§ 22. Дифференциальные уравнения движения материальной точки по заданной неподвижной поверхности

Рассмотрим материальную точку M, движущуюся под действием задаваемой силы $\mathbf{P}$ по некоторой неподвижной поверхности, являющейся для точки связью (рис. 56). Пусть уравнение этой поверхности имеет вид:

$$f(x, y, z) = 0.$$

Рассмотрим сначала случай, когда эта поверхность абсолютно гладкая. В этом случае реакция связи $\mathbf{N}$ направлена по нормали к поверхности и называется нормальной реакцией.

Согласно принципу освобождаемости от связи отбросим связь, заменив ее действие реакцией $\mathbf{N}$. Тогда для несвободной материальной точки M получим основное уравнение динамики

$$m\mathbf{w} = \mathbf{P} + \mathbf{N}. \qquad (22.1)$$

Спроектировав векторы обеих частей этого равенства на оси x, y, z, получим дифференциальные уравнения движения несвободной материальной точки M:

$$\left.\begin{aligned} m\ddot{x} &= X + N_x, \\ m\ddot{y} &= Y + N_y, \\ m\ddot{z} &= Z + N_z, \end{aligned}\right\} \qquad (22.2)$$

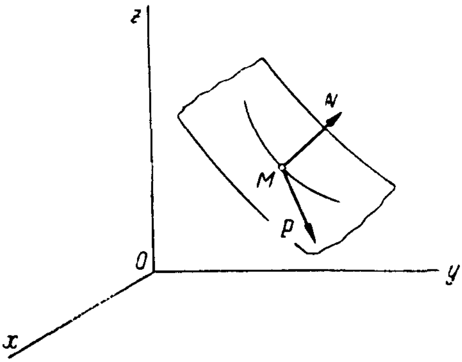

Рис 56.

где X, Y, Z — проекции силы $\mathbf{P}$ на оси x, y, z, а N_x, N_y, N_z — проекции нормальной реакции $\mathbf{N}$ на те же оси, т. е.

$$N_x = N\cos(\mathbf{N}, \mathbf{i}); \quad N_y = N\cos(\mathbf{N}, \mathbf{j}); \quad N_z = N\cos(\mathbf{N}, \mathbf{k}).$$

При наличии удерживающей связи, т. е. двух параллельных поверхностей, между которыми движется точка, реакция $\mathbf{N}$ может быть направлена по нормали к поверхности как в одну, так и в другую сторону. Условимся считать нормальную реакцию положительной, когда она направлена в сторону внешней нормали к поверхности, т. е. в сторону точек пространства, для которых $f(x, y, z) > 0$, и отрицательной — в противоположном случае.

Тогда косинусы углов, образованных направлением $\mathbf{N}$ с осями координат, можно определить по формулам дифференциальной геометрии как направляющие косинусы внешней нормали к поверхности, имеющей уравнение $f(x, y, z) = 0$:

$$\cos(\mathbf{N}, \mathbf{i}) = \frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\Delta f}; \quad \cos(\mathbf{N}, \mathbf{j}) = \frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{\Delta f}; \quad \cos(\mathbf{N}, \mathbf{k}) = \frac{\frac{\partial f}{\partial z}}{\Delta f}, \qquad (22.3)$$

где

$$\Delta f=\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2}. \tag{22.4}$$

Определив проекции N_x, N_y, N_z при помощи формулы (22.4) и подставив найденные значения в дифференциальные уравнения (22.3), получим:

$$\left.\begin{aligned} m\ddot{x}&=X+\frac{N}{\Delta f}\frac{\partial f}{\partial x},\\ m\ddot{y}&=Y+\frac{N}{\Delta f}\frac{\partial f}{\partial y},\\ m\ddot{z}&=Z+\frac{N}{\Delta f}\frac{\partial f}{\partial z}.\end{aligned}\right\}. \tag{22.5}$$

Обозначив $\frac{N}{\Delta f}=\lambda$ (множитель Лагранжа), будем иметь

$$\left.\begin{aligned} m\ddot{x}&=X+\lambda\frac{\partial f}{\partial x},\\ m\ddot{y}&=Y+\lambda\frac{\partial f}{\partial y},\\ m\ddot{z}&=Z+\lambda\frac{\partial f}{\partial z}.\end{aligned}\right\} \tag{22.6}$$

Уравнения (22.6) называются *дифференциальными уравнениями движения несвободной материальной точки в форме Лагранжа.*

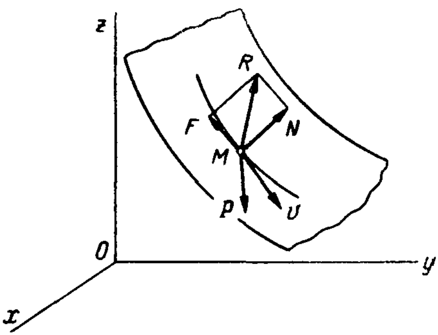

Рис. 57.

Из трех дифференциальных уравнений (22.6) и уравнения связи (21.1) можно определить в зависимости от времени четыре неизвестные величины: x, y, z, λ.

Получив координаты точки x, y, z как функции времени, определим движение точки M.

Определив множитель Лагранжа λ, можно найти алгебраическое значение нормальной реакции поверхности по формуле:

$$N=\lambda\,\Delta f. \tag{22.7}$$

При наличии неудерживающей связи (одной поверхности) направление реакции совпадает с определенным направлением нормали. В этом случае обращение значения N в нуль с последующим изменением знака означает отрыв точки M от поверхности.

Рассмотрим теперь движение материальной точки по заданной не-