т. е. момент равнодействующей относительно произвольного центра приведения равен геометрической сумме моментов составляющих сил относительно этого же центра.

Установим теперь зависимость между моментом равнодействующей силы и моментами составляющих сил относительно некоторой оси.

Проведем через центр приведения O произвольную ось z и определим момент равнодействующей силы $M_z(\mathbf{R})$ относительно оси z как проекцию ее момента $\mathbf{M}_O(\mathbf{R})$ относительно точки O на эту ось (рис. 117).

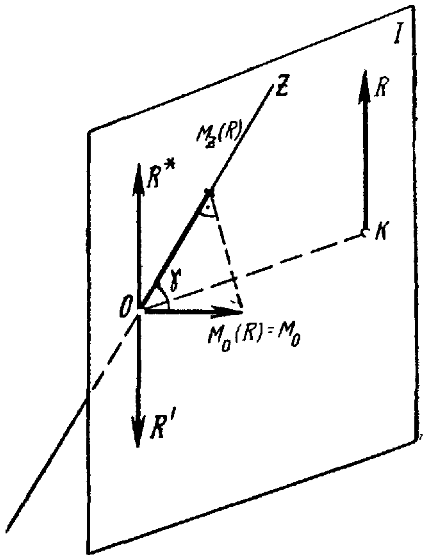

Рис. 117.

Согласно § 46, получим:

$$M_z(\mathbf{R}) = M_O(\mathbf{R}) \cos \gamma,$$

где γ — угол между осью z и направлением вектора $\mathbf{M}_O(\mathbf{R})$.

В этом выражении $\mathbf{M}_O(\mathbf{R})$ заменим геометрически равным ему главным моментом $\mathbf{M}_O$, проекция которого на ось z, проходящую через точку O, равна главному моменту сил относительно этой оси (§ 49); тогда получим:

$$M_z(\mathbf{R}) = M_O \cos \gamma = M_z.$$

Известно, что главный момент системы сил M_z относительно оси z равен алгебраической сумме моментов составляющих сил относительно этой оси, а поэтому

$$M_z(\mathbf{R}) = M_z = M_{1z} + M_{2z} + \ldots + M_{nz}, \tag{56.2}$$

т. е. момент равнодействующей силы относительно произвольной оси z равен алгебраической сумме моментов составляющих сил относительно этой оси.

§ 57. Приведение произвольной системы сил к двум скрещивающимся силам или к силовому винту (динаме)

В том случае, если главный вектор системы сил $\mathbf{R}^*$ и ее главный момент $\mathbf{M}_O$ относительно центра приведения O не равны нулю и не перпендикулярны между собой, т. е. $\mathbf{R}^* \neq 0$, $\mathbf{M}_O \neq 0$ и $\mathbf{R}^*$ не перпендикулярно $\mathbf{M}_O$, заданную систему сил можно привести или к двум скрещивающимся силам или к силовому винту (динаме).

Рассмотрим сначала приведение системы сил к двум скрещивающимся силам (рис. 118). Пусть после приведения системы сил к некоторому центру O получена сила $\mathbf{R}^*$, равная главному вектору, приложенная в этом центре, и пара сил, момент которой $\mathbf{M} = \mathbf{M}_O$ не перпендикулярен $\mathbf{R}^*$.

Проведем плоскость II, перпендикулярную к моменту пары сил $\mathbf{M}$, и выбрав плечо пары d, а силы пары $Q = Q' = \frac{M}{d}$, расположим в этой плоскости пару сил $\mathbf{Q}$, $\mathbf{Q}'$, эквивалентную системе присоединенных пар. Приложим одну из сил пары $\mathbf{Q}'$ в точке O, а другую силу $\mathbf{Q}$ — на конце отрезка OK, проведенного из точки O перпендикулярно к силе $\mathbf{Q}'$. Сложив приложенные в точке O силы $\mathbf{R}^*$ и $\mathbf{Q}'$, получим новую силу $\mathbf{P}$, которая вместе с силой $\mathbf{Q}$, приложенной в точке K, представляет собой совокупность двух скрещивающихся сил.

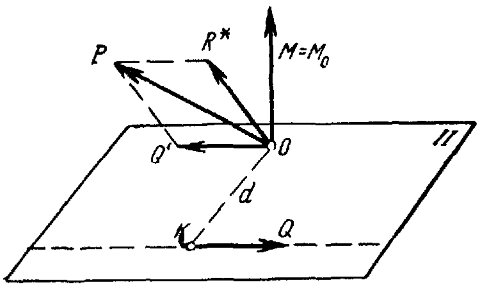

Рис. 118.

Покажем, что в этом случае рассматриваемую систему сил можно также привести к силовому винту — динаме, представляющей собой совокупность силы и пары сил, расположенной в плоскости, перпендикулярной к линии действия этой силы.

Допустим, что в результате приведения заданной системы сил к центру O, получена в этом центре сила $\mathbf{R}^*$ и пара сил, момент которой $\mathbf{M}$, равный главному моменту системы сил $\mathbf{M}_O$, не перпендикулярен $\mathbf{R}^*$ (рис. 119).

Известно, что пару сил можно заменить двумя парами. Для этого разложим момент пары сил $\mathbf{M}$ на два составляющих момента: $\mathbf{M}^*$, направленный по $\mathbf{R}^*$, и $\mathbf{M}'$, направленный перпендикулярно к $\mathbf{R}^*$:

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}^* + \mathbf{M}'. \tag{57.1}$$

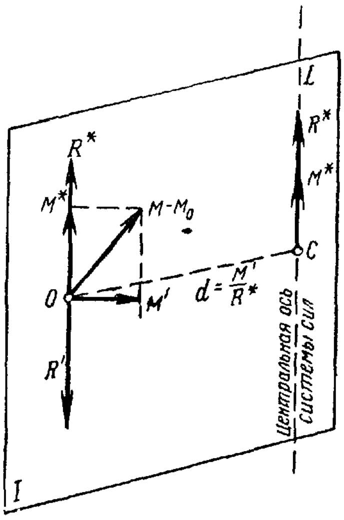

Рис. 119.

Изобразим в плоскости I пару сил, имеющую момент $\mathbf{M}'$. Силы этой пары возьмем равными по модулю $\mathbf{R}^*$ и одну из сил пары $\mathbf{R}'$ приложим в точке O и направим противоположно главному вектору. Плечо этой пары сил

$$d = \frac{M'}{R^*}. \tag{57.2}$$

Отложим плечо $d = OC$ в плоскости I от точки O по направлению, перпендикулярному векторам $\mathbf{R}^*$ и $\mathbf{M}'$ в такую сторону, чтобы, смотря навстречу вектору момента пары $\mathbf{M}'$, видеть пару сил стремящейся вращать плоскость I против движения часовой стрелки.

Две силы $\mathbf{R}^*$ и $\mathbf{R}'$, приложенные в точке O, взаимно уравновешиваются. Остается сила $\mathbf{R}^*$, приложенная в точке C, и пара сил с моментом $\mathbf{M}^*$, параллельным $\mathbf{R}^*$, который как свободный вектор переносим из точки O в точку C.

Прямая CL, вдоль которой направлены $\mathbf{R}^*$ и $\mathbf{M}^*$, называется *центральной осью системы сил.*

Совокупность силы $\mathbf{R}^*$ *и пары сил* $\mathbf{P}$, $\mathbf{P}'$ *с моментом* $\mathbf{M}^*$, *расположенной в плоскости, перпендикулярной линии действия этой силы, называют силовым винтом, или динамой* (рис. 120).

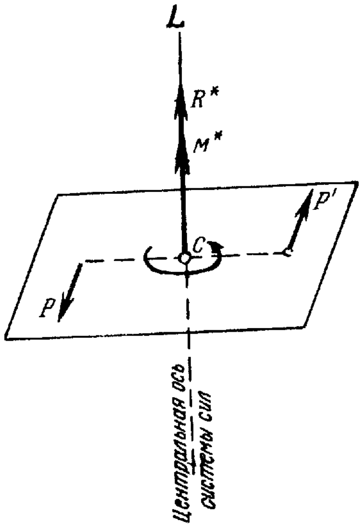

Рис. 120.

Полученную совокупность силы $\mathbf{R}^*$ в точке C и пары сил с моментом $\mathbf{M}^*$ можно рассматривать как результат приведения заданной системы сил к центру C, лежащему на центральной оси. Следовательно, момент пары сил $\mathbf{M}^*$ равен главному моменту $\mathbf{M}_C$ заданной системы сил относительно точки C, лежащей на центральной оси. Совокупность силы $\mathbf{R}^*$ и момента пары $\mathbf{M}^*$ можно перенести в любую точку центральной оси, так как эта ось является линией действия силы $\mathbf{R}^*$, а момент пары $\mathbf{M}^*$ является свободным вектором.

Отсюда следует, что главные моменты системы сил относительно *всех точек центральной оси равны* $\mathbf{M}^*$.

Рассмотрим изменение главного момента $\mathbf{M}_O$ системы сил относительно произвольной точки O при изменении положения этой точки по отношению к центральной оси.

Согласно формуле (57.1), имеем (рис. 119):

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}_O = \mathbf{M}^* + \mathbf{M}',$$

где, согласно формуле (57.2), $M' = R^*d$.

Модуль главного момента M_O определится:

$$M_O = \sqrt{M^{*2} + M'^2} = \sqrt{M^{*2} + R^{*2}d^2}, \tag{57.3}$$

где d — расстояние от точки O до центральной оси.

Направление $\mathbf{M}_O$ определится углом, образованным $\mathbf{M}_O$ и главным вектором $\mathbf{R}^*$:

$$\cos(\mathbf{M}_O, \mathbf{R}^*) = \frac{M^*}{M_0} = \frac{M^*}{\sqrt{M^{*2} + R^{*2}d^2}}. \tag{57.4}$$

Очевидно, что $\cos(\mathbf{M}_O, \mathbf{R}^*) > 0$ при $M^* > 0$, тогда $\angle(M_O, \mathbf{R}^*) < 90°$ и направление $\mathbf{M}^*$ совпадает с направлением $\mathbf{R}^*$ (рис. 119). При $\cos(\mathbf{M}_O, \mathbf{R}^*) < 0$: имеем $M^* < 0$ тогда $\angle(\mathbf{M}_O, \mathbf{R}^*) > 90°$, т. е. направления $\mathbf{M}^*$ и $\mathbf{R}^*$ противоположны. В формулах (57.3) и (57.4) переменной величиной для заданной системы сил является только расстояние d.

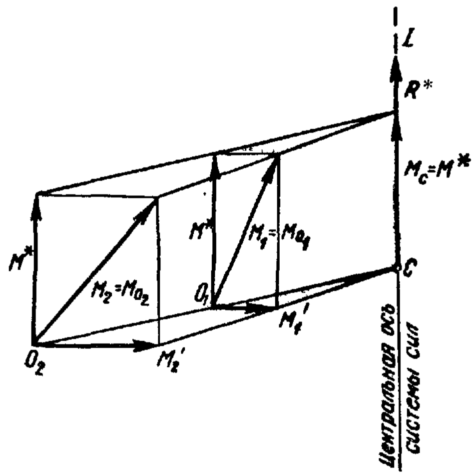

Рис. 121.

Эти формулы показывают, что при увеличении расстояния d от точки O до центральной оси модуль главного момента M_O увеличивается, а $\angle(\mathbf{M}_O, \mathbf{R}^*)$ приближается к прямому углу (рис. 121). Для любой точки C, лежащей на центральной оси, $d = 0$, а потому

$$\cos(\mathbf{M}_C, \mathbf{R}^*) = \pm 1 \text{ и}$$

$$M_C = |M^*| = M_{\min},$$

т. е. $\angle(\mathbf{M}_C, \mathbf{R}^*) = 0$ или π.

Полученные результаты показывают, что главный момент рассматриваемой системы сил относительно любой точки центральной оси направлен вдоль этой оси в ту или другую сторону и имеет наименьший для этой системы сил модуль, равный M^*. Таким образом, *центральная ось системы сил представляет собой геометрическое место точек пространства, относительно которых главные моменты заданной системы сил имеют наименьший модуль* $M_{\min} = |M^*|$ *и направлены вдоль этой оси.*

Рассмотрим точки, находящиеся на одинаковом расстоянии от центральной оси, т. е. лежащие на поверхности кругового цилиндра, осью которого является центральная ось системы сил.

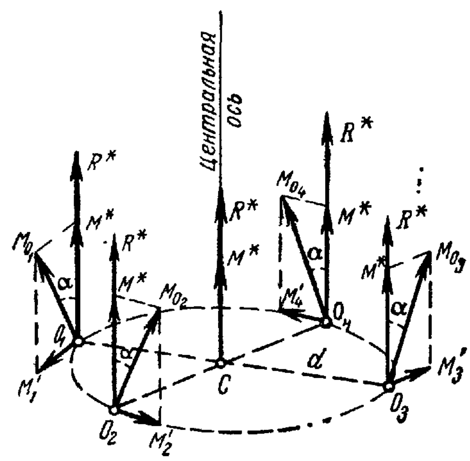

Рис. 122.

Согласно формулам (57.3) и (57.4), главные моменты системы сил относительно этих точек равны по модулю и составляют с образующей цилиндра одинаковый угол α (рис. 122).

Установим формулу для вычисления алгебраического значения наименьшего главного момента заданной системы сил.

Наименьший главный момент системы сил $\mathbf{M}^*$ равен проекции главного момента рассматриваемой системы сил $\mathbf{M}_O$ на направление главного вектора $\mathbf{R}^*$ (рис. 119):

$$M^* = M_O \cos(\mathbf{M}_O, \mathbf{R}^*). \qquad (57.5)$$

Умножив обе части равенства (57.5) на R^*, получим

$$R^* M^* = R^* M_O \cos(\mathbf{M}_O, \mathbf{R}^*). \qquad (57.6)$$

Правая часть равенства (57.6) представляет собой величину скалярного произведения $\mathbf{R}^*$ и $\mathbf{M}_O$, т. е.

$$R^* M_O \cos(\mathbf{M}_O, \mathbf{R}^*) = \mathbf{R}^* \cdot \mathbf{M}_O. \qquad (57.7)$$

Выражая скалярное произведение (57.7) через проекции векторов сомножителей на координатные оси, из формулы (57.6) получим

$$R^* \cdot M^* = \mathbf{R}^* \cdot \mathbf{M}_O = XM_x + YM_y + ZM_z,$$

откуда

$$M^* = \frac{XM_x + YM_y + ZM_z}{R^*}. \qquad (57.8)$$

Формула (57.8) выражает алгебраическое значение наименьшего главного момента $\mathbf{M}^*$ через проекции $\mathbf{R}^*$ и $\mathbf{M}_O$ на координатные оси.

Установим при помощи формулы (57.8) аналитическое условие, при котором пространственная система сил приводится к равнодействующей.

Заданную систему сил можно привести к равнодействующей в двух случаях (§ 54): а) если $\mathbf{R}^* \neq 0$, а $M_O = 0$ и б) если $\mathbf{R}^* \neq 0$, $\mathbf{M}_O \neq 0$ и $\mathbf{M}_O \perp \mathbf{R}$.

В обоих случаях $M^* = M_O \cos(\mathbf{M}_O, \mathbf{R}^*) = 0$. Поэтому, если система сил приводится к равнодействующей, то выполняются условия:

$$\left.\begin{aligned} &1)\ X^2 + Y^2 + Z^2 \neq 0; \\ &2)\ XM_x + YM_y + ZM_z = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (57.9)$$

Соотношения (57.9) являются *аналитическими условиями приведения системы сил к равнодействующей силе.*

§ 58. Влияние положения центра на результаты приведения к этому центру системы сил в пространстве. Инварианты системы сил

Положим, что задана система сил $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \ldots, \mathbf{P}_n$, произвольно расположенных в пространстве. Выберем в пространстве два различных центра приведения O_1 и O_2 (рис. 123).