ГЛАВА VII

ТЕОРИЯ ПАР СИЛ В ПРОСТРАНСТВЕ

§ 40. Момент пары сил

Числовое значение момента пары сил на плоскости равно произведению одной из сил пары на ее плечо, а знак момента определяется направлением, в котором пара сил стремится вращать плоскость.

В пространстве направление вращения, вызываемого парой сил в плоскости ее действия, не характеризуется знаком ее момента, так как смотря на плоскость действия пары сил с различных ее сторон, можно видеть одну и ту же пару стремящейся вращать плоскость в различных направлениях. Момент пары сил в пространстве рассматривают как вектор (рис. 104а и б), направленный по перпендикуляру к плоскости заданной пары сил в такую сторону, чтобы, смотря навстречу этому вектору, видеть пару стремящейся вращать плоскость против движения часовой стрелки. Этот вектор может быть приложен в любой точке плоскости действия пары, так как пару в этой плоскости можно переносить.

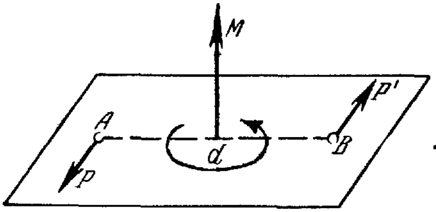

Рис. 104а.

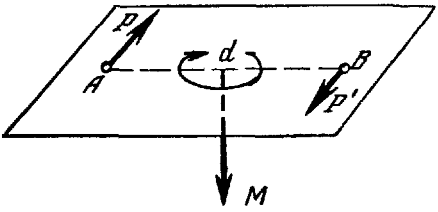

Рис. 104б.

Модуль вектора момента равен произведению одной из сил пары на ее плечо:

$$M = Pd.$$

Таким образом, вектор момента определяет не только числовое значение момента, а также плоскость действия пары сил и направление, в котором пара стремится вращать эту плоскость.

§ 41. Теорема о возможности переноса пары сил в любую плоскость, параллельиую плоскости действия пары

Заданную пару сил, не изменяя ее действия на твердое тело, можно перенести в любую плоскость, параллельную плоскости действия этой пары.

Положим, что к некоторому твердому телу приложена пара сил **P**, **P**$'$ с плечом AB, расположенная в плоскости I.

Проведем плоскость II, параллельную поскости I, и возьмем в этой плоскости отрезок DC, равный и параллельный отрезку AB, и приложим к концам этого отрезка по две взаимно уравновешивающиеся силы, равные по модулю и параллельные силам рассматриваемой пары (рис. 105а):

$$P_1 = P_2 = P_3 = P_4 = P.$$

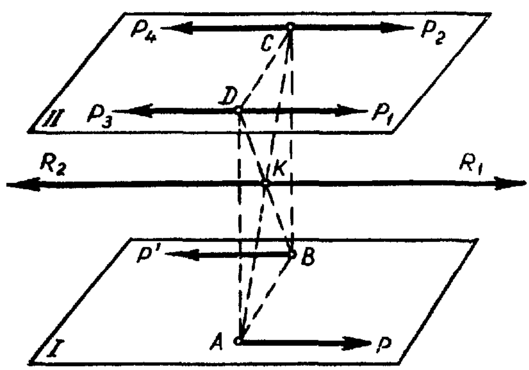

Рис. 105а.

Сложим силу **P**, приложенную в точке A, с силой $\mathbf{P}_2$, приложенной в точке C. Их равнодействующая $R_1 = P + P_2$, приложена в точке K, делящей отрезок AC пополам, т. е. в точке пересечения диагоналей параллелограмма $ABCD$. Сложив силу $\mathbf{P}'$, приложенную в точке B, с силой $\mathbf{P}_3$, приложенной в точке D, получим их равнодействующую $R_2 = P' + P_3$, которая также приложена в точке K.

Силы $\mathbf{R}_1$ и $\mathbf{R}_2$, как равные по модулю и направленные по одной прямой в противоположные стороны, взаимно уравновешиваются. Остаются силы $\mathbf{P}_1$ и $\mathbf{P}_4$, составляющие пару сил с плечом DC, расположенную в плоскости II, параллельной плоскости I. Эта пара сил, эквивалентная заданной паре сил, стремится вращать плоскость II в том же направлении, в котором стремится вращать плоскость I заданная пара сил, а момент эквивалентной пары сил численно равен моменту заданной пары сил:

$$M_2 = M_1 = Pd.$$

Таким образом, пару сил можно переносить из одной плоскости в другую, параллельную ей плоскость.

§ 42. Теорема об эквивалентных парах

Пары сил эквивалентны, если их моменты геометрически равны.

Положим, что даны две пары сил, лежащие в различных плоскостях и имеющие геометрические равные моменты $\mathbf{M}_1 = \mathbf{M}_2$. Докажем, что эти пары эквивалентны.

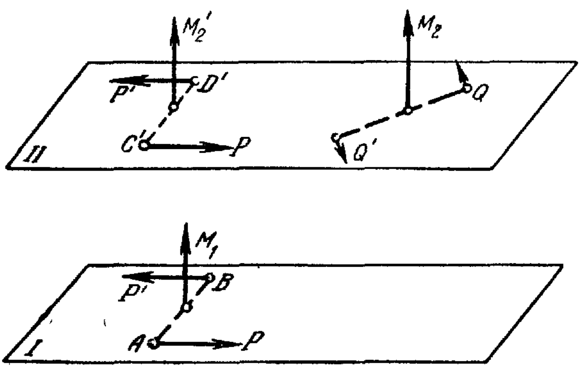

Рис. 105б.

Так как моменты $\mathbf{M}_1$ и $\mathbf{M}_2$ пар $\mathbf{P}$, $\mathbf{P}'$ и $\mathbf{Q}$, $\mathbf{Q}'$ геометрически равны, т. е. не только равны по модулю, но и совпадают по направлению, то плоскость I действия пары $\mathbf{P}$, $\mathbf{P}'$ и плоскость II действия пары $\mathbf{Q}$, $\mathbf{Q}'$ параллельны, и направления, в которых пары сил стремятся вращать эти плоскости, совпадают (рис. 105б). Согласно предыдущей теореме, пару сил $\mathbf{P}$, $\mathbf{P}'$ с плечом AB в плоскости I

можно заменить эквивалентной ей такой же парой сил **P**, **P′** с плечом $C'D' = AB$ в плоскости *II* с моментом

$$\mathbf{M}_2' = \mathbf{M}_1.$$

Согласно § 15, полученная пара сил эквивалентна паре **Q**, **Q′** в той же плоскости *II*, так как

$$\mathbf{M}_2' = \mathbf{M}_1 = \mathbf{M}_2.$$

Таким образом, пара **P**, **P′** в плоскости *I* эквивалентна паре **Q**, **Q′** в плоскости *II*.

Из доказанной теоремы следует, что *момент пары сил является свободным вектором*, т. е. его можно переносить в любую точку пространства, не изменяя его модуля и направления.

§ 43. Сложение пар сил в пространстве. Условие равновесия пар

Рассмотрим сложение двух пар, расположенных в пересекающихся плоскостях и докажем следующую теорему:

Геометрическая сумма моментов составляющих пар равна моменту эквивалентной им пары сил.

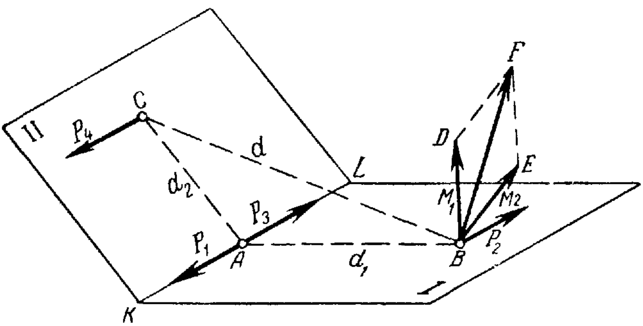

Рис. 106.

Пусть требуется сложить две пары сил, расположенные в пересекающихся плоскостях *I* и *II*, имеющие моменты $\mathbf{M}_1$ и $\mathbf{M}_2$ (рис. 106).

Выбрав силы этих пар равными по модулю

$$P_1 = P_2 = P_3 = P_4 = P,$$

определим плечи этих пар:

$$d_1 = \frac{M_1}{P} \quad \text{и} \quad d_2 = \frac{M_2}{P}.$$

Расположим эти пары таким образом, чтобы силы $\mathbf{P}_1$ и $\mathbf{P}_3$ были направлены по линии пересечения плоскостей *KL* в противоположные стороны и уравновешивались.

Оставшиеся силы $\mathbf{P}_2$ и $\mathbf{P}_4$ образуют пару сил, эквивалентную данным двум парам. Эта пара сил имеет плечо $BC = d$ и момент, перпендикулярный к плоскости пары, равный по модулю $M = Pd$.

Покажем, что геометрическая сумма моментов составляющих пар равна моменту эквивалентной пары. Так как момент пары сил является свободным вектором, перенесем моменты составляющих пар $\mathbf{M}_1$ и $\mathbf{M}_2$ в точку B и сложим их, построив на этих моментах параллелограмм.

Докажем, что его диагональ $\overline{BF} = \mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_2$ представляет собой момент эквивалентной пары сил $\mathbf{P}_2$, $\mathbf{P}_4$. Для этого необходимо доказать, что:

1) $BF = Pd$;

2) отрезок BF перпендикулярен к плоскости действия эквивалентной пары $\mathbf{P}_2$, $\mathbf{P}_4$;

3) смотря навстречу вектору $\overline{BF}$, можно видеть пару $\mathbf{P}_2$, $\mathbf{P}_4$, стремящейся вращать плоскость, в которой она расположена, в сторону, противоположную движению часовой стрелки.

Доказательство

1. Треугольники BAC и BDF подобны, так как

$$M_1 = Pd_1; \quad M_2 = Pd_2;$$

$$\frac{M_1}{M_2} = \frac{d_1}{d_2}, \quad \text{т. е.} \quad \frac{BD}{DF} = \frac{BA}{AC}$$

и $\angle BDF = \angle BAC$, как углы со взаимно перпендикулярными сторонами.

Из подобия этих треугольников следует, что

$$\frac{BF}{BD} = \frac{BC}{BA}, \quad \text{т. е.} \quad \frac{BF}{M_1} = \frac{d}{d_1},$$

откуда

$$BF = M_1 \frac{d}{d_1} = Pd_1 \frac{d}{d_1} = Pd.$$

2. Так как вектор момента каждой пары сил перпендикулярен к плоскости действия этой пары, то:

$$\mathbf{M}_1 \perp \mathbf{P}_2 \quad \text{и} \quad \mathbf{M}_2 \perp \mathbf{P}_2,$$

а потому плоскость параллелограмма $BDFE$ перпендикулярна к силе пары $\mathbf{P}_2$ и $\overline{BF} \perp \mathbf{P}_2$.

Кроме того, $\angle DBA = 90°$ и $\angle CBA = \angle FBD$, откуда $\angle CBF = 90°$, т. е. $BF \perp BC$.

Так как диагональ параллелограмма BF перпендикулярна к силе пары $\mathbf{P}_2$ и к плечу пары BC, то можно утверждать, что она перпендикулярна к плоскости действия эквивалентной пары $\mathbf{P}_2$, $\mathbf{P}_4$.

3. Выполнение третьего условия показано на рисунке 106. Смотря навстречу вектору $\overline{BF}$, можно видеть пару $\mathbf{P}_2$, $\mathbf{P}_4$ стремящейся вращать плоскость, в которой она расположена, против движения часовой стрелки.

Из вышеизложенного следует, что вектор $\overline{BF} = \mathbf{M}$, т. е. геометрическая сумма моментов составляющих пар равна моменту эквивалентной пары:

$$\mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_2 = \mathbf{M}.$$

Установленное правило сложения моментов пар называется *правилом параллелограмма моментов*.

Построение параллелограмма моментов можно заменить построением треугольника моментов. Применяя построение параллелограмма или треугольника моментов, можно решить и обратную задачу, т. е. разложить любую пару сил на две составляющие пары.

Пусть требуется сложить несколько пар, расположенных произвольно в пространстве (рис. 107). Определив моменты этих пар,

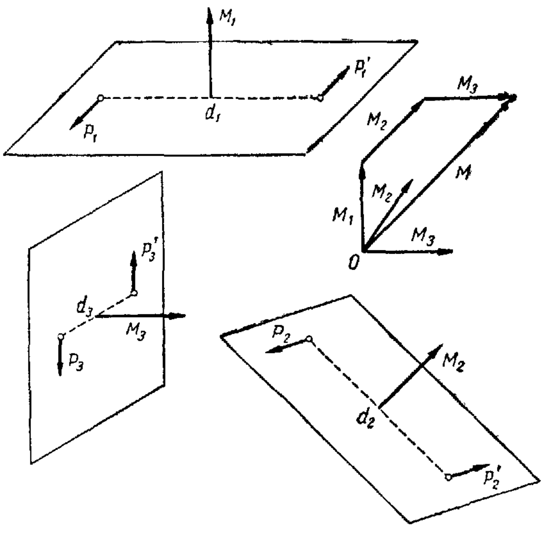

Рис. 107.

согласно § 42, их можно перенести в любую точку O пространства. Складывая последовательно моменты этих пар, можно построить многоугольник моментов пар, замыкающая сторона которого определит момент эквивалентной им пары сил.

На рис. 107 показано построение многоугольника моментов при сложении трех пар.

Момент пары сил, эквивалентной данной системе пар в пространстве, равен геометрической сумме моментов составляющих пар.

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_2 + \ldots + \mathbf{M}_n \quad \text{или} \quad \mathbf{M} = \sum \mathbf{M}_i. \qquad (43.1)$$

Если момент эквивалентной пары сил равен нулю, то пары уравновешиваются

$$\mathbf{M} = \sum \mathbf{M}_i = 0. \tag{43.2}$$

Таким образом, условие равновесия пар сил, расположенных произвольно в пространстве, можно сформулировать так:

Пары сил, расположенные произвольно в пространстве, уравновешиваются в том случае, если геометрическая сумма их моментов равна нулю.

ГЛАВА VIII

МОМЕНТ СИЛЫ ОТНОСИТЕЛЬНО ТОЧКИ И ОТНОСИТЕЛЬНО ОСИ

§ 44. Момент силы относительно точки как векторное произведение

Момент силы относительно точки в пространстве изображается вектором, модуль которого равен произведению модуля силы на ее плечо относительно этой точки (центра момента):

$$M_O = Pd.$$

Вектор момента силы направляется перпендикулярно к плоскости, проходящей через точку O и силу $\mathbf{P}$, в такую сторону, чтобы, смотря навстречу этому вектору, видеть силу $\mathbf{P}$, стремящейся вращать эту плоскость вокруг точки O против движения часовой стрелки (рис. 108).

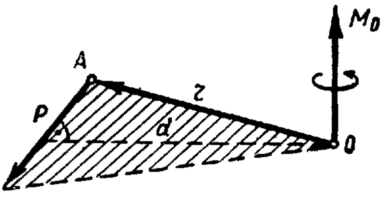

Рис. 108.

Модуль момента силы относительно точки может быть также выражен удвоенной площадью треугольника AOB:

$$M_O = 2 \triangle AOB.$$

Момент силы относительно точки равен нулю в том случае, если линия действия силы проходит через эту точку, т. е. $d = 0$.

Если из центра O в точку приложения силы провести радиус-вектор $\mathbf{r}$ (рис. 107), то вектор момента силы можно выразить следующим векторным произведением: $\mathbf{M}_O = \mathbf{r} \times \mathbf{P}$.

Как известно из векторной алгебры, вектор, равный векторному произведению $\mathbf{r} \times \mathbf{P}$, направлен по перпендикуляру к плоскости векторов — сомножителей, т. е. к плоскости $\triangle AOB$, в такую сторону, чтобы, смотря ему навстречу, видеть совмещение первого множителя $\mathbf{r}$ со вторым множителем $\mathbf{P}$ (отложенным из той же точки O) в виде поворота на угол, меньший 180°, против движения часовой стрелки, т. е. направление векторного произведения $\mathbf{r} \times \mathbf{P}$ совпадает с направлением момента $\mathbf{M}_O$.