

§ 3.1. ПОНЯТИЕ ОБ АРКЕ И СРАВНЕНИЕ ЕЕ С БАЛКОЙ

Впервые арочная система для перекрытия большого пролета была предложена известным русским механиком И. П. Кулибиным в 1776 г., т. е. почти за 100 лет до создания строительной механики как науки, который, используя законы общей механики, дал расчет и разработал проект однопролетного арочного деревянного моста пролетом 300 м через р. Неву в С.-Петербурге. Для определения очертания оси арки Кулибин экспериментально разработал теорию веревочного многоугольника, вошедшего в курс механики значительно позже. Таким образом, он первым установил закон взаимодействия сил в трехшарнирной статически определимой системе.

Огромная, в 30 м, модель моста Кулибина была испытана под нагрузкой 3500 пудов Российской Академии наук и одобрена.

Великий математик того времени академик Российской Академии наук Эйлер проверил все чертежи трехсотметрового моста и математические выкладки Кулибина и признал их совершенно правильными (см. статью Эйлера «Легкое правило, каким образом из модели деревянного моста или подобной другой машины, которая тяжесть нести должна, познать, можно ли то же сделать в большем, чем в модели, виде», опубликованную в «Месяцеслове с наставлениями на 1776 год»).

Чтобы оценить роль Кулибина в мостостроении XVIII в., следует указать на то, что самый длинный деревянный мост длиной 119 м был построен братьями Груберман в аббатстве Веттинген лишь в 1778 г.

Ценность проекта Кулибина заключалась в том, что им была создана новая конструкция моста, разработаны методы и приборы для экспериментального исследования мостового сооружения, дана теория испытания моста на модели. Однако мост не был построен вследствие косности правящих кругов того времени.

Значительно ранее заграничных ученых И. П. Кулибин начал работать над проектом стального моста. В 1814 г. он сконструировал трехарочный металлический мост, модель которого сохранилась.

И. П. Кулибин известен также многими другими изобретениями в области точной механики.

Арочными называются системы криволинейного или ломаного очертания, в опорах которых от вертикальной нагрузки возникают наклонные реакции, направленные, как правило, внутрь пролета. Горизонтальная составляющая такой наклонной реакции называется *распором*.

Покажем, что арочные системы в сравнении с балочными оказываются экономически более выгодными. Для этого рассмотрим балку прямоугольного сечения шириной b и высотой h с кривой осью, лежащую на двух шарнирных опорах (из которых одна подвижная) и находящуюся под действием вертикальной равномерно распределенной нагрузки интенсивностью q (рис. 3.1, а).

Изгибающий момент M_k в сечении k (с координатами x и y)

равен

$$M_k = V_a x - q \frac{x^2}{2},$$

где

$$V_a = ql/2,$$

и, следовательно,

$$M_k = \frac{qx}{2} (l - x).$$

Для определения продольной силы N_k в сечении k спроецируем все силы, расположенные левее сечения k , на касательную uu , проведенную к оси бруса в точке k (рис. 3.1, а):

$$N_k = V_a \sin \varphi_k - qx \sin \varphi_k = (V_a - qx) \sin \varphi_k = Q_k^0 \sin \varphi_k,$$

где Q_k^0 — поперечная сила в сечении k (абсцисса которого x) балки с горизонтальной осью.

Под действием изгибающего момента M_k и продольной силы N_k в крайних волокнах сечения k возникнут нормальные напряжения, определяемые по формуле¹

$$\sigma = \frac{N_k}{F} \pm \frac{M_k}{W},$$

где F — площадь поперечного сечения балки, равная bh ; W — момент сопротивления его, равный $bh^2/6$.

Подставив в выражение для σ значения продольной силы N_k , изгибающего момента M_k , а также F и W , получим

$$\sigma = \frac{Q_k^0 \sin \varphi_k}{bh} \pm \frac{qx(l-x)3}{bh^2}.$$

Выясним, как изменяются нормальные напряжения в сечении k , если на подвижной опоре приложить горизонтальную силу H , направленную внутрь пролета (рис. 3.1, б). Изгибающий момент при этом уменьшится на величину Hx и станет равным²

$$M_k = qx \frac{l-x}{2} - Hx,$$

где y — ордината сечения k .

¹ Сжимающую продольную силу считаем положительной, напряжения сжатия — положительными, а растяжения — отрицательными.

² Предполагается, что сила H не настолько велика, чтобы вызвать изменение знака изгибающего момента M_k .

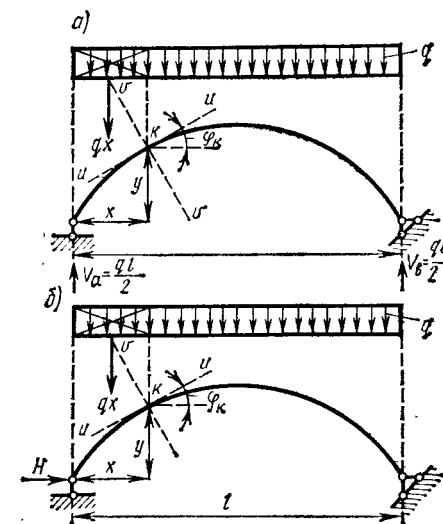


Рис. 3.1

Числовая величина продольной силы увеличится на $H \cos \varphi_k$ и станет равной

$$N_k = Q_k^0 \sin \varphi_k + H \cos \varphi_k.$$

Таким образом, нормальные напряжения в сечении, с одной стороны, увеличатся вследствие увеличения продольной силы, а с другой — уменьшатся в результате уменьшения изгибающего момента.

Первый член формулы нормальных напряжений увеличится на

$$\frac{H \cos \varphi_k}{F} = \frac{H \cos \varphi_k}{bh},$$

а второй уменьшится на

$$\frac{Hy}{W} = \frac{6Hy}{bh^2}.$$

Так как отношение величин

$$\frac{6Hy}{bh^2} : \frac{H \cos \varphi_k}{bh} = \frac{6y}{h \cos \varphi_k}$$

для наиболее напряженных участков в средней части балки значительно больше единицы, то общее нормальное напряжение при этом довольно сильно уменьшится. Например, при $y = 3$ м, $h = 1$ м и $\cos \varphi_k = 0,9$ это отношение окажется равным

$$\frac{6y}{h \cos \varphi_k} = \frac{6 \cdot 3}{1 \cdot 0,9} = 20.$$

Если при этом первое слагаемое N_k/F формулы нормальных напряжений $\sigma = \frac{N_k}{F} \pm \frac{M_k}{W}$ увеличится, допустим, на 100 Н/см^2 , то второе слагаемое M_k/W той же формулы уменьшится на 2000 Н/см^2 ; следовательно, общее нормальное напряжение в сечении снизится на 1900 Н/см^2 . Поэтому можно считать, что горизонтальная сила H значительно улучшает условия работы балки с криволинейной осью.

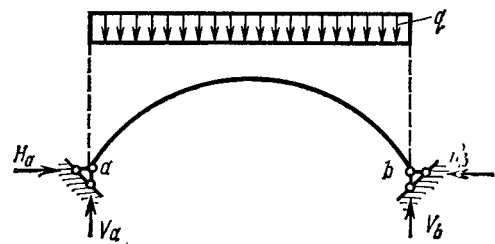


Рис. 3.2

3.1, а) влево; приложенная к той же опоре сила H перемещает ее вправо.

Числовую величину силы H можно подобрать так, чтобы левый конец балки, переместившись влево от нагрузки, вновь вернулся на свое прежнее место. В этом случае силу H можно рассматривать как горизонтальную реакцию неподвижной опоры; следовательно, левый конец балки будет находиться в условиях, вполне анало-

гичных тем, в которых находится правый конец балки, опирающийся на неподвижную опору.

Сооружение с кривой осью, опирающееся на две неподвижные шарнирные опоры (рис. 3.2), носит название *двухшарнирной арки*. В опорах такой системы помимо реакций, действующих вертикально, возникают горизонтальные реакции. Число опорных стержней в двухшарнирной арке равно четырем, а потому она является системой статически неопределимой. Переход к арке статически определимой, которая нас преимущественно интересует в настоящей

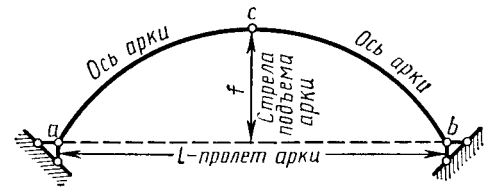


Рис. 3.3

главе, выполняется постановкой в промежуточном сечении двухшарнирной арки третьего шарнира (рис. 3.3). В этом случае шарнир c прикреплен к земле с помощью двух стержней — дисков арки, что доказывает ее статическую определимость и одновременно геометрическую неизменяемость. Приведенное выше доказательство экономичности двухшарнирной арки (по сравнению с балкой) может быть распространено и на трехшарнирную арку. В ряде случаев применение трехшарнирных арок является более целесообразным, нежели двухшарнирных, так как в статически неопределимых системах могут при осадке опор и при изменениях температуры возникнуть дополнительные напряжения, что не имеет места в статически определимых системах.

§ 3.2. АНАЛИТИЧЕСКИЙ РАСЧЕТ ТРЕХШАРНИРНОЙ АРКИ

1. Определение опорных реакций

Трехшарнирная арка является системой геометрически неизменяемой и статически определимой.

В практике встречаются различные по форме и виду арки. В том случае, когда каждая половина трехшарнирной арки представляет собой сплошной брус криволинейного очертания, ее называют аркой

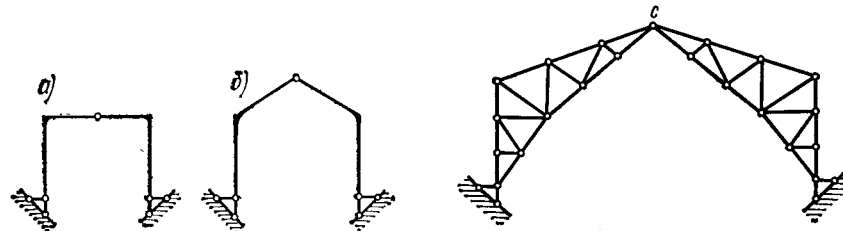


Рис. 3.4

Рис. 3.5

со сплошной стенкой (рис. 3.3). При ломаном очертании оси сооружение обычно называется трехшарнирной рамой (рис. 3.4, а, б).

В практике встречаются арки, образованные из двух ферм, соединенных между собой общим шарниром c . Такие системы носят название трехшарнирных ферм (рис. 3.5).

Система, изображенная на рис. 3.6, носит название трехшарнирной арки с затяжкой.

При действии внешней нагрузки на трехшарнирную арку (рис. 3.7, а) в каждой ее опоре возникает по две реакции; всего, таким образом, имеется четыре неизвестные реакции. Вертикальные реакции обозначим через V_a и V_b , а горизонтальные — через H_a и H_b (рис. 3.7, б).

Кроме трех уравнений равновесия, которые дает статика для системы сил, расположенных в одной плоскости, для расчета трехшарнирной арки можно составить четвертое уравнение, основанное на том, что равнодействующая всех сил, приложенных к левой (а также и к правой) половине арки, должна пройти через средний шарнир c , так как в противном случае левая (или правая) половина арки вращалась бы вокруг точки c . Так как момент равнодействующей равен алгебраической сумме моментов составляющих ее сил,

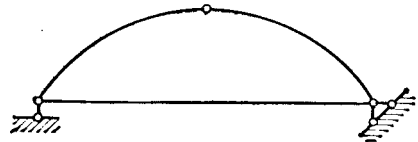


Рис. 3.6

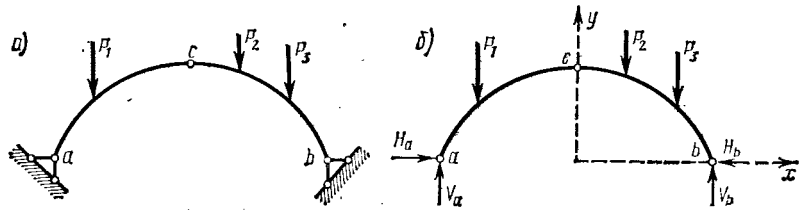


Рис. 3.7

то четвертое уравнение статки можно сформулировать следующим образом: *алгебраическая сумма моментов сил, действующих на левую или правую половину арки относительно точки c (среднего шарнира), равняется нулю, т. е.*

$$\sum M_{\text{лев. сил}}^c = 0,$$

или

$$\sum M_{\text{пр. сил}}^c = 0.$$

Таким образом, при расчете трехшарнирной арки можно составить следующие четыре уравнения:

$$\sum X = 0 \quad (3.1)$$

(все силы, действующие на арку, проецируются на ось x);

$$\sum Y = 0 \quad (3.2)$$

(то же, на ось y);

$$\sum M = 0 \quad (3.3)$$

(составляется сумма моментов всех сил, действующих на арку, относительно произвольной точки; удобно в качестве такой точки принимать точку a или b);

$$\left. \begin{aligned} \sum M_{\text{лев. сил}}^c &= 0 \\ \sum M_{\text{пр. сил}}^c &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (3.4)$$

или

Пример 1. Определить опорные реакции для арки, изображенной на рис. 3.8, а.

Решение. Отбросим опоры и заменим их реакциями V_a, H_a и V_b, H_b (рис. 3.8, б). Для определения опорной реакции V_a составим выражение суммы моментов всех сил, действующих на арку, относительно точки b :

$$\sum M_b = V_a l - P_1(l - a_1) - P_2(l - a_2) = 0,$$

откуда

$$V_a = \frac{P_1(l - a_1) + P_2(l - a_2)}{l} = \frac{M_b}{l},$$

где M_b — момент внешней активной нагрузки относительно правого опорного шарнира.

Для определения правой вертикальной реакции V_b составим выражение суммы моментов всех сил относительно точки a :

$$\sum M_a = -V_b l + P_2 a_2 + P_1 a_1 = 0,$$

откуда

$$V_b = \frac{P_1 a_1 + P_2 a_2}{l} = \frac{M_a}{l},$$

где M_a — момент внешней активной нагрузки относительно левого опорного шарнира.

Полученные для V_a и V_b формулы показывают, что при действии на арку вертикальной нагрузки вертикальные составляющие опорных реакций соответственно равны опорным реакциям простой двухопорной балки с пролетом, равным пролету арки (рис. 3.8, в).

Подставив значения величин, входящих в формулы для V_a и V_b , получим:

$$V_a = \frac{4(10 - 3) + 3(10 - 6)}{10} = \frac{28 + 12}{10} = 4 \text{ кН};$$

$$V_b = \frac{4 \cdot 3 + 3 \cdot 6}{10} = 3 \text{ кН}.$$

Составим выражение суммы проекций всех сил на ось x :

$$\sum X = H_a - H_b = 0,$$

откуда

$$H_a = H_b = H.$$

Из этого равенства заключаем, что распоры, возникающие на опорах при действии на арку вертикальной нагрузки, равны между собой.

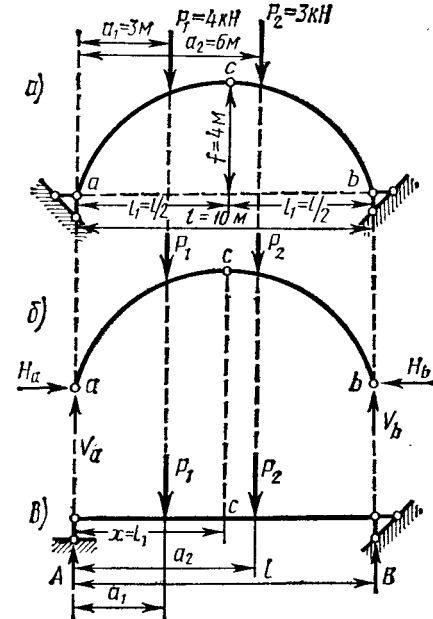


Рис. 3.8

Для определения числовой величины распора H приравняем нулю сумму моментов всех сил, действующих на левую часть арки, относительно шарнира c :

$$\sum M_{\text{лев. сил}}^c = V_a l_1 - H f - P(l_1 - a_1) = 0,$$

откуда

$$H = \frac{V_a l_1 - P_1(l_1 - a_1)}{f} = \frac{M_c^0}{f},$$

где M_c^0 — момент всех сил (за исключением силы H), действующих на левую (или правую) часть арки относительно шарнира c , численно равный изгибающему моменту в сечении $x = l_1$ двухопорной балки, изображенной на рис. 3.8, а. Таким образом, распор арки равен изгибающему моменту в сечении с абсциссой $x = l_1$ простой двухопорной балки (с пролетом, равным пролету арки), разделенному на стрелу подъема f .

Подставив значения величин, входящих в формулу для H , получим

$$H = \frac{4 \cdot 5 - 4(5 - 3)}{4} = 3 \text{ кН.}$$

Пример 2. Определить распор H арки, изображенной на рис. 3.9, от равномерно распределенной по пролету нагрузки интенсивностью q .

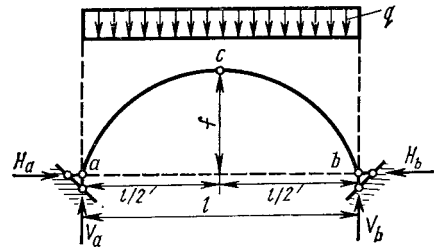


Рис. 3.9

Решение. Определим вертикальные опорные реакции из уравнений статики:

$$\sum M_b = 0 \text{ и } \sum M_a = 0.$$

Применительно к данному случаю эти уравнения имеют вид:

$$\sum M_b = V_a l - q l \frac{l}{2} = 0;$$

$$\sum M_a = -V_b l + q l \frac{l}{2} = 0,$$

откуда

$$V_a = V_b = q \frac{l}{2}.$$

Для определения распора H составим выражение суммы моментов сил, действующих на левую половину арки, относительно шарнира c :

$$\sum M_{\text{лев. сил}}^c = V_a \frac{l}{2} - H f - q \frac{l}{2} \cdot \frac{l}{4} = 0,$$

откуда

$$H = \frac{q l^2}{8 f}.$$

Пример 3. Определить опорные реакции от наклонной силы $P = 5$ кН, действующей на арку, представленную на рис. 3.10, при $\cos \alpha = 0,6$ и $\sin \alpha = 0,8$.

Решение. Раскладываем силу P на вертикальную и горизонтальную составляющие:

$$P_y = 5 \cdot 0,8 = 4 \text{ кН}; \quad P_x = 5 \cdot 0,6 = 3 \text{ кН.}$$

Для определения вертикальной реакции V_a составим сумму моментов всех сил относительно точки b :

$$\sum M_b = V_a \cdot 12 - P_y \cdot 9 + P_x \cdot 3 = 0,$$

откуда

$$V_a = \frac{9P_y - 3P_x}{12} = \frac{36 - 9}{12} = \frac{27}{12} = 2,25 \text{ кН.}$$

Для определения вертикальной реакции V_b составим сумму моментов всех сил относительно точки a :

$$\sum M_a = -V_b \cdot 12 + P_y \cdot 3 + P_x \cdot 3 = 0,$$

откуда

$$V_b = \frac{3 \cdot 4 + 3 \cdot 3}{12} = \frac{21}{12} = 1,75 \text{ кН.}$$

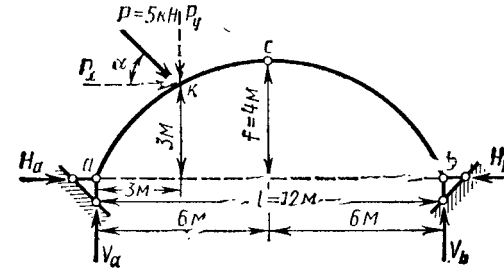


Рис. 3.10

Для определения горизонтальной реакции H_a составим выражение для момента всех сил, действующих на левую половину арки, относительно шарнира c :

$$\sum M_{\text{лев. сил}}^c = V_a \cdot 6 - H_a \cdot 4 - P_x \cdot 1 - P_y \cdot 3 = 0,$$

откуда

$$H_a = \frac{2,25 \cdot 6 - 3 \cdot 1 - 4 \cdot 3}{4} = \frac{1,5}{4} = -0,375 \text{ кН.}$$

Знак минус указывает на то, что в данном случае сила H_a направлена влево. Для определения H_b составим сумму проекций всех сил на горизонтальную ось x :

$$\sum X = H_a + P_x - H_b = 0,$$

откуда

$$H_b = -0,375 + 3 = 2,625 \text{ кН.}$$

2. Определение внутренних усилий в арке при произвольной нагрузке

Внутренними усилиями являются: изгибающий момент M , поперечная сила Q и продольная сила N , действующие в поперечных сечениях арки.

Изгибающий момент, действующий в сечении, равен алгебраической сумме моментов всех внешних левых сил относительно центра тяжести данного сечения или же сумме моментов правых сил, взятой с обратным знаком. Изгибающий момент считается положительным, если левые силы стремятся вращать арку относительно данного сечения по ходу часовой стрелки.

Определим изгибающий момент в произвольном сечении k (абсцисса которого равна x_k) арки, изображенной на рис. 3.11:

$$M_k = V_a x_k - H_a y_k - \sum P_y (x_k - x_p) - \sum P_x (y_k - y_p),$$

где P_x и P_y — горизонтальная и вертикальная составляющие сил P .

Под знаки сумм входят лишь силы P , приложенные левее сечения k .

Поперечная сила, действующая в сечении, равна алгебраической сумме проекций всех внешних левых сил (или правых сил с обратным знаком) на нормаль к оси бруса в данном сечении.

Поперечная сила считается положительной, если сумма проекций левых сил направлена вверх от оси арки.

Определим поперечную силу в сечении k арки, изображенной на рис. 3.11. Для этого спроецируем все силы, действующие левее сечения k , на ось $n-n$:

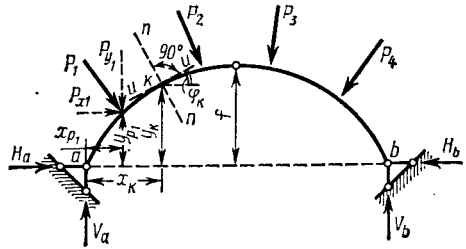


Рис. 3.11

$$Q_k = V_a \cos \varphi_k - H_a \sin \varphi_k - \sum P_y \cos \varphi_k - \sum P_x \sin \varphi_k.$$

Продольная сила, действующая в сечении, равна алгебраической сумме проекций всех внешних сил (правых сил с обратным знаком) на касательную к оси бруса в данном сечении. Продольную силу считают положительной, если она в сечении арки вызывает сжатие.

Определим продольную силу в сечении k арки, изображенной на рис. 3.11. Для этого спроецируем все силы, действующие левее сечения k , на ось $u-u$:

$$N_k = V_a \sin \varphi_k + H_a \cos \varphi_k + \sum P_x \cos \varphi_k - \sum P_y \sin \varphi_k.$$

Определив указанным способом значения M , Q и N для ряда сечений, можно построить эпюры изгибающих моментов, поперечных и продольных сил.

Пример. Для арки, изображенной на рис. 3.12, определить опорные реакции, а также изгибающий момент, поперечную и продольную силы в сечении k с абсциссой $x=1/4$. Арка очерчена по параболу, уравнение которой

$$y = \frac{4f}{l^2} (l-x)x = \frac{4 \cdot 4}{12^2} (12-x)x = \frac{(12-x)x}{9}.$$

Решение. Определим ординату сечения k :

$$y_{x=3} = \frac{(12-3) \cdot 3}{9} = 3 \text{ м.}$$

Продифференцировав уравнение параболы, определим тангенс угла наклона к горизонту касательной, проведенной к оси арки в точке с абсциссой x :

$$\operatorname{tg} \varphi_x = y' = \frac{12-2x}{9}.$$

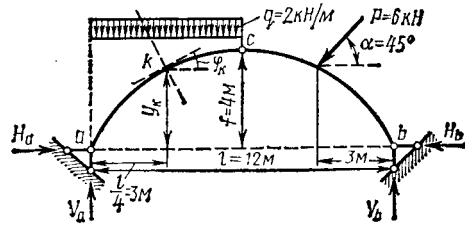


Рис. 3.12

Тангенс угла наклона касательной в точке k с абсциссой $x=3 \text{ м}$ равен

$$\operatorname{tg} \varphi_k = \frac{12-2 \cdot 3}{9} = \frac{2}{3}.$$

Для определения $\sin \varphi_k$ и $\cos \varphi_k$ воспользуемся формулами¹:

$$\sin \varphi_k = \frac{\operatorname{tg} \varphi_k}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 \varphi_k}} = \frac{2}{3\sqrt{1+\frac{4}{9}}} = 0,555;$$

$$\cos \varphi_k = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 \varphi_k}} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{4}{9}}} = 0,832.$$

Опорные реакции определяются из уравнений:

$$\sum M_b = V_a \cdot 12 - q \cdot 6 \cdot 9 - P \cos \alpha \cdot 3 - P \sin \alpha \cdot 3 = 0,$$

откуда

$$V_a = \frac{2 \cdot 6 \cdot 9 + 12 \cdot 0,707 \cdot 3}{12} = \frac{133,45}{12} = 11,12 \text{ кН};$$

$$\sum Y = V_a - q \cdot 6 - P \sin \alpha + V_b = 0,$$

откуда

$$V_b = 2 \cdot 6 + 6 \cdot 0,707 - 11,12 = 5,12 \text{ кН};$$

$$\sum M_{\text{лев. сил}} = V_a \cdot 6 - q \cdot 6 \cdot 3 - H_a \cdot 4 = 0,$$

откуда

$$H_a = \frac{11,12 \cdot 6 - 2 \cdot 18}{4} = \frac{30,72}{4} = 7,68 \text{ кН};$$

$$\sum X = H_a - H_b - P \cos \alpha = 0,$$

откуда

$$H_b = 7,68 - 6 \cdot 0,707 = 3,38 \text{ кН}.$$

Изгибающий момент в сечении k равен

$$M_k = V_a \cdot 3 - H_a \cdot 3 - q \cdot 3 \cdot \frac{3}{2} = 11,12 \cdot 3 - 7,68 \cdot 3 - 2 \cdot \frac{9}{2} = 1,32 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Поперечная сила в сечении k равна

$$Q_k = V_a \cos \varphi_k - H_a \sin \varphi_k - q \cdot 3 \cos \varphi_k = 11,12 \cdot 0,832 - 7,68 \cdot 0,555 - 6 \cdot 0,832 = 0.$$

Продольная сила в сечении k равна

$$N_k = V_a \sin \varphi_k + H_a \cos \varphi_k - q \cdot 3 \sin \varphi_k = 11,12 \cdot 0,555 + 7,68 \cdot 0,832 - 2 \cdot 3 \cdot 0,555 = 9,23 \text{ кН}.$$

3. Определение внутренних усилий в арке при вертикальной нагрузке

При действии на арку (рис. 3.13, а) только вертикальных сил изгибающий момент в ее сечении с абсциссой x равен

$$M_x = V_a x - P_1(x-a_1) - P_2(x-a_2) - \dots - P_m(x-a_m) - Hy,$$

или

$$M_x = V_a x - \sum P(x-a) - Hy.$$

¹ Значения $\sin \varphi_k$ и $\cos \varphi_k$ можно определить и с помощью таблиц тригонометрических функций.

Под знак суммы входят только те силы P , которые приложены левее рассматриваемого сечения; следовательно, выражение $V_a x - \sum P(x-a)$ равно изгибающему моменту M_x^0 в простой двухопорной балке (рис. 3.13, б) в сечении с абсциссой x (так называемому балочному моменту). Таким образом,

$$M_x = M_c^0 - Hy.$$

Этой формулой удобно пользоваться при построении эпюры моментов в арке, работающей на вертикальную нагрузку. Значения M_c^0 непосредственно берутся из эпюры моментов, построенной для балки, изображенной на рис. 3.13, б. Распор находится предварительно по формуле

$$H = M_c^0 / f.$$

Заметим, что приведенная формула для M_x

наглядно показывает уменьшение изгибающего момента в арке по сравнению с балкой, что подтверждает экономичность арочной конструкции по сравнению с балочной.

Аналогичные формулы можно получить для Q_x и N_x . Для этой цели спроецируем все приложенные слева силы сначала на нормаль к оси арки, а затем на касательную к ней в сечении с абсциссой x :

$$Q_x = (V_a - \sum P) \cos \varphi_x - H \sin \varphi_x;$$

$$N_x = (V_a - \sum P) \sin \varphi_x + H \cos \varphi_x.$$

В этих формулах под $\sum P$ понимается сумма сил, приложенных левее данного сечения. Величина $(V_a - \sum P)$, как нетрудно видеть из рис. 3.13, б, представляет собой поперечную силу Q_x^0 в сечении балки с той же абсциссой x . Поэтому формулы приобретают такой вид:

$$Q_x = Q_x^0 \cos \varphi_x - H \sin \varphi_x;$$

$$N_x = Q_x^0 \sin \varphi_x + H \cos \varphi_x.$$

Пример. В сечении k арки определить значения изгибающего момента M_k , поперечной силы Q_k и продольной силы N_k от действия нагрузки, показанной на рис. 3.14.

Арка очерчена по параболе, уравнение которой

$$y = \frac{4f}{l^2} (l-x)x.$$

Пролет арки $l = 12$ м; стрела подъема $f = 4$ м; абсцисса сечения k $x_k = 3$ м.

Решение. Определяем ординату сечения k :

$$y_k = \frac{4 \cdot 4}{12^2} (12 - 3) 3 = 3 \text{ м.}$$

Определяем опорные реакции V_a и V_b :

$$\sum M_b = V_a l - \frac{ql}{2} \cdot \frac{3}{4} l - 3P \cdot 2a = 0,$$

где $a = l/8$,
откуда

$$V_a = \frac{\frac{3}{8} ql^2 + \frac{3Pl}{4}}{l} = \frac{3}{8} ql +$$

$$+ \frac{3}{4} P = \frac{3}{8} \cdot 2 \cdot 12 + \frac{3}{4} \cdot 4 = 12 \text{ кН};$$

$$\sum Y = V_a + V_b - ql - 3P = 0,$$

откуда

$$V_b = ql - 3P + V_a = \frac{2 \cdot 12}{2} + 3 \cdot 4 - 12 = 12 \text{ кН.}$$

Распор H определяем из уравнения

$$\sum M_{\text{лев. сил}} = V_a \frac{l}{2} - \frac{ql}{2} \cdot \frac{l}{4} - Hf = 0,$$

откуда

$$H = \frac{V_a \frac{l}{2} - \frac{ql^2}{8}}{f} = \frac{12 \cdot 6 - \frac{2 \cdot 12^2}{8}}{4} = 9 \text{ кН.}$$

Изгибающий момент в сечении k определяем по формуле

$$M_k = M_c^0 - Hy_k,$$

где M_c^0 определяем в свою очередь из выражения (как момент в простой балке):

$$M_c^0 = V_a x_k - q \frac{x_k^2}{2} = 12 \cdot 3 - 2 \frac{3^2}{2} = 36 - 9 = 27 \text{ кН} \cdot \text{м.}$$

Следовательно,

$$M_k = 27 - 9 \cdot 3 = 0,$$

т. е. момент в сечении k равен нулю.

Поперечная сила равна

$$Q_k = Q_k^0 \cos \varphi_k - H \sin \varphi_k,$$

где

$$Q_k^0 = V_a - qx_k = 12 - 2 \cdot 3 = 6 \text{ кН.}$$

Тангенс угла наклона касательной в точке k к горизонту определяем как первую производную от y по x :

$$y' = \frac{4f}{l^2} (l - 2x) = \frac{4 \cdot 4}{12^2} (12 - 2x) = \frac{12}{9} - \frac{2x}{9};$$

$$\operatorname{tg} \varphi_k = y'_{x=x_k} = \frac{12}{9} - \frac{2x_k}{9} = \frac{12}{9} - \frac{2 \cdot 3}{9} = 0,667.$$

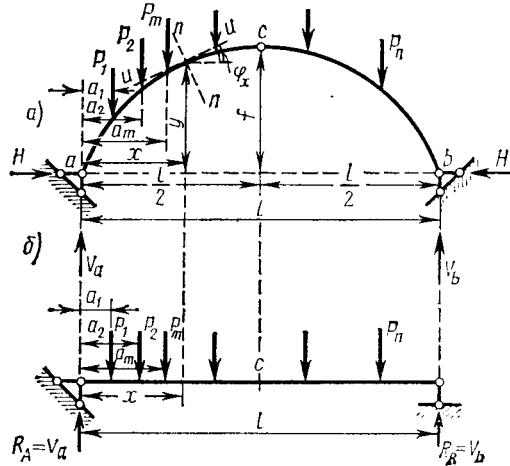


Рис. 3.13

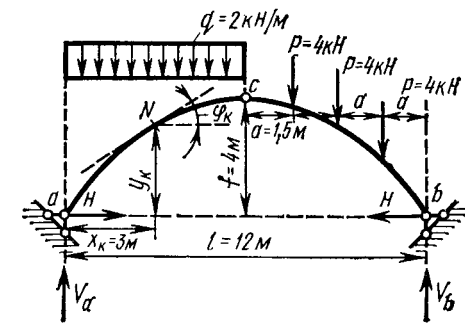


Рис. 3.14

Используя таблицы тригонометрических функций, определяем по тангенсу угла значения $\sin \varphi_k$ и $\cos \varphi_k$:

$$\sin \varphi_k = 0,555; \quad \cos \varphi_k = 0,832.$$

Следовательно,

$$Q_k = 6 \cdot 0,832 - 9 \cdot 0,555 \approx 0.$$

Пользуясь формулой для продольной силы и подставив в нее соответствующие числовые значения, получим

$$N_k = Q_k^2 \sin \varphi_k + H \cos \varphi_k = 6 \cdot 0,555 + 9 \cdot 0,832 \approx 10,81 \text{ кН}.$$

§ 3.3. ГРАФИЧЕСКИЙ РАСЧЕТ ТРЕХШАРНИРНОЙ АРКИ. МНОГОУГОЛЬНИК ДАВЛЕНИЯ

Кроме аналитических методов расчета арок существуют приемы решения этой же задачи, основанные на графических построениях.

Рассмотрим случай действия на арку, изображенную на рис. 3.15, а, двух сил P_1 и P_2 , приложенных соответственно к левой и правой ее половинам. Определим сначала опорные реакции от действия на арку силы P_1 . В этом случае правая опорная реакция B_1 должна пройти через правый опорный шарнир и шарнир c (рис. 3.15, а); в противном случае правая часть арки, на которую

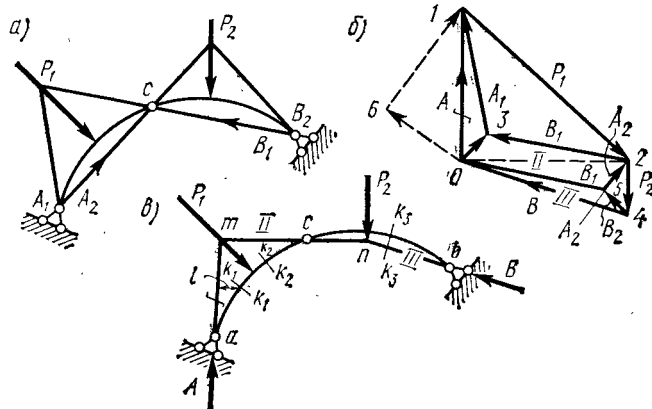


Рис. 3.15

действуют две силы — опорная реакция B_1 и реакция шарнира c , не может находиться в равновесии. На левой опоре арки возникает реакция A_1 . Таким образом, вся арка в целом будет находиться в равновесии под действием трех сил: A_1 , B_1 и P_1 .

Из курса теоретической механики известно, что три действующие на диск и находящиеся в равновесии силы обязательно пересекаются в одной точке. Применив эту теорему к нашему случаю, легко определим направление опорной реакции A_1 , а затем построением силового многоугольника для трех сил — P_1 , A_1 и B_1 (рис. 3.15, б) — найдем величины опорных реакций A_1 и B_1 . Аналогично определим реакции A_2 и B_2 , возникающие от силы P_2 , действующей на правую половину арки (рис. 3.15, а).

На основании принципа независимости действия сил, сложив геометрически найденные силы A_1 и A_2 , B_1 и B_2 , получим реакции A и B , возникающие на опорах трехшарнирной арки от сил P_1 и P_2 . Для этого из точки 3 силового многоугольника (рис. 3.15, б) проводим прямую, параллельную линии действия реакции A_2 , и на ней откладываем величину A_2 . Соединив точку O с точкой 1 , получим полную реакцию A левой опоры; аналогично производится определение полной реакции B правой опоры.

Рассмотрим теперь построение так называемого многоугольника давления, с помощью которого можно определить внутренние усилия M , N и Q , возникающие в любом сечении арки.

Для этого построим веревочный многоугольник (рис. 3.15, в), соответствующий силовому многоугольнику (рис. 3.15, б), с помощью которого графически были найдены опорные реакции. Продолжим левую опорную реакцию A (рис. 3.15, в) до пересечения с силой P_1 . Затем через точку их пересечения m проведем прямую $m-n$, параллельную лучу II силового многоугольника (луч II является линией действия равнодействующей сил A и P_1). Далее через точку n пересечения прямой $m-n$ и силы P_2 проводим прямую, параллельную лучу III , который является равнодействующей сил A , P_1 и P_2 .

При правильном построении луч II (прямая $m-n$), представляющий собой линию действия равнодействующей сил A и P_1 , должен пройти через шарнир c , а луч III , совпадающий с линией действия опорной реакции B , должен пройти через правый опорный шарнир.

Так как каждый луч построенного таким образом веревочного многоугольника $I-II-III$ (рис. 3.15, в) совпадает с линией давления, передаваемого с одной части арки на другую, то его называют многоугольником давления.

Любая из сторон многоугольника давления совпадает с линией действия равнодействующей всех левых (или правых) сил в арке. В самом деле, левее сечения k_1-k_1 (рис. 3.15, в) действует только опорная реакция A ; следовательно, луч I веревочного многоугольника, совпадающий с направлением силы A , и есть линия действия равнодействующей левых сил для данного сечения. Левее же сечения k_2-k_2 действуют реакция A и сила P_1 , равнодействующая которых проходит через точку их пересечения и совпадает с лучом II силового многоугольника. Слева от сечения k_3-k_3 арки действуют силы A_1 , P_1 и P_2 , равнодействующая которых проходит через точку пересечения луча II с силой P_2 (так как луч II является линией действия равнодействующих сил A и P_1) и совпадает с лучом III .

Таким образом, действительно, любая из сторон многоугольника давления $amnb$ представляет собой линию действия равнодействующей всех сил, расположенных левее (или правее) данного сечения. Числовая величина этой равнодействующей в каждом сечении определяется с помощью силового многоугольника (рис. 3.15, б); например, равнодействующая сил A и P_1 равна лучу II , измеренному в масштабе сил. Следовательно, с помощью силового многоуголь-

ника и многоугольника давления можно определить все внутренние усилия в любом сечении арки. Так, например, изгибающий момент может быть найден умножением равнодействующей (левых или правых сил) на ее плечо относительно центра тяжести данного сечения.

Изгибающий момент в сечении k_1-k_1 равен

$$M_{k_1} = Al,$$

где l — плечо, т. е. длина перпендикуляра, опущенного из центра тяжести данного сечения (рис. 3.15, в) на направление равнодействующей левых сил, в данном случае на направление опорной реакции A .

Для определения продольной и поперечной сил, действующих в сечении k_1-k_1 , разложим равнодействующую левых сил (луч l), т. е. реакцию A на две составляющие: $b-l$, параллельную касательной к оси арки в этом сечении, и $o-b$, нормальную к ней (рис. 3.15, б). Составляющая $o-b$ даст поперечную силу Q в сечении k_1-k_1 арки, а составляющая $b-l$ — продольную силу N в этом же сечении.

Линия давления дает наглядное представление о работе арки. Так, из рис. 3.15, в видно, что правая половина арки, где равнодействующая для каждого сечения проходит ниже оси, изгибается выпуклостью вверх, т. е. еще больше искривляется; в левой же половине, наоборот, выпуклость от изгиба обращена книзу, т. е. происходит распрямление оси арки.

В случае действия на арку системы сосредоточенных сил P_1, P_2, P_3 и т. д. построение многоугольника давления производится в следующем порядке:

1) находят равнодействующую $R_{лев}$ всех внешних активных сил (без опорных реакций), действующих на левую половину арки;

2) находят равнодействующую $R_{пр}$ всех внешних активных сил (без опорных реакций), действующих на правую половину арки;

3) на основании принципа независимости действия сил определяют указанным выше приемом опорные реакции A и B ;

4) строят силовой многоугольник и многоугольник давления. Каждой нагрузке, действующей на данную трехшарнирную арку, соответствует только один многоугольник давления. При действии на арку сплошной нагрузки многоугольник давления превращается в кривую давления.

Совершенно очевидно, что если арке дать очертание, при котором ее ось совпадает с многоугольником давления от заданной на-

грузки, то в такой арке не возникнут ни изгибающие моменты, ни поперечные силы. В этом случае арка будет работать исключительно на сжатие, что весьма выгодно, в особенности для каменных и бетонных сооружений. Такое очертание оси арки называется *рациональным*¹.

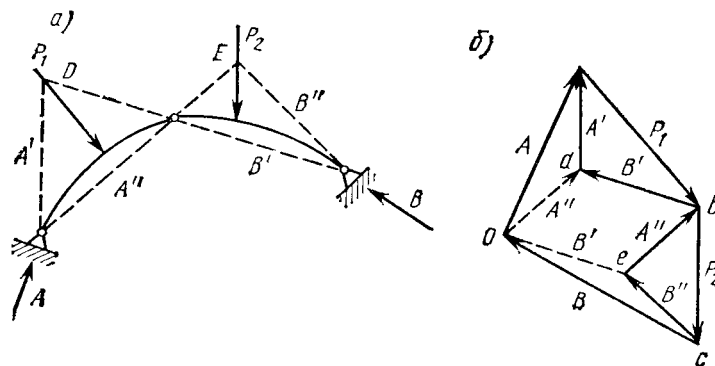


Рис. 3.17

Отметим, что многоугольник давления может быть найден и аналитически. Для этого необходимо определить величины M и N и затем найти эксцентриситеты по формуле

$$e = M/N.$$

Отложив от оси арки в ряде ее поперечных сечений отрезки, равные эксцентриситетам, и соединив между собой концы этих отрезков, получим искомый многоугольник давления.

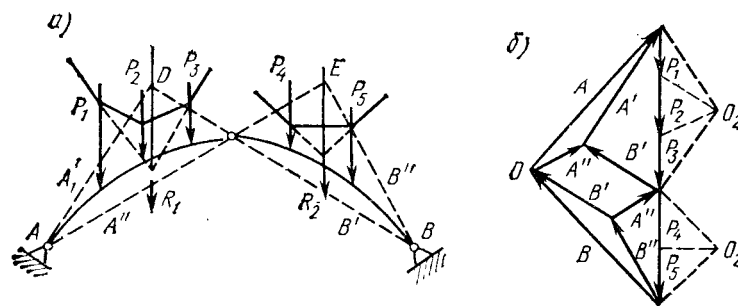


Рис. 3.18

На рис. 3.16—3.18 показано графическое определение опорных реакций, на рис. 3.19 — построение многоугольника давления и на рис. 3.20 — определение внутренних сил в арке.

¹ Экспериментальный метод установления рациональной оси арки впервые был разработан известным русским изобретателем И. П. Кулибиным еще в 1776 г.

При действии на арку только вертикальных сил горизонтальная составляющая любой из равнодействующих левых (или правых) сил равняется распору H (полюсному расстоянию)¹. Поэтому, если через какую-либо точку k оси арки (рис. 3.20, а) провести вертикальную прямую $k-n$ до пересечения с многоугольником давле-

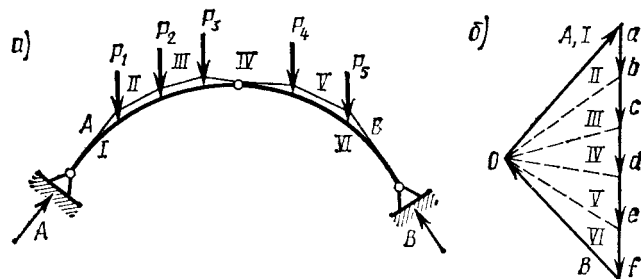


Рис. 3.19

ния и здесь в точке n (рис. 3.21) разложить равнодействующую левых сил (в данном случае R_{II}) на вертикальную и горизонтальную составляющие, то изгибающий момент в сечении k будет равен про-

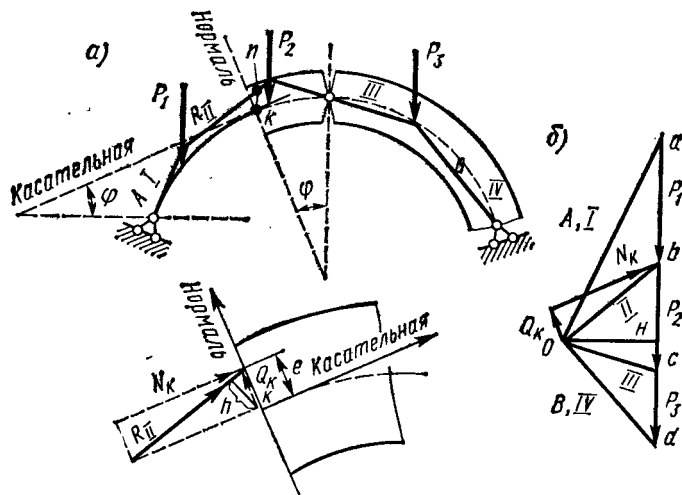


Рис. 3.20

изведению распора H на вертикальный отрезок $k-n$ (рис. 3.21) между осью арки и стороной многоугольника давления, так как вертикальная составляющая S дает относительно точки k момент,

¹ Любой луч (рис. 3.20, б) в силовом многоугольнике имеет одну и ту же горизонтальную составляющую, равную распору H .

равный нулю (рис. 3.21). Следовательно, при вертикальной нагрузке все вертикальные отрезки, заключенные между многоугольником давления и осью арки, являются ординатами эпюры моментов, из-

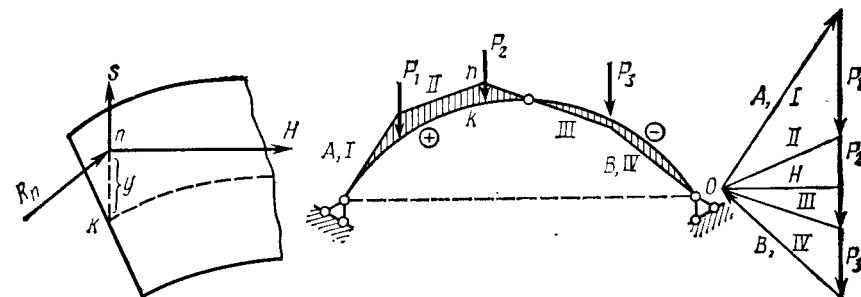


Рис. 3.21

Рис. 3.22

меренными в определенном, постоянном для всех сечений арки масштабе. Построенная таким способом эпюра моментов для арки, изображенной на рис. 3.20, а, приведена на рис. 3.22.

§ 3.4. УРАВНЕНИЕ РАЦИОНАЛЬНОЙ ОСИ ТРЕХШАРНИРНОЙ АРКИ

Рациональным очертанием оси арки, как уже было указано, называется такое ее очертание, при котором кривая давления от заданной нагрузки совпадает с осью арки; следовательно, во всех сечениях такой арки изгибающий момент равен нулю. Если ось арки и кривая давления определяются соответственно уравнениями

$$y=f(x) \text{ и } \eta=\varphi(x),$$

то условием того, что ось арки имеет рациональное очертание, является тождество

$$y \equiv \eta.$$

Рассмотрим случай действия на арку только вертикальной нагрузки. Составим выражение момента левых сил относительно любой точки c кривой давления:

$$M_c = V_a x - H \eta - \sum P p = 0,$$

откуда

$$\eta = \frac{V_a x - \sum P p}{H}.$$

Числитель последней формулы численно равен изгибающему моменту в простой балке в сечении с абсциссой x , т. е. M_x^0 , а потому

$$\eta = M_x^0 / H.$$

Используя соотношения $y \equiv \eta$, получаем следующее уравнение рациональной оси арки:

$$y = M_x^0 / H.$$

Следовательно, при вертикальной нагрузке ось арки будет рациональной, если ее очертание меняется по закону изменения балочного момента.

Пример. При действии на трехшарнирную арку вертикальной равномерно распределенной (по ее пролету) нагрузки интенсивностью q требуется установить рациональное очертание оси арки, если заданы ее пролет l , стрела подъема f и координата $x=l/2$ среднего шарнира.

Решение. Для решения задачи воспользуемся формулой

$$y = M_x^0 / H,$$

где для данного случая

$$M_x^0 = \frac{ql}{2}x - qx \frac{x}{2} = \frac{qx}{2}(l-x);$$

$$H = \frac{M_c^0}{f} = \left(\frac{ql}{2} \cdot \frac{l}{2} - \frac{ql}{2} \cdot \frac{l}{4} \right) \frac{1}{f} = \frac{ql^2}{8f}.$$

Следовательно,

$$y = \frac{\frac{qx}{2}(l-x) \cdot 8f}{ql^2} = \frac{4f}{l^2}(l-x)x,$$

т. е. рациональной в данном случае является арка с осью, очерченной по квадратной параболе.

§ 3.5. РАСЧЕТ ТРЕХШАРНИРНЫХ АРОК НА ПОДВИЖНУЮ НАГРУЗКУ

1. Линии влияния опорных реакций

Расположим на трехшарнирной арке силу $P=1$ на расстоянии x от левой опоры (рис. 3.23, а) и составим уравнение моментов всех сил сначала относительно шарнира правой опоры, а затем левой:

$$\sum M_b = V_a l - 1(l-x) = 0;$$

$$\sum M_a = -V_b l + 1 \cdot x = 0.$$

Из этих уравнений найдем:

$$V_a = \frac{l-x}{l}; \quad V_b = \frac{x}{l}.$$

Следовательно, линии влияния V_a и V_b ничем не отличаются от линий влияния опорных реакций простой балки на двух опорах; они изображены на рис. 3.23, б, в.

Распор H определяется уравнением $H = M_c^0 / f$, из которого следует, что линия влияния H имеет такой же вид, как и линия влияния балочного момента M_c^0 , и отличается от нее лишь постоянным множителем $1/f$; она представлена на рис. 3.23, г; в частном случае, когда $l_1 = l_2 = l/2$, ее ордината под средним шарниром равна $l/4f$.

2. Линии влияния внутренних усилий

Рассмотрим предварительно способы отыскания таких положений вертикального груза P на арке, при которых в исследуемом сечении k или момент, или поперечная сила, или продольная сила