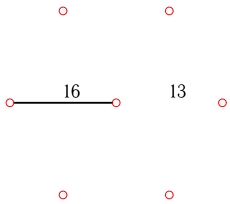


Рис. 73

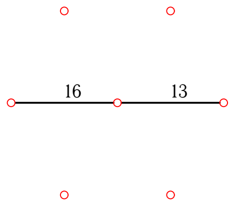


Рис. 74

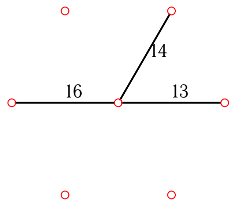


Рис. 75

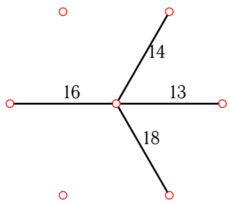


Рис. 76

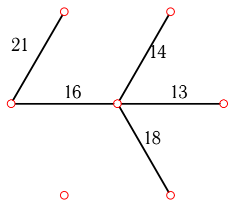


Рис. 77

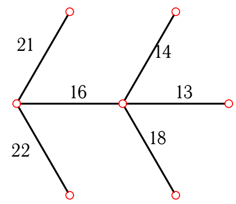


Рис. 78

Программа для Maple, использующая встроенные функции, дана на с. 138, программа с визуализацией процесса последовательного построения остова — на с. 141.

4.7. Гамильтоновы циклы

Простой цикл, проходящий через все вершины графа, называется *гамильтоновым* [1]. Простая цепь, проходящий через все вершины графа, называется *гамильтоновой*.

Задача нахождения гамильтоновых циклов получила свое развитие в связи с рядом практических задач, одной из которых является так называемая *задача коммивояжера*, в которой определяется кратчайший гамильтонов цикл (см. с. 84).

В отличие от поиска эйлеровых циклов, проходящих через каждое ребро графа по одному разу, где еще Эйлером получено необходимое и достаточное условие существования цикла, для гамильтоновых циклов такого условия не найдено. Существуют, однако, достаточные условия существования гамильтоновых циклов.

Приведем несколько таких признаков.

---

[1] В 1859 г. Уильям Гамильтон (Hamilton W.) предложил математическую игру-головоломку, связанную с обходом вершин додекаэдра, положив тем самым начало одного из самых известных направлений теории графов.

Граф, обладающий гамильтоновым циклом, будем называть *гамильтоновым*.

Теорема 19. (Дирак [1]). *Граф гамильтонов, если степень любой его вершины удовлетворяет неравенству* $deg\ v \geqslant n/2$.

Теорема 20. (Оре О. [2],).*Граф гамильтонов, если степени любых двух его несмежных вершин* v *и* u *удовлетворяет неравенству* $deg\ v + deg\ u \geqslant n$.

Для орграфов также имеется достаточное условие.

Теорема 21. (Гуйя-Ури [3], [2]).*Орсвязный граф обладает гамильтоновым циклом* [4]*, если* $deg^+ \geqslant n/2$*,* $deg^- \geqslant n/2$.

Напомним, что орграф называется орсвязным, если любая его вершина достижима из любой вершины.

Орграф называется полугамильтоновым, если он содержит гамильтонову цепь.

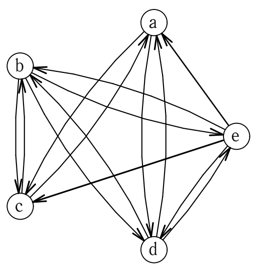
Среди взвешенных орграфов выделяют оргафы, удовлетворяющие неравенству треугольника

$$c(u, v) \leqslant c(u, w) + c(w, v). \tag{4.3}$$

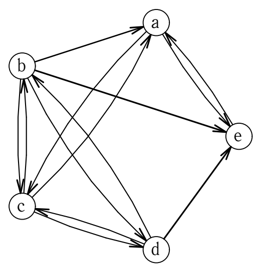
Очевидно, этому условию удовлетворяют евклидовы графы — графы, вершины которых являются точками плоскости, а веса — евклидовы расстояния между ними.

4.7.1. Задачи. *Найти все гамильтоновы циклы графа 21.1–21.9.*

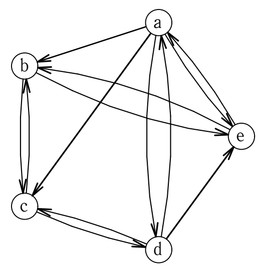
21.1.



21.2.



21.3.



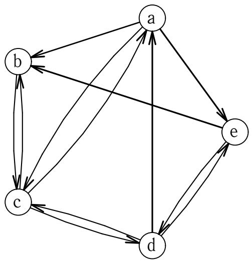
[1] Dirac G.A.

[2] Ore O., [25]

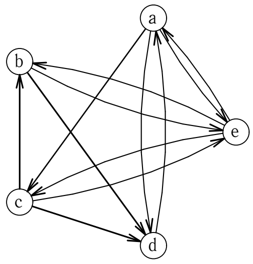
[3] Ghouila-Houri A.

[4] Цикл в орграфе, согласно определению на с. 29, правильнее называть контуром, однако, для гамильтоновых циклов, отдавая дань традиции, можно сделать исключение.

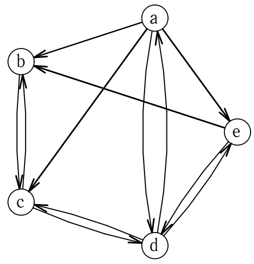
21.4.



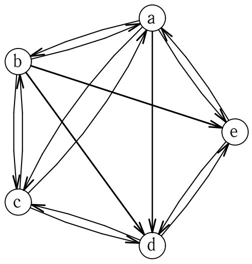
21.5.



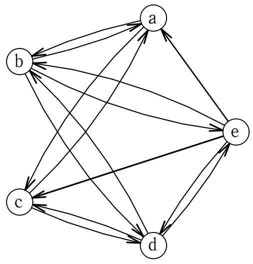
21.6.



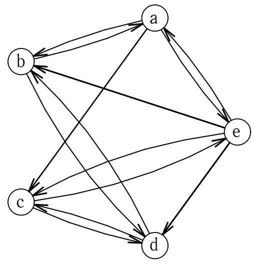
21.7.



21.8.



21.9.



Ответы

№	Гамильтоновы циклы
21.1	acbde, adbec, adebc, acbed
21.2	acdbe, acbde
21.3	aebcd, adcbe, abcde
21.4	aebcd
21.5	aecbd, acebd
21.6	aebcd
21.7	acbde, abedc, aedcb, abcde, adcbe
21.8	abdec, acdbe, acdeb, abedc
21.9	aecdb, abdce, acedb

4.7.2. Пример. *Дан граф (рис. 79). Найти все гамильтоновы циклы графа.*

Решение

В [17] описан алгебраический алгоритм [1] нахождения всех гамильтоновых циклов, основанный на теореме 5. Эта теорема позволяет найти число маршрутов определенной длины по элементам степени матрицы смежности A. Однако эти маршруты остаются безымянными, теорема не дает информации о вершинах в маршрутах. Если немного изменить матрицу смежности и малоинформативные единицы в ней заменить на имена вершин, то возведение такой матрицы в степень даст больше информации о маршрутах. Введем таким образом модифицированную матрицу смежности B по правилу: элемент матрицы $\beta_{ij} = v_j$, если существует путь из вершины v_i в вершину v_j.

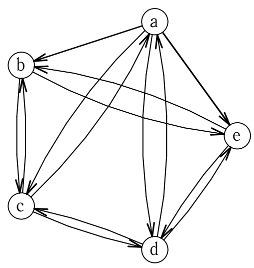


Рис. 79

Для заданного графа получим

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & b & c & d & g \\ 0 & 0 & c & 0 & g \\ a & b & 0 & d & 0 \\ a & 0 & c & 0 & g \\ 0 & b & 0 & d & 0 \end{bmatrix}.$$

Далее последовательно находим матрицы

$$P'_{k+1} = B \cdot P_k, \ P_1 = A, P_k = \Phi(P'_k)$$

где под произведением вершин понимается некоммутативная бинарная операция, заданная на множестве слов. Слово — упорядоченная последовательность вершин (букв). Произведение слова $u_1u_2...u_k$ и слова $v_1v_2...v_m$ есть слово $u_1u_2...u_kv_1v_2...v_m$.

Оператор Φ, действующий на элементы p_{ij} матрицы, вычеркивает (обнуляет) те элементы, в которых содержатся вершины v_i или v_j. Такие элементы содержат контуры, замыкающиеся на v_i или v_j. Для упрощения расчетов можно также обнулять диагональ матриц P_k кроме, разумеется, последней P_n, ибо ее диагональ и содержит искомые циклы, без начальной и конечной вершины, которые необходимо добавить.

[1] Yau S.S. (1967), Danielson G.H.(1968), Dhawan V.(1969).

Для заданного графа получим последовательность матриц (матрицы P'_k не выписаны)

$$P_2 = \begin{bmatrix} 0 & c+g & b+d & c+g & b+d \\ c & 0 & 0 & c+g & 0 \\ d & a & 0 & a & a+b+d \\ c & a+c+g & a & 0 & a \\ d & 0 & b+d & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Заметим, что матрица подвергалась действию оператора Φ: в первом столбце и первой строке нет слов с вершиной a, во втором столбце и второй строке нет вершины b и т.д.

$$P_3 = \begin{bmatrix} 0 & dc+dg & gb+gd & bc+bg & cb+cd \\ cd+gd & 0 & gd & ca & ca+cd \\ 0 & ag+da+dg & 0 & ag+bg & ab+ad+da \\ 0 & ac+ag+ca & ab+gb & 0 & ab+ca+cb \\ bc+dc & da+dc & da & bc & 0 \end{bmatrix},$$

$$P_4 = \begin{bmatrix} 0 & cdg+gdc & bgd+dgb & cbg+gbc & bcd+dcb \\ gdc & 0 & gda & cag & cad+cda \\ bgd & adg+dag & 0 & abg & dab \\ gbc & cag & agb & 0 & acb+cab \\ bcd & dac+dca & dab & bca & 0 \end{bmatrix}.$$

Последняя матрица (P_5) диагональная. Все ее элементы нулевые, кроме $P_{5,11} = bgdc + cbgd + dgbc + gbcd$, $P_{5,22} = cadg + cdag + gdac + gdca$, $P_{5,33} = abgd + adgb + bgda + dagb$, $P_{5,44} = acbg + agbc + cabg + gbca$, $P_{5,55} = bcad + bcda + dacb + dcab$. К полученным слагаемым в элементе матрицы P_{kk} добавим в начале или в конце по вершине v_k, где $v_1 = a$, $v_2 = b$, $v_3 = c$, $v_4 = d$, $v_5 = g$, и выполним круговую перестановку так, чтобы вершина a была первой. Многие гамильтоновы циклы повторяются. Множество ответов для данной задачи будет следующим

$$abgdc,\ adgbc,\ acbgd,\ agbcd.$$

Полный граф порядка n имеет $(n-1)!$ гамильтоновых циклов.

Очевидно вручную этот алгоритм не реализуется. Вариант программы для **Maple**, работающей по описанному алгоритму, дан на с. 144.

4.8. Задача коммивояжера

Это образное название устойчиво закрепилось за одной из самых интересных, практически значимых и одновременно сложных задач теории графов. Задача, берущая свое начало из работ Гамильтона, состоит в определении кратчайшего гамильтонова цикла в графе. Ее решение связано [17] с решением задачи о назначениях (**4.5.**, с. 70) и с задачей об остове наименьшего веса (**4.6.**, с. 74).