§ 84. Естественные координатные оси. Вектор кривизны

Проведем в точке M кривой AB *соприкасающуюся плоскость*, *нормальную плоскость*, перпендикулярную к касательной, *и спрямляющую плоскость*, перпендикулярную сопрнкасающейся и нормальной плоскостям, образующую с этими плоскостями *естественный трехгранник* (рис. 190).

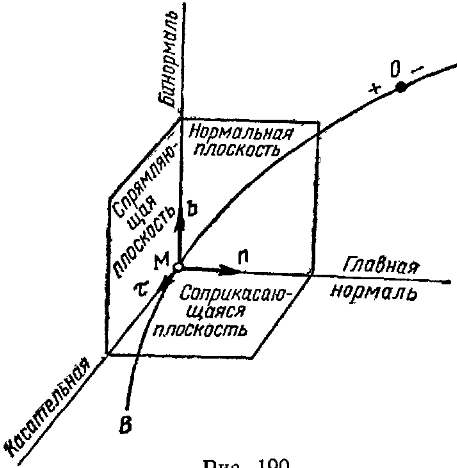

Рис. 190.

Линия пересечения соприкасающейся н нормальной плоскостей называется *главной нормалью кривой*.

Линия пересечения нормальной и спрямляющей плоскостей называется *бинормалью кривой.*

Естественными координатными осями называются три взаимно перпендикулярные оси: *касательная*, направленная в сторону возрастания дуговой координаты, *главная нормаль*, направленная в сторону вогнутости кривой и *бинормаль*, направленная по отношению к касательной и главной нормали так же, как ось Oz направлена по отношению к осям Ox и Oy в правой системе координатных осей. Единичные векторы-орты этих осей обозначаются соответственно $\boldsymbol{\tau}$, $\mathbf{n}$ и $\mathbf{b}$.

Естественные координатные оси имеют начало в точке M кривой и при движении точки M по этой кривой перемещаются вместе с ней, оставаясь взаимно перпендикулярными, но изменяя свое направление в пространстве.

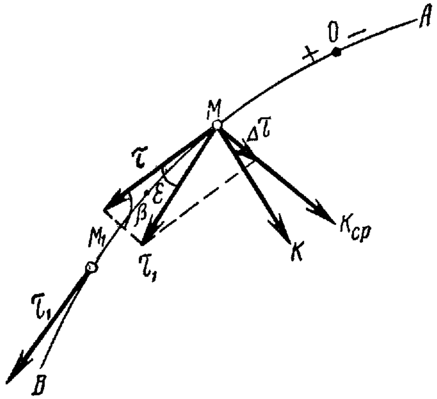

Рис. 191.

Возьмем на кривой AB две точки M и M_1, соответствующие дуговым координатам $OM = s$ и $OM_1 = s + \Delta s$. Покажем орты касательной $\boldsymbol{\tau}$ и $\boldsymbol{\tau}_1$ в этих точках (рис. 191). Модуль орта $\boldsymbol{\tau}$, равный единице, постоянен, но направление орта изменяется при перемещении точки по кривой, т. е. *орт $\boldsymbol{\tau}$ является переменным вектором.*

Определим приращение орта $\boldsymbol{\tau}$ на участке $MM_1 = \Delta s$. Для этого отложим от точки M орт $\boldsymbol{\tau}_1$ и построим при этой точке параллелограмм, одной из сторон которого будет орт $\boldsymbol{\tau}$, а диагональю — орт $\boldsymbol{\tau}_1$. Тогда другая сторона параллелограмма будет приращением орта $\Delta\boldsymbol{\tau}$, так как $\boldsymbol{\tau}_1 = \boldsymbol{\tau} + \Delta\boldsymbol{\tau}$.

Разделим приращение орта $\Delta\boldsymbol{\tau}$ на приращение дуговой координаты Δs. Вектор $\mathbf{K}_{\text{ср}} = \dfrac{\Delta\boldsymbol{\tau}}{\Delta s}$, характеризующий поворот касательной к кривой на участке MM_1, называется вектором средней кривизны кривой на участке MM_1. Этот вектор имеет направление вектора $\Delta\boldsymbol{\tau}$, т. е. направлен в сторону вогнутости кривой.

Предел $\mathbf{K}$, к которому стремится вектор средней кривизны кривой $\mathbf{K}_{\text{ср}}$, когда Δs стремится к нулю, называется *вектором кривизны кривой* в данной точке:

$$\mathbf{K} = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta\boldsymbol{\tau}}{\Delta s}.$$

Орт касательной к кривой является вектором-функцией дуговой координаты s, так как его направление зависит от положения точки на кривой, т. е.

$$\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\tau}(s).$$

Тогда

$$\mathbf{K}=\frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds}. \qquad (84.1)$$

Следовательно, *вектор кривизны кривой в данной точке равен производной от орта касательной к кривой по дуговой координате.*

Для определения модуля этого вектора рассмотрим равнобедренный треугольник, образованный $\boldsymbol{\tau}$, $\boldsymbol{\tau}_1$ и $\Delta\boldsymbol{\tau}$ (рис. 191).

Угол ε между направлениями касательных в двух точках кривой M и M_1 называется *углом смежности*. При малом расстоянии Δs угол смежности тоже мал.

Модуль $|\Delta\boldsymbol{\tau}|$ найдем как длину основания равнобедренного треугольника с малым углом ε при вершиие и боковыми сторонами, равными единице.

Тогда

$$|\Delta\boldsymbol{\tau}|=2\tau\sin\frac{\varepsilon}{2}\approx 2\cdot 1\cdot\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

Модуль вектора кривизны K определяется по формуле

$$K=\lim_{\Delta s\to 0}\left|\frac{\Delta\boldsymbol{\tau}}{\Delta s}\right|=\lim_{\Delta s\to 0}\frac{\varepsilon}{\Delta s}.$$

Из дифференциальной геометрии известно, что предел отношения угла смежности ε к приращению дуговой координаты Δs, при стремлении Δs к нулю, равен кривизне кривой $\frac{1}{\rho}$, где ρ — радиус кривизны кривой в точке M.

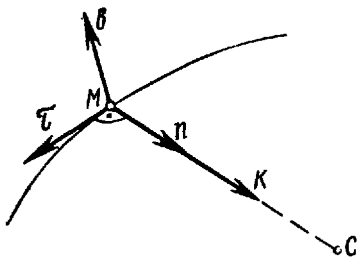

Рис. 192.

Таким образом, получим модуль вектора кривизны

$$K=\lim_{\Delta s\to 0}\frac{\varepsilon}{\Delta s}=\frac{1}{\rho}.$$

Установим также направление вектора кривизны.

Вектор средней кривизны $\mathbf{K}_{\text{ср}}$ находится в плоскости треугольника, составленного векторами $\boldsymbol{\tau}$, $\boldsymbol{\tau}_1$ и $\Delta\boldsymbol{\tau}$, предельным положением которого является соприкасающаяся плоскость. Следовательно, вектор кривизны $\mathbf{K}$ расположен в соприкасающейся плоскости.

Рассмотрим угол β, составленный вектором $\mathbf{K}_{\text{ср}}$ с касательной в точке M (рис. 191).

$$2\beta=180^\circ-\varepsilon;\quad \beta=90^\circ-\frac{\varepsilon}{2}.$$

При приближении точки M_1 к M угол смежности ε стремится к нулю, а потому

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \beta = 90^\circ.$$

Так как вектор кривизны **K** расположен в соприкасающейся плоскости и перпендикулярен орту $\boldsymbol{\tau}$, то он направлен по главной нормали к центру кривизны кривой (рис. 192).

Представим вектор **K** в виде произведения орта на модуль этого вектора

$$\mathbf{K} = \mathbf{n}\frac{1}{\rho}, \tag{84.2}$$

где $\rho = MC$ — радиус кривизны кривой в данной точке M.

§ 85. Определение ускорения точки при задании ее движения естественным способом. Касательное и нормальное ускорения точки

Определим проекции ускорения точки на естественные координатные оси. Для этого представим вектор скорости точки по формуле (79.2):

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\tau}\frac{ds}{dt}.$$

Определим ускорение точки по формуле (82.1), продифференцировав по t произведение двух переменных величин:

$$\mathbf{w} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d\boldsymbol{\tau}}{dt}\frac{ds}{dt} + \boldsymbol{\tau}\frac{d^2s}{dt^2} = \frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds}\frac{ds}{dt}\frac{ds}{dt} + \boldsymbol{\tau}\frac{d^2s}{dt^2}.$$

По формулам (84.1) и (84.2) получим

$$\frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds} = \mathbf{K} = \mathbf{n}\frac{1}{\rho}.$$

Так как проекция скорости на касательную $\tilde{v} = \frac{ds}{dt}$ может отличаться от модуля скорости v только знаком, то

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = v^2.$$

Подставив эти выражения, получим вектор ускорения в виде

$$\mathbf{w} = \mathbf{n}\frac{v^2}{\rho} + \boldsymbol{\tau}\frac{d^2s}{dt^2}. \tag{85.1}$$

Ускорение точки равно геометрической сумме двух векторов, один из которых направлен по главной нормали и называется *нормальным ускорением*, а другой направлен по касательной и называется *касательным ускорением точки* (рис. 193):

$$\mathbf{w} = \mathbf{w}_n + \mathbf{w}_\tau, \tag{85.2}$$

где нормальное ускорение точки

$$\mathbf{w}_n = \mathbf{n}\frac{v^2}{\rho}, \tag{85.3}$$

а касательное ускорение точки на основании формул (85.1) и (79.3):

$$\mathbf{w}_\tau = \boldsymbol{\tau}\frac{d^2s}{dt^2} = \boldsymbol{\tau}\frac{d\tilde{v}}{dt}. \tag{85.4}$$

Скалярные множители $\frac{v^2}{\rho}$ и $\frac{d^2s}{dt^2} = \frac{d\tilde{v}}{dt}$ в выражениях (85.3) и (85.4), определяющих нормальное и касательное ускорения точки, представляют собой проекции ускорения точки на главную нормаль и касательную.

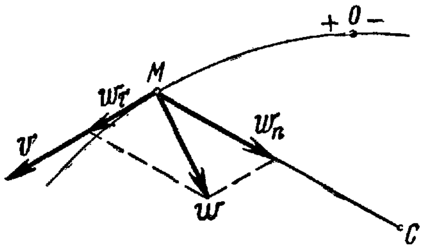

Рис. 193.

Проекция ускорения точки на бинормаль оказалась равной нулю, так как вектор ускорения расположен в соприкасающейся плоскости (см. § 82).

Согласно формуле (85.3) имеем:

$$w_n = \frac{v^2}{\rho}, \tag{85.5}$$

т. е. *проекция ускорения точки на главную нормаль равна квадрату модуля скорости точки, деленному на радиус кривизны траектории в соответствующей точке.* Эта проекция всегда положительна.

Из этого следует, что нормальное ускорение точки всегда направлено к центру кривизны траектории и равно по модулю этой проекции.

Условимся алгебраическую величину касательного ускорения обозначать $\tilde{w}_\tau$, а его модуль w_τ.

Согласно формуле (85.4) имеем:

$$\tilde{w}_\tau = \frac{d^2s}{dt^2} = \frac{d\tilde{v}}{dt}, \tag{85.6}$$

т. е. *проекция ускорения точки на касательную равна второй производной от дуговой координаты точки по времени или первой производной от алгебраической величины скорости точки по времени.*

Эта проекция имеет знак плюс, если направления касательного ускорения точки $\mathbf{w}_\tau$ и орта $\boldsymbol{\tau}$ совпадают, и знак минус, если они противоположны.

Очевидно, что $w_\tau = |\tilde{w}_\tau| = \left|\frac{d^2s}{dt^2}\right| = \left|\frac{d\tilde{v}}{dt}\right|$.

Таким образом, в случае естественного способа задания движения, когда известны траектория точки, а следовательно, ее радиус кривизны ρ в любой точке и уравнение движения $s = f(t)$, можно найти проекции ускорения точки на естественные оси и по ним определить модуль и направление ускорения точки:

$$w = \sqrt{w_\tau^2 + w_n^2}, \tag{85.7}$$

$$\cos(\mathbf{w}, \boldsymbol{\tau}) = \frac{\tilde{w}_\tau}{w}; \quad \cos(\mathbf{w}, \mathbf{n}) = \frac{w_n}{w},$$

где $(\mathbf{w}, \boldsymbol{\tau})$ и $(\mathbf{w}, \mathbf{n})$ — углы, образованные направлением ускорения с принятыми направлениями касательной и главной нормали в данной точке.

Если проекции скорости $\mathbf{v}$ и касательного ускорения $\mathbf{w}_\tau$ на касательную $\tilde{v} = \frac{ds}{dt}$ и $\tilde{w}_\tau = \frac{d^2s}{dt^2}$ имеют одинаковые знаки, то и направления этих векторов совпадают, т. е. точка движется ускоренно.

Если же их проекции $\tilde{v} = \frac{ds}{dt}$ и $\tilde{w}_\tau = \frac{d^2s}{dt^2}$ имеют различные знаки, то и направления $\mathbf{v}$ и $\mathbf{w}_\tau$ противоположны, т. е. точка движется замедленно.

При движении точки только в сторону возрастания дуговой координаты, согласно формулам (79.5) и (85.6), имеем:

$$v = \frac{ds}{dt}$$

$$w_\tau = \left| \frac{dv}{dt} \right|, \tag{85.8}$$

где v — модуль скорости точки.

При этом, если $\frac{dv}{dt} > 0$, т. е. модуль скорости возрастает, точка движется ускоренно, а если $\frac{dv}{dt} < 0$ — замедленно.

При прямолинейном движении точки радиус кривизны траектории $\rho = \infty$ и, следовательно,

$$w_n = \frac{v^2}{\rho} = 0.$$

Нормальное ускорение существует лишь при криволинейном движении точки и характеризует изменение направления скорости.

При равномерном движении точки $v = \text{const}$ и, следовательно,

$$w_\tau = \left| \frac{dv}{dt} \right| = 0.$$

Касательное ускорение точки существует лишь при неравномерном движении точки и характеризует изменение модуля скорости.

Пример 50. По условию примера 47 определить ускорение точки в моменты времени 6 и 12 *сек.*