Задача Д3. Динамический анализ многозвенного механизма с помощью рычага Жуковского

Условие задачи. Плоский шарнирно-стержневой механизм, расположенный в вертикальной плоскости, приводится в движение моментом M_{OA}, приложенным к звену OA.

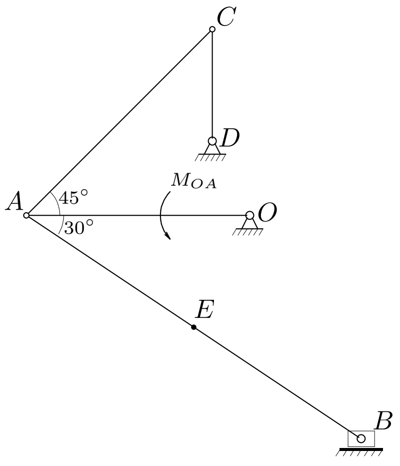

Рис. 1

Даны размеры $0A = 0.6$ м, $AB = 1.5$ м, $AC = 0.7$ м, $CD = 0.3$ м. В узлах A, B, C и в середине звена AB сосредоточены массы $m_A = 1$ кг, $m_B = 10$ кг, $m_C = 5$ кг, $m_E = 2$ кг. Сила сопротивления движению ползуна $F_{fr} = 10$ Н. В узле D момент сил трения $M_D = 60$ Нм. Угловая скорость звена OA постоянна и равна $1\ \frac{\text{рад}}{\text{с}}$. Определить крутящий момент M_{OA} в указанном положении механизма.

Решение

Задача решается с помощью общего уравнения динамики. Будем использовать это уравнение в форме, предложенной Н.Жуковским. Метод, называемый *рычагом Жуковского*, состоит в простом и наглядном способе вычисления виртуальных работ сил, приложенных к механизму. Представим общее уравнение динамики в виде суммы виртуальных мощностей

$$\sum_k \bar{F}_k \cdot \bar{v}_k = 0,$$

$\bar{F}_k$ – активные силы, приложенные к механизму и силы инерции. Точкой обозначено скалярное произведение

$$|\bar{F}_k \cdot \bar{v}_k| = |F_k||v_k| \cos \alpha_k,$$

где α_k – угол между вектором силы и скоростью точки ее приложения. Если все скорости отложить на плане скоростей, а затем, следуя Жуковскому, повернуть план на 90° в любую сторону, то сумму виртуальных мощностей следует переписать в виде

$$\sum_k |F_k||v_k| \sin \alpha_k.$$

Вектора v_k на повернутом плане скоростей становятся радиусами-векторами точек приложения сил. Напомним, что момент силы F относительно точки О вычисляется по формуле

$$|M_O| = |\bar{r} \times \bar{F}| = |F||r|\sin\alpha.$$

Следовательно, произведения $|F_k||v_k|\sin\alpha_k$ по форме совпадают с моментами сил относительно центра плана скоростей. Единственное отличие – масштаб линейный здесь заменен на масштаб скоростей. Равенство нулю суммы моментов означает уравновешенность *рычага Жуковского* относительно его центра и, следовательно, выполнение общего уравнения динамики из которого можно найти крутящий момент.

План решения

1. Вычисление скоростей точек A, B, C, E и угловых скоростей звеньев с помощью плана скоростей.
2. Вычисление ускорений точек A, B, C, E.
3. Вычисление сил тяжести и сил инерции всех точек.
4. Приведение момента трения на оси D к паре сил.
5. Изображение всех сил на повернутом плане скоростей.
6. Составление уравнения равновесия рычага.

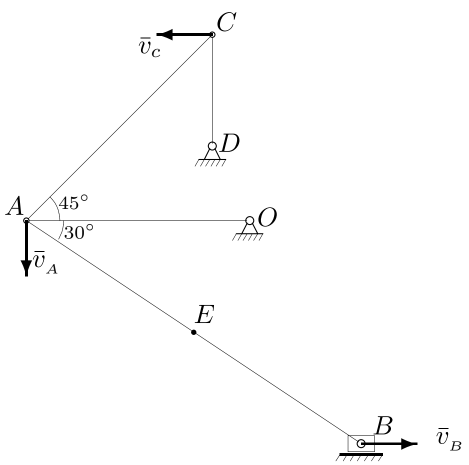

Рис. 2

1 План скоростей

Построение начинается с вычисления скорости точки A

$$v_A = \omega_{OA} OA = 1 \cdot 0.6 = 0.6 \text{ м/с}.$$

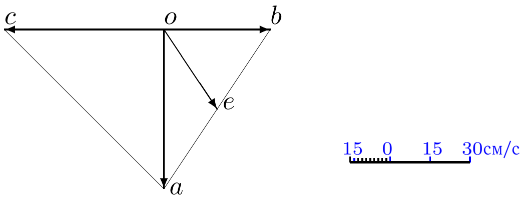

Рис. 3

От произвольной точки o (рис.2) откладываем в выбранном масштабе вектор v_A. Конец вектора отмечаем буквой a. Затем по заданным направлениям векторов скоростей (рис.1) последовательно определяем величины v_c и v_B. Используем при этом основное свойство плана скоростей: $ab \perp AB$ и $ac \perp AC$. Точку e — конец вектора скорости $\bar{v}_E$ находим на середине отрезка ab, так как по условию $AE = BE$. Величины скоростей в общем случае измеряются на плане скоростей, выполненном в масштабе. В данном же примере все скорости можно вычислить из соответствующих треугольников $v_c = v_A = 0.6$ м/с, $v_B = v_A \text{tg}30 = 0.346$ м/с. $v_E = v_B = 0.346$ м/с.

Определим угловые скорости, необходимые для вычисления ускорений. Из плана скоростей $ac = \sqrt{2}oc = \sqrt{2}v_A$, $\omega_{AC} = ac/AC = 1.212$ рад/с, $ab = 2ob = 2v_B$, $\omega_{AB} = ab/AB = 0.462$ рад/с.

2 Вычисление ускорений точек A, B, C, E.

Так как звено OA вращается с постоянной угловой скоростью, то $\varepsilon_{OA} = 0$ и

$$a_A = a_A^n = \omega_{OA}^2 OA = 0.6 \text{ м/с}^2.$$

Ускорение точки B определим через ускорение $\bar{a}_A$, взяв A за полюс

$$\bar{a}_B = \bar{a}_A + \bar{a}_{BA}^{\text{ц}} + \bar{a}_{BA}^{\text{вр}}.$$

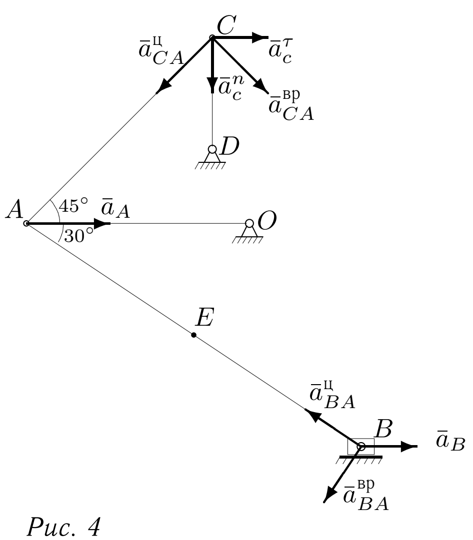

Рис. 4

Направления векторов ускорений показаны на рис. 3. Центростремительное ускорение точки B вокруг полюса A можно вычислить

$$a_{BA}^{\text{ц}} = \omega_{AB}^2 AB = 0.462^2 \cdot 1.5 = 0.319 \text{ м/с}^2.$$

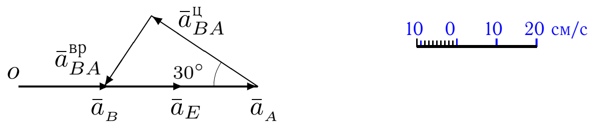

Рис. 5

Ускорение ползуна определяем на плане ускорений. От произвольной точки o (рис.4) откладываем в масштабе вектор ускорения полюса $\bar{a}_A$, затем от его конца под углом 30° найденный вектор $\bar{a}_{BA}^{\text{ц}}$. Конец вектора ускорения ползуна (он движется горизонтально) лежит на пересечении перпендикуляра к $\bar{a}_{BA}^{\text{ц}}$ (направление $\bar{a}_{BA}^{\text{вр}}$) с горизонталью. Как и на плане скоростей все необходимые величины можно получить измерением, однако и здесь вычисления дадут более точные результаты

$$a_B = a_A - \frac{a_{BA}^{\text{ц}}}{\cos 30} = 0.6 - \frac{0.319}{0.866} = 0.230 \text{ м/с}.$$

Так как $AE = BE$, то по свойству векторов ускорений точек отрезка

$$a_E = \frac{a_A + a_B}{2} = 0.415 \text{ м/с}^2.$$

Аналогично определяем ускорение точки C.

$$\bar{a}_C = \bar{a}_C^n + \bar{a}_C^\tau = \bar{a}_A + \bar{a}_{CA}^{\text{ц}} + \bar{a}_{CA}^{\text{вр}}. \qquad (1)$$

Центростремительное ускорение точки вокруг A

$$a_{CA}^{\text{ц}} = \omega_{AC}^2 AC = 1.212^2 \cdot 0.7 = 1.029 \text{ м/с}^2.$$

Нормальная компонента вектора ускорения

$$\bar{a}_C^n = \frac{v_c^2}{CD} = \frac{0.6^2}{0.3} = 1.2 \text{ м/с}^2.$$

Начнем построение с левой части (1). От произвольной точки o на плане ускорений (рис.5) откладываем в масштабе вектор $\bar{a}_C^n$. Вектор $\bar{a}_C^\tau$ известен только по направлению. Проводим перпендикуляр к $\bar{a}_C^n$. Рассматривая правую часть (1), отложим от того же центра o вектор $\bar{a}_A$, затем $\bar{a}_{CA}^{\text{ц}}$. К концу последнего проводим перпендикуляр – направление $\bar{a}_{CA}$ до пересечения с первым перпендикуляром.

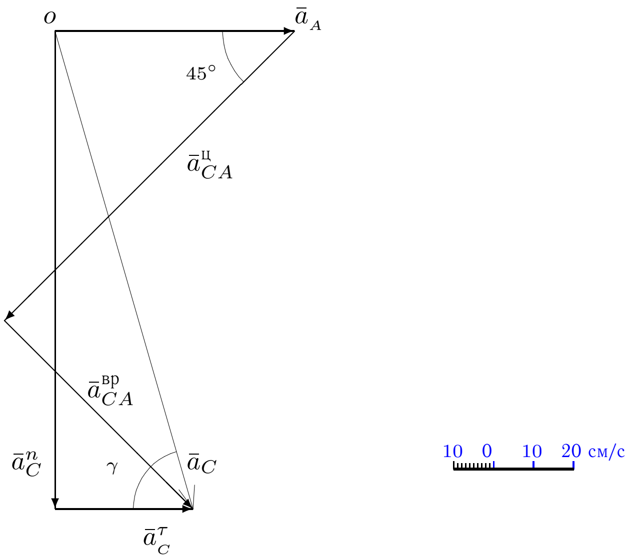

Рис. 6

Получим точку, определяющую вектор $\bar{a}_c$. Величину a_c можно найти, рассматривая треугольники на построенном плане ускорений

$$a^{ц}_{CA}\cos 45 + a^{вр}_{CA}\cos 45 = a^n_c,$$

отсюда

$$a^{вр}_{CA} = \frac{a^n_c}{\cos 45} - a^{ц}_{CA} = \frac{1.2}{0.707} - 1.029 = 0.668 \text{ м/с}^2.$$

$$a^\tau_c = a_A - a^{ц}_{CA}\cos 45 + a^{вр}_{CA}\cos 45 = 0.6 - (1.029 - 0.668)\cdot 0.707 = 0.345 \text{ м/с}^2.$$

$$a_c = \sqrt{(a^\tau_c)^2 + (a^n_c)^2} = 1.25 \text{ м/с}^2.$$

3 Вычисление сил тяжести и сил инерции

Силы тяжести: $P_A = m_A g = 1\cdot 9.81 = 9.81$ Н, $P_B = m_B g = 10\cdot 9.81 = 98.1$ Н, $P_C = m_C g = 5\cdot 9.81 = 49.05$ Н, $P_E = m_E g = 2\cdot 9.81 = 19.62$ Н. Силы инерции по Даламберу: $\Phi_A = m_A a_A = 1\cdot 0.6 = 0.6$ Н, $\Phi_B = m_B a_B = 10\cdot 0.231 = 2.31$ Н, $\Phi_C = m_C a_C = 5\cdot 1.25 = 6.25$ Н, $\Phi_E = m_E a_E = 2\cdot 0.415 = 0.83$ Н.

4 Приведение момента трения к паре сил

$M_D = F_1 CD = 60$ Нм, $F_1 = 60/0.3 = 200$ Н. Все действующие силы приложим к точкам механизма (рис.6). Так как силы инерции определяются формулой

$$\bar{\Phi} = -m\bar{a},$$

то соответствующие вектора направлены в сторону, противоположную ускорениям. Вектор силы инерции $\bar{\Phi}_c$ проведем под углом γ к горизонту, $\cos\gamma = a_c^\tau / a_c = 0.34/1.25 = 0.276$.
Искомый момент представим парой сил $M_{OA} = F_2 \cdot OA$.

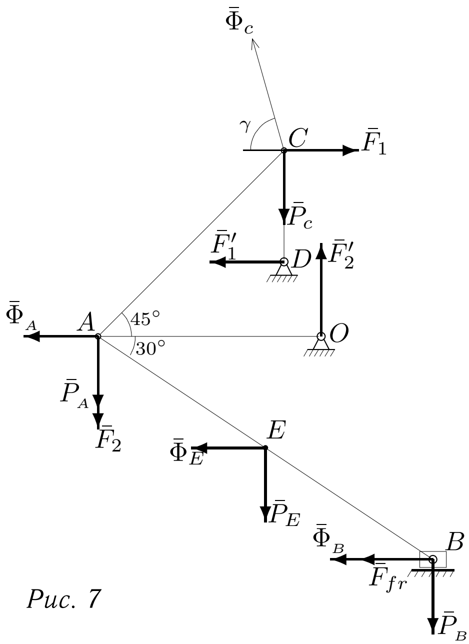

Рис. 7

5 Силы на повернутом плане скоростей

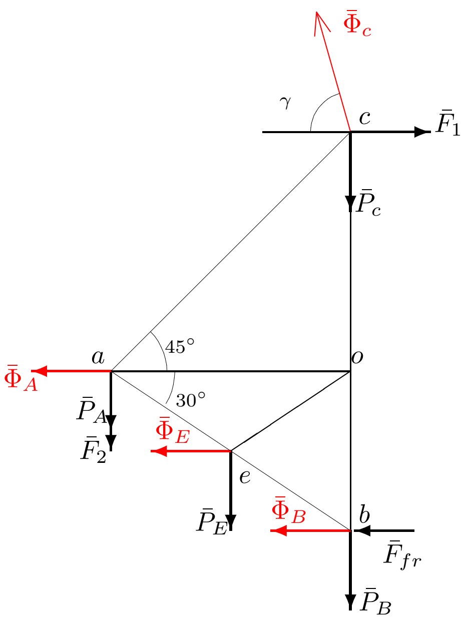

Рис. 8

Составим уравнение равновесия рычага. Приравняем нулю сумму моментов относительно центра o всех сил, действующих на *рычаг*. Каждое слагаемое этой суммы представляет собой мощность N.

$$\sum N_k = P_A \cdot ao + P_E \cdot oe \cos 30 + \Phi_c \cos\gamma \cdot co -$$

$$-\Phi_E \cdot oe \sin 30 - \Phi_B \cdot ob - F_{fr} \cdot ob - F_1 \cdot oc + F_2 \cdot oa = 0.$$

Представим сумму отдельными слагаемыми

$$\sum N_k = N_p + N_\Phi + N_{fr} + N_{M_D} + F_2 \cdot oa = 0,$$

где $N_p = P_A \cdot ao + P_E \cdot oe \cos 30 = 9.81 \cdot 0.6 + 19.62 \cdot 0.3 = 11.772$ Вт – мощность сил тяжести, $N_\Phi = \Phi_c \cos\gamma \cdot co - \Phi_E \cdot oe \sin 30 - \Phi_B \cdot ob = 6.25 \cdot 0.276 \cdot 0.6 - 0.83 \cdot 0.346 \cdot 0.5 - 2.31 \cdot 0.346 = 0.092$ Вт – мощность сил инерции, $N_{fr} = -F_{fr} ob = -10 \cdot 0.346 = -3.46$ Вт – мощность силы трения,

$N_{M_D} = -F_1 oc = -200 \cdot 0.6 = -12$ Вт – мощность момента силы трения в узле D. Найдем

$$F_2 = -\frac{N_p + N_\Phi + N_{fr} + N_{M_D}}{oa} = -\frac{11.772 + 0.092 - 3.46 - 12}{0.6} = 5.99 \text{ Н}.$$

В итоге искомый момент

$$M_{OA} = F_2 \cdot 0.6 = 3.596 \text{ Нм}.$$