Если направления ω и ε совпадают, то вращение плоской фигуры происходит ускоренно (рис. 245, *а*), а если они противоположны, то замедленно (рис. 246, *а*).

Так как векторы ω и ε перпендикулярны к плоскости чертежа, то направления угловой скорости и углового ускорения плоской фигуры условимся обозначать так, как показано на рис. 245, *б* и 246, *б*, используя эти обозначения для указания направления вращения плоской фигуры (ω) и направления ε.

§ 99. Теорема о скоростях точек плоской фигуры и ее следствия

Зависимость между скоростями точек плоской фигуры устанавливается по следующей теореме:

Скорость любой точки плоской фигуры равна геометрической сумме скорости полюса и вращательной скорости этой точки вокруг полюса.

Точку O, скорость которой равна $\mathbf{v}_O$, примем за полюс. Определим скорость любой другой точки плоской фигуры, например, точки A (рис. 247). Для этого проведем из неподвижной точки плоскости O_1 в точки O и A радиусы-векторы ρ_O и ρ_A. Проведем также радиус-вектор $\mathbf{r}_{OA}$ из полюса O в точку A.

Так как этот радиус-вектор соединяет две точки плоской фигуры, то за все время движения он вращается вокруг полюса с угловой скоростью плоской фигуры $\tilde{\omega}$, не изменяясь по модулю.

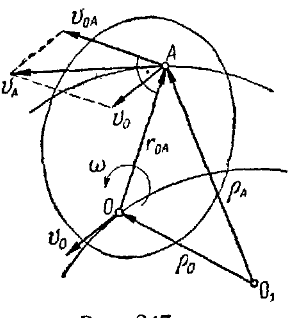

Рис. 247.

За все время движения между радиусами-векторами сохраняется зависимость

$$\rho_A = \rho_O + \mathbf{r}_{OA},$$

где

$$r_{OA} = \text{const}.$$

Определим отсюда скорость точки A:

$$\mathbf{v}_A = \frac{d\rho_A}{dt} = \frac{d\rho_O}{dt} + \frac{d\mathbf{r}_{OA}}{dt},$$

где $\dfrac{d\rho_O}{dt} = \mathbf{v}_O$ — скорость полюса O.

Так как при движении плоской фигуры модуль радиуса-вектора $\mathbf{r}_{OA}$ остается неизменным, а направление его при повороте фигуры изменяется, то производная $\dfrac{d\mathbf{r}_{OA}}{dt}$ представляет собой вращательную скорость точки A вокруг полюса O, которую обозначим $\mathbf{v}_{OA}$:

$$\frac{d\mathbf{r}_{OA}}{dt} = \mathbf{v}_{OA}.$$

Согласно § 94, вращательную скорость $\mathbf{v}_{OA}$ можно представить в виде векторного произведения вектора угловой скорости плоской фигуры ω на радиус-вектор $\mathbf{r}_{OA}$:

$$\mathbf{v}_{OA} = \omega \times \mathbf{r}_{OA}.$$

Вращательная скорость $\mathbf{v}_{OA}$ направлена перпендикулярно отрезку OA, в сторону вращения фигуры, и имеет модуль

$$v_{OA} = OA \cdot \omega.$$

После подстановки получаем

$$\mathbf{v}_A = \mathbf{v}_O + \mathbf{v}_{OA} \tag{99.1}$$

или

$$\mathbf{v}_A = \mathbf{v}_O + \omega \times \mathbf{r}_{OA}. \tag{99.2}$$

Скорость точки A изображается диагональю параллелограмма, построенного при точке A на скорости полюса O, перенесенной в точку A, и вращательной скорости точки A вокруг полюса O (рис. 247).

Следствие 1. ***Проекции скоростей точек плоской фигуры на ось, проходящую через эти точки, равны.***

Положим, что в данный момент времени известна скорость $\mathbf{v}_A$ точки A плоской фигуры, направление ее вращения и модуль угловой скорости фигуры ω (рис. 248). Приняв точку A за полюс, оп-

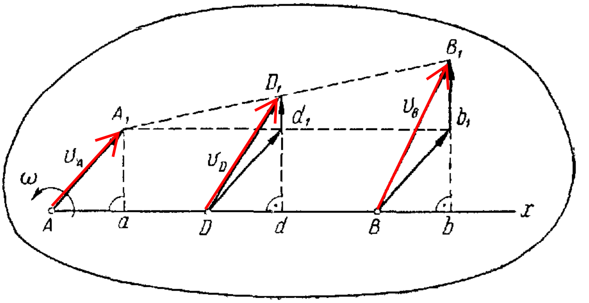

Рис. 248.

ределим скорости точек B и D плоской фигуры, лежащих на одной прямой с точкой A:

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{AB},$$

$$\mathbf{v}_D = \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{AD},$$

причем вращательные скорости этих точек вокруг полюса A: $\mathbf{v}_{AB} = \overline{b_1B_1}$ и $\mathbf{v}_{AD} = \overline{d_1D_1}$ направлены перпендикулярно отрезкам AB и AD в сторону вращения фигуры.

Проведем ось x через точки A, D и B и спроектируем скорости этих точек на ось x; тогда получим

$$v_{BX} = v_{AX} + v_{ABX},$$

$$v_{DX} = v_{AX} + v_{ADX},$$

но $v_{ABX}=0$ и $v_{ADX}=0$, так как векторы $\mathbf{v}_{AB}$ и $\mathbf{v}_{AD}$ перпендикулярны оси x.

Поэтому

$$v_{BX}=v_{AX};\quad Bb=Aa;$$

$$v_{DX}=v_{AX};\quad Dd=Aa$$

или

$$Aa=Dd=Bb,$$

т. е. проекции скоростей всех точек отрезка AB на ось x, направленную вдоль этого отрезка, равны по величине.

Следствие 2. *Концы скоростей точек неизменяемого отрезка лежат на одной прямой и делят эту прямую на части, пропорциональные расстояниям между соответствующими точками отрезка.*

Рассматривая рис. 248, устанавливаем, что

$$b_1B_1=v_{AB}=AB\cdot\omega;\quad d_1D_1=v_{AD}=AD\cdot\omega,$$

откуда

$$\frac{d_1D_1}{b_1B_1}=\frac{AD}{AB}.$$

Так как $A_1d_1=AD$ и $A_1b_1=AB$ как противоположные стороны параллелограммов, то имеем

$$\frac{d_1D_1}{b_1B_1}=\frac{A_1d_1}{A_1b_1}.$$

Это соотношение показывает, что $A_1D_1B_1$ — отрезок прямой. Из подобия треугольников $A_1d_1D_1$ и $A_1b_1B_1$ имеем

$$\frac{A_1D_1}{A_1B_1}=\frac{A_1d_1}{A_1b_1}\quad\text{или}\quad\frac{A_1D_1}{A_1B_1}=\frac{AD}{AB}\quad\text{и}\quad\frac{A_1D_1}{D_1B_1}=\frac{AD}{DB},$$

т. е. расстояния между концами скоростей пропорциональны расстояниям между соответствующими точками.

§ 100. Примеры на применение теоремы о скоростях точек плоской фигуры

При решении примеров с помощью теоремы о скоростях точек плоской фигуры используют следствия этой теоремы. Обычно в таких случаях применяют графический метод, который требует построения схем в масштабе длин, а скоростей — в масштабе скоростей в их истинном направлении.

Пример 62. По заданной скорости одной точки плоской фигуры построить годограф возможных скоростей другой точки этой фигуры.

Решение. Пусть известна скорость точки A, требуется определить возможные скорости точки B плоской фигуры (рис. 249). Про-