§ 5.3. Движение точки по гладкой неподвижной поверхности

Для изучения движения материальной точки по поверхности используем уравнение (5.3).

В проекциях на оси системы координат $Oxyz$ имеем

$$m\ddot{x}=F_x+R_x,\quad m\ddot{y}=F_y+R_y,\quad m\ddot{z}=F_z+R_z. \tag{5.11}$$

Эти три уравнения содержат шесть неизвестных: три координаты точки (x, y, z) и три неизвестные проекции R_x, R_y, R_z реакции. Но, как мы видели, координаты точки должны также удовлетворять уравнению поверхности, по которой движется точка. Это дает четвертое уравнение

$$f(x, y, z)=0. \tag{5.12}$$

Конечно, четырех уравнений для определения шести неизвестных недостаточно. Для получения двух недостающих уравнений используем условие идеальности связи.

Так как поверхность, по которой движется точка, идеально гладкая, то реакция направлена по нормали к поверхности. Градиент

$$\operatorname{grad} f=\frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i}+\frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j}+\frac{\partial f}{\partial z}\mathbf{k}$$

представляет собой вектор, который также направлен по нормали к поверхности.

Условие коллинеарности реакции $\mathbf{R}$ и $\operatorname{grad} f$ и дает недостающие два уравнения:

$$\frac{R_x}{\frac{\partial f}{\partial x}}=\frac{R_y}{\frac{\partial f}{\partial y}}=\frac{R_z}{\frac{\partial f}{\partial z}}. \tag{5.13}$$

Таким образом, уравнения (5.11) — (5.13) в принципе дают возможность решить задачу о движении точки по гладкой неподвижной поверхности. Из уравнений (5.11) и (5.13) можно исключить реакции связей. Для этого обозначим равные отношения (5.13) через λ, т. е.

$$\frac{R_x}{\frac{\partial f}{\partial x}}=\frac{R_y}{\frac{\partial f}{\partial y}}=\frac{R_z}{\frac{\partial f}{\partial z}}=\lambda.$$

Тогда

$$R_x=\lambda\frac{\partial f}{\partial x},\quad R_y=\lambda\frac{\partial f}{\partial y},\quad R_z=\lambda\frac{\partial f}{\partial z} \tag{5.14}$$

и уравнения (5.11) теперь примут такой вид:

$$m\ddot{x}=F_x+\lambda\frac{\partial f}{\partial x},\quad m\ddot{y}=F_y+\lambda\frac{\partial f}{\partial y},\quad m\ddot{z}=F_z+\lambda\frac{\partial f}{\partial z}. \tag{5.15}$$

Присоединяя к этим уравнениям уравнения связи (5.12), получаем систему четырех уравнений с четырьмя неизвестными x, y, z и λ. После отыскания этих неизвестных по формулам (5.14) можно определить проекции реакции. Модуль реакции равен

$$R=\sqrt{R_x^2+R_y^2+R_z^2}=|\lambda|\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2}. \tag{5.16}$$

Реакция определяется выражением

$$\mathbf{R}=\lambda\left(\frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i}+\frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j}+\frac{\partial f}{\partial z}\mathbf{k}\right)=\lambda\operatorname{grad} f.$$

Уравнения (5.15) называются *уравнениями Лагранжа первого рода.*

Задача 5.1. Рассмотрим движение тяжелой материальной точки массы m но внутренней поверхности цилиндра радиуса r; ось цилиндра горизонтальна (рис. 5.3). Совместив начало координат с какой-либо точкой оси цилиндра, направим ось x вертикально вниз, ось y — горизонтально по радиусу цилиндра, а ось z — по оси цилиндра.

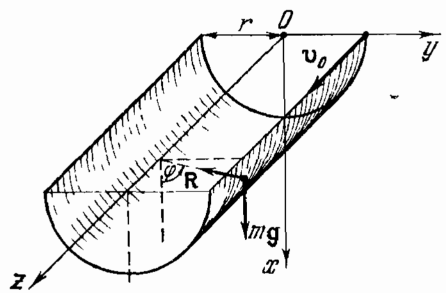

Рис. 5.3.

Примем, что в начальный момент положение точки определяется координатами $x=0$, $y=r$, $z=0$. Положим также, что начальная скорость направлена параллельно оси цилиндра и равна v_0. Это значит, что в начальный момент

$$\dot{x}=0,\quad \dot{y}=0,\quad \dot{z}=v_0.$$

На материальную точку действуют сила тяжести mg и реакция $\mathbf{R}$, направленная по радиусу. Уравнение связи (цилиндрической поверхности) имеет вид

$$f(x, y, z)\equiv x^2+y^2-r^2=0.$$

Подставим $F_x=mg$, $F_y=F_z=0$, $\frac{\partial f}{\partial x}=2x$, $\frac{\partial f}{\partial y}=2y$ и $\frac{\partial f}{\partial z}=0$ в уравнения (5.15). В результате получим

$$m\ddot{x}=mg+2\lambda x,\quad m\ddot{y}=2\lambda y,\quad m\ddot{z}=0. \tag{5.17}$$

Из третьего уравнения системы (5.17) после интегрирования и использования начальных условий получим

$$z=v_0t,$$

т. е. расстояние от начальной плоскости xy растет пропорционально времени.

Умножая первое уравнение системы (5.17) на y, второе уравнение — на x и вычитая из первого уравнения второе, найдем

$$m(\ddot{x}y-\ddot{y}x)=mgy.$$

Умножая теперь первое уравнение системы (5.17) на x и складывая его с вторым уравнением, умноженным на y, будем иметь

$$m(\ddot{x}x+\ddot{y}y)=mgx+2\lambda(x^2+y^2). \tag{5.18}$$

Перейдем к цилиндрическим координатам

$$x=r\cos\varphi,\quad y=r\sin\varphi,\quad z=z.$$

Так как

$$\dot{x}=-r\dot{\varphi}\sin\varphi,\qquad \dot{y}=r\dot{\varphi}\cos\varphi,$$
$$\ddot{x}=-r\ddot{\varphi}\sin\varphi-r\dot{\varphi}^2\cos\varphi,\qquad \ddot{y}=r\ddot{\varphi}\cos\varphi-r\dot{\varphi}^2\sin\varphi,$$

то уравнения (5.17) и (5.18) примут вид

$$mr^2\ddot{\varphi}=-mgr\sin\varphi,$$

или

$$\ddot{\varphi}+\frac{g}{r}\sin\varphi=0 \tag{5.19}$$

и

$$-mr^2\dot{\varphi}^2=mgr\cos\varphi+2\lambda r^2. \tag{5.20}$$

Записав уравнение (5.19) в виде

$$\dot{\varphi}\,d\dot{\varphi}=-\frac{g}{r}\sin\varphi\,d\varphi,$$

после интегрирования получим

$$\frac{\dot{\varphi}^2}{2}=\frac{g}{r}\cos\varphi+c.$$

Так как $\varphi=\pi/2$, $\dot{\varphi}=0$ при $t=0$, то $c=0$ и, следовательно,

$$\dot{\varphi}^2=\frac{2g}{r}\cos\varphi. \tag{5.21}$$

Из этого уравнения видно, что при выбранных начальных условиях движение будет происходить в области, где $\cos\varphi>0$, т. е. при $-\frac{\pi}{2}<\varphi<\frac{\pi}{2}$. Подставляя выражение (5.21) в уравнение (5.20), будем иметь

$$\lambda=-\frac{3mg}{2r}\cos\varphi.$$

В соответствии с формулами (5.14) получаем

$$R_x=\lambda\frac{\partial f}{\partial x}=-3mg\cos^2\varphi,$$
$$R_y=\lambda\frac{\partial f}{\partial y}=-3mg\sin\varphi\cos\varphi,$$
$$R_z=0.$$

Модуль реакции равен

$$R=3mg\cos\varphi.$$

Реакция равна нулю при $\varphi=\pm\pi/2$. Максимальное значение реакции будет при $\varphi=0$ и равно $R=3mg$.

Для определения закона изменения угла φ нужно проинтегрировать уравнение (5.19). Это будет сделано в § 5.5.

§ 5.4. Движение точки по гладкой неподвижной кривой

При движении материальной точки по кривой уравнения связей имеют вид

$$f_1(x,y,z)=0,\qquad f_2(x,y,z)=0, \tag{5.22}$$

где $f_1(x,y,z)=0$ и $f_2(x,y,z)=0$ — уравнения поверхностей, линия пересечения которых является траекторией точки (рис. 5.4).

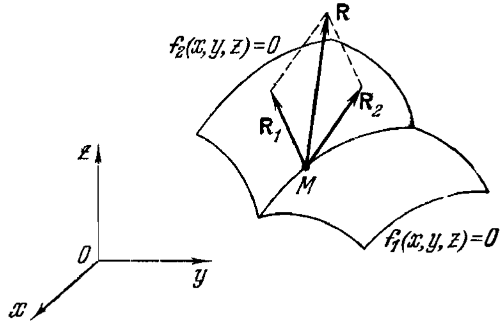

Рис. 5.4.

В этом случае в уравнении (5.3) реакцию $\mathbf{R}$ следует рассматривать как сумму реакций, т. е.

$$\mathbf{R}=\mathbf{R}_1+\mathbf{R}_2, \tag{5.23}$$

где $\mathbf{R}_1$ и $\mathbf{R}_2$ — реакции, заменяющие действие соответственно первой и второй связи, уравнения которых имеют вид (5.22). Поэтому дифференциальные уравнения движения запишутся в виде

$$\begin{aligned} m\ddot{x}&=F_x+R_{1x}+R_{2x},\\ m\ddot{y}&=F_y+R_{1y}+R_{2y},\\ m\ddot{z}&=F_z+R_{1z}+R_{2z}. \end{aligned} \tag{5.24}$$

Эти уравнения содержат девять неизвестных: три координаты и шесть проекций реакций.

Присоединяя к уравнениям (5.24) два уравнения связи (5.22) и условия идеальностей связей

$$\frac{R_{1x}}{\frac{\partial f_1}{\partial x}}=\frac{R_{1y}}{\frac{\partial f_1}{\partial y}}=\frac{R_{1z}}{\frac{\partial f_1}{\partial z}} \tag{5.25}$$

и

$$\frac{R_{2x}}{\frac{\partial f_2}{\partial x}}=\frac{R_{2y}}{\frac{\partial f_2}{\partial y}}=\frac{R_{2z}}{\frac{\partial f_2}{\partial z}}, \tag{5.26}$$

получим девять уравнений с девятью неизвестными. Из этих уравнений можно исключить проекции реакций. Для этого отношения в выражениях (5.25) и (5.26) соответственно обозначим через λ_1 и λ_2 и получим

$$R_{1x}=\lambda_1\frac{\partial f_1}{\partial x},\quad R_{1y}=\lambda_1\frac{\partial f_1}{\partial y},\quad R_{1z}=\lambda_1\frac{\partial f_1}{\partial z}, \tag{5.27}$$

$$R_{2x}=\lambda_2\frac{\partial f_2}{\partial x},\quad R_{2y}=\lambda_2\frac{\partial f_2}{\partial y},\quad R_{2z}=\lambda_2\frac{\partial f_2}{\partial z}. \tag{5.28}$$

Следовательно, уравнения (5.24) примут следующий вид

$$\left.\begin{aligned} m\ddot{x}&=F_x+\lambda_1\frac{\partial f_1}{\partial x}+\lambda_2\frac{\partial f_2}{\partial x},\\ m\ddot{y}&=F_y+\lambda_1\frac{\partial f_1}{\partial y}+\lambda_2\frac{\partial f_2}{\partial y},\\ m\ddot{z}&=F_z+\lambda_1\frac{\partial f_1}{\partial z}+\lambda_2\frac{\partial f_2}{\partial z}.\end{aligned}\right\}\qquad(5.29)$$

Система (5.29) совместно с уравнениями связи (5.22) образует систему пяти уравнений с пятью неизвестными x, y, z, λ_1 и λ_2.

Реакции $\mathbf{R}_1$ и $\mathbf{R}_2$ определяются формулами

$$\mathbf{R}_1=\lambda_1\left(\frac{\partial f_1}{\partial x}\mathbf{i}+\frac{\partial f_1}{\partial y}\mathbf{j}+\frac{\partial f_1}{\partial z}\mathbf{k}\right)=\lambda_1\operatorname{grad}f_1,$$

$$\mathbf{R}_2=\lambda_2\left(\frac{\partial f_2}{\partial x}\mathbf{i}+\frac{\partial f_2}{\partial y}\mathbf{j}+\frac{\partial f_2}{\partial z}\mathbf{k}\right)=\lambda_2\operatorname{grad}f_2.$$

Модули этих реакций равны

$$R_1=|\lambda_1|\sqrt{\left(\frac{\partial f_1}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f_1}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial f_1}{\partial z}\right)^2},\qquad(5.30)$$

$$R_2=|\lambda_2|\sqrt{\left(\frac{\partial f_2}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f_2}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial f_2}{\partial z}\right)^2}.\qquad(5.31)$$

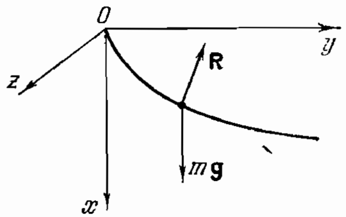

Рис. 5.5.

Задача 5.2. По проволоке, имеющей форму параболы, движется колечко; уравнения связи (параболы) имеют вид (рис. 5.5)

$$\left.\begin{aligned} f_1(x,y,z)&=2y-x^2=0,\\ f_2(x,y,z)&=z=0.\end{aligned}\right\}\qquad(5.32)$$

Найти реакцию связи при нулевых начальных условиях.

Подставляя

$$\frac{\partial f_1}{\partial x}=-2x,\quad \frac{\partial f_1}{\partial y}=2,\quad \frac{\partial f_1}{\partial z}=0,$$
$$\frac{\partial f_2}{\partial x}=0,\quad \frac{\partial f_2}{\partial y}=0,\quad \frac{\partial f_2}{\partial z}=1$$

в уравнения (5.29), получим

$$\left.\begin{aligned} m\ddot{x}&=mg-2\lambda_1x,\\ m\ddot{y}&=2\lambda_1,\\ m\ddot{z}&=\lambda_2.\end{aligned}\right\}\qquad(5.33)$$

Из второго уравнения связи имеем $\ddot{z}=0$ и, следовательно, $\lambda_2=0$.

Умножая теперь второе уравнение на x и складывая его с первым уравнением, получим

$$\ddot{x}+x\ddot{y}=g.\qquad(5.34)$$

Так как согласно уравнениям (5.32) $y=\frac{1}{2}x^2$, то

$$\dot{y}=x\dot{x}\quad\text{и}\quad\ddot{y}=\dot{x}^2+x\ddot{x}.$$

Подставим полученное выражение $\ddot{y}$ в уравнение (5.34):

$$\ddot{x}(1+x^2)+x\dot{x}^2=g.$$

Заменив

$$\ddot{x}=\frac{d\dot{x}}{dt}=\frac{d\dot{x}}{dx}\dot{x},$$

найдем

$$(x\dot{x}^2-g)\,dx+\dot{x}(1+x^2)\,d\dot{x}=0.$$

Это уравнение в полных дифференциалах, и его решение имеет вид

$$\dot{x}^2(1+x^2)-2gx=C,$$

где C — постоянная интегрирования.

При нулевых начальных условиях ($x=y=0$, $\dot{x}=\dot{y}=0$ при $t=0$) получаем, что $C=0$ и, следовательно,

$$\dot{x}^2(1+x^2)-2gx=0,$$

или

$$\dot{x}^2=\frac{2gx}{1+x^2}.\qquad(5.35)$$

Продифференцировав выражение (5.35) по времени, найдем

$$2\dot{x}\ddot{x}=\frac{2g(1+x^2)-2gx2x}{(1+x^2)^2}\dot{x},$$

откуда

$$\ddot{x}=\frac{g(1-x^2)}{(1+x^2)^2}.$$

Учитывая, что $\ddot{y}=\dot{x}^2+x\ddot{x}$, получим

$$\ddot{y}=\frac{gx(3+x^2)}{(1+x^2)^2}.$$

Тогда на основании второго уравнения системы (5.33) имеем

$$\lambda_1=\frac{mg}{2}\,\frac{x(3+x^2)}{(1+x^2)^2}.$$

Конечно, это же выражение можно получить и из первого уравнения системы (5.33). На основании формул (5.27) можно выразить проекции реакций через абсциссу колечка:

$$R_x=\lambda_1\frac{\partial f_1}{\partial x}=-mg\frac{x^2(3+x^2)}{(1+x^2)^2},$$

$$R_y=\lambda_1\frac{\partial f_1}{\partial y}=mg\frac{x(3+x^2)}{(1+x^2)^2}.$$

Найдем скорость колечка в зависимости от его абсциссы. Так как $\dot{y}=x\dot{x}$ и учитывая, что $\dot{x}>0$, имеем

$$v=\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}=\dot{x}\sqrt{1+x^2},$$

или, принимая во внимание равенство (5.35),

$$v=\sqrt{2gx}.$$

Этот результат можно было получить и сразу, применяя теорему об изменении кинетической энергии. Действительно, так как работа реакции, направленной по нормали к кривой, равна нулю, то

$$\frac{mv^2}{2}=mgx$$

и

$$v=\sqrt{2gx}.$$

Рассмотренный пример показывает, что нахождение реакций с помощью уравнений Лагранжа первого рода (уравнений (5.29)) приводит к громоздким выкладкам. Поэтому этот метод и не нашел широкого практического применения. В следующем параграфе будет показано, как эту задачу можно решить значительно короче.

§ 5.5. Естественные уравнения движения. Математический маятник

При изучении несвободного движения материальной точки по неподвижной кривой иногда удобно использовать уравнение (5.3) в проекциях на оси естественного трехгранника (глава I, § 1.3). Эти уравнения имеют вид

$$mw_\tau = F_\tau + R_\tau, \quad mw_n = F_n + R_n, \quad mw_b = F_b + R_b.$$

Подставляя сюда проекции ускорения

$$w_\tau = \frac{dv_\tau}{dt}, \quad w_n = \frac{v^2}{\rho}, \quad w_b = 0,$$

получим

$$m\frac{dv_\tau}{dt} = F_\tau + R_\tau, \quad m\frac{v^2}{\rho} = F_n + R_n, \quad 0 = F_b + R_b. \qquad (5.36)$$

Уравнения (5.36) называются *естественными уравнениями движения*. Из третьего уравнения следует, что бинормальная составляющая реакции определяется статически через бинормальную составляющую активной силы и от закона движения точки не зависит.

При заданных активных силах и известных уравнениях связи уравнения (5.36) позволяют определить закон движения точки и реакции связей. Заметим, что между проекциями реакции R_τ, R_n, R_b обычно существует простая связь.

При движении точки по шероховатой кривой проекция R_τ представляет собой силу трения скольжения. Модуль силы трения скольжения равен

$$|R_\tau| = f\sqrt{R_n^2 + R_b^2},$$

где f — коэффициент трения скольжения.

Сила трения скольжения всегда направлена противоположно скорости, следовательно,

$$R_\tau = -f\sqrt{R_n^2 + R_b^2}\,\frac{v_\tau}{v}.$$

Если движение происходит по идеально гладкой кривой, то $R_\tau = 0$ и естественные уравнения движения принимают вид

$$m\frac{dv_\tau}{dt} = F_\tau, \quad m\frac{v^2}{\rho} = F_n + R_n, \quad 0 = F_b + R_b. \qquad (5.37)$$

Отметим, что в этом случае первое уравнение служит для определения закона движения, а второе и третье — для определения реакции связи.

При движении точки по плоской, неподвижной шероховатой кривой уравнения (5.36) запишутся в виде

$$\left.\begin{aligned} m\frac{dv_\tau}{dt} &= F_\tau + R_\tau = F_\tau - f\sqrt{R_n^2 + R_b^2}\,\frac{v_\tau}{v}, \\ \frac{mv^2}{\rho} &= F_n + R_n. \end{aligned}\right\} \qquad (5.38)$$

Для примера, рассмотренного в предыдущем параграфе, второе уравнение системы (5.38) можно записать следующим образом (см. рис. 5.5):

$$\frac{mv^2}{\rho} = R - mg\sin\alpha,$$

где α — угол, образуемый касательной к параболе с осью x.

Исходя из уравнения параболы

$$y = \frac{1}{2}x^2,$$

имеем

$$y' = x = \operatorname{tg}\alpha. \qquad (5.39)$$

Отсюда

$$\sin\alpha = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}, \quad \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}. \qquad (5.40)$$

Из курса высшей математики известно, что радиус кривизны кривой находится по формуле

$$\rho = \frac{(1+y'^2)^{3/2}}{y''}$$

Учитывая соотношение (5.39), получим

$$\rho = (1+x^2)^{3/2}.$$

Так как $v = \sqrt{2gx}$, то

$$R = \frac{mv^2}{\rho} + mg\sin\alpha = m\frac{2gx}{(1+x^2)^{3/2}} + mg\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = mg\frac{x(3+x^2)}{(1+x^2)^{3/2}}.$$

Следовательно,

$$R_x = -mg\frac{x^2(3+x^2)}{(1+x^2)^2}, \quad R_y = mg\frac{x(3+x^2)}{(1+x^2)^2}.$$

Применим теперь уравнения (5.38) для изучения движения математического маятника.

Математическим маятником называется материальная точка, движущаяся под действием силы тяжести по гладкой окружности, расположенной в вертикальной плоскости. Практически это можно,