

### 3. ДИНАМИКА

#### Задание Д1. Теоремы динамики точки

**Условие задания.** Тяжелая шайба массой  $m$ , имея в точке  $A$  начальную скорость  $v_0$ , скользит по изогнутой оси  $u$ , сорвавшись с нее в точке  $C$ , находится некоторое время в свободном полете, а затем ударяется о вертикальную или горизонтальную преграду.

Таблица 3.1

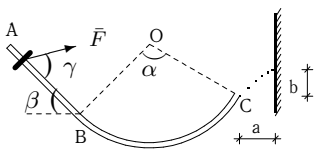
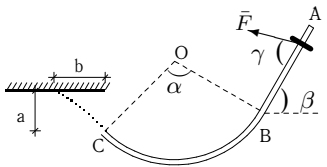
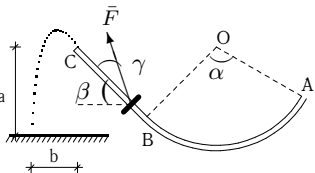
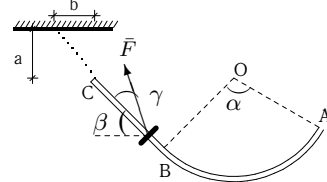
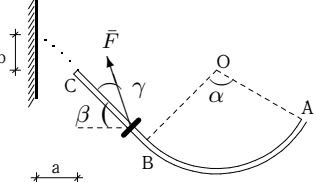
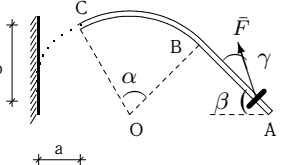
<p><b>1</b></p>  <p><math>m = 0.2 \text{ кг}</math>, <math>\gamma = 60^\circ</math>, <math>t_1 = 5 \text{ с}</math>, <math>r = 3 \text{ м}</math>,  <math>v_0 = 25 \text{ м/с}</math>, <math>R = 9 \text{ Н}</math>, <math>a = 1 \text{ м}</math>,  <math>\alpha = 45^\circ</math>, <math>\beta = 30^\circ</math>, <math>F = 0.2 \exp(\frac{t}{5}) + 1</math>.</p>	<p><b>2</b></p>  <p><math>m = 0.3 \text{ кг}</math>, <math>\gamma = 45^\circ</math>, <math>t_1 = 2 \text{ с}</math>, <math>r = 4 \text{ м}</math>,  <math>v_0 = 25 \text{ м/с}</math>, <math>R = 13 \text{ Н}</math>, <math>a = 7 \text{ м}</math>,  <math>\alpha = 60^\circ</math>, <math>\beta = 45^\circ</math>, <math>F = 0.1 \exp(\frac{t}{6}) + 3t</math>.</p>
<p><b>3</b></p>  <p><math>m = 0.4 \text{ кг}</math>, <math>\gamma = 15^\circ</math>, <math>t_1 = 2 \text{ с}</math>, <math>r = 5 \text{ м}</math>,  <math>v_0 = 25 \text{ м/с}</math>, <math>R = 6 \text{ Н}</math>, <math>a = 7 \text{ м}</math>,  <math>\alpha = 75^\circ</math>, <math>\beta = 60^\circ</math>, <math>F = 0.3 \exp(\frac{t}{2}) + t^2</math>.</p>	<p><b>4</b></p>  <p><math>m = 0.5 \text{ кг}</math>, <math>\gamma = 15^\circ</math>, <math>t_1 = 4 \text{ с}</math>, <math>r = 6 \text{ м}</math>,  <math>v_0 = 26 \text{ м/с}</math>, <math>R = 7 \text{ Н}</math>, <math>a = 9 \text{ м}</math>,  <math>\alpha = 90^\circ</math>, <math>\beta = 75^\circ</math>, <math>F = 3 \cos(\pi t/2) + 4t</math>.</p>
<p><b>5</b></p>  <p><math>m = 0.6 \text{ кг}</math>, <math>\gamma = 30^\circ</math>, <math>t_1 = 4 \text{ с}</math>, <math>r = 3 \text{ м}</math>,  <math>v_0 = 26 \text{ м/с}</math>, <math>R = 15 \text{ Н}</math>, <math>a = 5 \text{ м}</math>,  <math>\alpha = 30^\circ</math>, <math>\beta = 15^\circ</math>, <math>F = 4 \cos(\pi t/3) + 3t</math>.</p>	<p><b>6</b></p>  <p><math>m = 0.7 \text{ кг}</math>, <math>\gamma = 15^\circ</math>, <math>t_1 = 3 \text{ с}</math>, <math>r = 4 \text{ м}</math>,  <math>v_0 = 26 \text{ м/с}</math>, <math>R = 12 \text{ Н}</math>, <math>a = 6 \text{ м}</math>,  <math>\alpha = 45^\circ</math>, <math>\beta = 30^\circ</math>, <math>F = 2 \cos(\pi t/4) + 3t^2</math>.</p>

Таблица 3.2

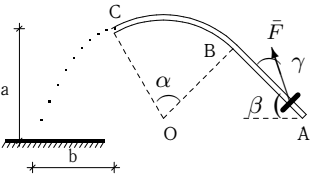
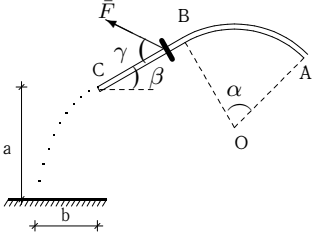
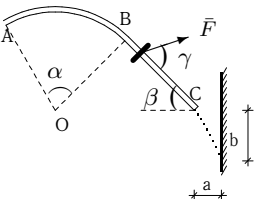
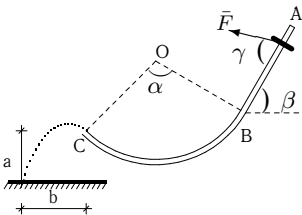
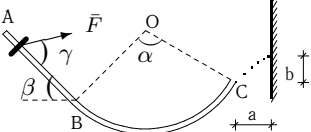
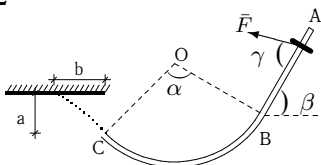
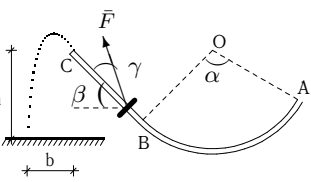
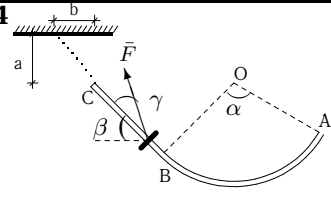
<p><b>7</b></p>  <p> <math>m = 0.8 \text{ кг}, \gamma = 15^\circ, t_1 = 3 \text{ с}, r = 5 \text{ м},</math>  <math>v_0 = 27 \text{ м/с}, R = 11 \text{ Н}, a = 10 \text{ м},</math>  <math>\alpha = 60^\circ, \beta = 45^\circ, F = 2 \sin(\pi t/3) + 9.</math> </p>	<p><b>8</b></p>  <p> <math>m = 0.9 \text{ кг}, \gamma = 30^\circ, t_1 = 1 \text{ с}, r = 6 \text{ м},</math>  <math>v_0 = 27 \text{ м/с}, R = 8 \text{ Н}, a = 6 \text{ м},</math>  <math>\alpha = 90^\circ, \beta = 75^\circ, F = 3 \sin(\pi t/4) + t^2.</math> </p>
<p><b>9</b></p>  <p> <math>m = 0.4 \text{ кг}, \gamma = 60^\circ, t_1 = 1 \text{ с}, r = 3 \text{ м},</math>  <math>v_0 = 27 \text{ м/с}, R = 10 \text{ Н}, a = 14 \text{ м},</math>  <math>\alpha = 75^\circ, \beta = 60^\circ, F = 4 \sin(\pi t/2) + 5t.</math> </p>	<p><b>10</b></p>  <p> <math>m = 0.5 \text{ кг}, \gamma = 75^\circ, t_1 = 5 \text{ с}, r = 4 \text{ м},</math>  <math>v_0 = 25 \text{ м/с}, R = 5 \text{ Н}, a = 5 \text{ м},</math>  <math>\alpha = 30^\circ, \beta = 15^\circ, F = 2 \cos(\pi t/5) + 4.</math> </p>
<p><b>11</b></p>  <p> <math>m = 0.1 \text{ кг}, \gamma = 60^\circ, t_1 = 5 \text{ с}, r = 5 \text{ м},</math>  <math>v_0 = 25 \text{ м/с}, R = 5 \text{ Н}, a = 2 \text{ м},</math>  <math>\alpha = 45^\circ, \beta = 30^\circ, F = 2 \cos^2(\pi t/6).</math> </p>	<p><b>12</b></p>  <p> <math>m = 0.2 \text{ кг}, \gamma = 45^\circ, t_1 = 2 \text{ с}, r = 6 \text{ м},</math>  <math>v_0 = 25 \text{ м/с}, R = 1 \text{ Н}, a = 3 \text{ м},</math>  <math>\alpha = 60^\circ, \beta = 45^\circ, F = \sqrt{2t + 1}.</math> </p>
<p><b>13</b></p>  <p> <math>m = 0.6 \text{ кг}, \gamma = 15^\circ, t_1 = 2 \text{ с}, r = 3 \text{ м},</math>  <math>v_0 = 25 \text{ м/с}, R = 3 \text{ Н}, a = 2 \text{ м},</math>  <math>\alpha = 30^\circ, \beta = 15^\circ, F = 0.1t \exp(t/4).</math> </p>	<p><b>14</b></p>  <p> <math>m = 0.9 \text{ кг}, \gamma = 15^\circ, t_1 = 4 \text{ с}, r = 4 \text{ м},</math>  <math>v_0 = 25 \text{ м/с}, R = 4 \text{ Н}, a = 5 \text{ м},</math>  <math>\alpha = 60^\circ, \beta = 45^\circ, F = t\sqrt{t^2 + 1}.</math> </p>

Таблица 3.3

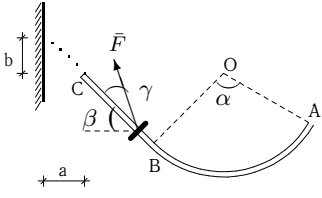
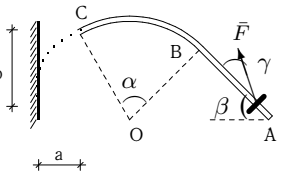
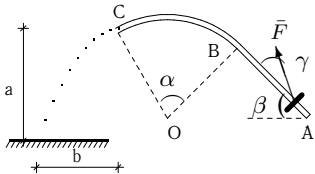
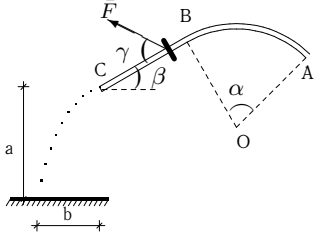
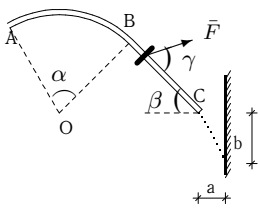
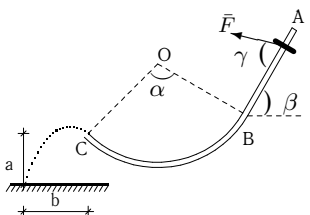
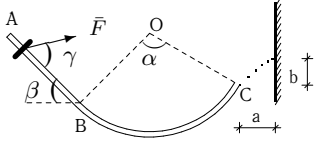
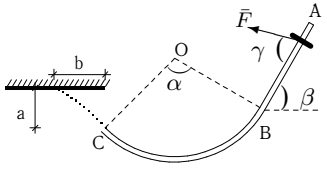
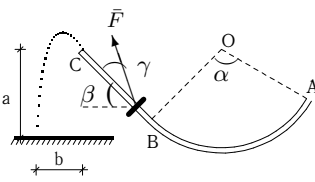
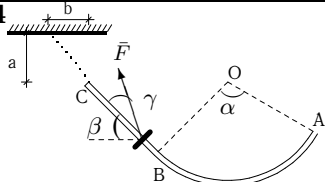
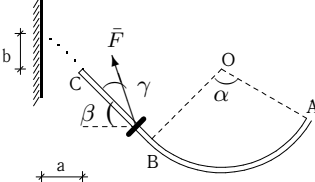
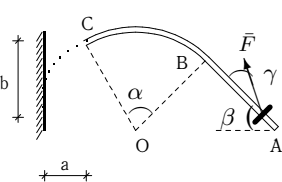
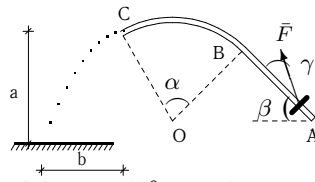
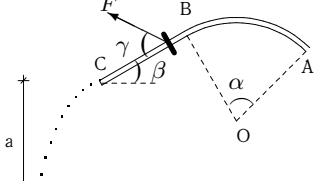
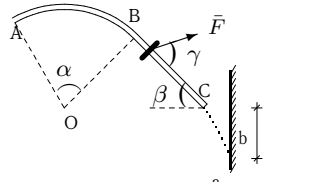
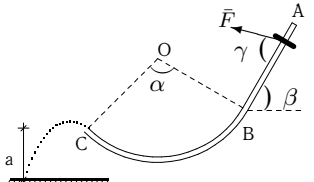
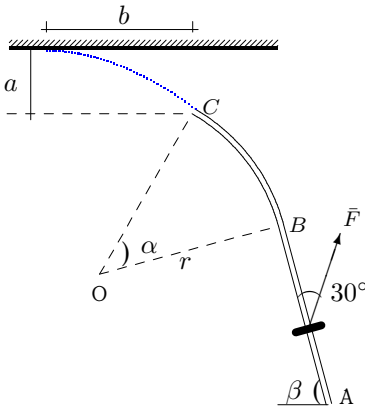
<p><b>15</b></p>  <p><math>m = 0.2 \text{ кг}, \gamma = 30^\circ, t_1 = 4 \text{ с}, r = 5 \text{ м},</math>  <math>v_0 = 25 \text{ м/с}, R = 9 \text{ Н}, a = 1 \text{ м},</math>  <math>\alpha = 45^\circ, \beta = 30^\circ, F = 0.2 \exp(\frac{t}{5}) + 1.</math></p>	<p><b>16</b></p>  <p><math>m = 0.3 \text{ кг}, \gamma = 15^\circ, t_1 = 3 \text{ с}, r = 6 \text{ м},</math>  <math>v_0 = 25 \text{ м/с}, R = 13 \text{ Н}, a = 7 \text{ м},</math>  <math>\alpha = 60^\circ, \beta = 45^\circ, F = 0.1 \exp(\frac{t}{6}) + 3t.</math></p>
<p><b>17</b></p>  <p><math>m = 0.4 \text{ кг}, \gamma = 15^\circ, t_1 = 3 \text{ с}, r = 3 \text{ м},</math>  <math>v_0 = 26 \text{ м/с}, R = 6 \text{ Н}, a = 7 \text{ м},</math>  <math>\alpha = 75^\circ, \beta = 60^\circ, F = 0.3 \exp(\frac{t}{2}) + t^2.</math></p>	<p><b>18</b></p>  <p><math>m = 0.5 \text{ кг}, \gamma = 30^\circ, t_1 = 1 \text{ с}, r = 4 \text{ м},</math>  <math>v_0 = 26 \text{ м/с}, R = 7 \text{ Н}, a = 9 \text{ м},</math>  <math>\alpha = 90^\circ, \beta = 75^\circ, F = 3 \cos(\pi t/2) + 4t.</math></p>
<p><b>19</b></p>  <p><math>m = 0.6 \text{ кг}, \gamma = 60^\circ, t_1 = 1 \text{ с}, r = 5 \text{ м},</math>  <math>v_0 = 26 \text{ м/с}, R = 15 \text{ Н}, a = 5 \text{ м},</math>  <math>\alpha = 30^\circ, \beta = 15^\circ, F = 4 \cos(\pi t/3) + 3t.</math></p>	<p><b>20</b></p>  <p><math>m = 0.7 \text{ кг}, \gamma = 75^\circ, t_1 = 5 \text{ с}, r = 6 \text{ м},</math>  <math>v_0 = 26 \text{ м/с}, R = 12 \text{ Н}, a = 6 \text{ м},</math>  <math>\alpha = 45^\circ, \beta = 30^\circ, F = 2 \cos(\pi t/4) + 3t^2.</math></p>
<p><b>21</b></p>  <p><math>m = 0.8 \text{ кг}, \gamma = 60^\circ, t_1 = 5 \text{ с}, r = 3 \text{ м},</math>  <math>v_0 = 27 \text{ м/с}, R = 11 \text{ Н}, a = 10 \text{ м},</math>  <math>\alpha = 60^\circ, \beta = 45^\circ, F = 2 \sin(\pi t/3) + 9.</math></p>	<p><b>22</b></p>  <p><math>m = 0.9 \text{ кг}, \gamma = 45^\circ, t_1 = 2 \text{ с}, r = 4 \text{ м},</math>  <math>v_0 = 27 \text{ м/с}, R = 8 \text{ Н}, a = 6 \text{ м},</math>  <math>\alpha = 90^\circ, \beta = 75^\circ, F = 3 \sin(\pi t/4) + t^2.</math></p>

Таблица 3.4

<p><b>23</b></p>  <p><math>m = 0.4 \text{ кг}, \gamma = 15^\circ, t_1 = 2 \text{ с}, r = 5 \text{ м},</math>  <math>v_0 = 27 \text{ м/с}, R = 10 \text{ Н}, a = 14 \text{ м},</math>  <math>\alpha = 75^\circ, \beta = 60^\circ, F = 4 \sin(\pi t/2) + 5t.</math></p>	<p><b>24</b></p>  <p><math>m = 0.5 \text{ кг}, \gamma = 15^\circ, t_1 = 4 \text{ с}, r = 6 \text{ м},</math>  <math>v_0 = 27 \text{ м/с}, R = 5 \text{ Н}, a = 5 \text{ м},</math>  <math>\alpha = 30^\circ, \beta = 15^\circ, F = 2 \cos(\pi t/5) + 4.</math></p>
<p><b>25</b></p>  <p><math>m = 0.1 \text{ кг}, \gamma = 30^\circ, t_1 = 4 \text{ с}, r = 4 \text{ м},</math>  <math>v_0 = 27 \text{ м/с}, R = 5 \text{ Н}, a = 2 \text{ м},</math>  <math>\alpha = 45^\circ, \beta = 30^\circ, F = 2 \cos^2(\pi t/6).</math></p>	<p><b>26</b></p>  <p><math>m = 0.2 \text{ кг}, \gamma = 15^\circ, t_1 = 3 \text{ с}, r = 5 \text{ м},</math>  <math>v_0 = 27 \text{ м/с}, R = 1 \text{ Н}, a = 3 \text{ м},</math>  <math>\alpha = 60^\circ, \beta = 45^\circ, F = \sqrt{2t + 1}.</math></p>
<p><b>27</b></p>  <p><math>m = 0.6 \text{ кг}, \gamma = 15^\circ, t_1 = 3 \text{ с}, r = 6 \text{ м},</math>  <math>v_0 = 25 \text{ м/с}, R = 3 \text{ Н}, a = 2 \text{ м},</math>  <math>\alpha = 30^\circ, \beta = 15^\circ, F = 0.1t \exp(t/4).</math></p>	<p><b>28</b></p>  <p><math>m = 0.9 \text{ кг}, \gamma = 30^\circ, t_1 = 1 \text{ с}, r = 3 \text{ м},</math>  <math>v_0 = 25 \text{ м/с}, R = 4 \text{ Н}, a = 5 \text{ м},</math>  <math>\alpha = 60^\circ, \beta = 45^\circ, F = t\sqrt{t^2 + 1}.</math></p>
<p><b>29</b></p>  <p><math>m = 0.6 \text{ кг}, \gamma = 60^\circ, t_1 = 1 \text{ с}, r = 4 \text{ м},</math>  <math>v_0 = 25 \text{ м/с}, R = 15 \text{ Н}, a = 5 \text{ м},</math>  <math>\alpha = 30^\circ, \beta = 15^\circ, F = 4 \cos(\pi t/3) + 3t.</math></p>	<p><b>30</b></p>  <p><math>m = 0.7 \text{ кг}, \gamma = 75^\circ, t_1 = 5 \text{ с}, r = 4 \text{ м},</math>  <math>v_0 = 26 \text{ м/с}, R = 12 \text{ Н}, a = 6 \text{ м},</math>  <math>\alpha = 45^\circ, \beta = 30^\circ, F = 2 \cos(\pi t/4) + 3t^2.</math></p>

На прямолинейном участке пути шайба разгоняется в течение времени  $t = t_1$  переменной силой  $F$ , направленной под углом  $\gamma$  к перемещению. На криволинейном участке оси, изогнутой по дуге окружности радиуса  $r$  (геометрический центр в точке  $O$ ), действует постоянная сила сопротивления  $R$ . Участки оси сопрягаются в точке  $B$  без излома. Вся траектория находится в вертикальной плоскости. В каком месте шайба ударится о преграду? ( $b = ?$ ) Найти давление шайбы в середине криволинейного участка траектории. Сила  $F$  дана в Н. (табл.3.1–3.4).

**ПРИМЕР ВЫПОЛНЕНИЯ ЗАДАНИЯ**



$$\begin{aligned}
 F &= 4t^3 + \sin t, \\
 t &= 2 \text{ с}, \\
 m &= 1.5 \text{ кг}, \\
 \alpha &= 45^\circ, \\
 \beta &= 75^\circ, \\
 R &= 3 \text{ Н}, \\
 a &= 2 \text{ м}, \\
 v_A &= 25 \text{ м/с}, \\
 r &= 8 \text{ м}.
 \end{aligned}$$

Рис. 3.1

Найти расстояние  $b$  и давление шайбы на ось в точке  $C$ .

**Решение**

Для того, чтобы найти  $b$ , необходимо знать скорость шайбы в точке  $C$ . На участке  $AB$ , где заданы действующие силы ( $F$  и сила тяжести) и время, применим теорему об изменении количества движения, а на участке  $BC$ , где известен путь – теорему об изменении кинетической энергии.

УЧАСТОК АВ

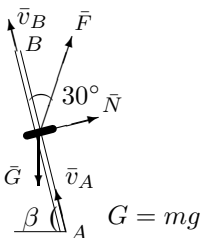


Рис. 3.2

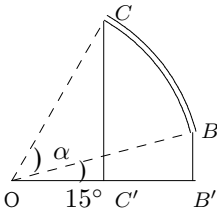
Изобразим действующие на шайбу силы. В проекции на ось  $AB$  запишем уравнение теоремы об изменении количества движения

$$mv_B - mv_A = \int_0^t (F \cos 30^\circ - mg \sin 75^\circ) dt.$$

Отсюда найдем скорость шайбы в точке  $B$

$$\begin{aligned} v_B &= v_A + \frac{\cos 30^\circ}{m} \int_0^t (4t^3 + \sin t) dt - gt \sin 75^\circ = \\ &= v_A + \frac{\cos 30^\circ}{m} (t^4 - \cos t)|_0^2 - 2g \sin 75^\circ = \\ &= 25 + \frac{0.866}{1.5} (16 + 0.416 + 1) - 9.81 \cdot 0.966 \cdot 2 = 16.10 \text{ м/с.} \end{aligned}$$

УЧАСТОК BC



Найдем работу сил, приложенных к шайбе, на участке пути  $BC$ . Сила тяжести совершает работу на перепаде высот между точками  $C$  и  $B$ . Из чертежа ясно, что работа равна

$$-mg(CC' - BB') = -mgr(\sin 60^\circ - \sin 15^\circ).$$

Так как точка перемещается вверх, то работа должна быть меньше нуля.

Рис. 3.3

Сила трения направлена по касательной к траектории, длина пути (дуга  $BC$ ) равна  $r\alpha\pi/180$ , где  $\alpha$  – угол в градусах. Теорема об изменении кинетической энергии точки на участке  $BC$  примет вид

$$\frac{mv_C^2}{2} - \frac{mv_B^2}{2} = -mgr(\sin 60^\circ - \sin 15^\circ) - R \frac{r\alpha\pi}{180}.$$

Найдем

$$\begin{aligned} v_C^2 &= v_B^2 - 2 \left( g(\sin 60^\circ - \sin 15^\circ) + R \frac{\alpha\pi}{180m} \right) r = \\ &= 16.1^2 - 2 \left( 9.81(0.866 - 0.259) + 3 \frac{45 \cdot \pi}{180 \cdot 1.5} \right) 8 = 138.77 \text{ (м/с)}^2. \end{aligned}$$

$$v_C = 11.78 \text{ м/с.}$$

УЧАСТОК СВОБОДНОГО ПОЛЕТА

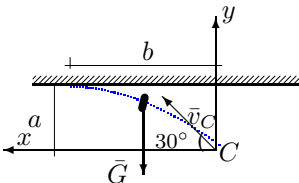


Рис. 3.4

Составим уравнения движения тела, брошенного под углом  $\beta - \alpha = 30^\circ$  к горизонту с начальной скоростью  $v_C$ . Начало координат поместим в точке  $C$ . Время  $t$ , будем отсчитывать от нуля. На шайбу действует только одна сила – вертикальная сила тяжести  $G = mg$ :

$$m\ddot{x} = \sum F_x = 0, \quad m\ddot{y} = \sum F_y = -mg.$$

Проинтегрируем эти уравнения дважды при начальных условиях

$$t = 0, \quad x = 0, \quad y = 0, \quad \dot{x} = v_C \cos 30^\circ, \quad \dot{y} = v_C \sin 30^\circ$$

$$m\dot{x} = c_1, \quad mx = \int c_1 dt = c_1 t + c_2,$$

$$m\dot{y} = \int -mg dt = -mgt + c_3, \quad my = \int (-mgt + c_3) dt = -mg \frac{t^2}{2} + c_3 t + c_4.$$

Из начальных условий найдем константы интегрирования

$$c_1 = v_C \cos 30^\circ, \quad c_3 = v_C \sin 30^\circ, \quad c_2 = c_4 = 0. \text{ Получим}$$

$$x = v_C \cos 30^\circ \cdot t,$$

$$y = v_C \sin 30^\circ \cdot t - g \frac{t^2}{2}.$$

В некоторый момент  $t_*$  высота  $y$  летящей шайбы будет равна  $a$ , т.е. шайба ударится о горизонтальную преграду. Найдем  $t_*$ , решив квадратное уравнение  $a = v_C \sin 30^\circ t_* - gt_*^2/2$ :

$$\begin{aligned} t_{*1,2} &= \frac{0.5v_C \pm \sqrt{0.25v_C^2 - 2ga}}{g} = \\ &= \frac{11.78 \cdot 0.5 \pm \sqrt{34.69 - 2 \cdot 9.81 \cdot 1.5}}{9.81} = \frac{5.89 \pm 2.29}{9.81}. \end{aligned}$$

$$t_{*1} = 0.367 \text{ с}, \quad t_{*2} = 0.834 \text{ с}.$$

Из двух решений берем меньшее – момент первого пересечения траектории с поверхностью преграды.

При  $t_* = 0.367$  с имеем

$$b = x = v_C \cos 30^\circ \cdot 0.367 = 11.78 \cdot 0.866 \cdot 0.367 = 3.74 \text{ м}.$$