Отложим от полюса p вектор $\overline{pa}=\mathbf{v}_A$, из точки a проведем прямую, перпендикулярную стержню AB (рис. 11.9, *б*). Прямая, проведенная из точки p параллельно направлению скорости точки B, пересечет прямую, проведенную из точки a, в точке b и, следовательно, вектор $\overline{pb}$ будет равен $\mathbf{v}_B$. Точку c на плане скоростей получить путем нахождения точки пересечения прямых

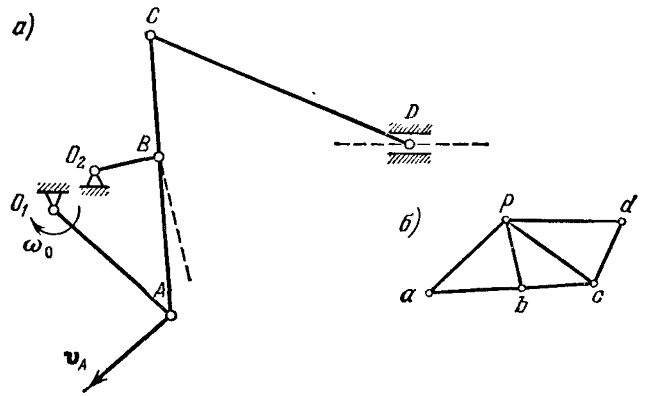

Рис. 11.9.

линий, проведенных из точки a перпендикулярно стержню AC и из точки b перпендикулярно BC, нельзя, так как эти линии сливаются. Поэтому для нахождения точки c воспользуемся соотношениями (11.9):

$$\frac{ab}{AB}=\frac{bc}{BC}.$$

Это значит, что точка b делит отрезок ac в том же отношении, что и точка B — отрезок AC. Таким образом, находим точку c. Вектор $\overline{pc}=\mathbf{v}_C$.

Теперь проведем из точки p прямую, параллельную направлению скорости точки D, а из точки c прямую, перпендикулярную стержню CD. Пересечение этих прямых определит точку d, причем $\overline{pd}=\mathbf{v}_D$.

§ 11.4. Мгновенный центр скоростей. Центроиды

Мгновенным центром скоростей называется точка плоской фигуры, скорость которой в данный момент времени равна нулю.

Докажем теорему о существовании мгновенного центра скоростей: *если угловая скорость плоской фигуры отлична от нуля, то мгновенный центр скоростей существует.*

Пусть скорость $\mathbf{v}_A$ произвольной точки плоской фигуры отлична от нуля (в противном случае точка A была бы мгновенным центром скоростей).

По знаку угловой скорости $\omega_z=\dot{\varphi}$ определяем направление вращения плоской фигуры вокруг точки A и в этом направлении откладываем от точки A отрезок $AP=v_A/\omega$ перпендикулярно скорости $\mathbf{v}_A$.

На рис. 11.10 предполагается, что $\omega_z=\dot{\varphi}>0$, и поэтому отрезок AP повернут относительно $\mathbf{v}_A$ против хода часовой стрелки.

Докажем, что скорость полученной точки P равна нулю, т. е. эта точка и есть мгновенный центр скоростей.

В соответствии с формулой (11.7) имеем

$$\mathbf{v}_P=\mathbf{v}_A+\mathbf{v}_{PA}.$$

Так как скорость $\mathbf{v}_{PA}$ перпендикулярна AP, то вектор $\mathbf{v}_{PA}$ параллелен $\mathbf{v}_A$. Кроме того, в соответствии с правилом построения отрезка AP векторы $\mathbf{v}_A$ и $\mathbf{v}_{PA}$ имеют противоположные направления. Модуль скорости $\mathbf{v}_{PA}$ равен

$$v_{PA}=\omega\cdot AP=\frac{v_A}{\omega}\,\omega=v_A.$$

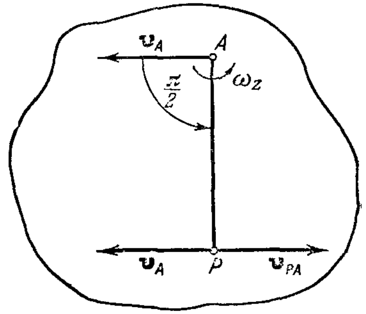

Рис. 11.10.

Два вектора, равных по величине и противоположно направленных, в сумме равны нулю. Следовательно,

$$\mathbf{v}_P=\mathbf{v}_A+\mathbf{v}_{PA}=0,$$

т. е. скорость точки P равна нулю.

Выберем теперь за полюс точку P. Тогда скорость произвольной точки A плоской фигуры найдется по формуле (рис. 11.11)

$$\mathbf{v}_A=\mathbf{v}_P+\boldsymbol{\omega}\times\overline{PA}=\boldsymbol{\omega}\times\overline{PA}, \qquad (11.10)$$

так как $\mathbf{v}_P=0$.

Отсюда следует, что скорости точек тела при его плоском движении распределяются точно так же, как и при вращательном движении. Роль неподвижной оси играет мгновенная ось, проходящая через мгновенный центр скоростей перпендикулярно плоскости движения. Таким образом, скорости всех точек фигуры перпендикулярны отрезкам, соединяющим эти точки с мгновенным центром скоростей ($\mathbf{v}_A\perp AP$), а модули скоростей пропорциональны расстояниям до мгновенного центра скоростей ($v_A=\omega\cdot PA$).

Зная положение мгновенного центра скоростей, можно найти скорости всех точек плоской фигуры, если известна скорость какой-либо ее точки.

В самом деле, пусть известна, например, скорость $\mathbf{v}_A$ точки A; тогда из равенства $v_A=\omega\cdot AP$ найдем $\omega=v_A/AP$ и скорость любой точки B будет $v_B=v_A\cdot PB/PA$. Соединив конец вектора $\mathbf{v}_B$ с точкой P, получим эпюру распределения скоростей вдоль отрезка PB (см. рис. 11.11).

Используя основные свойства мгновенного центра скоростей, можно определить его положение и в других случаях. На рис. 11.12, *а* показано, как находится эта точка, когда известны направления скоростей двух точек. Из точек A и B восставлены перпендикуляры к $\mathbf{v}_A$ и $\mathbf{v}_B$. Точка P находится на их пересечении. Если скорости точек A и B параллельны и $AB \perp \mathbf{v}_A$, то для определения мгновенного центра скоростей следует воспользоваться свойством пропорциональности модулей скоростей расстояниям точек до мгновенного центра скоростей. На рис. 11.12, *б* и *в* показано, как находится мгновенный центр в этих случаях. На рис. 11.12, *г* показан случай, когда $\mathbf{v}_B$ и $\mathbf{v}_A$ параллельны, но $\mathbf{v}_A$ не перпендикулярна отрезку AB. Очевидно, что в этом случае прямые, перпендикулярные $\mathbf{v}_A$ и $\mathbf{v}_B$, пересекаются в бесконечности и мгновенного центра скоростей не существует. В самом деле, на основании теоремы о проекциях скоростей имеем $v_A \cos\alpha = v_B \cos\alpha$. Отсюда $v_A = v_B$ и $\mathbf{v}_A = \mathbf{v}_B$. Из формулы (11.7) следует, что

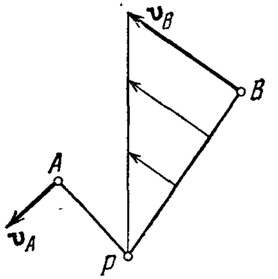

Рис. 11.11.

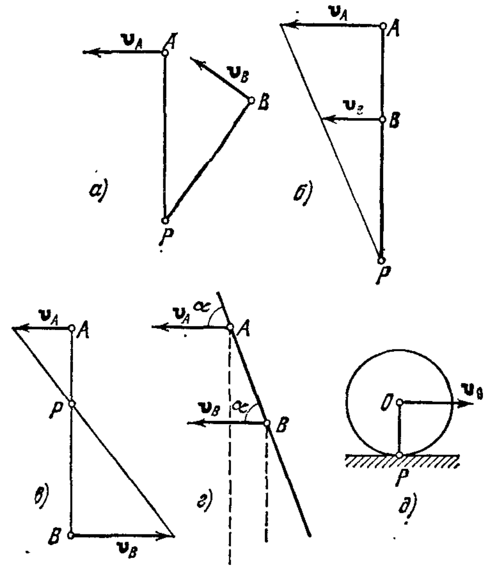

Рис. 11.12.

при этом $\boldsymbol{\omega} \times \overline{AB} = 0$, т. е. угловая скорость фигуры равна нулю ($\omega = 0$). Значит, в данный момент времени скорости всех точек плоской фигуры равны по модулю и направлению и, следовательно, точки, линейная скорость которой равна нулю, не существует.

При качении без скольжения одного тела по поверхности другого (рис. 11.12, *д*) мгновенный центр скоростей совпадает с точкой соприкосновения тел (так как при отсутствии скольжения скорость точки соприкосновения равна нулю).

Использование мгновенного центра скоростей очень часто упрощает решение задачи.

Задача 11.3. В двухползунковом кривошипном механизме кривошип $OA = r = 15$ *см* вращается вокруг оси O с постоянной угловой скоростью $\omega_0 = 2$ *сек*$^{-1}$ (рис. 11.13). Длины шатунов равны между собой ($AB = CD = l = 60$ *см*), $AC = l/3$. При горизонтальном (правом) положении кривошипа OA определить: 1) угловые скорости шатунов AB и CD; 2) скорость ползуна D.

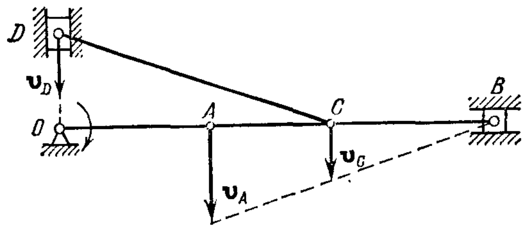

Рис. 11.13.

В рассматриваемом механизме звенья AB и CD совершают плоское движение. Определим положение мгновенных центров скоростей шатунов AB и CD. Восставляя перпендикуляры к направлениям скорости точки A и скорости точки B (точка B движется по горизонтальной прямой), убеждаемся, что мгновенный центр скоростей шатуна AB в данный момент времени совпадает с точкой B (рис. 11.13).

Модуль скорости точки A как точки кривошипа OA равен $v_A = \omega_0 r$, с другой стороны, модуль скорости этой же точки как точки шатуна AB будет

$$v_A = \omega \cdot AB,$$

где ω — угловая скорость шатуна AB.

Следовательно, $\omega_0 r = \omega \cdot AB$ и

$$\omega = \frac{\omega_0 r}{AB} = 0{,}5 \ 1/\textit{сек},$$

Модуль скорости точки C шатуна AB равен

$$v_C = \omega \cdot BC = 20 \ \textit{см/сек}.$$

Направление вектора $\mathbf{v}_C$ перпендикулярно AB.

Так как скорости точек C и D параллельны, то мгновенный центр скоростей шатуна DC лежит в бесконечности и угловая скорость ω_1 шатуна DC равна нулю. Значит, $\mathbf{v}_D = \mathbf{v}_C$ и $v_D = 20$ *см/сек*.

В отличие от чисто вращательного движения, при плоском движении мгновенный центр скоростей меняет, вообще говоря, свое положение на плоскости. Если наклеить на фигуру, совершающую плоское движение, лист бумаги и в каждый момент времени прокалывать иглой мгновенный центр скоростей, то получатся две серии отметок: одна на неподвижной плоскости, другая на листе, связанном с фигурой.

Геометрическое место мгновенных центров скоростей, отмеченных на неподвижной плоскости, называется неподвижной центроидой.

Геометрическое место мгновенных центров скоростей, отмеченных на плоскости, жестко связанной с фигурой, называется подвижной центроидой.