Установим формулу для вычисления алгебраического значения наименьшего главного момента заданной системы сил.

Наименьший главный момент системы сил $\mathbf{M}^*$ равен проекции главного момента рассматриваемой системы сил $\mathbf{M}_O$ на направление главного вектора $\mathbf{R}^*$ (рис. 119):

$$M^* = M_O \cos(\mathbf{M}_O, \mathbf{R}^*). \qquad (57.5)$$

Умножив обе части равенства (57.5) на R^*, получим

$$R^* M^* = R^* M_O \cos(\mathbf{M}_O, \mathbf{R}^*). \qquad (57.6)$$

Правая часть равенства (57.6) представляет собой величину скалярного произведения $\mathbf{R}^*$ и $\mathbf{M}_O$, т. е.

$$R^* M_O \cos(\mathbf{M}_O, \mathbf{R}^*) = \mathbf{R}^* \cdot \mathbf{M}_O. \qquad (57.7)$$

Выражая скалярное произведение (57.7) через проекции векторов сомножителей на координатные оси, из формулы (57.6) получим

$$R^* \cdot M^* = \mathbf{R}^* \cdot \mathbf{M}_O = XM_x + YM_y + ZM_z,$$

откуда

$$M^* = \frac{XM_x + YM_y + ZM_z}{R^*}. \qquad (57.8)$$

Формула (57.8) выражает алгебраическое значение наименьшего главного момента $\mathbf{M}^*$ через проекции $\mathbf{R}^*$ и $\mathbf{M}_O$ на координатные оси.

Установим при помощи формулы (57.8) аналитическое условие, при котором пространственная система сил приводится к равнодействующей.

Заданную систему сил можно привести к равнодействующей в двух случаях (§ 54): а) если $\mathbf{R}^* \neq 0$, а $M_O = 0$ и б) если $\mathbf{R}^* \neq 0$, $\mathbf{M}_O \neq 0$ и $\mathbf{M}_O \perp \mathbf{R}$.

В обоих случаях $M^* = M_O \cos(\mathbf{M}_O, \mathbf{R}^*) = 0$. Поэтому, если система сил приводится к равнодействующей, то выполняются условия:

$$\left.\begin{array}{l} 1)\ X^2 + Y^2 + Z^2 \neq 0; \\ 2)\ XM_x + YM_y + ZM_z = 0. \end{array}\right\} \qquad (57.9)$$

Соотношения (57.9) являются *аналитическими условиями приведения системы сил к равнодействующей силе.*

§ 58. Влияние положения центра на результаты приведения к этому центру системы сил в пространстве. Инварианты системы сил

Положим, что задана система сил $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \ldots, \mathbf{P}_n$, произвольно расположенных в пространстве. Выберем в пространстве два различных центра приведения O_1 и O_2 (рис. 123).

Полученные при приведении к этим центрам силы $\mathbf{R}_1^*$ и $\mathbf{R}_2^*$ равны главному вектору заданных сил:

$$\mathbf{R}_1^* = \sum \mathbf{P}_i; \quad \mathbf{R}_2^* = \sum \mathbf{P}_i, \quad \text{т. е.} \quad \mathbf{R}_1^* = \mathbf{R}_2^* = \mathbf{R}^*,$$

или

$$\mathbf{R}^* = \text{const}. \qquad (58.1)$$

Модуль и направление силы, равной главному вектору заданных сил $\mathbf{R}^*$ и получаемой при приведении системы сил к некоторому центру, не зависят от положения этого центра, т. е. *главный вектор данной системы сил инвариантен по отношению к центру приведения.*

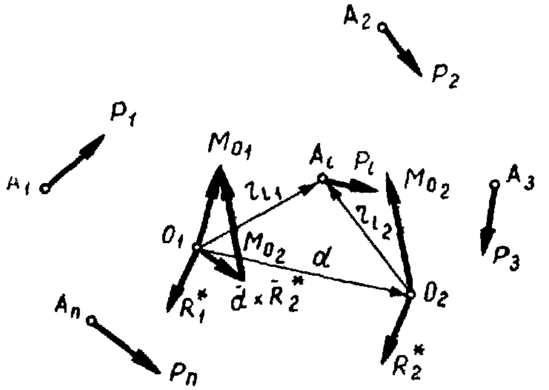

Рис. 123.

Установим зависимость между главными моментами системы сил относительно центров приведения O_1 и O_2.

Найдем эти главные моменты (см. § 48):

$$\mathbf{M}_{O_1} = \sum \mathbf{r}_{i_1} \times \mathbf{P}_i;$$

$$\mathbf{M}_{O_2} = \sum \mathbf{r}_{i_2} \times \mathbf{P}_i,$$

здесь $\mathbf{r}_{i_1}$ — радиус-вектор точки приложения силы $\mathbf{P}_i$ относительно центра приведения O_1;

$\mathbf{r}_{i_2}$ — радиус-вектор точки приложения силы $\mathbf{P}_i$ относительно центра приведения O_2.

Проведем из центра приведения O_1 в центр O_2 радиус-вектор $\mathbf{d}$. Тогда

$$\mathbf{r}_{i_1} = \mathbf{d} + \mathbf{r}_{i_2},$$

$$\mathbf{r}_{i_2} = \mathbf{r}_{i_1} - \mathbf{d}.$$

Подставив значение $\mathbf{r}_{i_2}$ в выражение, определяющее $\mathbf{M}_{O_2}$, получим

$$\mathbf{M}_{O_2} = \sum \mathbf{r}_{i_2} \times \mathbf{P}_i = \sum (\mathbf{r}_{i_1} - \mathbf{d}) \times \mathbf{P}_i = \sum \mathbf{r}_{i_1} \times \mathbf{P}_i - \sum \mathbf{d} \times \mathbf{P}_i =$$
$$= \sum \mathbf{r}_{i_1} \times \mathbf{P}_i - \mathbf{d} \times \sum \mathbf{P}_i,$$

откуда

$$\mathbf{M}_{O_2} = \mathbf{M}_{O_1} - \mathbf{d} \times \mathbf{R}^*. \qquad (58.2)$$

Согласно зависимости (58.2), на рис. 123 главный момент системы сил относительно первого центра $\mathbf{M}_{O_1}$ представлен как сумма векторов $\mathbf{d} \times \mathbf{R}_2^*$ и $\mathbf{M}_{O_2}$. При этом вектор $\mathbf{d} \times \mathbf{R}_2^*$ представляет собой момент силы $\mathbf{R}_2^*$, приложенной в центре O_2, относительно центра O_1. Этот вектор направлен перпендикулярно плоскости, в которой лежат векторы $\mathbf{d}$ и $\mathbf{R}_2^*$, в такую сторону, чтобы, смотря навстречу этому вектору, видеть силу $\mathbf{R}_2^*$, направленной по отношению к центру O_1 против движения часовой стрелки.

Зависимость (58.2) можно сформулировать следующим образом: *Главный момент системы сил относительно второго центра приведения O_2 равен разности главного момента этих сил относительно первого центра приведения O_1 и момента силы, равной главному вектору этой системы сил, приложенной во втором центре приведения, относительно первого центра.*

Из формулы (58.2) следует, что *при перемещении центра приведения по прямой, имеющей направление главного вектора, главный момент заданной системы сил остается неизменным как по модулю, так и по направлению.*

Действительно, если центры O_1 и O_2 лежат на прямой, параллельной главному вектору, то $\overline{O_1O_2} = \mathbf{d}$ и $\mathbf{R}^*$ являются параллельными векторами, а потому

$$\mathbf{d} \times \mathbf{R}^* = 0 \quad \text{и} \quad \mathbf{M}_{O_1} = \mathbf{M}_{O_2}.$$

В случае, *если главные моменты заданной системы сил относительно произвольно выбранных центров приведения геометрически равны между собой, то рассматриваемая система сил приводится к паре сил.*

Действительно, при $\mathbf{M}_{O_1} = \mathbf{M}_{O_2} = \ldots = \mathbf{M}_{O_n}$ имеем $\mathbf{d} \times \mathbf{R}^* = 0$. Так как векторное произведение $\mathbf{d} \times \mathbf{R}^*$ равно нулю при любых значениях $\mathbf{d}$, то $\mathbf{R}^* = 0$ при $\mathbf{M}_O \neq 0$, т. е. силы приводятся к паре сил (§ 54).

Умножив скалярно обе части равенства (58.2) на главный вектор $\mathbf{R}^* = \mathbf{R}_1^* = \mathbf{R}_2^*$, получим:

$$\mathbf{R}_2^* \cdot \mathbf{M}_{O_2} = \mathbf{R}_1^* \cdot \mathbf{M}_{O_1} - \mathbf{R}_2^* \cdot (\mathbf{d} \times \mathbf{R}_2^*).$$

Но

$$\mathbf{R}_2^* \cdot (\mathbf{d} \times \mathbf{R}_2^*) = 0, \quad \text{так как} \quad \mathbf{R}_2^* \perp (\mathbf{d} \times \mathbf{R}_2^*),$$

поэтому $\mathbf{R}_2^* \cdot \mathbf{M}_{O_2} = \mathbf{R}_1^* \cdot \mathbf{M}_{O_1}$, т. е.

$$\mathbf{R}^* \cdot \mathbf{M}_O = \text{const}. \tag{58.3}$$

Полученный результат показывает, что *скалярное произведение главного вектора на главный момент данной системы сил инвариантно по отношению к центру приведения.*

Выразив скалярное произведение (58.3) через проекции перемножаемых векторов на координатные оси, получим

$$XM_x + YM_y + ZM_z = \text{const}.$$

Итак, для любой системы сил имеются два основных инварианта, т. е. две величины, не зависящие от положения центра приведения.

Первым (векторным) инвариантом системы сил является главный вектор системы сил, а вторым (скалярным) инвариантом является скалярное произведение главного вектора на главный момент этой системы.