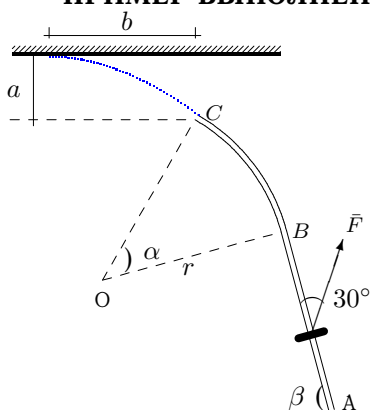


На прямолинейном участке пути шайба разгоняется в течение времени $t = t_1$ переменной силой F , направленной под углом γ к перемещению. На криволинейном участке оси, изогнутой по дуге окружности радиуса r (геометрический центр в точке O), действует постоянная сила сопротивления F_{fr} . Участки оси сопрягаются в точке B без излома. Вся траектория находится в вертикальной плоскости. В каком месте шайба ударится о преграду? (b — ?) Найти давление шайбы в середине криволинейного участка траектории. Сила F дана в Н.

ПРИМЕР ВЫПОЛНЕНИЯ ЗАДАНИЯ



$$\begin{aligned}
 F &= 4t^3 + \sin t, \\
 t &= 2 \text{ с}, \\
 m &= 1.5 \text{ кг}, \\
 \alpha &= 45^\circ, \\
 \beta &= 75^\circ, \\
 F_{fr} &= 3 \text{ Н}, \\
 a &= 2 \text{ м}, \\
 v_A &= 25 \text{ м/с}, \\
 r &= 8 \text{ м}.
 \end{aligned}$$

Рис. 3.1

Найти расстояние b и давление шайбы на ось в точке C .

Решение

Для того, чтобы найти b , необходимо знать скорость шайбы в точке C . На участке AB , где заданы действующие силы (F и сила тяжести) и время, применим теорему об изменении количества движения, а на участке BC , где известен путь — теорему об изменении кинетической энергии.

УЧАСТОК АВ

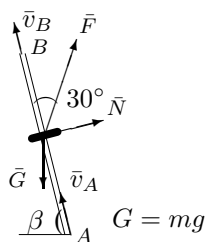


Рис. 3.2

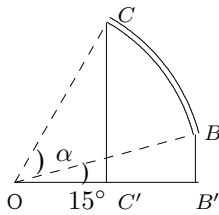
Изобразим действующие на шайбу силы. В проекции на ось AB запишем уравнение теоремы об изменении количества движения

$$mv_B - mv_A = \int_0^t (F \cos 30^\circ - mg \sin 75^\circ) dt.$$

Отсюда найдем скорость шайбы в точке B

$$\begin{aligned} v_B &= v_A + \frac{\cos 30^\circ}{m} \int_0^t (4t^3 + \sin t) dt - gt \sin 75^\circ = \\ &= v_A + \frac{\cos 30^\circ}{m} (t^4 - \cos t) \Big|_0^2 - 2g \sin 75^\circ = \\ &= 25 + \frac{0.866}{1.5} (16 + 0.416 + 1) - 9.81 \cdot 0.966 \cdot 2 = 16.10 \text{ м/с}. \end{aligned}$$

УЧАСТОК BC



Найдем работу сил, приложенных к шайбе, на участке пути BC . Сила тяжести совершает работу на перепаде высот между точками C и B . Из чертежа ясно, что работа равна

$$-m g (CC' - BB') = -m g r (\sin 60^\circ - \sin 15^\circ).$$

Так как точка перемещается вверх, то работа должна быть меньше нуля.

Рис. 3.3

Сила трения направлена по касательной к траектории, длина пути (дуга BC) равна $r\alpha\pi/180$, где α – угол в градусах. Теорема об изменении кинетической энергии точки на участке BC примет вид

$$\frac{mv_C^2}{2} - \frac{mv_B^2}{2} = -m g r (\sin 60^\circ - \sin 15^\circ) - F_{fr} \frac{r\alpha\pi}{180}.$$

Найдем

$$\begin{aligned} v_C^2 &= v_B^2 - 2 \left(g (\sin 60^\circ - \sin 15^\circ) + F_{fr} \frac{\alpha\pi}{180m} \right) r = \\ &= 16.1^2 - 2 \left(9.81 (0.866 - 0.259) + 3 \frac{45 \cdot \pi}{180 \cdot 1.5} \right) 8 = 138.77 \text{ (м/с)}^2. \\ v_C &= 11.78 \text{ м/с}. \end{aligned}$$

УЧАСТОК СВОБОДНОГО ПОЛЕТА

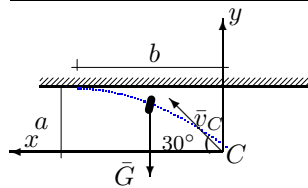


Рис. 3.4

Составим уравнения движения тела, брошенного под углом $\beta - \alpha = 30^\circ$ к горизонту с начальной скоростью v_C . Начало координат поместим в точке C . Время t , будем отсчитывать от нуля. На шайбу действует только одна сила – вертикальная сила тяжести $G = mg$:

$$m\ddot{x} = \sum F_x = 0, \quad m\ddot{y} = \sum F_y = -mg.$$

Проинтегрируем эти уравнения дважды при начальных условиях

$$t = 0, \quad x = 0, \quad y = 0, \quad \dot{x} = v_C \cos 30^\circ, \quad \dot{y} = v_C \sin 30^\circ$$

$$m\dot{x} = c_1, \quad mx = \int c_1 dt = c_1 t + c_2,$$

$$m\dot{y} = \int -mg dt = -mgt + c_3, \quad my = \int (-mgt + c_3) dt = -mg \frac{t^2}{2} + c_3 t + c_4.$$

Из начальных условий найдем константы интегрирования

$$c_1 = v_C \cos 30^\circ, \quad c_3 = v_C \sin 30^\circ, \quad c_2 = c_4 = 0. \text{ Получим}$$

$$x = v_C \cos 30^\circ \cdot t,$$

$$y = v_C \sin 30^\circ \cdot t - g \frac{t^2}{2}.$$

В некоторый момент t_* высота y летящей шайбы будет равна a , т.е. шайба ударится о горизонтальную преграду. Найдем t_* , решив квадратное уравнение $a = v_C \sin 30^\circ t_* - gt_*^2/2$:

$$t_{*1,2} = \frac{0.5v_C \pm \sqrt{0.25v_C^2 - 2ga}}{g} =$$

$$= \frac{11.78 \cdot 0.5 \pm \sqrt{34.69 - 2 \cdot 9.81 \cdot 1.5}}{9.81} = \frac{5.89 \pm 2.29}{9.81}.$$

$$t_{*1} = 0.367 \text{ с}, \quad t_{*2} = 0.834 \text{ с}.$$

Из двух решений берем меньшее — момент первого пересечения траектории с поверхностью преграды.

При $t_* = 0.367$ с имеем

$$b = x = v_C \cos 30^\circ \cdot 0.367 = 11.78 \cdot 0.866 \cdot 0.367 = 3.74 \text{ м}.$$