Покажем, что второе слагаемое равно нулю. Для этого проведем из центра масс C радиусы-векторы ρ_i во все точки системы. Радиус-вектор центра масс $\rho_C = 0$.

Согласно формуле (32.1)

$$\rho_C = \frac{\sum m_i \rho_i}{m}.$$

Следовательно,

$$\sum m_i \rho_i = 0 \quad \text{и} \quad \frac{d}{dt}\left(\sum m_i \rho_i\right) = 0.$$

Так как радиус-вектор ρ_i проведен из начала координат подвижной системы отсчета, то производная $\frac{d\rho_i}{dt}$ представляет собой относительную скорость точки $\mathbf{v}_{ir}$:

$$\frac{d}{dt}\sum m_i \rho_i = \sum m_i \frac{d\rho_i}{dt} = \sum m_i \mathbf{v}_{ir} = 0. \qquad (67.4)$$

На основании (67.4)

$$\mathbf{v}_C \cdot \sum m_i \mathbf{v}_{ir} = 0.$$

Тогда выражение (67.3), определяющее кинетическую энергию системы, принимает вид

$$T = \frac{1}{2} m v_C^2 + \sum \frac{m_i v_{ir}^2}{2}. \qquad (67.5)$$

Равенство (67.5) выражает теорему о кинетической энергии механической системы: *кинетическая энергия механической системы равна сумме кинетической энергии центра масс системы, масса которого равна массе всей системы, и кинетической энергии этой системы в ее относительном движении по отношению к центру масс.*

Эта теорема была установлена голландским математиком С. Кенигом (1751 г.).

§ 68. Кинетическая энергия твердого тела

В настоящем параграфе получены формулы для вычисления кинетической энергии твердого тела во всех случаях движения.

1. Поступательное движение твердого тела

При поступательном движении твердого тела скорости всех его точек в каждый момент времени геометрически равны между собой (рис. 152). Кинетическая энергия тела определится (67.1):

$$T = \sum \frac{m_i v_i^2}{2} = \frac{v^2}{2} \sum m_i.$$

Так как $\sum m_i = m$, то окончательно

$$T = \frac{1}{2} m v^2. \tag{68.1}$$

На основании (68.1) устанавливаем, что *кинетическая энергия твердого тела, движущегося поступательно, равна половине произведения массы тела на квадрат его скорости.*

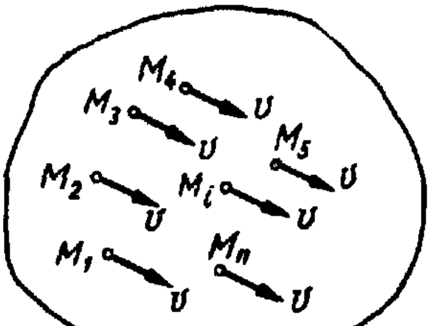

Рис. 152.

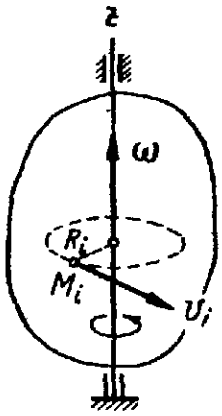

Рис. 153.

Таким образом, кинетическая энергия тела, движущегося поступательно, вычисляется как кинетическая энергия материальной точки, имеющей массу данного тела.

2. Вращение твердого тела вокруг неподвижной оси

При вращении твердого тела вокруг неподвижной оси (рис. 153) скорость любой точки тела определяется как вращательная скорость

$$v_i = R_i \omega.$$

Кинетическую энергию твердого тела определяем по формуле (67.1):

$$T = \sum \frac{m_i v_i^2}{2} = \frac{1}{2} \sum m_i R_i^2 \omega^2 = \frac{1}{2} \omega^2 \sum m_i R_i^2.$$

Здесь $\sum m_i R_i^2 = J_z$ — момент инерции тела относительно оси вращения.

Кинетическая энергия тела

$$T = \frac{1}{2} J_z \omega^2. \tag{68.2}$$

На основании (68.2) устанавливаем, что *кинетическая энергия твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси, равна половине произведения его момента инерции относительно оси вращения на квадрат угловой скорости тела.*

Сравнив формулы (68.2) и (68.1), можно заметить, что при вращении тела его момент инерции играет такую же роль, как его масса при поступательном движении.

3. Плоское движение твердого тела

Положим, что при плоском движении твердого тела его центр масс C движется в плоскости чертежа (рис. 154). Разложим это движение на поступательное движение вместе с центром масс и относительное движение по отношению к центру масс (см. § 67).

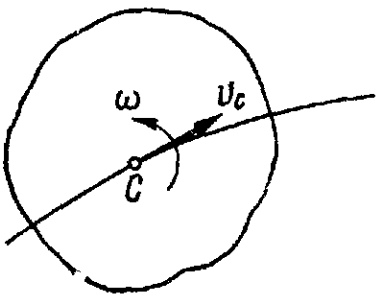

Рис. 154.

В этом случае относительное движение представляет собой вращение тела вокруг оси $C\zeta$, проходящей через центр масс C перпендикулярно к плоскости чертежа. Определим кинетическую энергию тела по теореме Кенига (67.5):

$$T = \frac{1}{2} m v_C^2 + \frac{1}{2} J_{C\zeta}\omega^2. \qquad (68.3)$$

Здесь $\frac{1}{2} m v_C^2$ — кинетическая энергия тела в поступательном движении вместе с центром масс, а $\frac{1}{2} J_{C\zeta}\omega^2$ — кинетическая энергия во вращении тела вокруг неподвижной оси $C\zeta$, определенная на основании формулы (68.2).

4. Сферическое движеиие твердого тела

Скорости точек твердого тела при сферическом движении в каждый момент можно рассматривать как вращательные вокруг мгновенной оси вращения (рис. 155). Поэтому кинетическая энергия тела, совершающего сферическое движение в данный момент, определяется по формуле:

$$T = \frac{1}{2} J_\Omega \omega^2, \qquad (68.4)$$

где ω — мгновенная угловая скорость тела;

J_Ω — момент инерции твердого тела относительно мгновенной оси вращения.

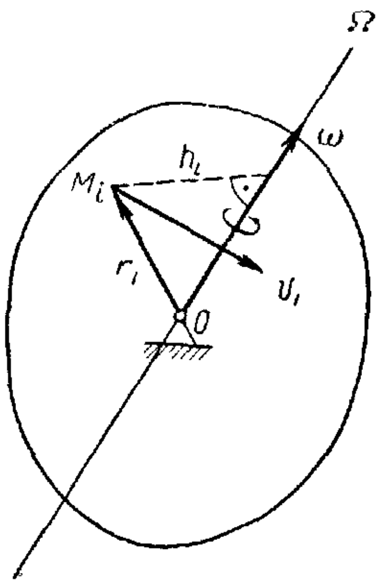

Рис. 155.

Выражение (68.4) показывает, что *кинетическая энергия твердого тела, совершающего сферическое движение, равна половине произведения момента инерции тела относительно мгновенной оси вращения на квадрат угловой скорости тела.*

При этом величина момента инерции J_Ω непрерывно изменяется. так как изменяется положение мгновенной оси Ω по отношению к телу.

5. Общий случай движения твердого тела

Движение свободного твердого тела в общем случае можно разложить на два составляющих движения: на переносное поступательное движение вместе с центром масс и относительное сферическое движение по отношению к центру масс (рис. 156). Тогда кинетическая энергия тела определится по формуле Кенига (65.5):

$$T=\frac{1}{2}mv_C^2+\frac{1}{2}J_{C\Omega}\omega^2. \qquad (68.5)$$

Таким образом, *кинетическая энергия твердого тела в общем случае его движения равна сумме кинетической энергии тела в его переносном поступательном движении вместе с центром масс и его кинетической энергии в сферическом движении относительно центра масс.*

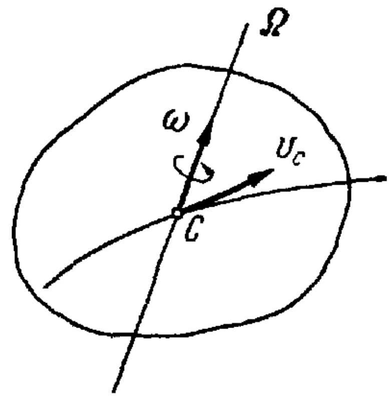

Рис. 156

§ 69. Теорема об изменении кинетической энергии механической системы

Установим зависимость между изменением кинетической энергии механической системы и работой приложенных к ее точкам сил. Для этого разделим силы, действующие на точки M_1, M_2, M_3, ..., M_n, на внешние силы $\mathbf{P}_1^E$, $\mathbf{P}_2^E$, ..., $\mathbf{P}_i^E$, ..., $\mathbf{P}_n^E$ и внутренние силы $\mathbf{P}_1^J$, $\mathbf{P}_2^J$, ..., $\mathbf{P}_i^J$, ..., $\mathbf{P}_n^J$. Применим к движению каждой точки M_i теорему об изменении кинетической энергии. Положим, что при перемещении механической системы из первого положения во второе каждая точка M_i перемещается из $M_{i\,(1)}$ в $M_{i\,(2)}$, причем скорость ее изменяется от $v_{i\,(1)}$ и $v_{i\,(2)}$ (рис. 157).

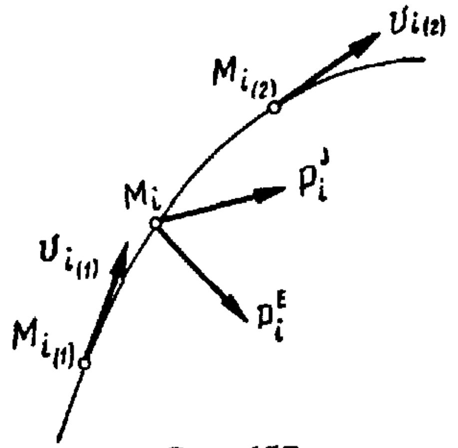

Рис. 157.

Тогда по уравнению (62.3) для каждой материальной точки имеем

$$\frac{m_i v_{i\,(2)}^2}{2}-\frac{m_i v_{i(1)}^2}{2}=A_i^E+A_i^J$$

$$(i=1,\ 2,\ \ldots,\ n),$$

где A_i^E — работа силы $\mathbf{P}_i^E$ и A_i^J — работа силы $\mathbf{P}_i^J$ на перемещении $M_{i\,(1)}M_{i\,(2)}$.

Просуммируем левые и правые части составленных n равенств:

$$\left(\sum\frac{m_i v_i^2}{2}\right)_2-\left(\sum\frac{m_i v_i^2}{2}\right)_1=\sum A_i^E+\sum A_i^J.$$

Согласно (67.1): $\left(\sum\frac{m_i v_i^2}{2}\right)_1=T_1$ — кинетическая энергия системы в первом ее положении; $\left(\sum\frac{m_i v_i^2}{2}\right)_2=T_2$ — кинетическая энергия системы во втором положении.