия в природу имеет целью раскрыть диалектические связи в явлениях природы помощью математического их анализа «найти в природе эти законы и из нее их развить» (Энгельс). Так, почки и листья на стебле располагаются не случайно, а подчиняются определенному порядку, называемому в ботанике «циклическим». На основании изучения плодового дерева и математического закона листорасположения можно указать способы формирования кроны дерева, т. е. управлять его ростом.

Экскурсия на пчельник и работа на пришкольной пасеке дают материал для постановки в кружке доклада члена на тему «Задача о пчелиной ячейке». Выяснение экстремальных свойств жилища пчелы (максимум кубатуры и минимум затраты строительного материала) может послужить для ряда докладов, как геометрического, так и алгебраического содержания. Математический материал может быть доставлен наблюдением над некоторыми насекомыми. Березовый слоник выкраивает для своего жилища трубочку конической формы, внешний край которой служит эвольвентой по отношению к внутреннему (эволюте).

Обязанностью руководителя является дать научное объяснение этих явлений в природе и указать, что действительно «пчела постройкой своих восковых ячеек посрамляет некоторых людей, архитекторов, но и самый плохой архитектор от наилучшей пчелы с самого начала отличается тем, что прежде, чем строить ячейку из воска, он уже построил ее в своей голове» (Маркс).

С экскурсией в природу можно связать устройство самодельных солнечных часов. Изготовление прибора в кружке и затем пользование им потребует ознакомления членов кружка с основными понятиями астрономии — солнечным, средним и местным временем, таблицами и номограммами для их вычисления.

В качестве примера экскурсии производственного типа автор остановился на описании экскурсии на водяную мельницу, имеющую, по свидетельству К. Маркса, все существенные части организма машины.

Поскольку зубчатые колеса являются необходимой деталью современного металлообрабатывающего станка и приборов самого различного назначения, то автор дает краткое изложение теории зубчатой передачи, способа подбора сменных шестерен и простейшего способа вычерчивания зуба эвольвентной формы.

В главе «Оборонная секция» рассматриваются некоторые задачи артиллерии, не требующие специальных знаний и доступных юношескому возрасту. В начале дается знакомство с основными терминами и понятиями для определения расстояния на-глаз с помощью подсчета «тысячных». В качестве задач оборонного типа рассматривается «окружность минного заграждения» и задача определения места «звучащей цели» (места пересечения гипербол).

В главе XV указаны примеры математических игр и развлечений «тихого» и коллективного типа. Одной из форм самодеятельности учащегося вне класса можно считать убранство математического кабинета (или класса) для математических собраний (настенные плакаты, лозунги, настольные картотеки и альбомы математического содержания). В заключении дается образец программы математических вечеров и описание некоторых коллективных математических игр.

Начиная с XV главы автор последовательно останавливается на вопросах последней части диссертации — содержания тем для кружковой работы.

Основой для этого послужили, как личный опыт автора, так и его ознакомление с соответствующими литературными источниками.

В главах XV—XIX рассматривается методика и тематика работы кружка, связанная с большими вопросами программы школы по алгебре.

Понятию функции и функциональной зависимости отводится в советской школе исключительное внимание. Освоение этих понятий воплощает в себе черты научного диалектического мышления и роднит программу средней школы с требованиями высшей. Автор останавливается на вопросе школьного и общего определения функции, как «соответствия» между значениями переменной и функции (Лобачевский), на способах аналитического выражения функции (многозначность и область определения) и на способах изображения функции (график и векторная диаграмма).

В главе XVI рассматривается алгебраическая целая, рациональная и иррациональная функция. Указывается «способ нити» для получения линейной и квадратной функции для выражения функциональной зависимости, доставляемой опытом и наблюдением. Приводится способ графического построения корней квадратного уравнения (действительных и мнимых) с помощью циркуля и линейки, и корней уравнения (3-й и 4-й степени) — с помощью двух прямых углов.

В заключение дается очерк истории учения об алгебраическом уравнении. Отмечается значение в этом вопросе открытий советских ученых (вопросы об алгебраических и трансцендентных числах).

Главы XVII и XVIII посвящены теории трансцендентных функций: показательной, логарифмической, тригонометрических и обратно круговых.

Автор останавливается на темах: происхождение таблиц натуральных логарифмов, на приложениях показательной функции e^x к вопросам механики и статистики (трение о вал, сложные проценты). Рассматривается пример показательного уравнения типа $a^x = bx$ и его частный случай $2^x = 4x$. В заключение излагается общий метод решения уравнений по способу последовательных приближений (или итерации).

В главе XVIII «Тригонометрическая и обратная круговая функция» в основном обращено внимание на свойства простой гармонической функции. Отмечается понятие радиана и способы его построения. Автор делает попытку дать элементарное представление о тригонометрическом ряде Фурье (с конечным количеством слагаемых), прилагая его теорию к исследованию очертания листа растения, надкрылий жука и т. п. Здесь же рассматривается ряд более трудных задач тригонометрии: задача Потенота, задача о возвращенном бильярдном шаре (Вивиани), определение формы развертки «цилиндрического башмака». Параграфы об обратных круговых функциях содержат исторические замечания о вычислении знаков числа П с помощью теоремы сложения обратных круговых функций. Рассмотрены ступенеобразные графики сложной тригонометрической функции $y = \mathrm{Arc}\sin(\mathrm{Sin}x)$ и $y = \mathrm{Arc}\cos(\cos x)$.

Поскольку теория пределов является одним из отделов школьной математики, роднящим содержание элементарной математики с высшей и служит основанием анализа бесконечно малых, то желательно в практике кружковой работы пользоваться терминологией и понятиями, свойственными этому отделу в математическом анализе. В основу рассуждений автор кладет понятие бесконечного процесса.

В главе XX рассматривается определение предела, формулируется принцип Вейерштрасса и признак Коши, дающие признаки сходимости к пределу. В качестве одной из иллюстраций рассматривается решение уравнения $x = 2 + \sqrt{2 + \sqrt{x}}$.

В заключение автор приводит элементарный вывод формулы для углового коэффициента касательной к синусоиде (производная) и вычисляет площадь арки синосоиды. Элементарно, на основании теории пределов, выводится разложение $\mathrm{Sin}x$ и $\mathrm{Cos}x$ в степенный ряд (Маклорена).

Следующие четыре главы работы (XX—XXIII) посвящены рассмотрению геометрической тематики работы кружка.

Основными вопросами планиматрии в главе «Геометрия» являются построение звездчатых правильных многоугольников, деление окружности на равные части по способу циркуля и линейки (точное и приближенное), теория разложения равновеликих фигур на попарно равные части, теорема Пифагора (формулы индусов), последняя теорема Ферма (доказательство в случае $n = 4$), окружность девяти точек и прямые Эйлера и Симпсона. Из стереометрических вопросов рассмотрены: формула Эйлера $В + Г = Р + 2$ для многогранников, правильные и полуправильные многогранники, задача о красках.

В заключении главы приведены образцы геометрических задач, как темы для внеклассной работы учащихся. Разобраны задачи — парадоксы и задачи — оптические обманы.

Следующая глава (XXI) содержит элементы проективной геометрии. Автор указывает, что правдоподобие изображения оригинала на картине обязано существованию инвариантных (или проективных) свойств в изображении и рассматривает теоремы, определяющие эти неизменно сохраняемые свойства: теорему Дезарга и ее доказательство с помощью пространственных плоскостей, теорему о двойном (или ангармоническом) отношении точек и лучей, теорему о полном четырехугольнике и о гармоническом отношении, задачу Паскаля для вписанного в круг шестиугольника и двойственную ей задачу об описанном около круга шестистороннике Брианшона. Эти теоремы иллюстрируются примерами задач на построение.

В школьном курсе уделяется место решению задач на построение с помощью циркуля и линейки (без делений). Как дополнение к этому на занятиях кружка желательно поставить ряд ученических докладов на темы: построения, выполняемые одним лишь циркулем (способ Маскерони), построения, выполняемые одной лишь линейкой при наличии пары параллельных прямых или при наличии круга с центром (способ Штейнера), наконец, можно ограничиться линейкой данной ширины с параллельными краями, или подвижным прямым углом. Задачи, решаемые этим способом, приведены в главе XXII.

Имя Н. И. Лобачевского занимает одно из первых мест среди русских ученых и ученых всего мира. Своим открытием в теории параллельных линий он разбил вековые традиции и имел мужество сообщить о своем научном достижении человечеству. К нему могут быть отнесены слова И. В. Сталина: «люди науки, понимая силу и значение установившихся в науке традиций и умело используя их в интересах науки, все же не хотят быть рабами этих традиций». * Знакомство не только с жизнью и деятельностью этого великого человека, но и основами его геометрии, автор считает вполне возможным и доступ-

* Речь на приеме в Кремле работников высшей школы 17-го мая 1938 года.

ным излагать для членов школьного математического кружка в форме беседы руководителя.

Для этого нужно дать предварительные сведения о причинах возникновения проблемы, затем привести небольшое число теорем геометрии Лобачевского и сообщить их доказательство. Так дается доказательство теоремы о верхней границе суммы углов треугольника и непостоянстве этой суммы. Приводится выражение функциональной зависимости «угла параллельности» от «перпендикула» и дается анализ формулы

$$\Pi(p) = 2 \operatorname{arctg} e^{-\frac{p}{r}}$$

В беседе руководитель приводит расчет Лобачевского о нижней границе длины радиуса пространства, при которой геометрия Евклида должна уступить свое место геометрии Лобачевского. Силами кружковцев может быть изготовлена модель той поверхности Бельтрами (псевдосферы), на которой можно наглядно осуществить плоскую геометрию Лобачевского.

Последние главы работы носят дополнительный характер, так как их содержание выходит за рамки алгебры и геометрии.

В главе XXIV дается примерный план работы кружка по теории устного счета. Устный (или умственный) счет в форме сокращающих время счетчика правил в средней школе в старших классах обычно отсутствует. Учащиеся всегда с интересом воспринимают счет «по правилам». Автор приводит формулы возведения в квадрат проф. Млодзеевского и формулы умножения с помощью «базы» и «округлителя». Дается правило письменного умножения по способу Фурье (или Ферроля).

В той же главе рассмотрены способы приближенных вычислений. Сначала устанавливается понятие «абсолютно» и «относительно» точной цифры и «бросовых» цифр числа. Затем приводятся в сокращенной форме правила приближенных вычислений по способу «подсчета цифр» (проф. Брадис). В заключении упоминается о «способе двойных вычислений» (или способе границ чисел).

Оживление интереса к изучаемому предмету в значительной степени обусловлено знанием его истории. Историческое начало в обучении содействует диалектическому мышлению учащегося. Отмечая некоторые трудности проведения исторического элемента в кружковой работе, автор считает, однако, осуществление историзма в преподавании чрезвычайно важным, при этом указывает два возможных пути. С одной стороны, желательно знакомить учащихся с вопросами истории математики, выходящими за пределы классной программы, но имеющими образовательное значение (арифметика и геометрия древнего Египта, история числа π и квадратуры круга и т. п.), с другой стороны, следует в кружке проводить беседы и доклады, связанные со школьным курсом математики, как-то «исторические сведения об открытии иррациональных чисел», «История изобретения таблиц логарифмов» и т. п. Как образец исторической беседы, автор приводит тему об открытии Чебышевым функций наименее уклоняющихся от нуля и классическую Делийскую задачу об удвоении объема куба. Примером исторической задачи нашего времени могут служить две задачи времен Великой Отечественной войны. Одна из них была предметом дискуссии на семинаре учителей в осажденном Ленинграде: разделить данный круг на две равновеликие части с помощью дуги окружности радиуса, равного радиусу делимого круга, вторая принадлежит к типу задач математического фольклора и получена была автором в свое время от одного из участников обороны Севастополя.

В последней (XXVII) главе автор ставит вопрос, можно ли и нужно ли включать в программу кружковых занятий темы из таких отделов математики, как теория чисел, теория вероятностей и теория множеств. Автор решает этот вопрос положительно. Отмечая трудности подбора материала и новизну методики, автор считает, что знакомство учащихся с новейшими достижениями математики нужно для расширения умственного кругозора учащихся, и это можно сделать, если на первый план выдвинуть принцип практической целенаправленности новых знаний, понимая это в самом широком смысле слова (в смысле повышения умственной мощи человека).

Учащийся лишь в детском возрасте знакомится со свойствами целого числа и потому не выносит из школы научных знаний по теории целого числа. Простое число является типичным понятием теории чисел. С одной стороны, оно обладает свойствами, формулировка которых очень проста, а, с другой, природа целого числа чрезвычайно сложна. Тема о простом числе чрезвычайно гибка. Она включает как сравнительно простые вопросы, поддающиеся описательному изложению, так и вопросы, требующие некоторой тренировки в доказательстве теорем высшей арифметики (история попыток дать формулы для получения простых чисел, с одной стороны, доказательство Евклида о неограниченности ряда простых чисел, с другой стороны). Автор останавливается на формуле распределения простых чисел в натуральном ряду, данной П. Л. Чебышевым, и с помощью ее подтверждает неравенство Бертрана. Приложением последнего может служить доказательство любопытной теоремы С. О. Шатуновского, гласящей, что число 30 является наибольшим, для которого взаимно простые числа, меньшие его, надо искать лишь среди простых чисел. Выведенную малую теорему Ферма (частное Ферма $\frac{a^p - a}{p} =$ цел. ч., где p — простое и a — целое число) удобно применить к решению линейного неопределенного уравнения в целых числах.

Имеется некоторое число вопросов теории чисел, допускающих описательный характер изложения. Таковы, например, проблема Варинга о разложении целых чисел на сумму одинаковых степеней, впервые решенная академиком И. М. Виноградовым, проблема Гольдбаха о разложении всякого нечетного числа на сумму не более трех простых слагаемых, также доказанную Виноградовым, «седьмая задача Гильберта» о природе числа α^{β} (где α и β — алгебраические числа и β — иррациональность); эта задача была решена московским проф. А. О. Гельфондом.

Поскольку множество жизненных явлений, научных наблюдений и опытов принадлежат к так называемым массовым процессам, то знакомство с понятиями науки о массовых явлениях — теории вероятностей, необходимо и для членов юношеской организации. Ознакомление с понятиями теории вероятностей следует начинать с пропедевтики — с эксперимента. Понятия теории вероятностей являются отражением таких жизненных процессов, которые не всегда попадают в поле внимания наблюдателя, в особенности юного. Поэтому желательно начать со статических таблиц, подтверждающих устойчивость некоторых средних (автор приводит таблицу о числе детей, гибнущих на улицах Лондона от несчастных случаев). Можно указать следующие примеры сравнительно легко осуществимых опытов по теории вероятностей: подсчет средней суммы шести знаков трамвайного билета (сумма близка к 27), подсчет частостей выпавшей суммы очков на двух шестигранных костях и сравнение частости с вычисленной вероятностью; проверка опытом теоремы Чебышева о вероятности несократимости случайной дроби (оценка результата с помощью числа π). Из задач технического характера, полагающихся на законы теории вероятностей, можно привести задачу о дверном замке (вероятность его открытия случайным ключом при определенных данных легко может быть подсчитана). Подтверждение биномиального закона распределения сложных событий, состоящих из повторения простого и ему противоположного события, может быть продемонстрирована с помощью доски Гальтона, изготовление которой можно поручить мастерской. На основе опытного материала при благоприятных условиях может быть построена теория действий над вероятностями — теоремы сложения и умножения. Автор приводит некоторые задачи теории вероятностей. Обобщением обычного понятия вероятностей является геометрическая вероятность. Ее вычисление связано с решением геометрических задач на вычисление длины дуги кривой и площади фигуры. Автор приводит несколько задач, когда эти вычисления производятся элементарными способами (задача Бюффона об игле, задача о встрече и др.).

Можно ли и нужно ли знакомить юношество с элементами теории множеств? Своеобразие изучаемого ею материала состоит в том, что предмет ее прост. Это совокупность считаемых предметов, но образующих бесконечный ряд (ряд в смысле считаемых предметов).

Эта необычность применения счета требует со стороны преподавателя не только строго продуманного выбора материала, но также и тщательной его обработки применительно к пониманию юного слушателя (часть материала дается в форме беседы преподавателя). Автор сначала останавливается на понятии равенства множеств, отмечает, что для бесконечных множеств отпадает аксиома «часть меньше своего целого». Не представляет большой трудности доказательство леммы об эквивалентности множеств правильных и неправильных дробей и затем теоремы о счетности множества всех рациональных чисел. Попутно отмечается свойство счетных множеств, называемое теоремой сложения множеств. Несколько сложнее доказательство счетности множества всех алгебраических чисел. Доказательство несчетности (континума) множества всех вещественных чисел опирается на вспомогательную теорему: множество всех вещественных чисел, содержащихся в промежутке (0,1),— не счетное. Теорема доказывается «диагональным методом». Доказательство теоремы может быть показано геометрически с помощью однозначного соответствия между точками отрезка на оси (0,1) и точками всей бесконечной оси. Целенаправленность теорем множеств выражается в том, что они еще раз подтверждают существование иррационального, алгебраического и трансцендентного чисел.

В заключении своей работы автор признается, что предлагаемый в работе материал отнюдь не претендует на исчерпывающую полноту. Он считает, что больным местом кружковой работы является: 1) недостаточное количество кадров опытных, знающих свое дело преподавателей — руководителей математических кружков, 2) отсутствие больших тиражей популярной математической литературы; 3) недостаточность оборудования математических кабинетов пособиями.

Автор выражает уверенность, что широкое развитие сети математических кружков по элементарной математике и началам высшей отвечает общим задачам советской школы, воспитывающей подрастающее поколение в духе коммунизма, вооружающей учащихся полноценными знаниями, прививающей молодежи любовь и уважение к труду и умение преодолевать любые трудности, понимать и ценить прекрасное в природе.

А 02986 1 печ. л. Тираж 100 Заказ 1011

Типография Министерства дорожного и транспортного хозяйства РСФСР