

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

МОСКОВСКИЙ ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)

А.В. КОРЕЦКИЙ, А.А. КУЗНЕЦОВ, Н.В. ОСАДЧЕНКО

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ДИНАМИКИ НА ПЕРСОНАЛЬНОМ КОМПЬЮТЕРЕ

Методическое пособие
по курсам

“Механика” и “Теоретическая механика”

для студентов, обучающихся по направлениям “Энергомашиностроение”,
“Прикладная механика”, “Теплоэнергетика”, “Электроэнергетика”,
“Электротехника, электромеханика и электротехнологии”

УДК

531

К 664

УДК: 531/534: 681.322 – 181.4 (072)

Утверждено учебным управлением МЭИ

Рецензент докт. техн. наук проф. А.Д. Трухний

Подготовлено на кафедре теоретической механики и мехатроники

Корецкий А.В., Кузнецов А.А., Осадченко Н.В.

Решение задач динамики на персональном компьютере: Методическое пособие. – М.: Издательство МЭИ, 2005. – 64 с.

Излагается методика выполнения типовых расчётов и индивидуальных домашних заданий по разделу “Динамика” курса теоретической механики. Дано описание обучающих программ, разработанных применительно к основным разделам динамики и реализованных на персональных компьютерах класс РС IBM. Приводятся примеры решения задач.

Для студентов всех специальностей, изучающих курсы “Механика” и “Теоретическая механика”.

ВВЕДЕНИЕ

В методическом пособии излагается методика выполнения типовых расчётов (ТР) и индивидуальных домашних заданий (ИДЗ) по *динамике* – основному, наиболее важному разделу курса теоретической механики. Представлен комплекс обучающих программ, разработанных применительно к основным разделам динамики и реализованных на персональных компьютерах класса РС IBM.

Программы разработаны по единой технологии – той же, которая была использована и при создании обучающей системы СТЕВИН по статике абсолютно твёрдого тела (в [1] на примере системы СТЕВИН подробно изложены типовая структура обучающей программы, её технические характеристики и дидактические возможности, характерные для представленного подхода).

Чтобы не повторяться, дадим лишь краткую характеристику обучающих программ, входящих в комплекс.

Одной из важнейших целей, которые ставили перед собой их разработчики, было максимально “облегчить жизнь” студенту – обеспечить ему такие условия работы с компьютером, при которых затрачивался бы минимум времени на действия, не связанные непосредственно с учебной работой. В частности, студенту для выполнения ТР не нужно заниматься программированием, а ввод необходимых формул или выражений не требует изучения какой-либо специфической нотации: способ записи предельно приближен к традиционной символике механики (по существу, общематематической).

В результате студент может полностью сосредоточиться на выполнении конкретного задания, центральной частью которого является численное моделирование движения механической системы на заданном промежутке времени. Отметим (во избежание недоразумений), что работа с обучающей программой – это лишь часть процесса выполнения задания. В самом деле, перед началом работы с компьютером студенту следует уяснить постановку задания, построить расчётную механическую модель, составить основные расчётные формулы и определить численные значения используемых параметров. Завершив работу с обучающей программой, студент должен проанализировать полученные результаты, оформить свою работу и защитить её.

Рассматриваемые обучающие программы предусматривают определённую поддержку и для упомянутых выше предварительного и завершающего этапов работы над заданием. Именно, числовые значения ряда параметров студент может вычислить непосредственно в ходе работы с программой, вызвав подсистему КАЛЬКУЛЯТОР (её услуги могут потребоваться и в том случае, когда студент по результатам моделирования увидел и выявил ошибки, допущенные при вводе исходных данных). Результаты моделирования программа выводит на видеомонитор в табличной и графической форме, причём студент может вывести их на принтер с помощью одной из имеющихся на компьютере утилит печати копии экрана в графическом режиме [2].

Входящие в состав комплекса обучающие программы уже несколько лет используются в учебном процессе (как в МЭИ(ТУ), так и в других ву-

зах). По сравнению с их ранними версиями, описанными в [3], здесь даётся характеристика обновлённых версий данных программ.

Кроме этого, в пособии представлены рекомендации по работе с программой **LinkGear**. Это – обучающая программа нового поколения, которая разработана аспирантом кафедры теоретической механики и мехатроники МЭИ(ТУ) А.А.Кузнецовым в виде приложения операционной системы **Windows**.

1. Обзор обучающих программ по динамике

1.1. Общие сведения о назначении и использовании обучающих программ по динамике

В состав рассматриваемого здесь комплекса обучающих программ по основным разделам динамики входят следующие программы: **dp**, **dr**, **dk**, **dm**, **rodina**. Все они были реализованы на языке Си в виде приложений DOS. При выполнении данных программ их можно вызывать как непосредственно из системы **Windows**, так и при помощи какой-либо из программ-оболочек типа программы **Norton Commander** [2], которые поддерживают выполнение приложений DOS.

Для каждой из обучающих программ *предметом изучения* является определённый раздел динамики. Именно:

для программы **dp** – “Динамика материальной точки”;

для программы **dr** – “Динамика твёрдого тела с неподвижной осью вращения”;

для программы **dk** – “Уравнения Лагранжа 2-го рода”;

для программы **dm** – “Общие теоремы динамики”;

для программы **rodina** – “Метод кинетостатики”.

Каждая из обучающих программ предназначена для выполнения какого-то одного типового расчёта по соответствующему разделу динамики (программа **dk**, помимо этого, позволяет студенту проверить правильность результатов, полученным им в ходе выполнения ИДЗ по этому разделу). Условия к заданиям первых четырёх типовых расчётов можно найти в учебном пособии [4]; там же изложена методика составления уравнений движения. Для типового расчёта по методу кинетостатики соответствующий материал изложен в [3].

Программа **LinkGear**, упомянутая во введении, предназначена для выполнения того же типового расчёта, что и программа **dk**, и может рассматриваться как современная версия последней, существенно использующая возможности операционной системы **Windows**. В отличие от программы **dk**, программа **LinkGear** осуществляет компьютерную анимацию движения машины, позволяет студенту проверить правильность введённых им формул и включает ряд новых сервисных возможностей.

Приведём общие рекомендации по работе с описанными здесь обучающими программами (исключая **LinkGear**; специфика работы с данной программой будет рассмотрена ниже – при обсуждении выполнения соответствующего типового расчёта).

Исполнимый файл каждой обучающей программы имеет имя, совпадающее с именем программы, и расширение **.exe**. Если во время выполнения программы в текущем каталоге присутствует файл с таким же именем, но расширением **.cfg**, то последний рассматривается ею как файл с данными для настройки текущей конфигурации программы (т.е. для задания цветовой гаммы меню и т.п.); в противном случае программа окажется настроенной на некоторую стандартную конфигурацию.

После запуска программы на экране видеомонитора появляется её *основное меню* с тремя пунктами: **“Знакомство с заданием”**, **“Выполнение задания”** и **“Завершение работы”** (несколько отличается порядок работы с программой **dk** – см. пункты 4,7).

Работая с каким-либо меню обучающей программы, Вы видите на экране набор прямоугольных полей (соответствуют пунктам меню), одно из которых является *активным* и отличается от других полей своим цветом. Своим внешним видом поля напоминают кнопки на панели управления какой-либо технической системой, а цветовое выделение активного поля имитирует подсветку кнопки.

Используя клавиши управления курсором (клавиши **←**, **↑**, **↓**, **→**, **Home** и **End** на клавиатуре), можно активизировать любой из пунктов меню. Нажатием же клавиши **Enter** Вы информируете программу о том, что выбран конкретный пункт меню (а именно тот, который в данный момент является активным). После нажатия клавиши **Enter** “кнопка” на короткое время “утапливается”, имитируя нажатие кнопки на реальной панели управления.

В ходе работы с меню возможен доступ к подсистемам КОНСУЛЬТАНТ (предоставляет необходимый справочный материал по работе с обучающей программой) и КАЛЬКУЛЯТОР (предназначен для простых численных расчётов, позволяя вычислять значения не слишком сложных математических выражений). Этот доступ обеспечивается нажатием соответственно функциональных клавиш **F1** или **F2**.

При выборе пункта **“Знакомство с заданием”** программа выполняет вычисления для демонстрационного варианта задания; полученные результаты можно просмотреть на экране видеомонитора. Для того, чтобы начать работу над своим вариантом, надо перейти к пункту **“Выполнение задания”**. В этом случае программа просит ввести номер варианта, а затем задаёт вопрос: **“Вы впервые решаете эту задачу?”**

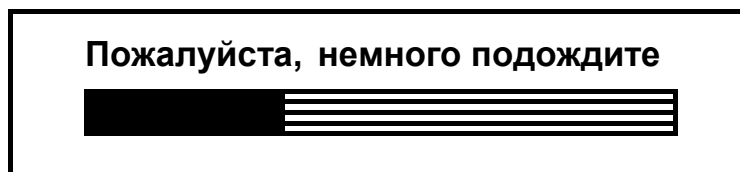
Если ТР выполняется впервые, то нужно ответить утвердительно – нажать клавишу **Enter** (если же Вы ранее пытались выполнять задание своего варианта, но допустили ошибки и, не сумев их сразу исправить, сохранили результаты своей работы в рабочем файле, тогда ответьте **“N”**; программа вступит тогда с Вами в диалог, в ходе которого Вы сообщите ей имя своего файла и избежите повторного набора исходных данных и формул).

данный момент вычислительная модель механической системы полностью сформирована, и начинается её исследование. В основе его лежит *численное решение задачи Коши* для системы дифференциальных уравнений (1), т.е. её интегрирование на интервале изменения времени $[0, \tau]$ при заданных начальных значениях $x_1(0), \dots, x_n(0)$ (среди параметров задания обязательно фигурируют начальные значения переменных состояния и время моделирования τ).

При численном решении задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений обычно обращаются к какому-либо из пошаговых методов численного интегрирования. В рассматриваемых обучающих программах используется *метод Дормана – Принса* 5-го порядка точности [5], относящийся к семейству методов Рунге – Кутты. Это – явный 7-стадийный метод, требующий 6 вычислений правых частей системы (1) на шаге интегрирования и допускающий эффективное управление длиной шага в соответствии с заданным параметром погрешности ε .

Таким образом, интегрирование ведётся с *переменным шагом*, величина которого определяется спецификой моделируемой системы. В процессе решения задачи Коши обучающая программа обеспечивает выдачу значений переменных состояния и вспомогательных переменных с некоторым постоянным шагом, размещая их в соответствующих массивах, которые далее используются для анализа решения (при визуализации движения, построении графиков, выводе таблицы результатов); для выдачи с постоянным шагом используется *непрерывное расширение* [5] метода Дормана – Принса. Параметр ε принимается равным 10^{-4} .

Начиная численное интегрирование, обучающая программа выводит на экран следующее сообщение:



(полоска в нижней части рамки служит индикатором: отношение её закрашенной части ко всей длине полоски показывает, для какой доли интервала изменения времени уже выполнено интегрирование уравнений движения). Обычно весь процесс интегрирования длится одну-две секунды.

Завершив интегрирование, программы **dp** и **rodina** выводят на экран изображение конфигурации системы, отвечающей нулевому моменту времени, а в нижней части экрана возникает надпись



После нажатия клавиши обучающая программа демонстрирует, как движется моделируемая система. После завершения визуализации движения внизу появляется вопрос: **“Хотите ли Вы строить графики?”**

Если результаты визуализации являются удовлетворительными, можно ответить утвердительно. В этом случае на экране появится *меню для вывода графиков*, позволяющее последовательно выбирать те графики, которые желательно отобразить на видеомониторе.

При необходимости график можно сохранить в виде графического файла (а затем распечатать). Если Вы предпочитаете обращаться к обучающей программе

из среды DOS (например, пользуясь оболочками **Norton Commander** или **Volkov Commander**), то предварительно требуется загрузить соответствующую резидентную утилиту, а затем всякое нажатие нужной комбинации клавиш (так, программа **pcxgrab** использует комбинацию **Alt-G**) обеспечивает сохранение текущего содержимого экрана в виде графического файла.

Если же Вы вызываете обучающую программу непосредственно из среды **Windows**, то имеет смысл предварительно открыть (в другом окне) стандартную программу **Paint**. В этом случае последовательное нажатие комбинаций клавиш **Print-Screen** и **Ctrl-Insert** позволяет поместить содержимое экрана в системный буфер; затем Вы переключаетесь в окно **Paint**, нажатием комбинации клавиш **Shift-Insert** превращаете содержимое буфера в рисунок и, выбрав в меню **Paint** пункт **“Сохранить как...”**, задаёте имя создаваемого графического файла (после чего вновь возвращаетесь в окно обучающей программы).

В случае, когда визуализация движения выявила наличие ошибок, целесообразно сразу, отказавшись от просмотра графиков и численных результатов, вернуться в основное меню и, выбрав опять пункт **“Хотите ли Вы строить графики?”**, на запрос о номере варианта задания ввести *то же самое* число, что и ранее. Если, однако, времени на поиск и исправление ошибок недостаточно, то следует завершить работу с обучающей программой; при этом на её вопрос о том, нужно ли сохранять результаты работы в рабочем файле на диске, разумно ответить утвердительно, введя затем имя этого файла.

Обучающие программы **dr**, **dk** и **dm** не обеспечивают визуализацию движения; после завершения интегрирования немедленно следует вопрос о том, нужно или нет строить графики.

Если на данный вопрос дан отрицательный ответ, или если в меню для вывода графиков выбран пункт **“Завершение построения графиков”**, обучающая программа задаёт очередной вопрос:

Интересуют ли Вас численные результаты ?

После утвердительного ответа на экране появляется таблица численных значений переменных состояния и вспомогательных переменных в отдельные моменты времени. Можно при желании вывести эту таблицу на принтер (или просто переписать нужные результаты на листок бумаги). После нажатия клавиши **Enter** таблицу результатов сменит основное меню обучающей программы.

Для завершения работы с обучающей программой нужно выбрать в её основном меню пункт **“Завершение работы”**. Программа задаст вопрос: **“Хотите ли Вы сохранить свои данные?”** При отрицательном ответе программа завершается; при утвердительном она предлагает ввести имя рабочего файла для сохранения результатов (расширение набирать не нужно – программа в любом случае создаст файл с расширением **.dat**).

1.2. Типовой расчёт по динамике материальной точки

Цель расчёта – приобретение опыта построения расчётной механической модели в соответствии с условием задачи, освоение методики составления дифференциальных уравнений движения, их аналитического и числен-

ного исследования применительно к простейшему случаю, когда в качестве модели механической системы выступает *материальная точка*, совершающая плоское движение.

Пусть m – масса материальной точки M , $\bar{\mathbf{r}}_M \equiv \bar{\mathbf{r}}_M(t)$ – её радиус-вектор относительно начала инерциальной (условно неподвижной) системы координат $Oxyz$, $\bar{\mathbf{F}}_1, \bar{\mathbf{F}}_2, \dots$ – действующие на точку силы; тогда основное уравнение динамики точки имеет вид:

$$m \ddot{\bar{\mathbf{r}}} = \sum_k \bar{\mathbf{F}}_k. \quad (2)$$

Задание расчёта предполагает, что материальная точка движется в плоскости Oxy ; требуется, получив явные выражения для сил $\bar{\mathbf{F}}_k$, составить её уравнения движения.

Заметим, что программа **dp** ориентирована прежде всего на выполнение типового расчёта Д-1 из пособия [4]. В то же время её можно использовать и при решении других задач динамики точки – например, расчётных заданий, приведённых в [6].

Наиболее рациональный способ получения выражений для сил $\bar{\mathbf{F}}_k$ зависит от вида этих сил [4,6]. Во многих случаях бывает полезно представить вектор силы $\bar{\mathbf{F}}_k$ в виде произведения модуля этой силы и единичного вектора $\bar{\mathbf{e}}_k$, определяющего направление силы.

Так, если модуль некоторой силы $\bar{\mathbf{F}}_k$ пропорционален (с коэффициентом μ_2) квадрату скорости $\bar{\mathbf{v}}_M$ точки M , а направление силы противоположно вектору $\bar{\mathbf{v}}_M$, то имеем: $\bar{\mathbf{F}}_k = F_k \bar{\mathbf{e}}_k$, где $F_k = \mu_2 |\bar{\mathbf{v}}_M|^2$, $\bar{\mathbf{e}}_k = -\bar{\mathbf{v}}_M / |\bar{\mathbf{v}}_M|$. Полученное для $\bar{\mathbf{F}}_k$ выражение можно представить и в таком виде:

$$\bar{\mathbf{F}}_k = -\mu_2 |\bar{\mathbf{v}}_M| \bar{\mathbf{v}}_M. \quad (3)$$

Получив явные выражения для сил $\bar{\mathbf{F}}_k$, перейдём к записи векторного уравнения (2) в проекциях на оси x, y :

$$m \ddot{x} = \sum_k F_{kx}, \quad m \ddot{y} = \sum_k F_{ky}. \quad (4)$$

В задачах из расчёта Д-1 теперь остаётся разрешить уравнения (4) относительно \ddot{x}, \ddot{y} и свести их к виду (1), перейдя к уравнениям 1-го порядка

$$\dot{x} = V_{Mx}, \quad \dot{y} = V_{My}, \quad \dot{V}_{Mx} = w_{Mx}, \quad \dot{V}_{My} = w_{My}, \quad (5)$$

где в качестве переменных состояния используются $x, y, V_{Mx} \equiv \dot{x}, V_{My} \equiv \dot{y}$, а величины $w_{Mx} \equiv \ddot{x}, w_{My} \equiv \ddot{y}$ являются известными функциями от x, y, V_{Mx}, V_{My} . (При выполнении задания из [6] предварительно нужно привести (5) к безразмерному виду.)

Пользуясь программой **dp** для выполнения расчёта Д-1, следует в меню для ввода параметров задания задать численные значения для двух групп параметров: в первую входят $\mathbf{m}, \boldsymbol{\alpha}, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mu_1, \mu_2, \mathbf{F}_0, \mathbf{v}_A, \mathbf{U}, \boldsymbol{\gamma}$, а во вторую – $\tau, \mathbf{x}(0), \mathbf{y}(0), \mathbf{v}_{Mx}(0), \mathbf{v}_{My}(0)$ (обозначения совпадают с используе-

мыми в [4]; значение α задаётся в градусах). Параметры второй группы нужны для постановки задачи Коши для системы (5), а параметры первой группы (а также константу g – модуль ускорения свободного падения – и переменные t, x, y, v_{Mx}, v_{My}) можно использовать при записи расчётных формул для вычисления w_{Mx}, w_{My} . Например, если на материальную точку действует единственная сила, выражение для которой даётся формулой (3), то расчётные формулы имеют вид

$$\begin{aligned} w_{Mx} &= -\mu_2 v_{Mx} \sqrt{v_{Mx} v_{Mx} + v_{My} v_{My}} / m, \\ w_{My} &= -\mu_2 v_{My} \sqrt{v_{Mx} v_{Mx} + v_{My} v_{My}} / m. \end{aligned}$$

При решении других задач по динамике точки обычно задают только значения параметров, входящих во вторую группу. Впрочем, если студент желает записать расчётные формулы не с числовыми, а с буквенными коэффициентами, а среди параметров первой группы есть параметры с подходящими обозначениями, то он может присвоить им соответствующие численные значения и далее использовать эти параметры.

По завершении интегрирования уравнений движения программа **dp** демонстрирует процесс движения точки M на плоскости Oxy (при этом на экране остается след движущейся точки, т.е. строится её траектория). Далее программа позволяет вывести на экран графики зависимостей величин $x, y, V_{Mx}, V_{My}, V_M \equiv |\bar{v}_M|$ от t , а также таблицу значений $x, y, V_{Mx}, V_{My}, w_{Mx}, w_{My}$ в отдельные моменты времени.

1.3. Типовой расчёт по динамике твёрдого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси

Программа **dr** предназначена для выполнения типового расчёта Д-6 из пособия [4]. Цель расчёта – путём решения модельной задачи по динамике роторных машин получить представление о постановке и методах исследования задач динамики твёрдого тела (в частности, освоить методику составления уравнений движения *твёрдого тела с неподвижной осью вращения*).

Предполагается, что ротор машины моделируется абсолютно твёрдым телом, состоящим из невесомой оси, совпадающей с осью вращения, на которую насажены (с определёнными технологическими несовершенствами) один или несколько однородных тонких дисков. Ось ротора закреплена в опорных подшипниках A и B (подшипники считаются точечными).

Введём вращающуюся вместе с ротором систему координатных осей, взяв за её начало точку O на оси вращения и совместив ось Oz с этой осью. Будем, следуя [7], представлять реакции в подшипниках в виде суммы статических и добавочных динамических реакций, причём ограничимся нахождением только последних.

Тогда при указанном выборе системы координат получаем следующее уравнение вращения ротора:

$$J_{zz} \ddot{\phi} = \sum_k M_{Az}(\bar{F}_k), \quad (6)$$

которое дополним уравнениями для нахождения добавочных динамических реакций, имеющими [7,8] такой вид:

$$\begin{aligned}
 -m y_C \ddot{\phi} - m x_C \dot{\phi}^2 &= X_A + X_B, \\
 m x_C \ddot{\phi} - m y_C \dot{\phi}^2 &= Y_A + Y_B, \\
 -J_{xz} \ddot{\phi} + J_{yz} \dot{\phi}^2 &= -z_A Y_A - z_B Y_B, \\
 -J_{yz} \ddot{\phi} - J_{xz} \dot{\phi}^2 &= z_A X_A + z_B X_B.
 \end{aligned} \tag{7}$$

Здесь: ϕ – угол поворота ротора; m – его масса; x_C и y_C – координаты его центра масс в осях $Oxyz$; J_{xz} , J_{yz} , J_{zz} – моменты инерции ротора в этих осях; $\bar{\mathbf{F}}_1, \bar{\mathbf{F}}_2, \dots$ – действующие на ротор внешние активные силы; z_A, z_B – координаты точек \bar{A} и \bar{B} ; X_A, Y_A, X_B, Y_B – компоненты добавочных динамических реакций $\bar{\mathbf{R}}_A, \bar{\mathbf{R}}_B$ в подшипниках.

Напомним, что моменты инерции твёрдого тела совпадают – с точностью до знака – с компонентами оператора инерции данного тела¹.

Именно, если $\bar{\mathbf{J}}_O$ – оператор инерции тела относительно полюса O , то матрица данного оператора в системе координат $Oxyz$ имеет вид

$$I^{Oxyz} = \begin{pmatrix} J_{xx} & -J_{xy} & -J_{xz} \\ -J_{yx} & J_{yy} & -J_{yz} \\ -J_{zx} & -J_{zy} & J_{zz} \end{pmatrix}. \tag{8}$$

Здесь в виде верхнего индекса указана используемая система координат. В выкладках, которые сопровождают выполнение данного типового расчёта, приходится иметь дело с матрицами и столбцами, состоящими из компонент операторов и векторов в *различных* системах координат. Во избежание путаницы целесообразно все используемые системы координат указывать явно.

Применительно к типовому расчёту Д-6 уравнения (6), (7) можно несколько конкретизировать. Именно, примем за начало координат точку A ; тогда слагаемые с z_A исчезнут. Далее, учтём, что в сумму, стоящую в правой части (6), входят – по условию – лишь два слагаемых: проекции M_{Dz} и M_{Cz} вращающего момента $\bar{\mathbf{M}}_D$ и момента сопротивления $\bar{\mathbf{M}}_C$ на ось z . Тогда, принимая во внимание приводимые в [4] явные выражения для M_{Dz} и M_{Cz} , представим эту сумму в виде $M_0 - k_1 \dot{\phi} - k_2 \dot{\phi}^2$.

В расчёте требуется для конкретного ротора записать уравнения его динамики и выразить из них $\ddot{\phi}$, X_B, Y_B, X_A, Y_A , а затем выполнить компьютерное моделирование движения ротора.

При решении задач по теме “Динамика твёрдого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси” на этапе составления уравнений движения тела можно придерживаться следующей последовательности действий:

1°. Найти массу и радиус-вектор центра масс твёрдого тела (определив тем самым коэффициенты m, x_C и y_C).

¹ Вместо термина “оператор инерции” используют также термин “тензор инерции”.

2°. Найти матрицу оператора инерции твёрдого тела в используемой системе координат (определив тем самым коэффициенты J_{xz} , J_{yz} , J_{zz}).

3°. Записать уравнения динамики твёрдого тела.

Поскольку масса, радиус-вектор центра масс и оператор инерции абсолютно твёрдого тела – аддитивные величины, то в задании расчёта Д-6 эти характеристики ротора вычисляются суммированием:

$$m = \sum_j m_j, \quad \bar{\mathbf{r}}_C = \frac{1}{m} \sum_j m_j \bar{\mathbf{r}}_{C_j}, \quad I^{Axyz} = \sum_j I_j^{Axyz}, \quad (9)$$

где j – номер диска, C_j – его центр масс (вместо самих операторов инерции в этих формулах фигурируют их матрицы).

Таким образом, все указанные характеристики следует сперва рассчитать по отдельности для каждого диска. Рассмотрим, как это делается.

Формулы

$$I_P^{Oxyz} = m \begin{pmatrix} y_P^2 + z_P^2 & -x_P y_P & -x_P z_P \\ -y_P x_P & z_P^2 + x_P^2 & -y_P z_P \\ -z_P x_P & -z_P y_P & x_P^2 + y_P^2 \end{pmatrix}, \quad I_j^{O\xi\eta\zeta} = \frac{mR^2}{4} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad (10)$$

представляют в явном виде соответственно матрицу оператора инерции материальной точки P массы m в произвольной системе координат $Oxyz$ и матрицу оператора инерции однородного тонкого диска массы m и радиуса R в системе его главных центральных осей инерции $O\xi\eta\zeta$. При этом предполагается, что ось ζ перпендикулярна плоскости диска, а через j вновь обозначен номер диска.

Начав с выражения, даваемого второй из формул (10), можно вычислить матрицу оператора инерции диска в любой системе координат, пользуясь следующими преобразованиями:

I. Переход от центральных осей к осям, им параллельным:

$$I_j^{Oxyz} = I_j^{O\xi\eta\zeta} + I_C^{Oxyz}. \quad (11)$$

II. Переход к новым осям с тем же началом:

$$I_j^{Oxyz} = \Gamma I_j^{O\xi\eta\zeta} \Gamma^T. \quad (12)$$

В формулах (11),(12): $\xi\eta\zeta$ и xyz – соответственно “старые” и “новые” координатные оси; C – центр масс тела j ; T – символ транспонирования матрицы. Последнее слагаемое в (11) обозначает матрицу оператора инерции воображаемой материальной точки, у которой масса равна массе тела j и которая помещена в его центр масс; элементы этой матрицы вычисляются в соответствии с первой из формул (10). Через Γ обозначена матрица направляющих косинусов между “старыми” и “новыми” осями:

$$\Gamma = \begin{pmatrix} \gamma_{x\xi} & \gamma_{x\eta} & \gamma_{x\zeta} \\ \gamma_{y\xi} & \gamma_{y\eta} & \gamma_{y\zeta} \\ \gamma_{z\xi} & \gamma_{z\eta} & \gamma_{z\zeta} \end{pmatrix}, \quad \gamma_{x\eta} = \cos(\widehat{x, \eta}), \dots$$

Что касается вычисления радиус-векторов центров масс, то столбец компонент радиус-вектора произвольной точки P преобразуется при переходе от “старых” осей $\xi\eta\zeta$ к “новым” осям xuz по следующим формулам:

$$r_P^{Oxyz} = r_P^{O'xyz} + r_{O'}^{Oxyz}, \quad r_P^{Oxyz} = \Gamma r_P^{O\xi\eta\zeta}; \quad (13)$$

здесь первая формула соответствует параллельному переносу осей из точки O' в точку O , а вторая – повороту осей при том же начале.

После того, как – в соответствии с последней из формул (9) – матрица оператора инерции ротора будет вычислена, Вы сможете, учитывая (8), найти моменты инерции J_{xz} , J_{yz} , J_{zz} .

Помните, что центробежные моменты инерции входят в матрицу I^{Oxyz} со знаком “минус”, и не забудьте изменить знак!

Получив уравнения динамики ротора в форме (6), (7), введём обозначения $\omega_z = \dot{\varphi}$, $\varepsilon_z = \dot{\varphi}$ и найдём из полученной системы нужные нам расчётные формулы для ε_z , X_B , Y_B , X_A , Y_A (их следует записать именно в этом порядке; в формулах могут фигурировать величины, уже определённые ранее). Заметим, что дифференциальное уравнение $\dot{\varphi} = \omega_z$ можно не рассматривать (расчётные формулы не зависят от φ), так что система дифференциальных уравнений (1) сводится к одному уравнению $\dot{\omega}_z = \varepsilon_z(\omega_z)$. При этом X_B , Y_B , X_A , Y_A играют роль вспомогательных переменных.

Теперь всё готово для работы с программой **dr**. В меню для ввода параметров задания присутствуют две группы параметров: в первую входят \mathbf{m}_1 , \mathbf{m}_2 , \mathbf{R}_1 , \mathbf{R}_2 , δ , α , \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} , \mathbf{M}_0 , \mathbf{k}_1 , \mathbf{k}_2 , а во вторую – $\omega_z(0)$ и τ (обозначения совпадают с используемыми в [4]; буквой δ обозначено расстояние O_1C_1). Параметры второй группы должны быть заданы обязательно; поскольку коэффициенты x_C , y_C , z_B , J_{xz} , J_{yz} , J_{zz} обычно находят численно, то значения большей части параметров первой группы, как правило, вводить не нужно. Что касается ввода расчётных формул, то в их правых частях могут фигурировать – помимо параметров первой группы – переменная состояния ω_z и величины, определённые предыдущими формулами.

По завершении интегрирования уравнений движения программа **dr** позволяет вывести на экран графики зависимостей величин ω_z , ε_z , $R_A \equiv |\bar{\mathbf{R}}_A|$, $R_B \equiv |\bar{\mathbf{R}}_B|$ от t , а также таблицу значений ω_z , ε_z , X_A , Y_A , X_B , Y_B , R_A , R_B в отдельные моменты времени.

1.4. Типовой расчёт по динамике машины с кулисным приводом

Цель расчёта по динамике машины с кулисным приводом – отработка навыков составления уравнений движения механических систем в форме уравнений Лагранжа 2-го рода и приобретение опыта математического моделирования динамики машин.

В данной формулировке использованы следующие термины. *Привод* – устройство для приведения в действие машин и механизмов, состоящее из двигателя и передаточного механизма (последний служит для передачи движения от двигателя

к другим частям машины). *Кулиса* – звено плоского механизма, несущее на себе подвижные направляющие (вдоль которых может двигаться другое подвижное звено).

Программы **dk** и **LinkGear** предназначены для выполнения типового расчёта Д-5 из пособия [4].

На рисунке к каждому из вариантов данного ТР можно видеть звено, форма которого напоминает букву Т. В перекладине этого звена есть прорезь, боковые стороны которой и являются подвижными направляющими. В данной прорези движется *палец* маховика – маленький цилиндр, прикреплённый к маховику (*маховиком* же называют массивное колесо, устанавливаемое на валу машины для уменьшения неравномерности вращения вала).

При решении задач по теме “Уравнения Лагранжа 2-го рода” на этапе составления уравнений движения можно придерживаться следующей последовательности действий (формулировки даны для случая систем с одной степенью свободы; через T обозначена кинетическая энергия механической системы, через Q – обобщённая сила, отвечающая обобщённой координате q):

1°. Составить выражение для T , указав вид движения каждого тела и выразив коэффициенты через исходные данные.

2°. Составить выражение для Q и раскрыть скалярные произведения.

3°. Выбрать обобщённую координату q и выяснить кинематический смысл \dot{q} .

4°. Выразить линейные и угловые скорости, входящие в выражения для T и Q , через \dot{q} .

5°. Выразить T как функцию \dot{q} и q и представить её в стандартной форме, вводя для постоянных коэффициентов буквенные обозначения.

6°. Выразить Q как функцию \dot{q} и q .

7°. Вычислить производные:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}}, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}}, \quad \frac{\partial T}{\partial q}.$$

8°. Записать уравнения Лагранжа:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial T}{\partial q} = Q.$$

Прокомментируем выполнение отдельных пунктов данного алгоритма.

Кинетическая энергия системы твёрдых тел вычисляется как сумма кинетических энергий отдельных тел:

$$T = \sum_j T_j, \quad (14)$$

где j – номер тела. Если тела системы совершают плоское движение, то отдельные слагаемые в (14) в зависимости от вида движения тела (т.е. от того, является ли движение поступательным, вращательным или же имеет место общий случай плоского движения) можно найти, пользуясь одной из следующих формул:

$$\begin{aligned} T_j^{\text{пост}} &= \frac{1}{2} m_j V_A^2, & T_j^{\text{вр}} &= \frac{1}{2} J_O \omega_{jz}^2, \\ T_j^{\text{общ}} &= \frac{1}{2} m_j V_C^2 + \frac{1}{2} J_C \omega_{jz}^2 \end{aligned} \quad (15)$$

(здесь: A – любая точка тела j ; O – неподвижная точка; C – центр масс; остальные обозначения являются стандартными [4,7]).

Напомним, что для однородного диска радиуса R момент инерции относительно оси, проходящей через его центр масс C перпендикулярно плоскости диска, можно найти по формуле $J_C = m R^2 / 2$, для однородного тонкого кольца – по формуле $J_C = m R^2$, для однородного тонкого стержня длины l – по формуле $J_C = m l^2 / 12$ (если же момент инерции вычисляется относительно конца A такого стержня, то верна формула $J_A = m l^2 / 3$). В случае, если для какого-либо тела указан его радиус инерции ϱ относительно некоторой точки A , то $J_A = m \varrho^2$.

Если выразить кинетическую энергию как функцию \dot{q} и q , то для систем со стационарными связями полученное выражение можно записать в следующей стандартной форме:

$$T = \frac{1}{2} (\dots) \dot{q}^2, \quad (16)$$

где выражение, стоящее в круглых скобках и являющееся, вообще говоря, функцией q , имеет вполне определённый механический смысл: если координата q – линейная, то это – *приведённая масса*, а если координата q – угловая, то это – *приведённый момент инерции* [9].

Обобщённая сила Q может быть найдена по формуле

$$Q = \sum_k Q_k, \quad (17)$$

где суммирование выполняется для всех *активных* сил и моментов. Отдельные слагаемые в формуле (17) могут быть вычислены в виде скалярных произведений:

$$Q_k = (\bar{\mathbf{F}}_k, \bar{\mathbf{u}}_A) \quad \text{или} \quad Q_k = (\bar{\mathbf{M}}_k, \bar{\mathbf{u}}_j); \quad (18)$$

первая формула отвечает случаю, когда k -е слагаемое в (17) отвечает силе, приложенной в точке A , вторая – когда оно отвечает моменту, действующему на тело j . При этом:

$$\bar{\mathbf{u}}_A \text{ – передаточная функция линейной скорости точки } A: \bar{\mathbf{v}}_A = \bar{\mathbf{u}}_A \dot{q};$$

$$\bar{\mathbf{u}}_j \text{ – передаточная функция угловой скорости тела } j: \bar{\boldsymbol{\omega}}_j = \bar{\mathbf{u}}_j \dot{q}$$

(передаточная функция какой-либо скорости – это [9,10] коэффициент в выражении данной скорости через обобщённую скорость¹).

Раскрытие скалярных произведений в (18) удобно выполнить путём перехода к проекциям:

$$(\bar{\mathbf{F}}_k, \bar{\mathbf{u}}_A) = F_{kx} u_{Ax} + F_{ky} u_{Ay}, \quad (\bar{\mathbf{M}}_k, \bar{\mathbf{u}}_j) = M_{kz} u_{jz}.$$

В типовом расчёте Д-5 в качестве обобщённой координаты q используется угол поворота маховика φ_1 ; поэтому в п.3° имеем:

$$q = \varphi_1, \quad \dot{q} = \dot{\varphi}_1 = \omega_{1z}.$$

Стандартной форме (16) выражения для T в заданиях расчёта Д-5 можно придать следующий конкретный вид:

¹ В [4,8] описан иной способ вычисления обобщённой силы Q , в соответствии с которым сначала вычисляют сумму N^B возможных мощностей активных сил (при этом скалярные произведения (18) заменяются аналогичными произведениями, в которых фигурируют уже не передаточные функции, а сами линейные и угловые скорости), а окончательное выражение для Q находят по формуле $Q = N^B / \dot{q}$.

$$T = \frac{1}{2} (A + B \sin^2 \varphi_1) \dot{\varphi}_1^2 \quad (19)$$

(с возможной заменой \sin на \cos), где A и B – буквенные обозначения постоянных коэффициентов (эти коэффициенты выражаются через параметры задания). На шаге 5° представленного выше алгоритма рекомендуется получить явные выражения для A и B , а далее работать только с этими символами (в частности, это упрощает вычисление производных на шаге 7°).

После составления уравнений Лагранжа нужно привести уравнения движения машины к форме Коши (1), перейдя к уравнениям 1-го порядка

$$\dot{\varphi}_1 = \omega_{1z}, \quad \dot{\omega}_{1z} = \varepsilon_{1z},$$

где φ_1 , ω_{1z} играют роль переменных состояния, а величина $\varepsilon_{1z} \equiv \ddot{\varphi}_1$ является известной функцией от φ_1 и ω_{1z} ; выражение для ε_{1z} находим, разрешая уравнения Лагранжа относительно $\ddot{\varphi}_1$.

При получении расчётных формул для программ **dk** и **LinkGear** нужно иметь в виду следующее. Выражение для Q (особенно, если пользоваться буквенными, а не числовыми коэффициентами) может оказаться слишком громоздким и не поместиться в строке ввода. Учитывая это, рекомендуется разбить выражение для Q на три слагаемых:

$$Q = Q_d + Q_n + Q_t, \quad (20)$$

где каждое из слагаемых в правой части отвечает вкладу в Q , который дают соответственно двигатель, нагрузка и силы тяжести.

В результате получается последовательность из *семи расчётных формул*. В этой последовательности сперва идут формулы для Q_d , Q_n , Q_t , затем – формула (20), после – формулы для констант A , B и, наконец, формула для ε_{1z} (в правой части которой фигурируют величины A , B , Q).

Теперь всё готово для работы с обучающей программой.

Если говорить о программе **dk**, то она, как уже отмечалось, имеет двойное назначение: используется как для выполнения типового расчёта по динамике машины с кулисным приводом, так и для проверки результатов, полученных студентом при выполнении ИДЗ по динамике (см. п.7).

В соответствии с этим основное меню программы **dk** содержит следующие пункты: “**Индивидуальное домашнее задание**”, “**Типовой расчёт**” и “**Завершение работы**”. Предположим, что выбран пункт “**Типовой расчёт**”; в этом случае на экран будет выведено меню из трёх пунктов: “**Знакомство с заданием**”, “**Выполнение задания**” и “**Завершение работы**” (рис. 1). Работа с таким меню была описана в п.1.

В меню для ввода параметров задания присутствуют две группы параметров; в первую входят \mathbf{M}_0 , \mathbf{k} , $\boldsymbol{\mu}_1$, \mathbf{I}_1 , \mathbf{m}_2 , \mathbf{m}_3 , \mathbf{m}_4 , \mathbf{R}_1 , \mathbf{r}_1 , \mathbf{R}_3 , \mathbf{r}_3 , $\boldsymbol{\rho}_3$, \mathbf{R}_4 , \mathbf{r}_4 , $\boldsymbol{\rho}_4$, а во вторую – $\varphi_1(0)$, $\omega_{1z}(0)$ и τ (обозначения совпадают с используемыми в [4]). Параметры второй группы должны быть заданы обязательно (для $\varphi_1(0)$ значение берётся из приведённой в разделе 3 таблицы, а $\omega_{1z}(0)$ полагается равным $2\pi/\tau$); значения параметров первой группы нужно вводить в том случае, если они фигурируют в расчётных формулах.

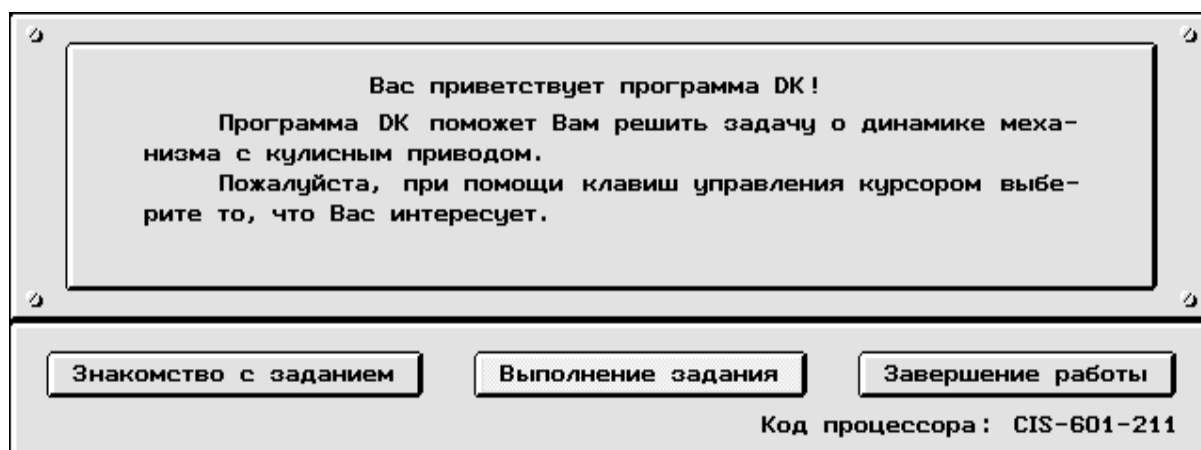


Рис. 1. Программа **dk**: меню подсистемы “Типовой расчёт”

Семь расчётных формул вводят в описанном выше порядке (четвёртая формула – т.е. формула (20) – уже определена в самой программе, и попытки её изменить блокируются). В их правых частях можно использовать параметры первой группы, константу g (модуль ускорения свободного падения), переменные состояния φ_1 , ω_{1z} и величины, определённые предыдущими формулами.

По завершении интегрирования уравнений движения программа **dk** позволяет вывести на экран графики зависимостей величин φ_1 , ω_{1z} , ε_{1z} от t , а также таблицу значений этих величин в отдельные моменты времени.

Теперь обсудим работу с программой **LinkGear**.

Основное меню программы **LinkGear** содержит пункты “**Выполнение задания**” и “**Завершение работы**”. При выборе первого из них студенту предлагается заполнить *регистрационную форму обучающегося* (т.е. ввести свои фамилию, имя и отчество, название группы и номер варианта); данные из этой формы используются при генерации отчётов и сохранении данных.

После заполнения регистрационной формы обучающегося на экране отображается *рабочее меню* программы; его пункты соответствуют последовательным этапам выполнения задания (рис. 2). В левом поле рабочего меню помещено анимированное изображение машины для выбранного варианта.

Движение машины, визуализируемое при анимации, определяется кинематически и характеризуется равномерным вращением маховика (впрочем, отличия такого движения от действительного движения машины, определяемого с учётом динамики, невелики).

Для изменения скорости анимации необходимо поместить курсор мыши на изображение и нажать левую кнопку мыши: на экране появится линейка с ползунком. Перемещая мышью ползунок вверх или вниз, можно менять скорость и направление движения машины. Повторный щелчок мышью по изображению убирает линейку с экрана.

При выборе пункта “**Ввод начальных данных**” появляется меню для ввода параметров задания (в этом меню доступен КАЛЬКУЛЯТОР, вызываемый нажатием комбинации **Ctrl-A**). Аналогично, выбор пункта “**Ввод формул**” влечёт появление меню для ввода расчётных формул.

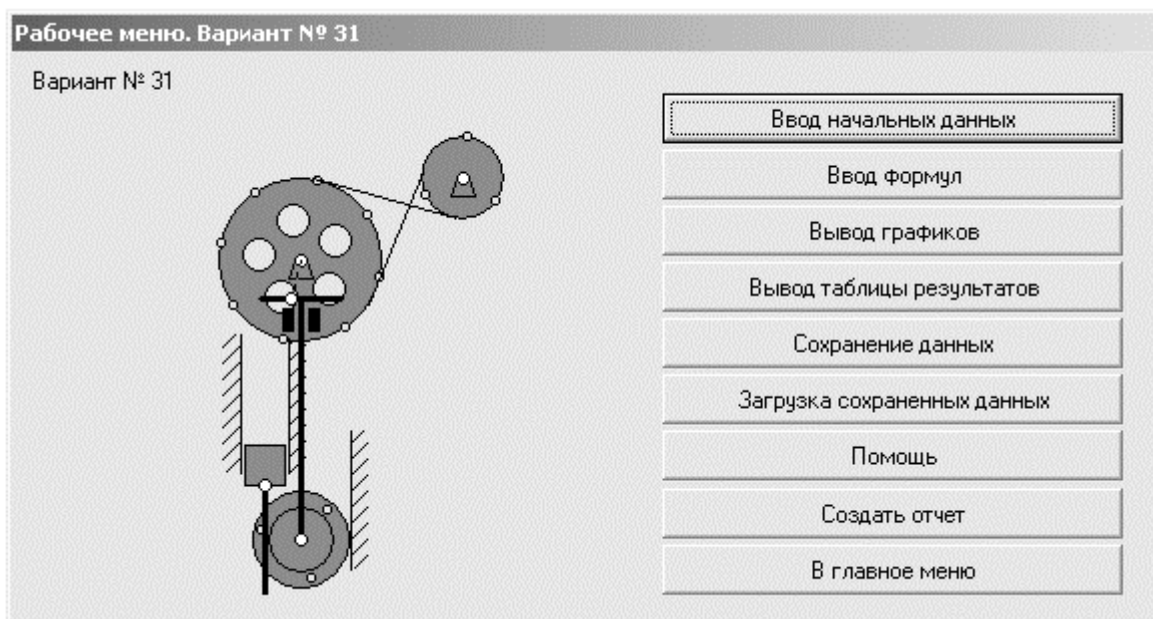


Рис. 2. Программа **LinkGear**: рабочее меню с изображением машины

Численное интегрирование уравнений движения машины выполняется при обращении к пункту “**Вывод графиков**”. Названия остальных пунктов рабочего меню говорят сами за себя (заметим, что действиям программы по сохранению данных в рабочем файле и загрузке их из данного файла отвечают отдельные пункты меню).

Обращаем Ваше внимание на пункт “**Создать отчет**” в рабочем меню. При выборе данного пункта программа генерирует файл отчёта с расширением **.html**, содержащий графики и таблицу результатов моделирования. Данный файл отчёта в дальнейшем можно просмотреть и распечатать – пользуясь, например, программой **Microsoft Internet Explorer**; его можно также вставить в документ, подготавливаемый при помощи программы **Microsoft Word**.

Таким образом, при работе программой **LinkGear** уже не требуется “вручную” сохранять содержимое экрана в виде графического файла.

На любом этапе работы с данной программой доступен КОНСУЛЬТАНТ, вызываемый нажатием комбинации **Ctrl-H**; к нему можно также обратиться, выбрав пункт “**Помощь**” в рабочем меню программы.

1.5. Типовой расчёт по динамике машины с кривошипно-ползунным приводом

Программа **dm** предназначена для выполнения типового расчёта Д-4 из пособия [4]. Цель расчёта по динамике машины с кривошипно-ползунным приводом – отработка навыков составления уравнений движения механических систем с помощью *общих теорем динамики* и приобретения опыта математического моделирования динамики машин.

При решении задач по теме “Общие теоремы динамики” на этапе составления уравнений движения можно придерживаться следующей последовательности действий:

1°. Расчленить механическую систему на отдельные тела, вводя реакции связей.

2°. Составить при помощи общих теорем динамики уравнения движения для каждого из тел.

3°. С учётом имеющихся связей выразить фигурирующие в полученных уравнениях координаты, скорости и ускорения через независимые.

4°. Разрешить полученную систему уравнений относительно ускорений и реакций связей.

Если в задаче предусматривается нахождение закона движения механической системы, то полученные соотношения для ускорений рассматриваются как дифференциальные уравнения, которые нужно проинтегрировать (аналитически или численно).

Отметим, что в терминологии аналитической механики упоминавшиеся выше независимые координаты есть не что иное, как *обобщённые координаты* [7] механической системы.

В некоторых задачах может оказаться затруднительным выразить входящие в уравнения движения отдельных тел координаты через независимые, поскольку в общем случае это связано с решением нелинейных уравнений (для скоростей и ускорений соответствующие соотношения являются линейными, поэтому трудностей не возникает). В случае, когда закон движения находится численно, может быть полезным рассматривать уравнения движения в *избыточном наборе переменных* [11], когда число используемых координат больше числа обобщённых (здесь не рассматриваются вычислительные трудности, которые могут встретиться при интегрировании уравнений с избыточным набором переменных на достаточно длинном интервале времени; для преодоления таких трудностей пользуются специальными приёмами [11–13]).

Ограничимся случаем *плоского движения*.

Рассмотрим тело с номером j . Пусть m – его масса, C – центр масс, O – неподвижная точка (если таковая имеется), $\bar{\mathbf{F}}_1, \bar{\mathbf{F}}_2, \dots$ – действующие на тело силы (как активные, так и реакции связей); для простоты опускаем в обозначениях индекс j . Тогда, применяя теорему о движении центра масс, получаем:

$$m \dot{v}_{Cx} = \sum_k F_{kx}, \quad m \dot{v}_{Cy} = \sum_k F_{ky}; \quad (21)$$

применяя же теорему об изменении момента количества движения относительно неподвижного центра или, если такого центра нет, теорему об изменении момента количества движения с полюсом в центре масс, имеем соответственно

$$J_O \dot{\omega}_{jz} = \sum_k M_{Oz}(\bar{\mathbf{F}}_k) \quad \text{или} \quad J_C \dot{\omega}_{jz} = \sum_k M_{Cz}(\bar{\mathbf{F}}_k), \quad (22)$$

где J_O, J_C – моменты инерции тела j относительно точек O, C (т.е. относительно осей, проходящих через данные точки и ортогональных плоскости движения).

В типовом расчёте Д-4 механическая система состоит из 5 тел, в число которых входят, в частности, маховик 1, шатун 2 и ползун 3, соединённый с шатуном точечным шарниром B . Эта система имеет одну степень свободы. Следовательно, в качестве независимой координаты можно было бы взять угол φ_1 поворота маховика (а в качестве независимых скорости и ускорения – соответственно $\omega_{1z} \equiv \dot{\varphi}_1$ и $\varepsilon_{1z} \equiv \ddot{\varphi}_1$). Однако при выражении угла φ_2 поворота шатуна через φ_1 возникают трудности; поэтому φ_2 рассматривается как избыточная координата.

В результате уравнения движения машины, приведённые к виду (1), имеют вид

$$\dot{\varphi}_1 = \omega_{1z}, \quad \dot{\varphi}_2 = \omega_{2z}, \quad \dot{\omega}_{1z} = \varepsilon_{1z}, \quad (23)$$

где φ_1 , φ_2 , ω_{1z} играют роль переменных состояния, а величины ω_{2z} и ε_{1z} являются известными функциями от переменных состояния (расчётные формулы для которых требуется получить в ходе составления уравнений движения). Поскольку постановка задачи включает также нахождение усилия S в шатуне как функции t , нужно вывести и расчётную формулу для S .

Постановка задания ТР, кинематические схемы машин, перечень действующих на систему силовых факторов и численные значения параметров приведены в [4]. Напомним, что варианты задания делятся на два типа.

К *первому типу* относятся машины, снабжённые приводом от одноцилиндрового двухтактного двигателя внутреннего сгорания с движущей силой \overline{F}_d , приложенной к ползуну. Модуль этой силы равен нулю при холостом ходе ползуна и константе F_0 при рабочем ходе. В некоторых вариантах к одному из тел приложена сила нагрузки \overline{F}_H или момент нагрузки \overline{M}_H , модули которых постоянны.

Ко *второму типу* относятся машины, имеющие привод от электродвигателя с постоянным вращающим моментом \overline{M}_d . В этом случае считается, что к ползуну приложена сила нагрузки \overline{F}_H , у которой модуль равен заданной константе при рабочем ходе ползуна и нулю при холостом ходе).

В вариантах обоих типов следует так задать силовые факторы, приводящие машину в движение, чтобы движение было периодическим с периодом τ (в вариантах 1-го типа для этого нужно вычислить соответствующее значение константы F_0 , в вариантах 2-го типа – модуль момента \overline{M}_d). Вычисление основывается [4] на приближённой энергетической оценке работ активных сил за время цикла (используется теорема об изменении кинетической энергии).

Выполняя шаги 3°–4° приведённого выше алгоритма и составляя расчётные формулы для программы **dlm**, нужно иметь в виду, что формула, выражающая ε_{1z} через ω_{1z} , ω_{2z} , φ_1 , φ_2 , а также формула для S оказываются весьма громоздкими. Для того, чтобы все формулы могли поместиться в строке ввода, предусмотрено следующее.

Пусть $u \equiv u(\varphi_1, \varphi_2)$ – проекция передаточной функции скорости точки B на ось ползуна (т.е. $V_{Bx} = u \omega_{1z}$ или $V_{By} = u \omega_{1z}$ – в зависимости от того, как движется ползун в данном варианте; для определённости далее считаем, что он движется по вертикали). Тогда $\dot{V}_{By} = u \varepsilon_{1z} + u_1 \omega_{1z}$, где u_1 – некоторая новая функция от φ_1 , φ_2 , ω_{1z} , ω_{2z} . Если предварительно найти выражения для u и u_1 и включить полученные формулы в число расчётных, можно существенно упростить выражения для ε_{1z} и S (как это и рекомендуется в [4]).

Как отмечалось выше, во всех вариантах среди сил, действующих на тела системы, имеется сила, модуль которой (обозначим его через F) в зависимости от направления движения ползуна равен то нулю, то отличной от нуля константе (будем во всех случаях обозначать её F_0); речь идёт о силе

\bar{F}_d для вариантов 1-го типа и о силе \bar{F}_H для вариантов 2-го типа. Иными словами, F зависит от знака скорости V_{By} . Учитывая, что во всё время движения $\omega_{1z} > 0$, выражение для F можно представить в виде

$$F = (u > 0 ? 0 : F_0) \quad (24)$$

(здесь в правой части стоит условное выражение; нотация взята из языка программирования Си).

Наконец, для дальнейшего упрощения выражения для ε_{1z} можно выделить в нём какое-либо подвыражение и обозначить буквой A (например, за A можно принять слагаемое, пропорциональное первой степени u).

Теперь всё готово для работы с программой. В меню для ввода параметров задания присутствуют две группы параметров: в первую входят τ , $\varphi_1(0)$, $\varphi_2(0)$ и $\omega_{1z}(0)$, а во вторую – \mathbf{I}_1 , \mathbf{m}_3 , \mathbf{m}_4 , \mathbf{m}_5 , \mathbf{R}_1 , \mathbf{R}_4 , \mathbf{r}_4 , \mathbf{p}_4 , \mathbf{R}_5 , \mathbf{r} , λ , α , \mathbf{M} , \mathbf{F}_L , \mathbf{M}_L , μ , \mathbf{F}_0 . Обозначения, как правило, совпадают с используемыми в [4], но есть и отличия (в основном они вызваны стремлением сделать расчётные формулы однотипными для всех вариантов и избежать необходимости вводить с клавиатуры буквы русского алфавита). Именно, в вариантах 1-го типа через F_L и M_L обозначены соответственно модуль силы нагрузки \bar{F}_H и модуль момента нагрузки \bar{M}_H ; в вариантах 2-го типа M обозначает модуль вращающего момента \bar{M}_d , а F_0 – значение \bar{F}_H при рабочем ходе ползуна. Во всех вариантах через λ обозначено отношение r/l .

Параметры первой группы должны быть заданы обязательно (значение для $\varphi_1(0)$ берётся из приведённой в [4] таблицы, а $\omega_{1z}(0)$ полагается равным $2\pi/\tau$); значения параметров второй группы нужно вводить в том случае, если они фигурируют в расчётных формулах.

Расчётные формулы вводят в следующем порядке. Сначала следуют формула для u и формула для \mathbf{F} , т.е. формула (24) (она уже определена в самой программе, а попытки её изменить блокируются¹). После этого нужно последовательно ввести формулы для ω_{2z} , u_1 , \mathbf{A} , ε_{1z} и \mathbf{S} (если в формулах для ε_{1z} и \mathbf{S} переменная A не встречается, в качестве значения для \mathbf{A} можно ввести ноль).

В правых частях расчётных формул можно использовать параметры второй группы, константу \mathbf{g} (модуль ускорения свободного падения), переменные состояния φ_1 , φ_2 , ω_{1z} и величины, определённые предыдущими формулами.

По завершении интегрирования уравнений движения программа \mathbf{dm} позволяет вывести на экран графики зависимостей величин φ_1 , ω_{1z} , ε_{1z} и \mathbf{S} от t , а также таблицу значений величин φ_1 , φ_2 , ω_{1z} , ω_{2z} , ε_{1z} , \mathbf{S} в отдельные моменты времени.

¹ Заметим, что правила, по которым при работе с рассматриваемыми здесь обучающими программами набираются математические формулы, не дают студенту возможности самостоятельно ввести условное выражение.

1.6. Типовой расчёт по динамике манипулятора

Программа **rodina** предназначена для выполнения типового расчёта по динамике трёхзвенного манипулятора. Цель расчёта – отработка навыков составления уравнений движения механических систем с помощью *метода кинетостатики* и приобретение опыта решения обратных задач динамики простейших робототехнических систем.

Заметим, что постановка задания данного ТР и пример выполнения задания приводятся в [3]. В отличие от расчёта Д-3 из пособия [4], также посвящённого решению обратной задачи динамики для трёхзвенного манипулятора, данный типовой расчёт сохраняет преемственность с ТР по кинематике управления манипулятором. Упомянутый расчёт в настоящее время выполняют студенты всех специальностей МЭИ, изучающие курс “Теоретическая механика”; для этого они пользуются обучающей программой **robby2**, работа с которой описана в [14].

Метод кинетостатики, основанный на принципе Даламбера [7] и позволяющий формально свести задачу динамики к задаче статики, часто применяется в инженерных расчётах при составлении уравнений движения механических систем.

При решении задач динамики методом кинетостатики на этапе составления уравнений движения можно придерживаться следующей последовательности действий:

- 1°. Добавить к активным силам, действующим на тела механической системы, силы инерции и расчленить систему на отдельные тела, вводя реакции связей.
- 2°. Записать уравнения равновесия полученных систем сил.
- 3°. С учётом имеющихся связей выразить фигурирующие в этих уравнениях координаты, скорости и ускорения через независимые.
- 4°. Разрешить полученную систему уравнений относительно неизвестных ускорений, сил и моментов.

Для материальной точки M с массой m сила инерции определяется [7] равенством

$$\bar{\Phi} = -m \bar{w}_M, \quad (25)$$

а уравнения кинетостатики имеют вид

$$\sum_k \bar{F}_k + \sum_l \bar{R}_l + \bar{\Phi} = 0, \quad (26)$$

где \bar{F}_k – действующие на точку активные силы, \bar{R}_l – реакции связей.

Для абсолютно твёрдого тела с центром масс C силы инерции можно (по известной из статики теореме Пуансо) заменить совокупностью сил, приложенной в точке C и равной главному вектору сил инерции, и пары сил, момент которой равен главному моменту сил инерции. При этом в случае плоского движения имеем следующие выражения для проекций главного вектора и главного момента сил инерции:

$$\Phi_{jx} = -m w_{Cx}, \quad \Phi_{jy} = -m w_{Cy}, \quad L_{Cz}^{\text{ин}} = -J_C \varepsilon_{jz}, \quad (27)$$

где j – номер тела, а m и J_C – его масса и момент инерции относительно точки C .

В рассматриваемом случае для тела j можно составить три уравнения кинетостатики (в конкретной задаче могут понадобиться не все из них):

$$\sum_k F_{kx} + \sum_l R_{lx} + \Phi_{jx} = 0, \quad \sum_k F_{ky} + \sum_l R_{ly} + \Phi_{jy} = 0, \quad (28)$$

$$\sum_k M_{Bz}(\bar{\mathbf{F}}_k) + \sum_l M_{Bz}(\bar{\mathbf{R}}_l) + M_{Bz}(\bar{\Phi}_j) = 0;$$

здесь $\bar{\mathbf{F}}_k$ – действующие на точку активные силы, $\bar{\mathbf{R}}_l$ – реакции связей; B – произвольно выбранный полюс.

Перейдём теперь к изложению постановки задачи ТР. Сначала приведём ряд сведений и терминов, используемых далее.

Манипуляционный робот – это техническое устройство с автоматическим управлением по изменяемой программе, предназначенное для воспроизведения рабочих функций рук человека [9]. Исполнительным устройством манипуляционного робота служит *манипулятор* – многозвенный механизм с несколькими степенями свободы. Манипуляторы оснащаются хватными устройствами, предназначенными для захватывания и удержания *объекта манипулирования* – обрабатываемого изделия или обрабатывающего инструмента. Хватное устройство, в котором захватывание и удержание производятся относительным перемещением его частей, называется *схватом*.

Для реализации программного движения манипулятора используются *приводные устройства*. На практике применяются различные типы приводов: электрические, гидравлические, пневматические. В состав приводов входят исполнительные двигатели, усилители мощности, редукторы, а также различные датчики. Двигатели могут крепиться как на основании, так и на подвижных звеньях.

Управляющие сигналы, подаваемые на приводы, формируются *системой управления* робота. Управляющим устройством может быть компьютер универсального назначения или специализированный вычислитель.

Манипулятор, исследуемый в рамках данного расчёта, является плоским механизмом и обеспечивает произвольное перемещение схвата M в некоторой области вертикальной плоскости Oxy . Механизм состоит из трёх подвижных звеньев, соединённых между собой и с основанием вращательными шарнирами (точки O, A, B). На движение одной из точек манипулятора – точки C – наложена связь, в результате чего эта точка может двигаться только вдоль некоторой прямой линии. Указанная прямая параллельна оси Ox (в некоторых вариантах – оси Oy ; далее – для определённости – изложение ведётся применительно к случаю, когда точка C движется по горизонтали).

Варианты кинематических схем манипулятора и основная часть исходных данных приведены в [4] (расчёт К-3).

Рассматривается технологическая операция совмещения схвата с деталью D , которая располагается на ленте транспортера, движущейся с постоянной скоростью \bar{v}_D . Предполагается, что при $t = 0$ заданы значения углов поворота звеньев $\varphi_1(0), \varphi_2(0), \varphi_3(0)$ и координаты детали $x_D(0), y_D(0)$. Требуется так задать программное движение схвата, чтобы к моменту времени $t = \tau$ обеспечивалась малость рассогласований координат точек M и D : $\Delta \bar{\mathbf{r}}(\tau) = \delta \Delta \bar{\mathbf{r}}(0)$, где $\Delta \bar{\mathbf{r}} = \bar{\mathbf{r}}_M - \bar{\mathbf{r}}_D$, а число δ (*относительная точность совмещения* точек M и D) мало. Кроме того, во избежание удара при захватывании детали необходимо потребовать, чтобы и первые производные по времени от рассогласований при $t = \tau$ были малы.

С учётом сформулированных требований программное движение схвата можно [4] задать так. Предполагая, что управление манипулятором обеспечивает в каждый момент времени выполнение соотношений

$$\begin{aligned} U_x &\equiv (x_M - x_D) + T^* (V_{Mx} - V_{Dx}) = 0, \\ U_y &\equiv (y_M - y_D) + T^* (V_{My} - V_{Dy}) = 0. \end{aligned} \quad (29)$$

где T^* – параметр управления, и вводя обозначения $\Delta x = x_M - x_D$, $\Delta y = y_M - y_D$, получаем с учётом (29) пару дифференциальных уравнений

$$T^* \frac{d}{dt} \Delta x + \Delta x = 0, \quad T^* \frac{d}{dt} \Delta y + \Delta y = 0.$$

Решая эти уравнения, находим

$$\Delta x = \Delta x(0) e^{-t/T^*}, \quad \Delta y = \Delta y(0) e^{-t/T^*}. \quad (30)$$

Из (30) видно, что с ростом t рассогласования координат точек M и D (равно как и первые производные от рассогласований) быстро уменьшаются. Условие $\Delta x(\tau) = \delta \Delta x(0)$, $\Delta y(\tau) = \delta \Delta y(0)$, даёт при этом, что $T^* = -\tau / \ln \delta$.

Для задаваемого таким образом программного движения схвата требуется определять, как будет двигаться весь манипулятор (поскольку он имеет две степени свободы, то указанная кинематическая задача решается однозначно, за исключением случаев кинематического вырождения; см. краткое обсуждение такой ситуации в [3]). Далее, для заданного движения манипулятора требуется найти управляющие воздействия, которые способны обеспечить это движение, т.е. решить *обратную задачу движения*.

Относительно управляющих воздействий предполагается, что они приведены к силе $\overline{\mathbf{F}}$, которая приложена к точке C и направлена вдоль её траектории, и моменту $\overline{\mathbf{M}}$, действующему вдоль оси одного из шарниров, а именно: шарнира A (в вариантах 4, 15, 17, 28), шарнира B (в вариантах 3, 7, 14, 29) или шарнира O (в остальных вариантах). При этом: 1) момент, действующий вдоль оси шарнира O , приложен к звену 1; 2) момент, действующий вдоль оси подвижного шарнира, считается приложенным к звену 2, причём в этом случае на звено 1, как это следует из 3-го закона Ньютона, действует момент $\overline{\mathbf{M}}' = -\overline{\mathbf{M}}$.

Инерционные свойства манипулятора моделируются приведённым моментом инерции J_O звена 1 относительно оси его вращения (центр масс данного звена расположен на этой же оси) и сосредоточенными массами m_1 и m_2 , помещёнными в точках M и C соответственно. Массой остальных элементов конструкции можно пренебречь.

Заметим, что при указанном задании инерционных свойств манипулятора и действующих на него активных сил во всех вариантах расчёта ровно одно из звеньев будет находиться под действием двух сил, представляя собой *ненагруженный стержень*.

Числовые значения параметров m_1 , m_2 , J_O предлагается взять в соответствии с формулами

$$m_1 = 1 (1 + 0,1N) \text{ кг}, \quad m_2 = 2 (1 + 0,1N) \text{ кг}, \quad (31)$$

$$J_O = 1,8 (1 + 0,1N) \text{ кг} \cdot \text{м}^2;$$

как и в [4], здесь и далее n – номер факультета, N – номер студенческой группы.

Требуется:

- 1°. Составить уравнения кинестатики для управляющих воздействий F , M и усилия S в ненагруженном стержне.
- 2°. Составить кинематические уравнения для угловых скоростей и ускорений звеньев манипулятора, а также для линейных скорости и ускорения точки C .
- 3°. Решить полученные уравнения на интервале времени $[0, \tau]$.
- 4°. Построить траектории точек M и D , графики линейных ускорений $w_M(t)$, $w_C(t)$, углового ускорения $\varepsilon_{1z}(t)$, управляющих воздействий $F(t)$, $M(t)$ и усилия $S(t)$.
- 5°. Определить мощности, развиваемые управляющими двигателями, и построить соответствующие графики $N_F(t)$, $N_M(t)$.

При составлении уравнений кинестатики будем следовать алгоритму, сформулированному в начале данного пункта. В качестве независимых координат, скоростей и ускорений рассматриваются проекции радиус-вектора, скорости и ускорения точки M на оси x и y системы $Oxyz$.

В силу (29) имеем

$$V_{Mx} = V_{Dx} + \frac{1}{T^*} (x_D - x_M), \quad V_{My} = V_{Dy} + \frac{1}{T^*} (y_D - y_M); \quad (32)$$

поскольку деталь движется равномерно и прямолинейно, то

$$x_D = x_D(0) + V_{Dx} t, \quad y_D = y_D(0) + V_{Dy} t. \quad (33)$$

Дифференцируя почленно уравнения (32) и замечая, что (в силу постоянства \bar{v}_D) $w_{Dx} = w_{Dy} = 0$, находим проекции ускорения \bar{w}_M :

$$w_{Mx} \equiv \dot{V}_{Mx} = (V_{Dx} - V_{Mx}) / T^* = (x_M - x_D) / T^{*2}, \quad (34)$$

$$w_{My} \equiv \dot{V}_{My} = (V_{Dy} - V_{My}) / T^* = (y_M - y_D) / T^{*2}.$$

Координаты x_M , y_M найдём, интегрируя уравнения

$$\dot{x}_M = V_{Mx}, \quad \dot{y}_M = V_{My}. \quad (35)$$

Методика, позволяющая вычислить ω_{1z} , ω_{2z} , ω_{3z} и V_{Cx} по известным значениям V_{Mx} и V_{My} , изложена в [4]. Расчётные формулы для линейных и угловых ускорений можно получить, дифференцируя соотношения для скоростей.

Составление уравнений для линейных и угловых скоростей составляло основное содержание расчёта К-3; если материалы по этому расчёту сохранились, то

их можно использовать непосредственно. Рекомендации по выводу уравнений для ускорений приведены в [3].

Трудности, связанные с вычислением углов φ_j по текущим значениям x_M и y_M , можно обойти [4], если находить эти углы, используя дифференциальные уравнения

$$\dot{\varphi}_1 = \omega_{1z}, \quad \dot{\varphi}_2 = \omega_{2z}, \quad \dot{\varphi}_3 = \omega_{3z}. \quad (36)$$

Таким образом, как и в типовом расчёте Д-4 (см. п.5 настоящего раздела), уравнения движения предлагается составлять в избыточном наборе переменных; роль избыточных координат играют углы поворота звеньев.

Итак, дифференциальные уравнения, описывающие движение манипулятора, имеют вид (35) – (36). Переменные $x_M, y_M, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ являются переменными состояния, а $V_{Mx}, V_{My}, \omega_{1z}, \omega_{2z}, \omega_{3z}$ – известными функциями от переменных состояния. В процессе моделирования требуется, как отмечалось выше, вычислять также $x_D, y_D, V_{Cx}, W_{Mx}, W_{My}, W_{Cx}, \varepsilon_{1z}, F, M, S, N_F, N_M$.

Расчётные формулы для $x_D, y_D, V_{Mx}, V_{My}, W_{Mx}, W_{My}$ – т.е. формулы (32) – (34) – имеют один и тот же вид для всех вариантов ТР. При работе с обучающей программой вводить эти формулы не надо.

Аналогично обстоит дело и для переменных N_F, N_M , вычисляемых программой **rodina** по следующим формулам:

$$N_F \equiv (\bar{\mathbf{F}}, \bar{\mathbf{v}}_C) = F V_{Cx}, \text{ если точка } C \text{ движется по горизонтали;}$$

$$N_F \equiv (\bar{\mathbf{F}}, \bar{\mathbf{v}}_C) = F V_{Cy}, \text{ если точка } C \text{ движется по вертикали;}$$

$$N_M \equiv (\bar{\mathbf{M}}, \bar{\omega}_1) = M \omega_{1z}, \text{ если момент } \bar{\mathbf{M}} \text{ действует вдоль оси шарнира } O;$$

$$N_M \equiv (\bar{\mathbf{M}}, \bar{\omega}_2) + (\bar{\mathbf{M}}', \bar{\omega}_1) = M \omega_{2z} - M \omega_{1z}, \text{ если момент } \bar{\mathbf{M}} \text{ действует вдоль оси шарнира } A \text{ или } B.$$

Таким образом, в рамках данного ТР студент должен составить расчётные формулы для следующих переменных: $\omega_{1z}, \omega_{2z}, \omega_{3z}, V_{Cx}, W_{Cx}, \varepsilon_{1z}, F, M, S$. (Кроме этого, нужно модифицировать численные значения исходных данных для конкретных номеров факультета и студенческой группы и считать значения $x_M(0), y_M(0), V_{Dx}, V_{Dy}$.)

При получении расчётных формул для программы **rodina** нужно иметь в виду следующее. Эти формулы естественным образом распадаются на три группы (для ввода формул каждой группы имеется своё меню): 1) группа формул для $\omega_{1z}, \omega_{2z}, \omega_{3z}, V_{Cx}$; 2) группа формул для W_{Cx}, ε_{1z} ; 3) группа формул для F, M, S .

Формулы, входящие во 2-ю и 3-ю группы, могут оказаться слишком громоздкими и не поместиться в строке ввода. Учитывая это обстоятельство, программа позволяет преобразовать выражения для W_{Cx} и ε_{1z} , выделив в них какие-либо подвыражения (не более пяти) и обозначив эти подвыражения буквами A, B, C, D, E (вводя таким образом вспомогательные переменные). Аналогично можно при необходимости преобразовать и формулы 3-й группы, воспользовавшись вспомогательными переменными P и Q .

(Если какая-нибудь вспомогательная переменная не потребовалась, положим её равной нулю).

Порядок формул внутри каждой группы заранее не фиксирован и определяется лишь тем, что в очередной формуле не могут фигурировать переменные, определяемые последующими формулами.

После того, как все расчётные формулы и численные значения параметров получены, всё готово для работы с программой **rodina**. В меню для ввода параметров задания, предлагаемом этой программой, присутствуют две группы параметров: в первую входят $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3, \mathbf{J}_0, \mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2$, а во вторую – $\delta, \tau, \varphi_1(0), \varphi_2(0), \varphi_3(0), \mathbf{x}_M(0), \mathbf{y}_M(0), \mathbf{x}_D(0), \mathbf{y}_D(0), \mathbf{v}_{Dx}(0), \mathbf{v}_{Dy}(0)$ (параметры первой группы доступны в расчётных формулах, остальные используются лишь для нахождения начальных условий и вычисления константы T^*). Значения всех параметров должны быть заданы.

Отметим, что численные значения для $\mathbf{x}_M(0), \mathbf{y}_M(0), \mathbf{v}_{Dx}(0)$ и $\mathbf{v}_{Dy}(0)$ можно вычислить, используя подсистему КАЛЬКУЛЯТОР, непосредственно в ходе работы с обучающей программой (требуется лишь иметь под рукой соответствующие формулы для этих величин).

Следующее меню, появляющееся на экране, предназначается для ввода 1-й группы расчётных формул (формулы для $\omega_{1z}, \omega_{2z}, \omega_{3z}, \mathbf{v}_{Cx}$). В их правых частях можно использовать параметры первой группы, переменные состояния $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$, вычисляемые обучающей программой в соответствии с (32) переменные \mathbf{v}_{Mx} и \mathbf{v}_{My} , а также переменные, уже определённые предыдущими формулами.

При работе с меню для ввода 2-й группы расчётных формул (формулы для $\varepsilon_{1z}, \mathbf{w}_{Cx}, \mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}, \mathbf{E}$) можно использовать в правах частях набираемых формул (помимо доступных ранее) также переменные $\omega_{1z}, \omega_{2z}, \omega_{3z}, \mathbf{v}_{Cx}, \mathbf{v}_{Mx}$ и \mathbf{v}_{My} .

В правых частях расчётных формул 3-й группы могут, наряду с доступными ранее, использоваться переменные ε_{1z} и \mathbf{w}_{Cx} , а также константа \mathbf{g} (модуль ускорения свободного падения).

По завершении интегрирования уравнений движения манипулятора программа **rodina** выводит на экран изображение манипулятора и детали в нулевой момент времени. После нажатия какой-либо клавиши программа демонстрирует, как движутся робот и деталь. При этом в любой момент времени стрелками показывается, как направлены сила $\bar{\mathbf{F}}$ и момент $\bar{\mathbf{M}}$.

После завершения визуализации движения программа **rodina** позволяет вывести на экран графики зависимостей величин $\omega_{1z}, \omega_{2z}, \omega_{3z}, V_{Cx}, w_{Mx}, w_{My}, w_{Cx}, \varepsilon_{1z}, S, F, M, N_F, N_M$ от t , а также таблицу значений переменных состояния и вспомогательных переменных в отдельные моменты времени. (Таблица разбита на две части; в ответ на запрос о выдаче численных результатов на экране появляются значения переменных $x_M, y_M, V_{Mx}, V_{My}, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \omega_{1z}, \omega_{2z}, \omega_{3z}, V_{Cx}$, а затем – после нажатия клавиши **Enter** – значения величин $w_{Mx}, w_{My}, w_M, w_{Cx}, \varepsilon_{1z}, S, F, M, N_F, N_M$.)

1.7. Индивидуальное домашнее задание по динамике

Индивидуальное домашнее задание по динамике плоского движения имеет своей целью приобретение опыта динамического анализа механических систем и отработку навыков составления уравнений движения таких систем в форме уравнений Лагранжа 2-го рода. ИДЗ состоит из одной или нескольких задач, условия которых студент получает у своего преподавателя.

Преподаватель, выдавая студентам ИДЗ по динамике, объясняет им, какой вариант задания выполняет каждый студент, и передаёт в учебную группу распечатку с принтера персонального компьютера, содержащую таблицу примерно такого вида:

Кафедра теоретической механики и мехатроники
Индивидуальные домашние задания
по динамике плоского движения системы тел
для факультета

Группа

Условие задачи:

Исходные данные к задаче приведены в таблице (углы заданы в градусах). Барабан лебёдки (в вариантах, где $A = 1, \dots, 6$) и катящиеся цилиндры (в вариантах, где $A = 1, 12$, $B = 2, 3, 7, 9, 11, 12, 13, 17$), считать однородными круглыми цилиндрами с радиусом R ; радиусы инерции катушек принять равными $0.7 \cdot R$. Первый столбец значений для R относится к группе тел "А", второй – к группе тел "В".

В соответствии со значениями A и B составить из групп тел "А" и "В" и изобразить на бумаге единую механическую систему. Составить её уравнения движения и определить из них угловое ускорение тела 1.

Исходные данные

<i>Вар.</i>	<i>A</i>	<i>B</i>	φ	ω_1	α	m_1	m_2	m_3	m_4	m_5	m_6	F	G	M	R	R
				1/c		кг	кг	кг	кг	кг	кг	Н	Н	Н·м	м	м
1	8	5	18	2	33	34	32	35	24	33	52			7	0.22	0.32
2	5	2	38	3	53	44			64	73				5	0.34	
3	7	9	48	6	23	24	32	25	34	33	22	8			0.54	0.23
4	11	10	32	4	33	5	6	8	9	4		5			1.23	0.44
5	13	12	55	19	54	4	4	5	1	6	7		9	33	1.18	0.61

.....

Каждая из задач, входящих в ИДЗ по динамике, ставится следующим образом.

Требуется:

- 1°. Изобразить на чертеже анализируемый механизм.
- 2°. Составить дифференциальные уравнения движения механизма в форме уравнений Лагранжа 2-го рода, приняв за обобщённую координату угол φ поворота звена I .
- 3°. По известным численным значениям угла поворота φ и угловой скорости ω_{1z} звена I в текущий момент времени найти значение углового ускорения ε_{1z} этого звена.

Переписав из таблицы строчку данных для своего варианта, Вам прежде всего следует обратиться к рис. 3 – 10 настоящего пособия. Дело в том, что механизм, работать с которым Вам предстоит, составляется из двух групп тел, условно названных “группа тел **A**” и “группа тел **B**”. Различные кинематические схемы для группы тел **A**, приведённые на рис. 3 – 6, пронумерованы от 1 до 24; схемы для группы тел **B** (рис. 7 – 10) также пронумерованы от 1 до 24. Пользуясь приведёнными в распечатке значениями для **A** и **B**, Вы должны найти кинематическую схему для каждой из двух групп тел, а затем совместить (не поворачивая!) обе схемы в общей для них точке B ; результат совмещения и окажется схемой Вашего механизма.

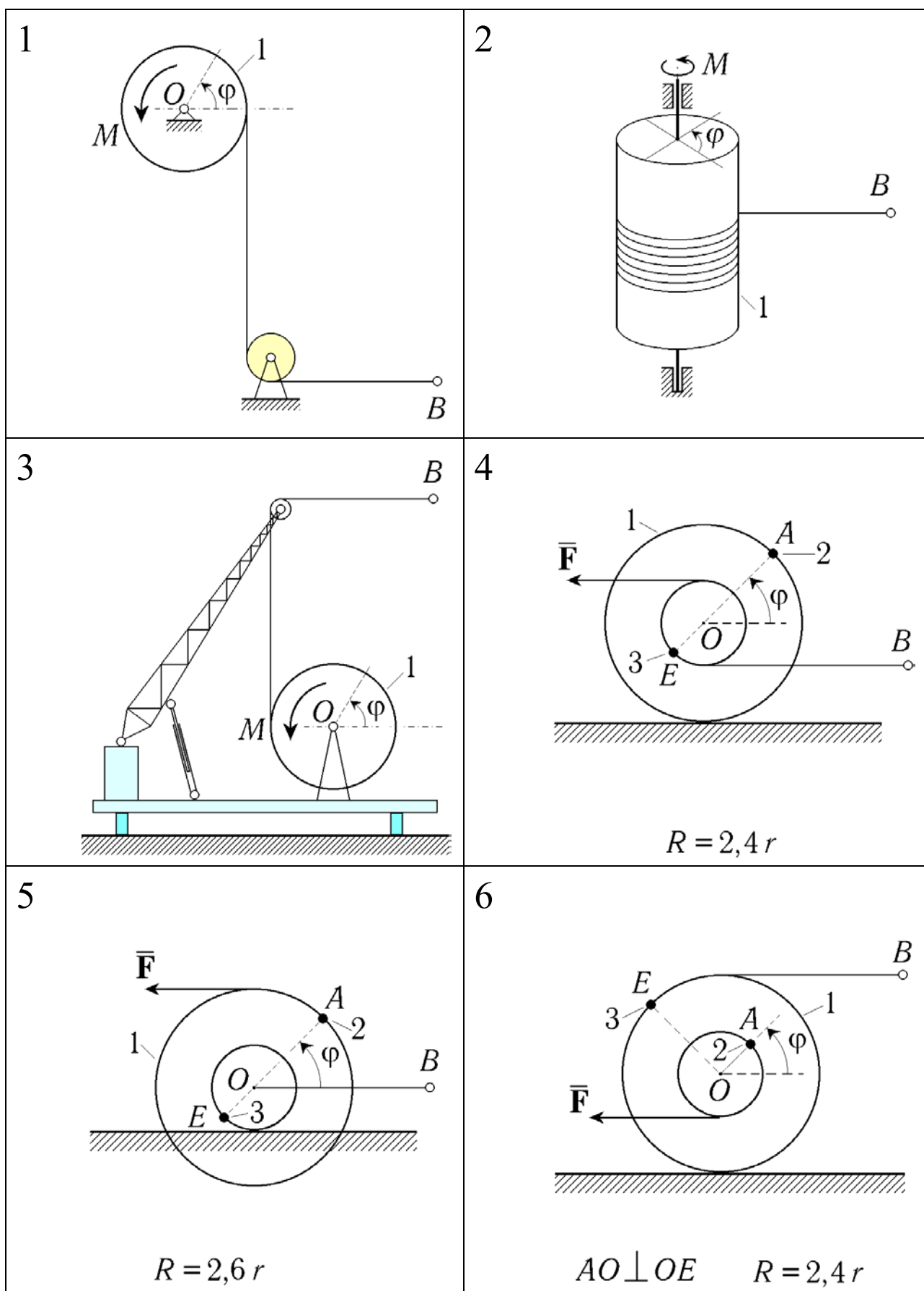
Теперь обратите внимание на приведённые в таблице значения параметров. Смысл их ясен из рисунка (если в условии варианта параметр вообще не фигурирует, то в таблице на соответствующем месте стоит пробел). Через ω_1 , как обычно, обозначается модуль угловой скорости тела I .

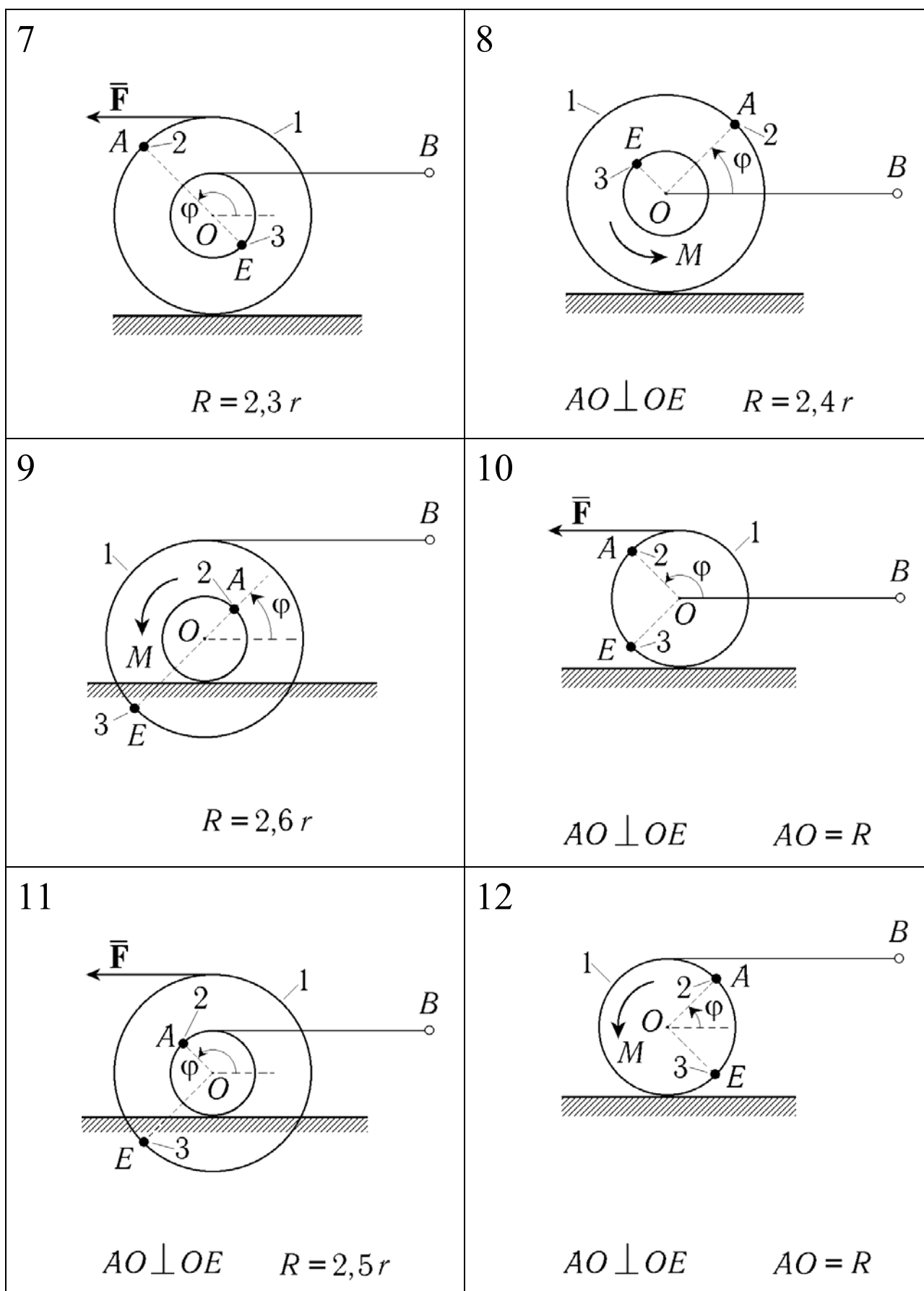
Подчеркнём, что угол φ и угловая скорость ω_{1z} изменяются в процессе движения. Численные значения для φ и ω_{1z} , приведённые в таблице, относятся к текущему моменту времени (для которого требуется вычислить ε_{1z}) и при составлении уравнений Лагранжа не используются. Предполагается, что в данный момент времени угол φ возрастает, так что $\omega_{1z} = \omega_1$.

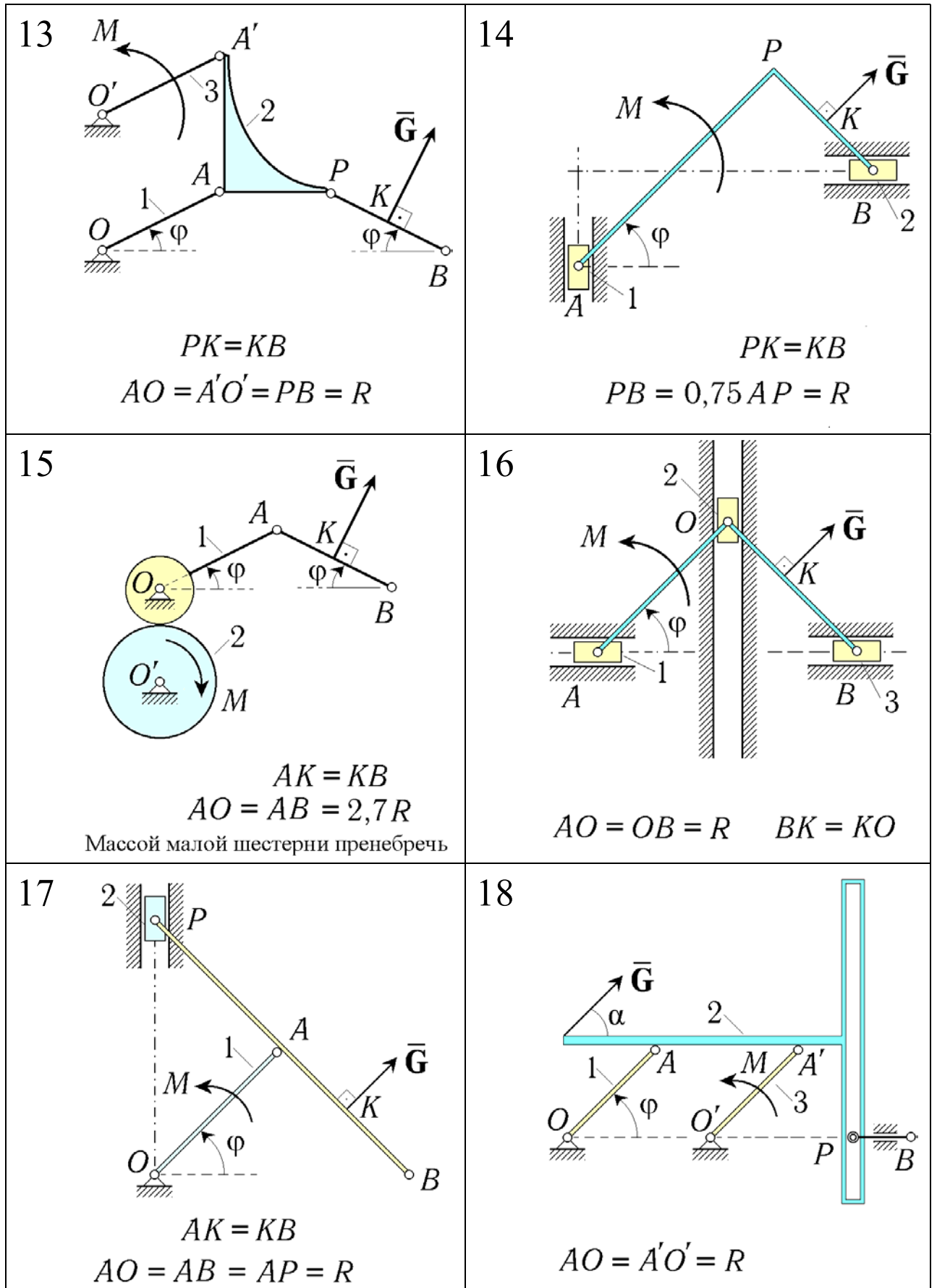
Скажем несколько слов по поводу того, откуда преподаватель получает распечатку с исходными данными для ИДЗ. Эта распечатка может быть получена с помощью программы **syndin**, существующей в виде двух модификаций.

Первая из этих модификаций (о второй речь пойдёт в конце раздела) обеспечивает синтез индивидуальных домашних заданий для студентов различных групп и факультетов; реализована она в виде автономной программы, с которой работают не сами студенты, а преподаватель, ведущий практические занятия в группе. Обращаясь к программе, он указывает номер группы и название факультета, после чего программа осуществляет синтез условий задачи для 30 вариантов ИДЗ и выводит на диск в виде текстового файла таблицу с числовыми данными. Затем при помощи стандартных программ печати этот текстовый файл можно распечатать на принтере в нужном количестве экземпляров.

Сам синтез индивидуальных заданий заключается в следующем. Программа **syndin** случайным образом выбирает для каждого варианта задания номера групп тел **A** и **B** и заносит их в таблицу числовых данных; после этого она (также при помощи генератора случайных чисел) заносит в ту же таблицу численные значения параметров задачи. Число различных кинематических схем для механизмов, которые могут при этом встретиться, равно $24 \times 24 = 576$; с учётом же различных численных значений параметров количество различных синтезированных задач практически не ограничено (т.е. индивидуальность домашнего задания гарантирована).

Рис. 3. Группа тел **A** (структурные схемы 1 – 6)

Рис. 4. Группа тел **A** (структурные схемы 7 – 12)

Рис. 5. Группа тел **A** (структурные схемы 13 – 18)

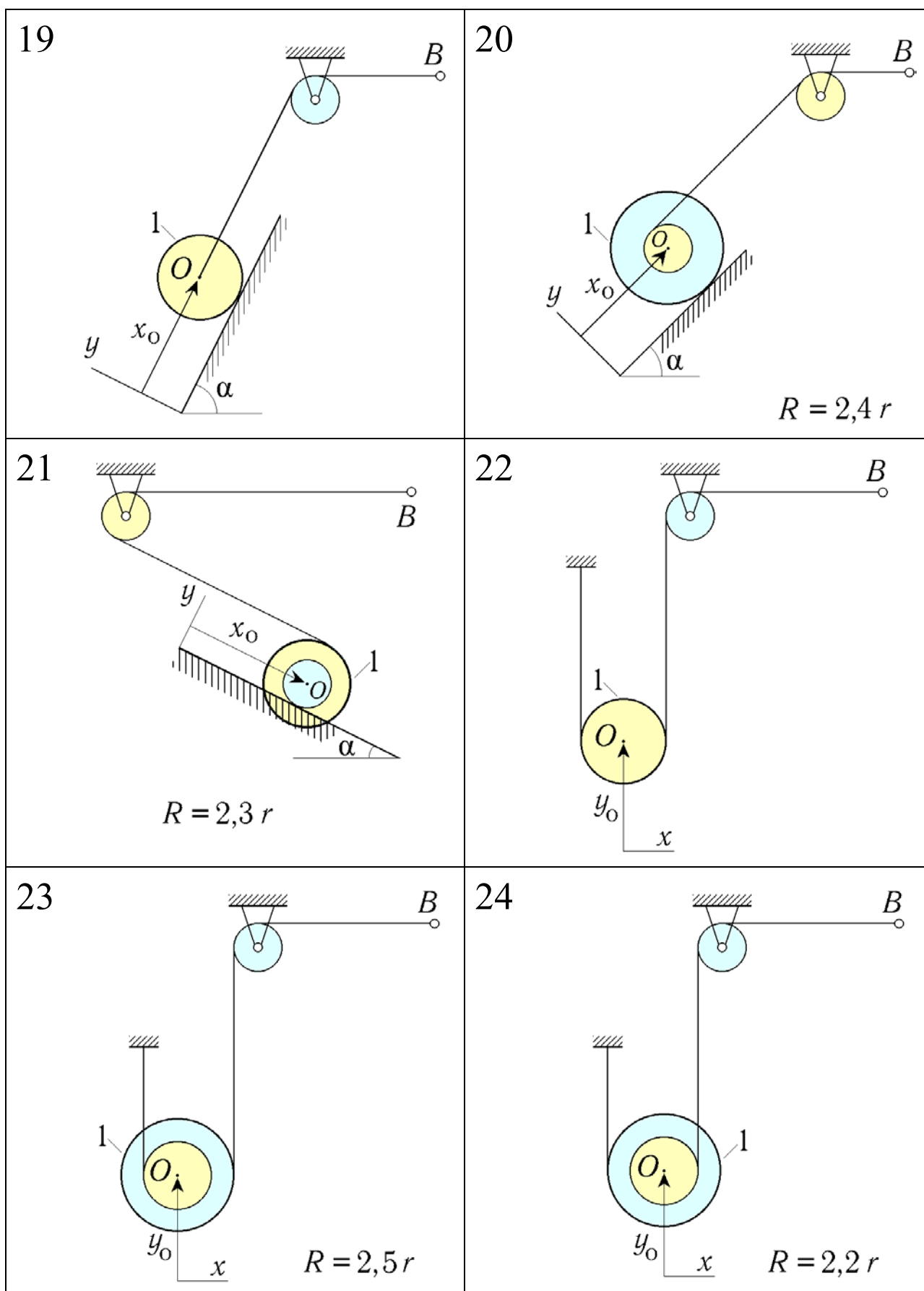
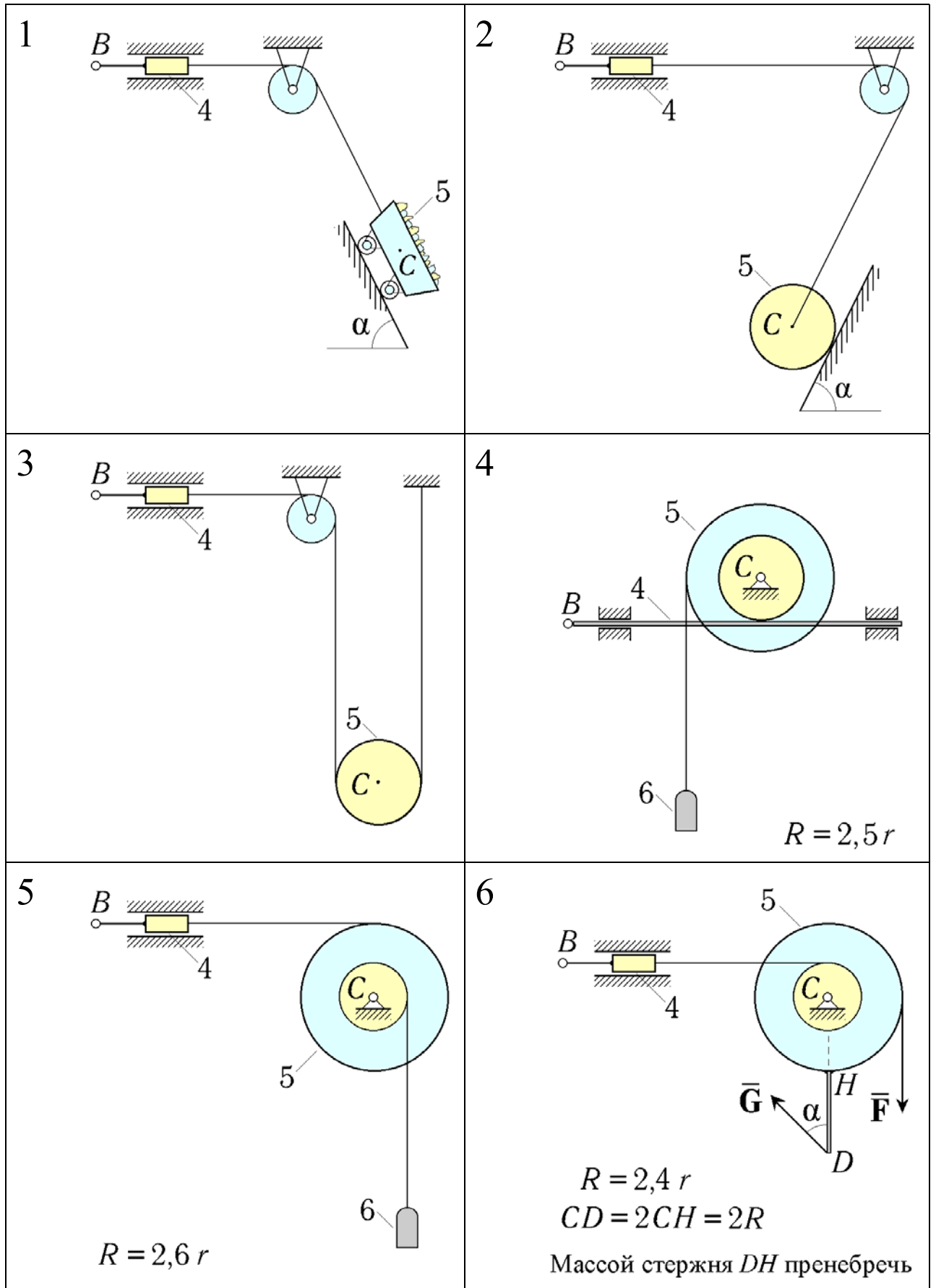
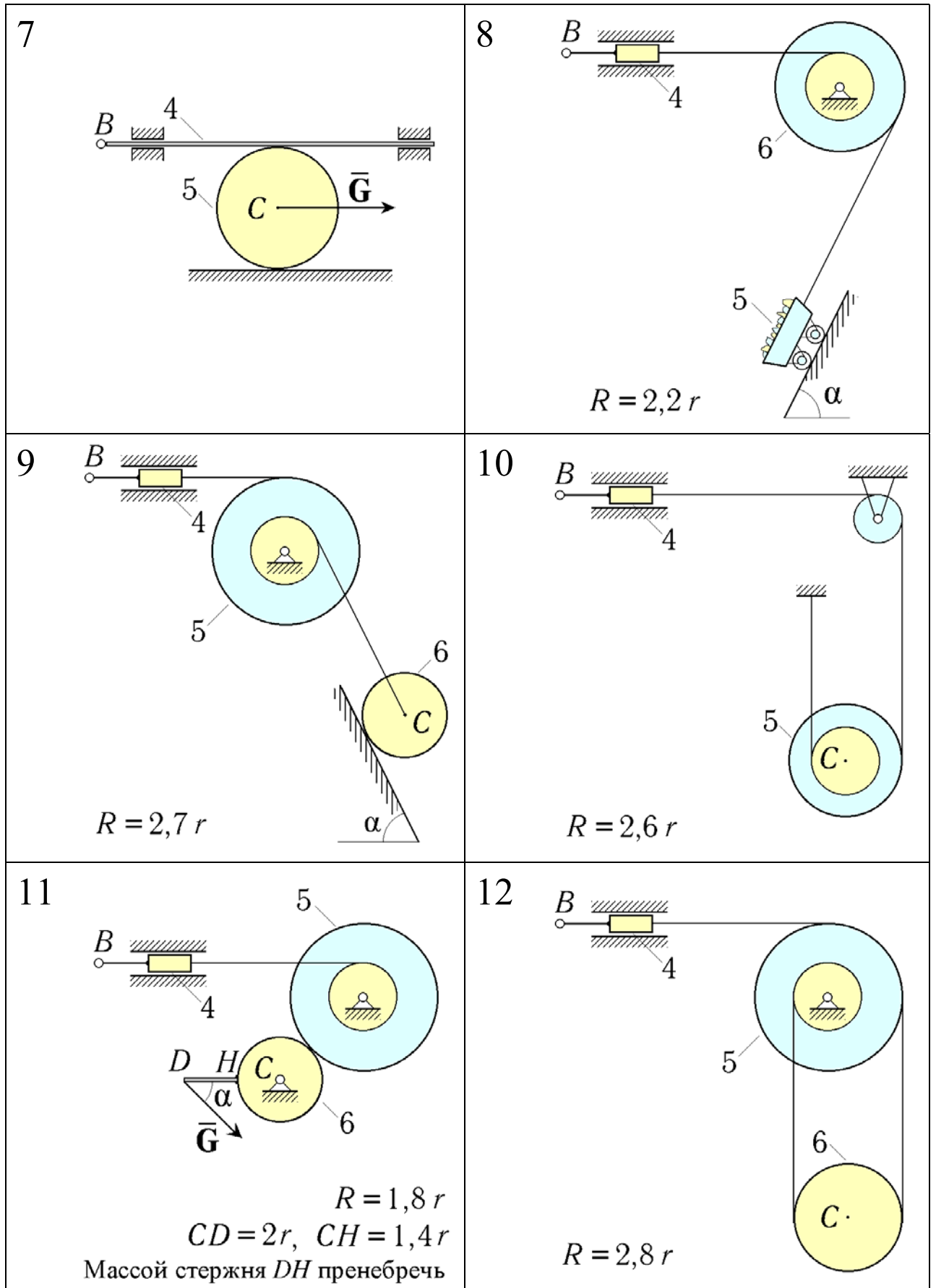


Рис. 6. Группа тел **A** (структурные схемы 19 – 24)

Рис. 7. Группа тел **В** (структурные схемы 1 – 6)

Рис. 8. Группа тел **B** (структурные схемы 7 – 12)

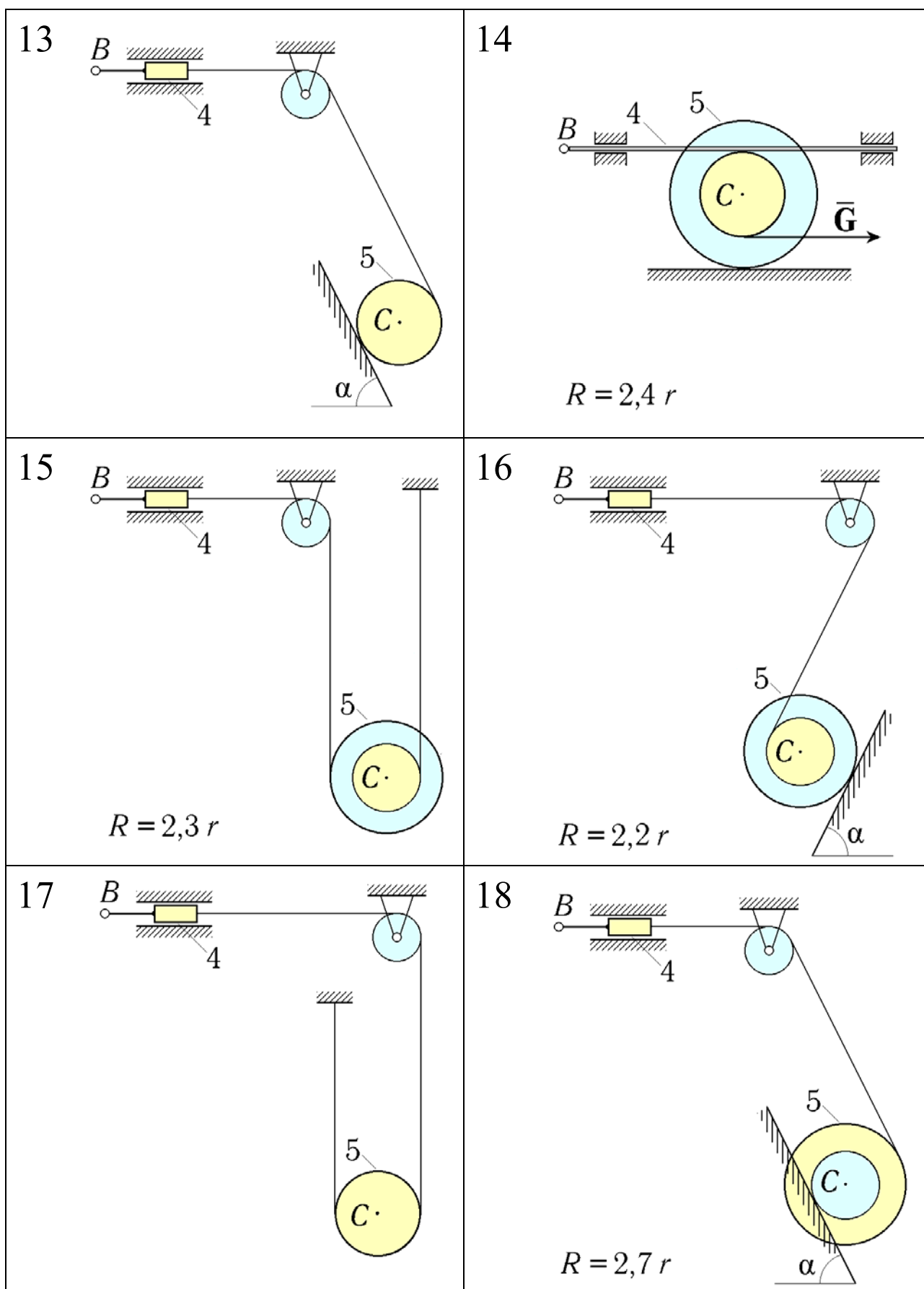


Рис. 9. Группа тел **В** (структурные схемы 13 – 18)

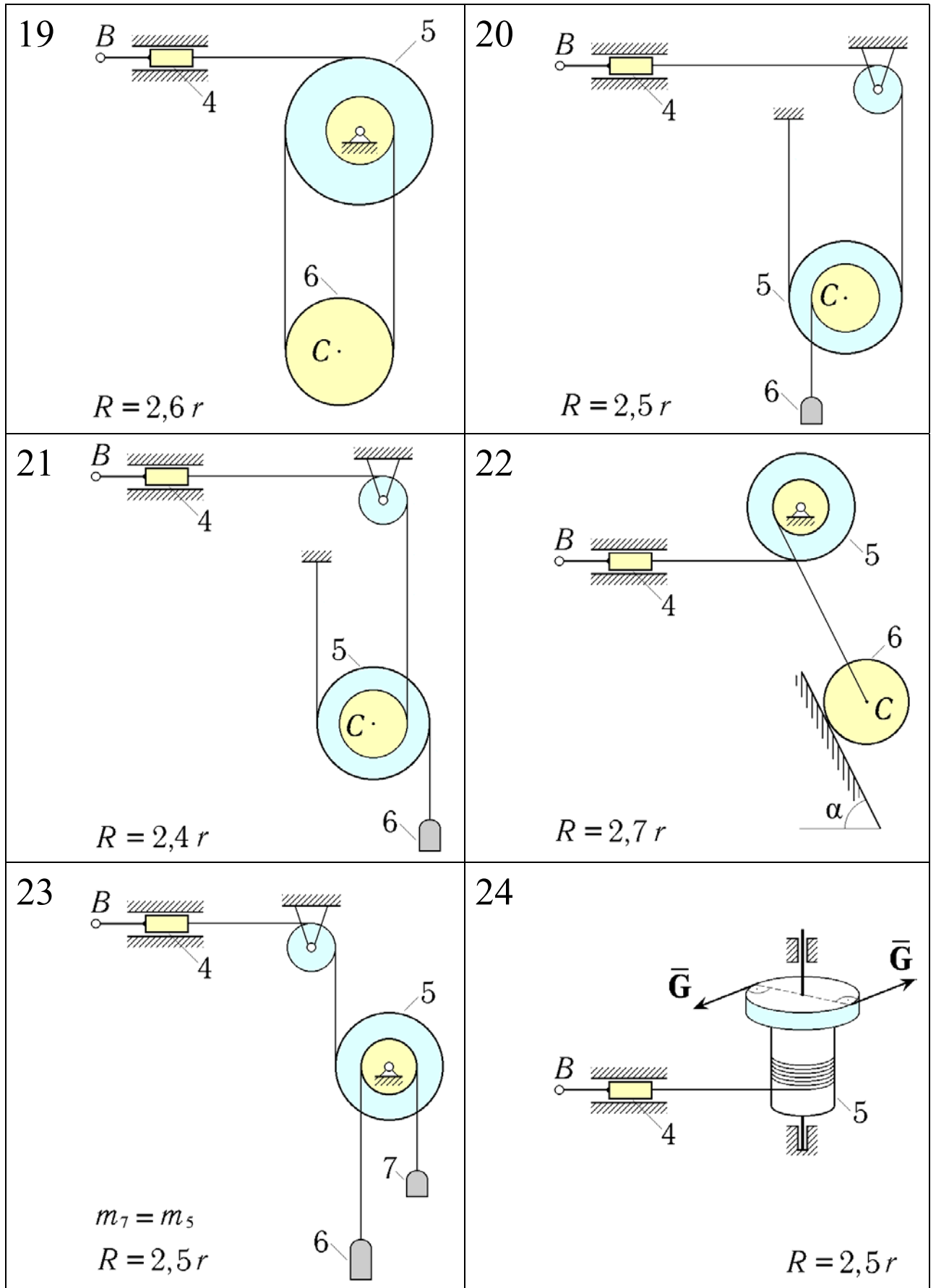


Рис. 10. Группа тел **B** (структурные схемы 19 – 24)

При составлении уравнений Лагранжа можно придерживаться последовательности действий, рекомендованной в п.4 настоящего раздела. Разрешая полученные уравнения движения относительно обобщённого ускорения, получим угловое ускорение звена l .

Решив задачу домашнего задания, студент может проверить свой результат, заставив обучающую программу **dk** (она уже упоминалась в п.4) вычислить ответ и сравнить его со своим. Для этого нужно запустить программу и выбрать в её основном меню пункт **“Индивидуальное домашнее задание”**.

В этом случае начнёт выполняться вторая модификация программы **syndin**, которая встроена непосредственно в программу **dk**. На экране появится меню для ввода параметров ИДЗ. При помощи этого меню нужно ввести численные значения исходных данных для своей задачи.

Закончив ввод, следует нажать функциональную клавишу **F10**; на экране появятся копия строки таблицы исходных данных и ответ, вычисленный обучающей программой.

2. Пример использования программы **dk** при выполнении индивидуального домашнего задания по динамике

Обратимся к приведённой в п.7 предыдущего раздела таблице, содержащей исходные данные для ИДЗ. Рассмотрим в качестве примера решение задачи варианта 5 (см. 5-ю строку данной таблицы).

Дано: $\mathbf{A} = 13$, $\mathbf{B} = 12$; $\varphi = 55^\circ$; $\omega_1 = 19 \text{ с}^{-1}$; $\alpha = 54^\circ$; $m_1 = 4 \text{ кг}$; $m_2 = 4 \text{ кг}$; $m_3 = 5 \text{ кг}$; $m_4 = 1 \text{ кг}$; $m_5 = 6 \text{ кг}$; $m_6 = 7 \text{ кг}$; $G = 9 \text{ кН}$; $M = 33 \text{ кН}\cdot\text{м}$; $R = 1,18 \text{ м}$; $R = 0,61 \text{ м}$.

Возьмём 13-ю кинематическую схему для группы тел **A** (рис.5) и 12-ю схему для группы тел **B** (рис.8); совместив эти схемы в общей точке B , получим единый механизм (рис.11).

Поскольку представленная здесь методика решения задач требует, чтобы все звенья механизма были пронумерованы, дадим звену PB (не получившему номера ранее) номер 7. Массу этого звена (в условии она не задана) считаем равной нулю.

Первое из приведённых в условии значений для R относится к группе тел **A** (в нашей задаче это – длина стержней 1, 3 и 7); второе – к группе тел **B** (это – большой радиус ступенчатого шкива 5). Во избежание путаницы для второго значения введем обозначение R_5 ; обозначим также через r_5 малый радиус шкива 5, через ϱ_5 – его радиус инерции, через r_6 – радиус блока 6. С учётом формул на рисунках 3 и 6 и рекомендаций таблицы исходных данных имеем:

$$R = 1,18 \text{ м}; \quad R_5 = 0,61 \text{ м}; \quad r_5 = R_5 / 2,8 = 0,214 \text{ м};$$

$$\varrho_5 = 0,7 R = 0,427 \text{ м}; \quad r_6 = (R_5 + r_5) / 2 = 0,412 \text{ м}.$$

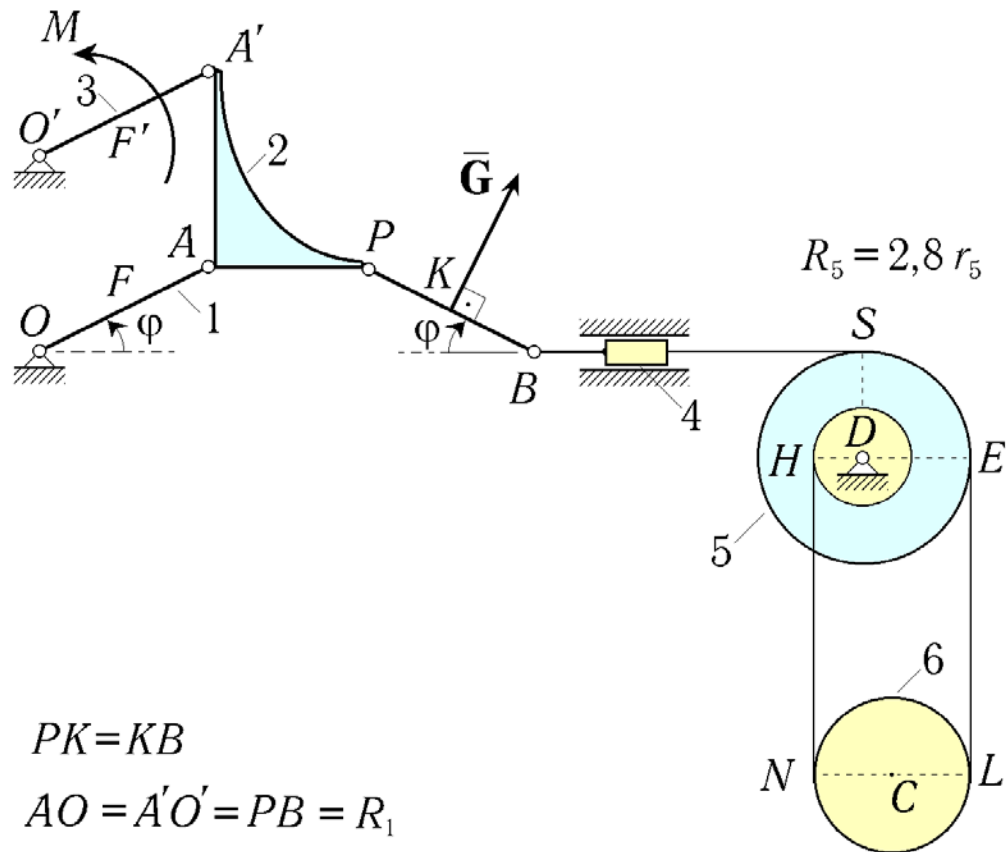


Рис. 11. Пример индивидуального домашнего задания по динамике

Составим уравнения движения полученного механизма в форме уравнении Лагранжа 2-го рода, придерживаясь при этом последовательности действий, рекомендованной в п.4 раздела 1.

1°. Составим выражение для кинетической энергии T , указав вид движения каждого тела и выразив коэффициенты через исходные данные:

$$\begin{aligned}
 T &= T_1^{\text{вр}} + T_2^{\text{пост}} + T_3^{\text{вр}} + T_4^{\text{пост}} + T_5^{\text{вр}} + T_6^{\text{общ}} = \\
 &= \frac{1}{2} \frac{m_1 R^2}{3} \omega_{1z}^2 + \frac{1}{2} m_2 V_A^2 + \frac{1}{2} \frac{m_3 R^2}{3} \omega_{1z}^2 + \frac{1}{2} m_4 V_B^2 + \\
 &\quad + \frac{1}{2} m_5 \varrho_5^2 \omega_{5z}^2 + \frac{1}{2} m_6 V_C^2 + \frac{1}{2} \frac{m_6 R^2}{2} \omega_{6z}^2.
 \end{aligned} \quad (37)$$

При нахождении моментов инерции тел мы учли, что тело 6 – однородный диск, для тела 5 задан радиус инерции, а моменты инерции однородных стержней 1 и 3 вычисляются относительно неподвижных точек, лежащих на концах стержней.

2°. Составим выражение для обобщённой силы Q :

$$\begin{aligned}
 Q &= (m_1 \bar{\mathbf{g}}, \bar{\mathbf{u}}_F) + (m_2 \bar{\mathbf{g}}, \bar{\mathbf{u}}_A) + (m_3 \bar{\mathbf{g}}, \bar{\mathbf{u}}_{F'}) + \\
 &\quad + (m_4 \bar{\mathbf{g}}, \bar{\mathbf{u}}_B) + (m_6 \bar{\mathbf{g}}, \bar{\mathbf{u}}_C) + (\bar{\mathbf{G}}, \bar{\mathbf{u}}_C) + (\bar{\mathbf{M}}, \bar{\mathbf{u}}_1).
 \end{aligned}$$

Переходя в этих скалярных произведениях к проекциям, учтём, что вектор $m_4 \bar{\mathbf{g}}$ ортогонален вектору $\bar{\mathbf{v}}_B$ (а значит, и вектору $\bar{\mathbf{u}}_B$), так что четвёртое слагаемое в формуле для Q обращается в нуль. Учтём ещё, что в проекциях на оси системы координат Oxy $g_x = 0$, $g_y = -g$, $G_x = G \sin \varphi$, $G_y = G \cos \varphi$, $M_z = M$.

Раскрыв скалярные произведения, получим:

$$Q = -m_1 g u_{Fy} - m_2 g u_{Ay} - m_3 g u_{F'y} - m_6 g u_{Cy} + G \sin \varphi u_{Kx} + G \cos \varphi u_{Ky} + M u_{1z}. \quad (38)$$

3°. Выберем обобщённую координату q и выясним кинематический смысл \dot{q} .

Примем за обобщённую координату угол φ , отсчитываемый на рис. 9 в положительную сторону от горизонтальной оси Ox ; тогда

$$q = \varphi, \quad \dot{q} = \dot{\varphi} = \omega_{1z}. \quad (39)$$

4°. Решим теперь кинематическую задачу: выразим линейные и угловые скорости, входящие в выражения для T и Q , через $\dot{\varphi}$ (в нашем примере в выражение для Q сами скорости не входят, входят только соответствующие им передаточные функции). Из (39) имеем:

$$\omega_{1z} = \dot{\varphi}, \quad u_{1z} = 1. \quad (40)$$

Чтобы получить выражения для остальных скоростей, воспользуемся аналитическим способом решения задач кинематики, который основан на рекуррентном применении основной формулы кинематики абсолютно твёрдого тела – *формулы Эйлера*:

$$\bar{\mathbf{v}}_B = \bar{\mathbf{v}}_A + [\bar{\omega}_j, \overline{AB}],$$

где A, B – точки тела с номером j , и последующем проектировании получаемых векторных соотношений на оси используемой системы координат. Эффективный метод, позволяющий получать нужные скалярные соотношения сразу (без выписывания формул с векторами) опирается [4,8] на использование *кинематических графов*.

Составим граф

$$O \xrightarrow[\varphi]{} A;$$

под стрелкой записан угол, который вектор \overline{OA} образует с лучом, выпущенным из точки O в сторону положительного направления оси x (угол отсчитывается от луча против хода часовой стрелки), а над стрелкой – номер тела.

Запишем для этого графа кинематические соотношения:

$$x: V_{Ax} = V_{Cx} - \omega_{1z} R \sin \varphi, \quad y: V_{Ay} = V_{Cy} + \omega_{1z} R \cos \varphi$$

(буква с двоеточием обозначает ось, на которую берётся проекция).

Учитывая связи, наложенные на тело I в точке O (там – неподвижный шарнир), получаем:

$$V_{Ax} = -\dot{\varphi} R \sin \varphi, \quad V_{Ay} = \dot{\varphi} R \cos \varphi, \quad u_{Ay} = R \cos \varphi. \quad (41)$$

В формуле (37) фигурирует квадрат скорости точки A , который находим по теореме Пифагора:

$$V_A^2 = V_{Ax}^2 + V_{Ay}^2 = \dot{\phi}^2 R^2 . \quad (42)$$

Совершенно аналогично, взяв граф

$$O' \xrightarrow[\phi]{3} A' ,$$

мы могли бы получить соотношения

$$V_{A'x} = -\omega_{3z} R \sin \phi , \quad V_{A'y} = \omega_{3z} R \cos \phi . \quad (43)$$

Заметим теперь, что тело 2 движется поступательно. Отсюда немедленно следует, что

$$\omega_{2z} = 0 \quad (44)$$

и что $\bar{v}_A = \bar{v}_{A'}$, а потому $V_{Ax} = V_{A'x}$, $V_{Ay} = V_{A'y}$. Из последних равенств с учётом (41) и (43) заключаем, что

$$\omega_{3z} = \dot{\phi} . \quad (45)$$

Для нахождения u_{Fy} и $u_{F'y}$ можно было бы рассмотреть графы, которые идут соответственно из O в F и из O' в F' . Быстрее, однако, получить нужный результат так. Поскольку тело 1 совершает вращательное движение, а точка F лежит на середине отрезка OA , то $\bar{v}_F = \bar{v}_A/2$; аналогично получаем, что $\bar{v}_{F'} = \bar{v}_{A'}/2$. Но $\bar{v}_A = \bar{v}_{A'}$, а поэтому

$$V_{Fy} = V_{F'y} = \frac{1}{2} \dot{\phi} R \cos \phi , \quad u_{Fy} = u_{F'y} = \frac{1}{2} R \cos \phi . \quad (46)$$

Граф

$$O \xrightarrow[\phi]{1} A \xrightarrow[0]{2} P \xrightarrow[2\pi-\phi]{7} B$$

даёт кинематические соотношения

$$x: V_{Bx} = V_{Ox} - \omega_{1z} R \sin \phi - \omega_{2z} |AP| \sin 0 - \omega_{7z} R \sin (2\pi - \phi) ,$$

$$y: V_{By} = V_{Oy} + \omega_{1z} R \cos \phi + \omega_{2z} |AP| \cos 0 + \omega_{7z} R \cos (2\pi - \phi) ;$$

учитывая связи в концевых точках графа (приводящие к равенствам $V_{Ox} = 0$, $V_{Oy} = 0$, $V_{By} = 0$) и формулы (40), (44), получаем систему двух линейных уравнений с двумя неизвестными ω_{7z} и V_{Bx} . Решив её, найдём:

$$\omega_{7z} = -\dot{\phi} , \quad V_{Bx} = -2\dot{\phi} R \sin \phi . \quad (47)$$

При помощи графа

$$B \xrightarrow[\pi-\phi]{7} K$$

получим выражения для u_{Kx} , u_{Ky} :

$$\begin{aligned} V_{Kx} &= -\frac{3}{2} \dot{\phi} R \sin \phi , & u_{Kx} &= -\frac{3}{2} R \sin \phi , \\ V_{Ky} &= \frac{1}{2} \dot{\phi} R \cos \phi , & u_{Ky} &= \frac{1}{2} R \cos \phi . \end{aligned} \quad (48)$$

Граф

$$B \xrightarrow{\text{нить}} S \xrightarrow[3\pi/2]{5} D \quad (49)$$

даёт следующее кинематическое соотношение:

$$x: V_{Dx} = V_{Bx} - \omega_{5z} R_5 \sin(3\pi/2) \quad (50)$$

(поскольку участок нити BS не поворачивается, сохраняя неизменную ориентацию в пространстве, то слагаемое, которое отвечало бы в соотношении (50) первой стрелке графа (49), равно нулю и поэтому опущено).

Так как $V_{Dx} = 0$, то

$$\omega_{5z} = -\frac{V_{Bx}}{R_5} = 2\dot{\phi} \frac{R}{R_5} \sin \varphi. \quad (51)$$

Граф

$$D \xrightarrow[0]{5} E \xrightarrow{\text{нить}} L \xrightarrow[\pi]{6} N \xrightarrow{\text{нить}} H \xrightarrow[0]{5} D$$

приводит к кинематическому соотношению (связи в конечных точках графа уже учтены):

$$y: 0 = \omega_{5z} R_5 \cos 0 + \omega_{6z} 2r_6 \cos \pi + \omega_{5z} r_5 \cos 0,$$

откуда

$$\omega_{6z} = \omega_{5z} \frac{R_5 + r_5}{2} = \dot{\phi} \frac{R(R_5 + r_5)}{R_5 r_6} \sin \varphi. \quad (52)$$

После этого из графа

$$D \xrightarrow[0]{5} E \xrightarrow{\text{нить}} L \xrightarrow[\pi]{6} C$$

найдем

$$V_{Cy} = \omega_{5z} \frac{R_5 - r_5}{2} = \dot{\phi} \frac{R(R_5 - r_5)}{R_5} \sin \varphi, \quad (53)$$

$$u_{Cy} = \frac{R(R_5 - r_5)}{R_5} \sin \varphi.$$

5°. Выразим теперь T как функцию $\dot{\phi}$ и φ и представим её в стандартной форме.

Подставляя в (37) выражения (40), (42), (45), (51) – (53), получаем

$$T = \frac{1}{2} (A + B \sin^2 \varphi) \dot{\phi}^2.$$

Выражение в скобках представляет собой приведённый момент инерции механической системы, а символами A , B обозначены выражения

$$A = (m_1/3 + m_2 + m_3/3) R^2, \quad (54)$$

$$B = 4R^2 \left\{ m_4 + m_5 \frac{\varrho_5^2}{R_5^2} + m_6 \frac{1}{4R_5^2} \left[\frac{(R_5 + r_5)^2}{2} + (R_5 - r_5)^2 \right] \right\}.$$

6°. Выразим Q как функцию $\dot{\varphi}$ и φ . Для этого подставим в (38) выражения (41), (46), (48) и (53); получим

$$Q = M - \left(\frac{m_1}{2} + m_2 + \frac{m_3}{2} \right) g R \cos \varphi -$$

$$- m_6 g \frac{R (R_5 - r_5)}{R_5} \sin \varphi - G \frac{R}{2} (3 \sin^2 \varphi - \cos^2 \varphi). \quad (55)$$

7°. Вычислим производные от кинетической энергии:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = (A + B \sin^2 \varphi) \dot{\varphi},$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = (A + B \sin^2 \varphi) \ddot{\varphi} + B \sin 2\varphi \dot{\varphi}^2,$$

$$\frac{\partial T}{\partial \varphi} = \frac{1}{2} B \sin 2\varphi \dot{\varphi}^2.$$

Здесь при дифференцировании мы воспользовались тождествами

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} (\sin \varphi) = \cos \varphi, \quad \frac{d}{dt} (\sin \varphi) = \cos \varphi \dot{\varphi},$$

$$2 \sin \varphi \cos \varphi = \sin 2\varphi.$$

8°. Запишем теперь уравнения Лагранжа. Для этого надо из второй по счёту производной, вычислявшейся на шаге 7°, вычесть третью по счёту производную и результат приравнять Q :

$$(A + B \sin^2 \varphi) \ddot{\varphi} + \frac{1}{2} B \sin 2\varphi \dot{\varphi}^2 = Q. \quad (56)$$

Соотношения (56), в которых A , B , Q даются формулами (54) и (55), и есть уравнения Лагранжа для данной задачи.

С учётом (56) искомое угловое ускорение равно

$$\varepsilon_{1z} \equiv \ddot{\varphi} = \frac{Q - \dot{\varphi}^2 B \sin 2\varphi / 2}{(A + B \sin^2 \varphi)};$$

результат, таким образом, зависит от $\dot{\varphi} \equiv \omega_{1z}$ и φ . Подставляя численные значения параметров и учитывая, что по условию задачи в рассматриваемый момент времени $\varphi = 55^\circ$, $\omega_{1z} = 19 \text{ с}^{-1}$, получаем ответ:

$$\varepsilon_{1z} = -183,14 \text{ с}^{-2}. \quad (57)$$

Поскольку оказалось, что ω_{1z} и ε_{1z} в рассматриваемый момент времени имеют разные знаки, то движение кривошипа OA в этот момент времени является замедленным (модуль угловой скорости $\omega_1 \equiv |\omega_{1z}|$ убывает).

Для того, чтобы проверить полученный ответ, воспользуемся обучающей программой **dk**. Выберем в её основном меню пункт “**Индивидуальное домашнее задание**”. Тогда на экране появится меню для ввода параметров ИДЗ. В этом меню представлены некоторые (первоначально – произвольные) значения параметров задания – **A, B, φ, ω₁, α, m₁, m₂, m₃, m₄, m₅, m₆, F, G, M, R** (для группы тел **A**) и **R** (для группы тел **B**); слева от каждого значения находится “кнопка” с буквенным обозначением параметра. При помощи этого меню нужно ввести численные значения исходных данных для своей задачи.

После того, как все необходимые численные значения заданы, следует нажать функциональную клавишу **F10**. При этом на экране появится копия строки таблицы исходных данных и значение ε_{1z} , вычисленное обучающей программой. Теперь осталось сверить это значение с ответом, полученным дома.

Закончив проверку, нужно нажать какую-либо клавишу. В ответ на экране возникнет надпись

Закончили ли Вы работу по проверке задания ?

При утвердительном ответе на этот вопрос программа **syndin** завершает работу, а на экране вновь появляется основное меню программы **dk**. В противном случае (а именно, если обнаружались ошибки, сделанные при вводе, или если требуется проверить ответ к другой задаче) на экран опять будет выведено меню для ввода параметров ИДЗ, и в нём можно будет поменять все или часть значений параметров.

3. Пример выполнения задания типового расчёта по динамике машины с кулисным приводом

3.1. Постановка задачи

Изложим, следуя [4], постановку задания типового расчёта по динамике машины с кулисным приводом.

Требуется определить движение машины с кулисным приводом под действием заданных сил и моментов, а также найти динамические реакции. Числовые значения параметров и начальные условия подобраны так, чтобы движение было близко к периодическому.

Машина приводится в движение электродвигателем, развивающим момент \overline{M}_d ; для проекции \overline{M}_d на ось z пользуемся таким выражением:

$$M_{dz} = M_0 - k \omega_{iz}, \quad (58)$$

где M_0 – пусковой момент, k – крутизна статической характеристики, i – номер звена, к которому приложен момент.

В разных вариантах задания полезную нагрузку моделируют либо сила нагрузки \overline{F}_H , либо момент нагрузки \overline{M}_H , задаваемые так:

$$F_{Hx} = -\mu_1 V_{Px} \text{ или } F_{Hy} = -\mu_1 V_{Py}, \quad M_{Hz} = -\mu_2 \omega_{4z}; \quad (59)$$

здесь в роли точки P может выступать либо произвольная точка звена 4 (если оно движется поступательно), либо центр масс C данного звена (если для него имеет место общий случай плоского движения), а в роли коэффициентов μ_1, μ_2 выступают коэффициенты сопротивления.

Во всех вариантах звено 1 – это маховик, звено 2 – кулиса, в прорези которой движется шип A маховика. Элементы конструкции машин считаются абсолютно жёсткими, ремни – нерастяжимыми и безынерционными. Проскальзывание колёс, ремней и т.д. отсутствует. Трением между шипом A и прорезью кулисы пренебрегаем.

Исходные значения параметров приведены в [табл. 1](#). Значения четырёх из этих параметров следует модифицировать по формулам

$$\begin{aligned} k &= k_T (1 + 0,01N); & \mu_1 &= \mu_{1T} (1 + 0,01N); \\ \mu_2 &= \mu_{2T} (1 + 0,01N); & I_1 &= I_{1T} + 0,1n; \end{aligned} \quad (60)$$

здесь N – номер студенческой группы, n – номер потока.

Во всех вариантах $R_1 = 0,36$ м, $OA \equiv r_1 = 0,06$ м. В вариантах 7, 9, 11, 24 для звена 4 радиус инерции $\rho_4 = 0,1$ м.

Время моделирования τ и начальная угловая скорость маховика задаются так:

$$\tau = 0,24 (1 + 0,01N); \quad \omega_{1z}(0) = 2\pi/\tau \quad (61)$$

(при этом $\omega_{1z}(0)$ будет близко к среднему значению ω_{1z} в периодическом движении, а τ – близко ко времени полного оборота маховика).

Варианты схем машин представлены на [рис. 12 – 16](#).

Требуется: **1.** Выполнить компьютерное моделирование движения машины (отдельные этапы моделирования рассматриваются далее – применительно к конкретному примеру). **2.** Для момента времени, когда угловое ускорение ε_{1z} принимает максимальное по модулю значение, определить динамические реакции: а) окружное усилие в точке K (варианты 1, 2, 3, 5, 6, 7, 8, 10, 12, 13, 14, 15, 19, 20, 22, 23, 24, 26, 27, 29); б) разность сил натяжения ведущей и ведомой ветвей ременной передачи (варианты 4, 9, 11, 17, 25, 30); в) усилие в стержне CD (варианты 16, 18, 21, 28).

В заданиях данного ТР уравнения движения машины составляются в форме уравнений Лагранжа 2-го рода. За обобщённую координату принимаем угол φ_1 (рассматриваемые механические системы имеют одну степень свободы), так что при переходе к записи в форме Коши (1) получим:

$$\dot{\omega}_{1z} = \varepsilon_{1z}(\omega_{1z}, \varphi_1), \quad \dot{\varphi}_1 = \omega_{1z}. \quad (62)$$

Таблица 1

Вариант	M_0	k_T	μ_{1T}	μ_{2T}	I_{1T}	m_2	m_3	m_4	R_3	r_3	ϱ_3	R_4	r_4	$\varphi_1(0)$
1	-50	0,8	344	-	1,4	21	9,26	24	0,18	-	-	-	-	1,6
2	102	3,3	331	-	2,0	15	10	20	0,13	-	-	-	-	0
3	-34	0,3	-	9,56	1,5	20	7,72	24	0,12	-	-	0,12	-	3,1
4	26	0,2	-	3,48	1,7	26	4,63	20	0,09	-	-	0,09	-	1,6
5	105	3,5	639	-	2,0	10	15	20	0,12	0,08	0,09	-	-	1,5
6	-53	0,8	-	4,72	1,4	24	9,26	24	0,18	-	-	0,10	-	3,2
7	-27	0,2	-	20,6	1,5	20	7,72	20	0,09	-	-	0,12	0,08	1,6
8	108	3,5	222	-	2,0	10	20	15	0,10	0,08	0,08	-	-	3,1
9	-27	0,2	-	20,6	1,4	15	9,26	30	0,09	-	-	0,15	0,05	0
10	110	3,8	571	-	2,0	12	20	20	0,18	0,08	0,12	-	-	3,1
11	37	0,4	-	11,5	1,7	22	4,63	32	0,12	-	-	0,12	0,06	4,7
12	112	3,7	246	-	2,0	14	24	12	0,16	0,12	0,14	-	-	0
13	113	3,7	342	-	2,0	12	25	10	0,12	-	-	-	-	3,1
14	114	3,8	856	-	2,0	15	20	28	0,10	0,06	0,08	-	-	4,7
15	115	3,9	2234	-	2,0	16	18	30	0,20	0,06	0,14	-	-	3,2
16	116	3,9	2654	-	2,0	18	20	16	0,10	0,05	0,08	-	-	0
17	39	0,4	-	6,95	1,4	23	9,26	32	0,12	-	-	0,12	-	0
18	118	3,9	337	-	2,0	12	16	10	0,08	-	-	-	-	3,1
19	119	3,9	3231	-	2,0	20	30	40	0,14	0,07	0,08	-	-	0
20	120	4,0	-	3,24	2,0	10	16	12	0,10	-	-	-	-	3,1
21	121	4,0	1380	-	2,0	24	32	16	0,07	-	-	-	-	3,2
22	122	4,1	700	-	2,0	12	22	18	0,18	0,06	0,12	-	-	0
23	-41	0,4	-	6,10	1,5	15	7,72	20	0,12	-	-	0,10	-	1,5
24	-31	0,2	-	49,2	1,7	25	4,63	36	0,09	-	-	0,16	0,08	3,1
25	63	1,0	-	35,4	1,4	24	9,26	32	0,18	-	-	0,14	-	1,6
26	126	4,2	5440	-	2,0	18	40	26	0,18	0,09	0,10	-	-	0
27	-36	0,4	-	29,9	1,5	26	7,72	24	0,12	-	-	0,16	-	0
28	128	4,3	1308	-	2,0	22	24	16	0,15	-	-	-	-	3,1
29	129	4,2	101	-	2,0	12	10	10	0,05	-	-	-	-	3,2
30	65	1,0	-	5,36	1,4	17	9,26	16	0,18	-	-	0,10	-	0

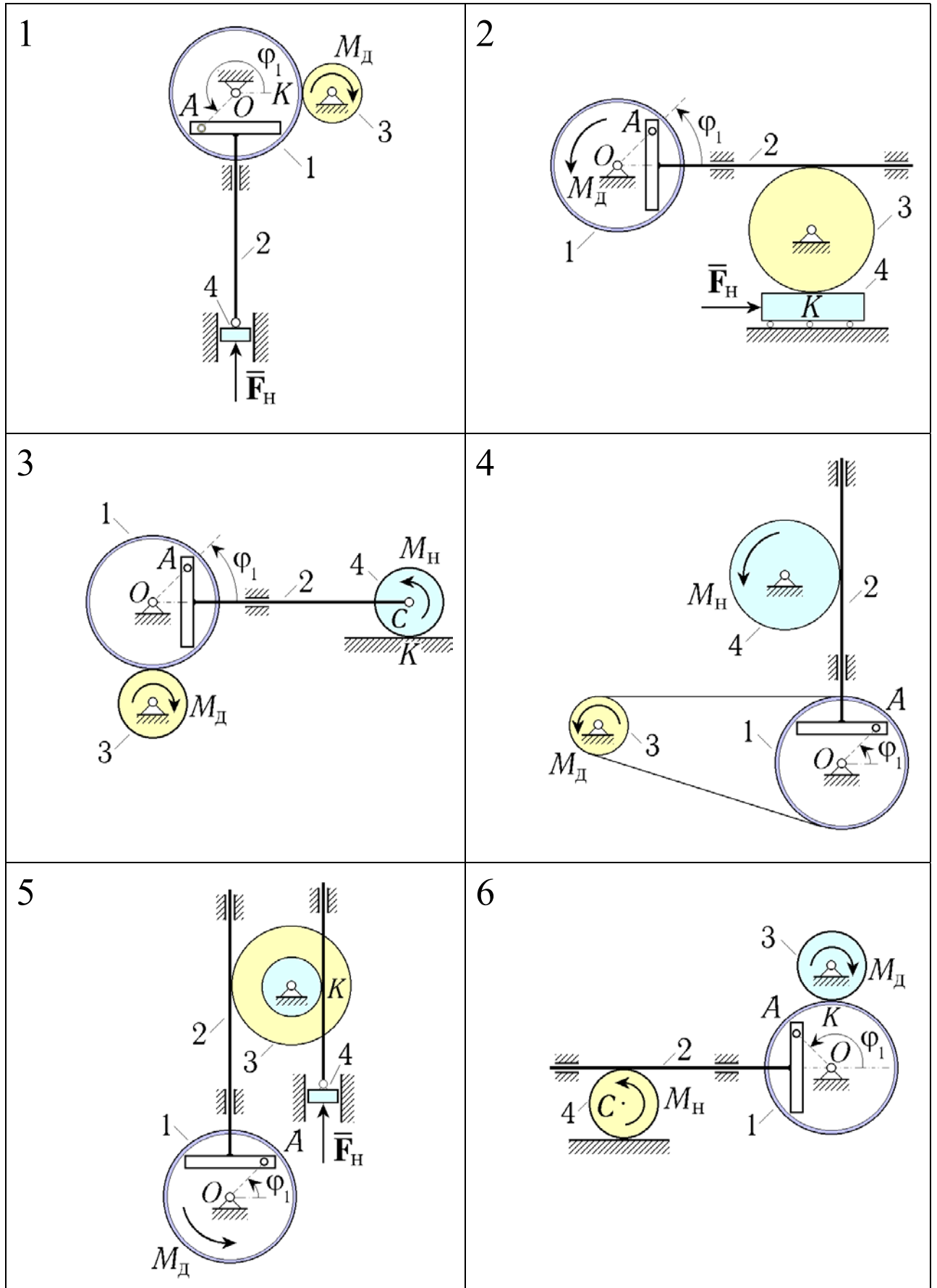


Рис. 12. Схемы машин с кулисным приводом (варианты 1 – 6)

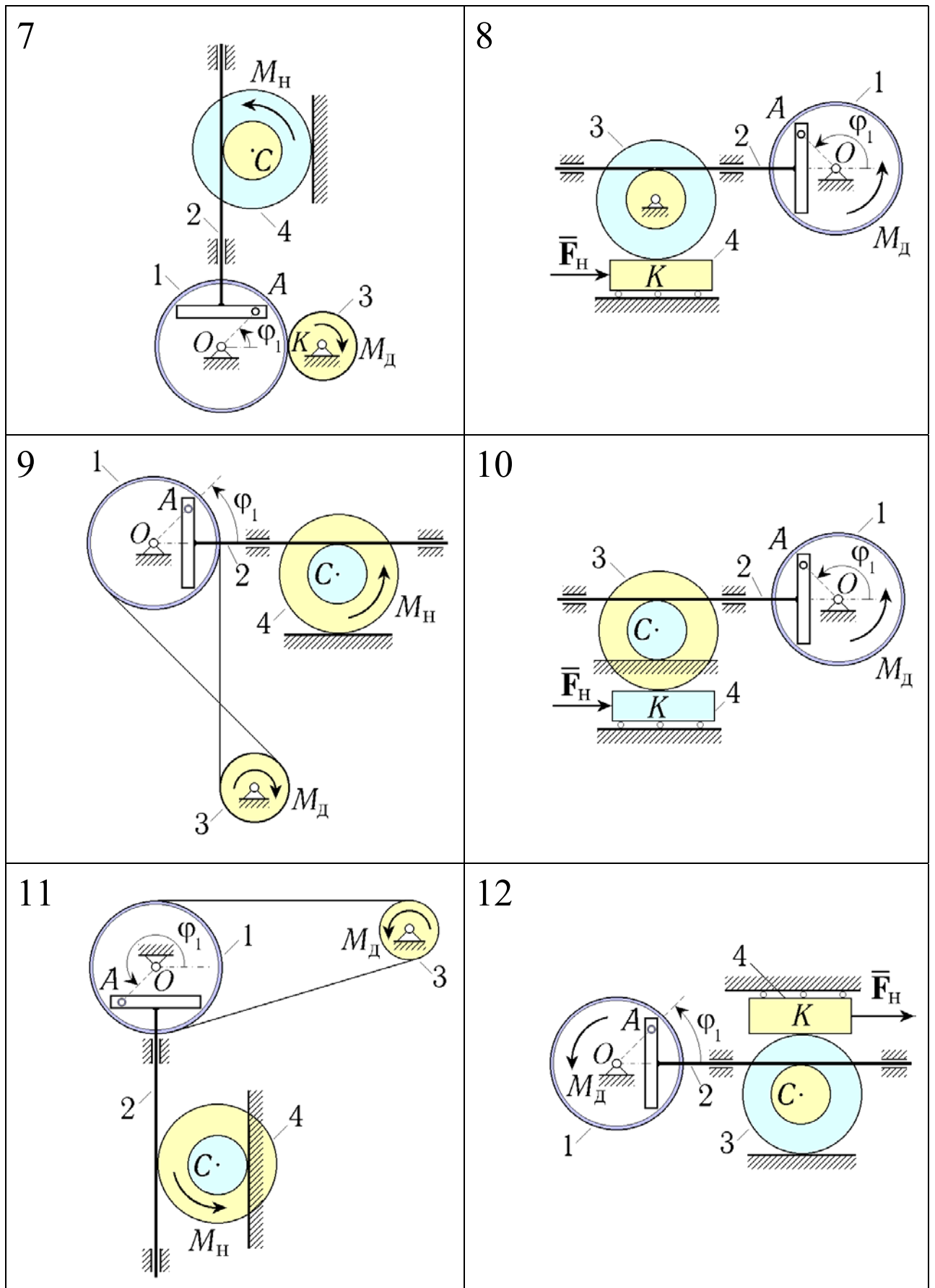


Рис. 13. Схемы машин с кулисным приводом (варианты 7 – 12)

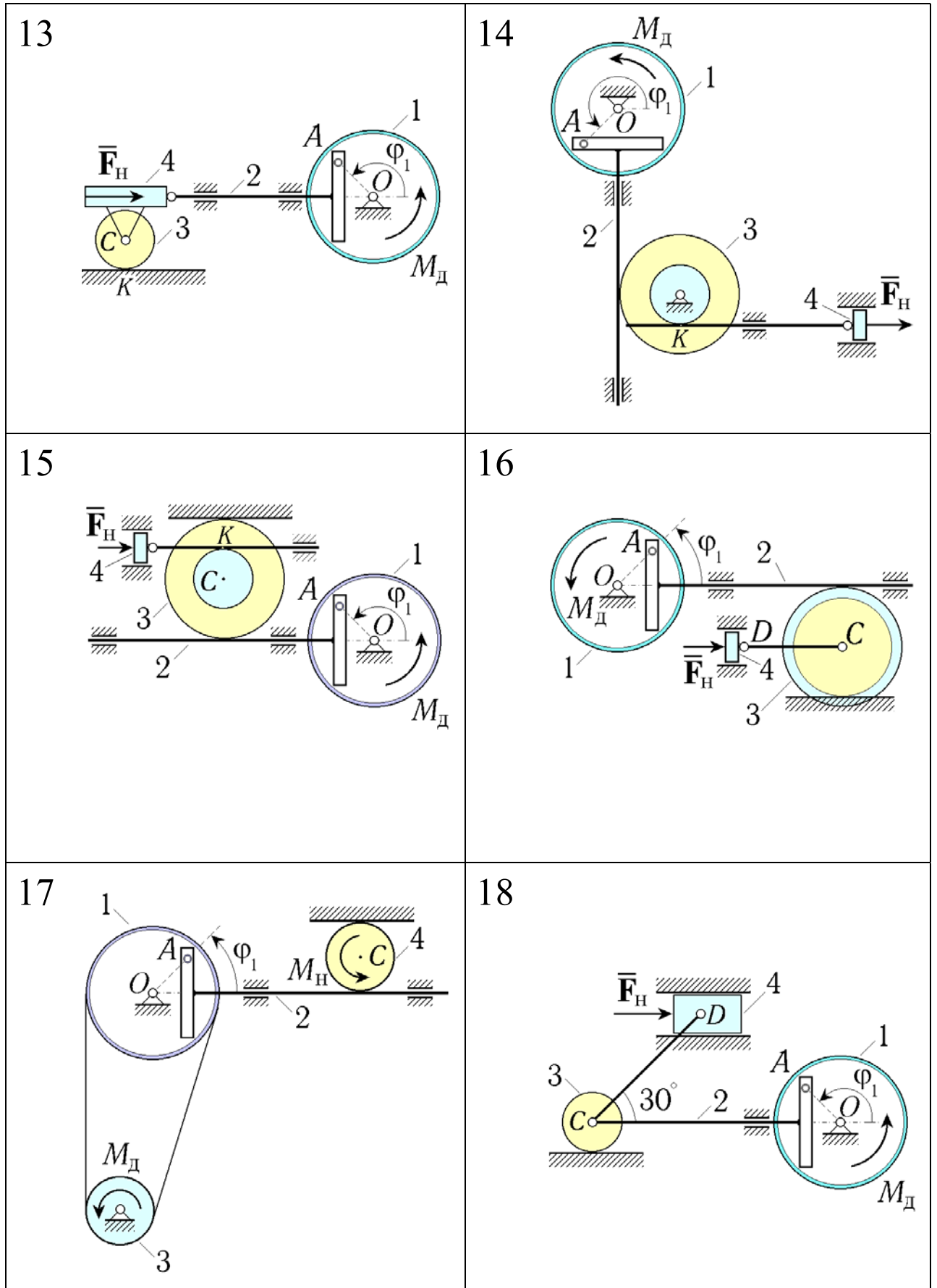


Рис. 14. Схемы машин с кулисным приводом (варианты 13 – 18)

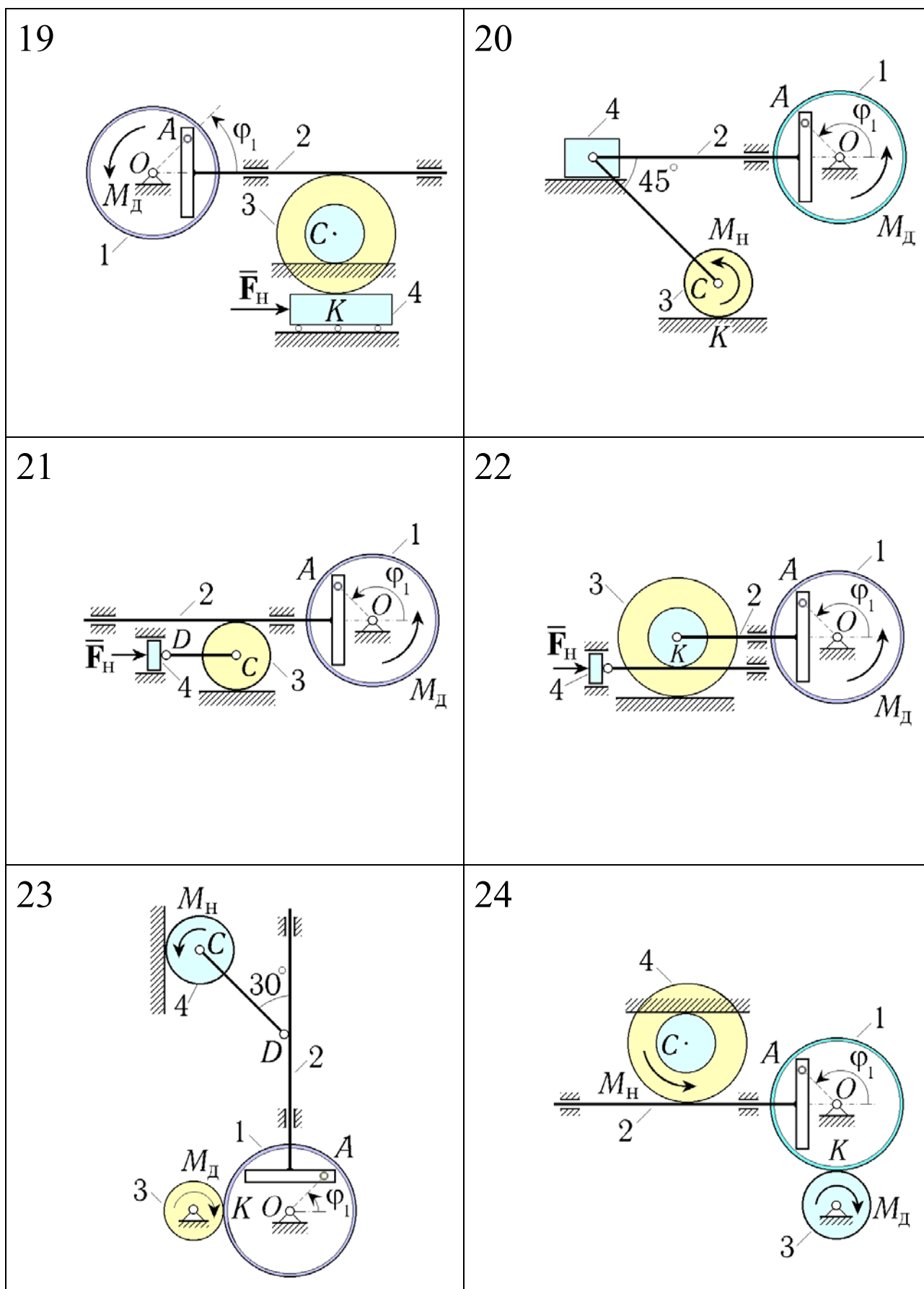


Рис. 15. Схемы машин с кулисным приводом (варианты 19 – 24)

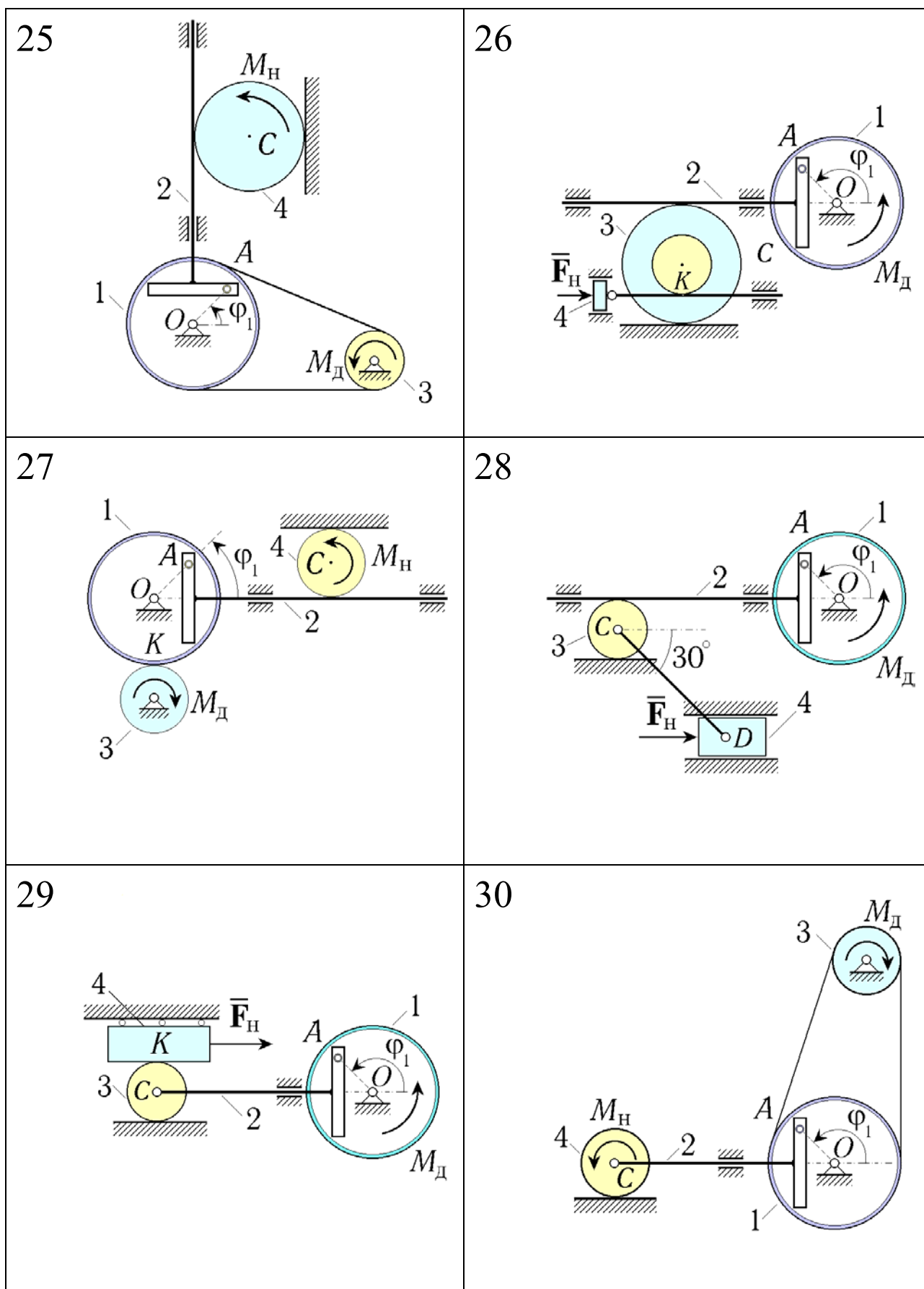


Рис. 16. Схемы машин с кулисным приводом (варианты 25 – 30)

Эти дифференциальные уравнения и интегрируются численно на интервале изменения времени $[0, \tau]$. Если задача решена правильно, то графики φ_1 , ω_{1z} и ε_{1z} не будут иметь разрывов, конечные значения переменных ω_{1z} и ε_{1z} будут близки к начальным, а приращение угла φ_1 на интервале изменения времени $[0, \tau]$ будет близко к 2π .

Что касается определения динамических реакций, то для нахождения соответствующей реакции рекомендуется освободить от связей одно из звеньев системы, а затем составить такое из уравнений динамики данного звена, в которое вошла бы искомая реакция. В данное уравнение вместо переменных φ_1 , ω_{1z} и ε_{1z} надо подставить их значения из той строки таблицы результатов моделирования, в которой ε_{1z} принимает максимальное по модулю значение.

3.2. Пример составления уравнений движения машины

Рассмотрим один из вариантов задания типового расчёта по динамике машины с кулисным приводом (условимся считать его 31-м вариантом). Пусть $N = 12$, $n = 1$, а кинематическая схема машины соответствует изображённой на рис. 17, а.

В данном варианте момент двигателя $M_{Дз} = M_0 - k\omega_{3z}$ приложен к шкиву 3, связанному с маховиком ременной передачей. Полезная нагрузка моделируется силой $F_{Hy} = -\mu_1 V_{Py}$, приложенной к точке P штока 5.

Дано: $OA = r_1 = 0,06$ м; $R_1 = 0,36$ м; $R_3 = 0,09$ м; $R_4 = 0,24$ м; $r_4 = 0,08$ м; $\varrho_4 = 0,12$ м; $M_0 = -27$ Н·м; $k = 0,228$ Н·м·с; $\mu_1 = 309$ Н·с/м; $I_1 = 1,8$ кг·м²; $m_2 = 15$ кг; $m_3 = 7,71$ кг; $m_4 = 16$ кг; $\tau = 0,2688$ с; $\omega_{1z}(0) = 23,375$ с⁻¹; $\varphi_1(0) = 1,57$.

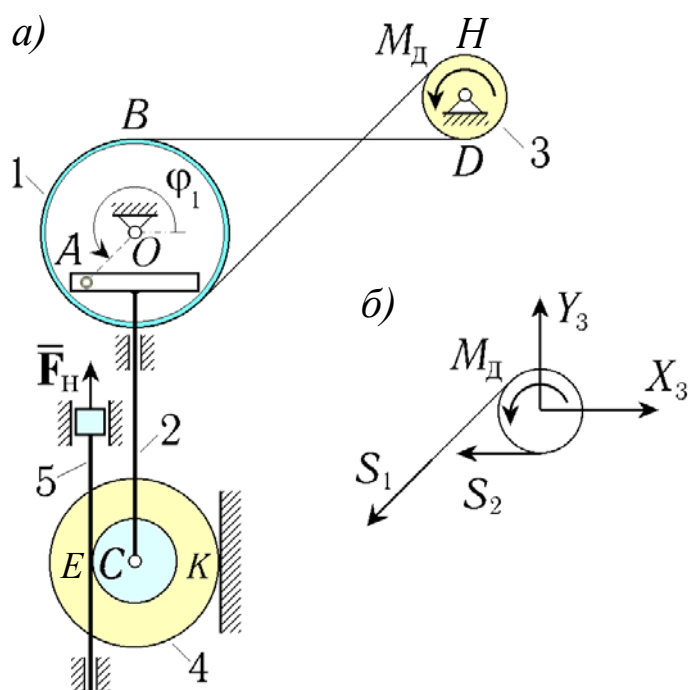


Рис. 17. Схема машины с кулисным приводом (вариант 31)

Предполагается, что ремень невесомый, нерастяжимый, не проскальзывающий относительно шкива и маховика. Каток 4 относительно рейки штока 5 и неподвижной рейки не проскальзывает (зубчатая реечная передача). Масса штока не учитывается.

Требуется: **1.** Составить уравнения движения машины в форме уравнений Лагранжа 2-го рода. **2.** Записать уравнения движения в форме Коши. **3.** При заданных начальных условиях численно проинтегрировать уравнения движения на отрезке $[0, \tau]$. **4.** Построить графики $\varphi_1(t)$, $\omega_{1z}(t)$, $\varepsilon_{1z}(t)$. **5.** Для момента времени, когда ε_{1z} принимает максимальное по модулю значение, вычислить разность сил натяжения ведущей и ведомой ветвей ременной передачи.

Приступаем к составлению уравнений движения машины. Будем придерживаться той последовательности действий, которая изложена в п.4 раздела 1.

1°. Составим выражение для кинетической энергии T механической системы, указав вид движения каждого тела и выразив коэффициенты через исходные данные.

$$\begin{aligned} T &= T_1^{\text{вр}} + T_2^{\text{пост}} + T_3^{\text{вр}} + T_4^{\text{общ}} + T_5^{\nearrow 0} = \\ &= \frac{1}{2} I_1 \omega_{1z}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{Cy}^2 + \frac{1}{2} \frac{m_3 R_3^2}{2} \omega_{3z}^2 + \frac{1}{2} m_4 v_{Cy}^2 + \frac{1}{2} m_4 \varrho_4^2 \omega_{4z}^2. \end{aligned}$$

Здесь мы учли, что маховик 1 и шкив 3 совершают вращательное движение вокруг неподвижных осей, кулиса 2 движется поступательно, а для ступенчатого катка 4 имеет место общий случай плоского движения, после чего воспользовались формулами (15) (кинетическая же энергия безынерционного штока 5 равна нулю). При вычислении моментов инерции было учтено, что шкив 3 – однородный диск, для маховика 1 момент инерции задан, а для ступенчатого катка 4 известен радиус инерции.

2°. Составим выражение для обобщённой силы Q и раскроем скалярные произведения.

Воспользуемся формулой (17) и заметим, что в нашей задаче к числу активных сил и моментов относятся момент \bar{M}_d , сила \bar{F}_H и силы тяжести.

$$\begin{aligned} Q &= (\bar{M}_d, \bar{u}_3) + (\bar{F}_H, \bar{u}_P) + (m_1 \bar{g}, \bar{u}_O^{\nearrow 0}) + \\ &+ (m_2 \bar{g}, \bar{u}_C) + (m_3 \bar{g}, \bar{u}_H^{\nearrow 0}) + (m_4 \bar{g}, \bar{u}_C) = \\ &= (M_0 - k \omega_{3z}) u_{3z} - \mu_1 v_{Py} u_{Py} - m_2 g u_{Cy} - m_4 g u_{Cy}. \end{aligned}$$

В проделанных выкладках мы учли следующее. Векторы скоростей неподвижных точек O и H равны нулю (соответствующие же передаточные функции отличаются от скоростей лишь скалярным множителем \dot{q} и, значит, тоже равны нулю). Вместо M_{dz} и F_{Hy} мы подставили конкретные выражения из (58), (59).

Подчеркнём, что к концу данного пункта в наших формулах уже больше не должны фигурировать обозначения M_{dz} и F_{Hy} .

Поскольку кулиса 2 движется поступательно, то все её точки имеют одинаковые скорости; поэтому вместо передаточной функции линейной скорости центра масс кулисы (где приложена сила тяжести) мы воспользовались передаточной функцией линейной скорости точки C .

Раскрывая скалярные произведения, мы учли, что векторы \bar{v}_p и \bar{g} направлены параллельно оси y (так что их проекции на ось x равны нулю).

3°. Выберем обобщённую координату q и выясним кинематический смысл \dot{q} :

$$q = \varphi_1, \quad \dot{q} = \dot{\varphi}_1 = \omega_{1z}.$$

Выбор обобщённой координаты q в данной задаче был предписан условием задачи. Поскольку q – это угол поворота маховика I , то производная от этой обобщённой координаты равна проекции угловой скорости маховика на ось z .

Теперь надо выразить все линейные и угловые скорости, входящие в формулы из пунктов 1° и 2° нашего алгоритма, через обобщённую скорость. Заметим, что эти скорости либо непосредственно входят в данные формулы, либо представлены передаточными функциями.

4°. Выразим линейные и угловые скорости, входящие в выражения для T и Q , через $\dot{\varphi}_1$.

Первое нужное нам выражение сразу же следует из результатов пункта 3°:

$$\omega_{1z} = \dot{\varphi}_1.$$

Кинематический граф

$$O \xrightarrow[\varphi_1]{1} A$$

позволяет записать соотношение

$$y: \quad V_{Ay} = V_{Oy} + \omega_{1z} r_1 \cos \varphi_1,$$

откуда, учитывая, что $\bar{v}_O = 0$, получаем:

$$V_{Ay} = \dot{\varphi}_1 r_1 \cos \varphi_1.$$

Так как кулиса 2 движется поступательно и её перемещение вдоль оси y равно перемещению точки A вдоль этой оси, то

$$V_{Cy} = V_{Ay} \equiv \dot{\varphi}_1 r_1 \cos \varphi_1, \quad u_{Cy} = r_1 \cos \varphi_1.$$

Заметим, что перемещение точки A вдоль оси x никак не сказывается на движении кулисы, все точки которой движутся только вдоль оси y . Поэтому было бы грубой ошибкой записать, что $\bar{v}_C = \bar{v}_A$.

После этого из графа

$$O \xrightarrow[\pi/2]{1} B \xrightarrow{\text{нить}} D \xrightarrow[\pi/2]{6} H$$

найдем:

$$x: \quad \cancel{V_{Hx}}^0 = \cancel{V_{Ox}}^0 - \omega_{1z} R_1 \sin \frac{\pi}{2} - \omega_{3z} R_3 \sin \frac{\pi}{2},$$

откуда

$$\omega_{3z} = -\dot{\varphi}_1 R_1 / R_3, \quad u_{3z} = -R_1 / R_3. \quad (63)$$

Для нахождения угловой скорости ступенчатого катка 4 воспользуемся тем, что его точка K – это точка контакта с неподвижной стенкой, причём качение происходит без проскальзывания; поэтому $\bar{\mathbf{v}}_K = 0$.

Граф

$$C \xrightarrow[0]{4} K$$

даёт:

$$y: \cancel{V_{Ky}}^0 = V_{Cy} + \omega_{4z} R_4 \cos 0 ,$$

откуда

$$\omega_{4z} = -V_{Cy} / R_4 = -\dot{\phi}_1 r_1 \cos \varphi_1 / R_4 .$$

Наконец, учитывая, что шток 5 движется поступательно, имеем: $\bar{\mathbf{v}}_P = \bar{\mathbf{v}}_E$.

Из графа

$$K \xrightarrow[\pi]{4} E$$

находим:

$$y: V_{Ey} = \cancel{V_{Ky}}^0 + \omega_{4z} (R_4 + r_4) \cos \pi ,$$

так что

$$V_{Py} = V_{Ey} = \dot{\phi}_1 r_1 (R_4 + r_4) \cos \varphi_1 / R_4 , \quad u_{Py} = r_1 (R_4 + r_4) \cos \varphi_1 / R_4 .$$

5°. Выразим T как функцию $\dot{\phi}_1$ и φ_1 и представим её в стандартной форме, вводя для постоянных коэффициентов буквенные обозначения.

Подставим найденные для линейных и угловых скоростей выражения в формулу для T , полученную в п.1° алгоритма.

$$T = \frac{1}{2} [I_1 + m_2 r_1^2 \cos^2 \varphi_1 + m_3 R_1^2 / 2 + m_4 r_1^2 \cos^2 \varphi_1 + \\ + m_4 \varrho_4^2 r_1^2 \cos^2 \varphi_1 / R_4^2] \dot{\phi}_1^2 = \frac{1}{2} (A + B \cos^2 \varphi_1) \dot{\phi}_1^2 ,$$

где

$$A = I_1 + m_3 R_1^2 / 2 , \quad B = (m_2 + m_4 + m_4 \varrho_4^2 / R_4^2) r_1^2 . \quad (64)$$

6°. Выразим Q как функцию $\dot{\phi}_1$ и φ_1 .

Теперь мы подставляем в формулу для Q , полученную в п.2° алгоритма, выражения для кинематических передаточных функций и для величин ω_{3z} и V_{Py} .

$$Q = - (M_0 + k \dot{\phi}_1 R_1 / R_3) R_1 / R_3 - \\ - \mu_1 \dot{\phi}_1 r_1^2 (R_4 + r_4)^2 \cos^2 \varphi_1 / R_4^2 - \\ - (m_2 + m_4) g r_1 \cos \varphi_1 . \quad (65)$$

7°. Вычислим производные:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_1} = (A + B \cos^2 \varphi_1) \dot{\varphi}_1 ,$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_1} = (A + B \cos^2 \varphi_1) \ddot{\varphi}_1 - B \sin 2 \varphi_1 \dot{\varphi}_1^2 ,$$

$$\frac{\partial T}{\partial \varphi_1} = -\frac{1}{2} B \sin 2 \varphi_1 \dot{\varphi}_1^2 .$$

8°. Запишем уравнения Лагранжа.

Для этого достаточно из второй по счёту производной вычесть третью по счёту производную (при этом нужно будет привести подобные члены) и результат приравнять Q .

Уравнения движения машины в форме уравнений Лагранжа имеют вид:

$$(A + B \cos^2 \varphi_1) \ddot{\varphi}_1 - \frac{1}{2} B \sin 2 \varphi_1 \dot{\varphi}_1^2 = Q .$$

Переходим к уравнениям 1-го порядка:

$$\dot{\varphi}_1 = \omega_{1z} , \quad \dot{\omega}_{1z} = \varepsilon_{1z} ,$$

где

$$\varepsilon_{1z} = (Q + B \dot{\varphi}_1^2 \sin 2 \varphi_1 / 2) / (A + B \cos^2 \varphi_1) . \quad (66)$$

3.3. Выполнение задания с помощью программы **dk**

Перед началом работы с обучающей программой **dk** следует преобразовать формулы, полученные при выводе уравнений движения машины (в рассматриваемом примере это – формулы (64)–(66)), к виду, пригодному для ввода в программу. Речь идёт о составлении уже упоминавшихся в п.1 первого раздела настоящего пособия семи расчётных формул.

Рекомендуется записать расчётные формулы по тем правилам записи математических формул и выражений, которые приняты в представленном здесь комплексе обучающих программ.

Расчётные формулы, соответствующие 31-му варианту задания, приводятся далее (рис.19).

Работа с обучающей программой **dk** в дисплейном классе проходит в соответствии с общими положениями, изложенными в п.1 первого раздела настоящего пособия. После выбора в основном меню пункта “**Типовой расчёт**” на экран видеомонитора выводится меню подсистемы “Типовой расчёт” (рис.1).

Если в данном меню выбран пункт “**Выполнение задания**”, то программа запрашивает данные о номере варианта и о самом студенте (далее будем предполагать, что задание выполняет уже известный Вам по пособию [14] “виртуальный” студент Л.О.Пушков из группы С–12–03).

Затем студент вводит численные значения параметров. Применительно к рассматриваемому сейчас примеру по окончании ввода меню для ввода параметров задания примет вид, показанный на рис.18.

Выбирая соответствующие поля меню, введите параметры для Вашей задачи. Если заданное по умолчанию значение Вас устраивает, то заменять его не нужно.

Параметры двигателя:

Пусковой момент: $M_0 = -27.0$ Крутизна статической характеристики: $k = 0.228$

Коэффициент сопротивления: $\mu_1 = 309.00$

Инерционные параметры:

$I_1 = 1.8$ $m_2 = 15.0$ $m_3 = 7.71$ $m_4 = 16.0$

Геометрические параметры:

$R_1 = 0.36$ $R_3 = 0.09$ $r_3 = \text{—}$ $e_3 = \text{—}$

$r_1 = 0.06$ $R_4 = 0.24$ $r_4 = 0.08$ $e_4 = 0.12$

Начальные значения дифференциальных переменных:

$\varphi_1(0) = 1.570$ $\omega_{1z}(0) = 23.375$

Время моделирования: $\tau = 0.2688$

Если Вы закончили ввод параметров, нажмите клавишу F10

Рис. 18. Программа **dk**: вид меню для ввода параметров задания

После проверки правильности набранных параметров задания следует нажать функциональную клавишу **F10**, что обеспечит переход к меню для ввода расчётных формул. Первоначально в данном меню стоят только номера формул; после же завершения ввода семи расчётных формул меню примет вид, показанный на рис. 19.

Введите формулы для вычисления Q_d , Q_H , Q_T , Q , A , B , ε_{1z} . В правой части формулы могут фигурировать переменные φ_1 и ω_{1z} , параметры M_0 , k , μ_1 , I_1 , m_2 , m_3 , m_4 , R_1 , r_1 , R_3 , r_3 , e_3 , R_4 , r_4 , e_4 , константа g , а также переменные, уже определенные Вами в предыдущих формулах.

Ввод формулы Исправление формулы Завершение ввода формул

- $Q_d = -(M_0 + k\omega_{1z}R_1/R_3)R_1/R_3$
- $Q_H = -\mu_1\omega_{1z}r_1r_1(R_4+r_4)(R_4+r_4)\cos\varphi_1\cos\varphi_1/R_4R_4$
- $Q_T = -(m_2+m_4)gr_1\cos\varphi_1$
- $Q = Q_d + Q_H + Q_T$
- $A = I_1 + m_3R_1R_1/2$
- $B = (m_2+m_4+m_4e_4e_4/R_4R_4)r_1r_1$
- $\varepsilon_{1z} = (Q + B\omega_{1z}\omega_{1z}\sin^2\varphi_1/2)/(A + B\cos\varphi_1\cos\varphi_1)$

Рис. 19. Программа **dk**: вид меню для ввода расчётных формул

Проверив правильность набранных формул, нужно выбрать в меню пункт “**Завершение ввода формул**”. За этим последует численное интегрирование уравнений движения машины, после чего на экране появляется вопрос “**Хотите ли Вы строить графики?**”. При утвердительном ответе на него появляется меню для вывода графиков зависимостей $\varphi_1(t)$, $\omega_{1z}(t)$, $\varepsilon_{1z}(t)$.

Вид таких графиков для рассматриваемого примера дан на рис.20–21 (график зависимости $\varepsilon_{1z}(t)$ приведён в следующем пункте).

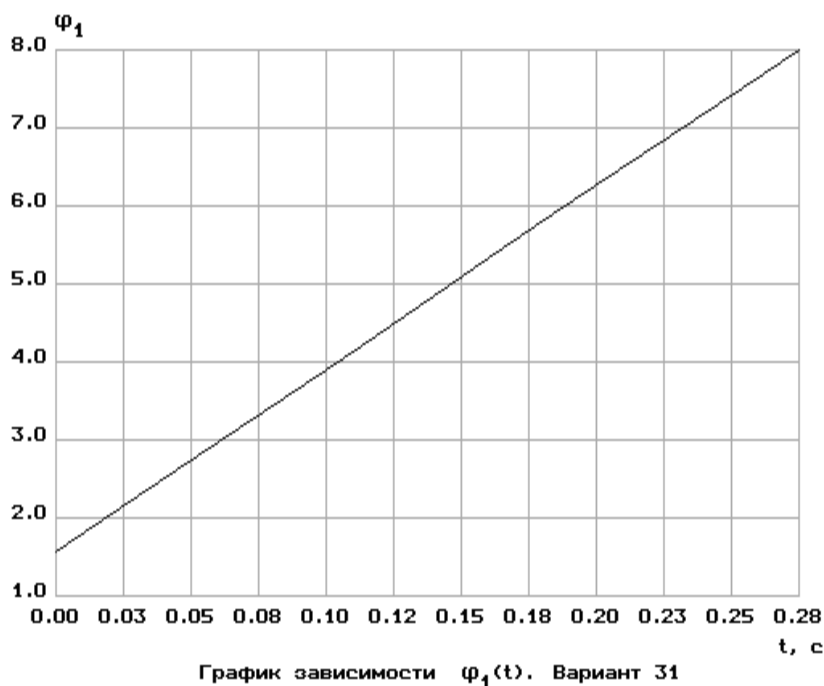


Рис. 20. Программа **dk**: график зависимости $\varphi_1(t)$

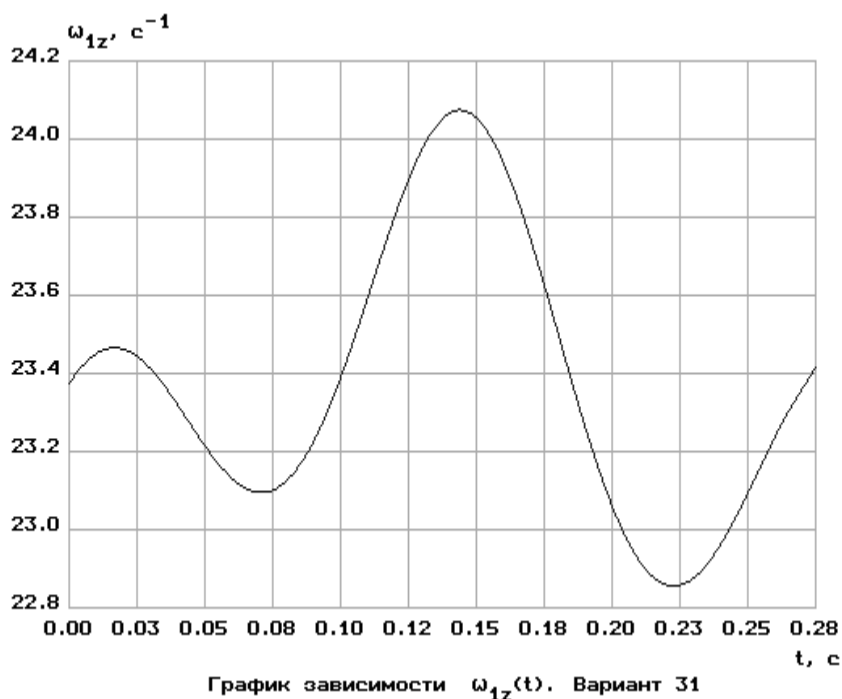


Рис. 21. Программа **dk**: график зависимости $\omega_{1z}(t)$

Анализируя вид полученных графиков, можно проконтролировать правильность решения задачи. В нашем случае видно, что приращение угла φ_1 на интервале $[0, \tau]$ мало отличается от 2π , а конечные значения переменных ω_{1z} и ε_{1z} достаточно близки к их начальным значениям.

После завершения работы с графиками переходят к просмотру таблицы результатов моделирования. Таблица, полученная Лёней Пушковым, приведена на [рис.22](#).

Численные результаты моделирования.
Вариант 31. Л.О.Пушков, гр. С-12-03

t	φ_1	ω_{1z}	ε_{1z}
0.0	1.570	23.38	9.90
0.022	2.095	23.46	-4.33
0.045	2.619	23.27	-10.50
0.067	3.138	23.10	-1.63
0.090	3.656	23.22	13.97
0.112	4.180	23.64	21.34
0.134	4.714	24.03	8.79
0.157	5.253	23.99	-14.32
0.179	5.786	23.52	-24.62
0.202	6.307	23.03	-15.74
0.224	6.821	22.86	1.90
0.246	7.334	23.04	13.93
0.269	7.853	23.35	9.94

Рис. 22. Программа **dk**: таблица результатов моделирования

После получения (и сохранения в виде графических файлов) графиков переменных и таблицы результатов моделирования работа студента в дисплейном классе завершается.

3.4. Выполнение задания с помощью программы LinkGear

Перед началом работы с программой **LinkGear** также следует подготовить семь расчётных формул; однако записываются они по правилам, несколько отличным от принятых в других программах комплекса.

Именно, не допускается опускать знак умножения * при записи произведений, а аргументы функций следует *всегда* заключать в круглые скобки; углы могут задаваться только в радианной мере.

С другой стороны, в формулах доступна операция возведения в степень. При наборе показателя степени следует перейти в надстрочный уровень однократным нажатием клавиши \uparrow , затем набрать выражение, образующее показатель, и однократным нажатием клавиши \downarrow вернуться на основной уровень. Если упомянутое выражение не сводится к символу переменной или к неотрицательному числу, оно должно быть заключено в круглые скобки.

Введённые в соответствии с данными правилами формулы, соответствующие 31-му варианту задания, приводятся далее ([рис.25](#)).

Работа с обучающей программой **LinkGear** в дисплейном классе проходит в соответствии с общими положениями, изложенными в п.4 первого раздела настоящего пособия. На [рис.23](#) приведена заполненная Лёней Пушковым регистрационная форма обучающегося, на [рис.24](#) – вид меню для ввода параметров задания после окончания их ввода, на [рис.25](#) – вид меню для ввода расчётных формул. На [рис.26](#) представлен полученный в результате моделирования график зависимости $\varepsilon_{1z}(t)$ (графики зависимостей $\varphi_1(t)$ и $\omega_{1z}(t)$, равно как и таблицу результатов моделирования, мы здесь не приводим – они вполне аналогичны полученным при помощи программы **dk**).

Регистрация

Регистрационный лист. Пожалуйста введите:

Фамилию, Имя, Отчество:

Название группы:

Номер варианта:

Далее Отмена

Рис. 23. Программа **LinkGear**: регистрационная форма обучающегося

Ввод начальных данных

Выбирая соответствующие поля меню, введите параметры для Вашей задачи. Если заданное по умолчанию значение Вас устраивает, то заменять его не нужно.

Параметры двигателя: Коэффициент сопротивления:

Крутизна статической характеристики:

Инерционные параметры:

Геометрические параметры:

Начальные значения дифференциальных переменных:

Время моделирования:

Рис. 24. Программа **LinkGear**: вид меню для ввода параметров задания

Ввод формул

Введите формулы для вычисления Q_H , Q_D , Q_T , Q , A , B , ε_{1z} .

В правой части формулы могут фигурировать переменные φ_1 и ω_{1z}

параметры M_0 , I_1 , $m_{2,3,4}$, $R_{1,3,4}$, $r_{1,3,4}$, $\rho_{3,4}$, μ , k , g .

а также переменные, уже объявленные Вами в предыдущих формулах

$Q_D =$	$-(M_0 + k * \omega_{1z} * R_1 / R_3) * R_1 / R_3$
$Q_H =$	$-\mu * \omega_{1z} * r_1^2 * (R_4 + r_4)^2 * (\cos(\varphi_1))^2 / R_4^2$
$Q_T =$	$-(m_2 + m_4) * g * r_1 * \cos(\varphi_1)$
$Q =$	$Q_D + Q_H + Q_T$
$A =$	$I_1 + m_3 * R_1^2 / 2$
$B =$	$(m_2 + m_4 + m_4 * \rho_4^2 / R_4^2) * r_1^2$
$\varepsilon_{1z} =$	$(Q + B * \omega_{1z}^2 * \sin(2 * \varphi_1) / 2) / (A + B * (\cos(\varphi_1))^2)$

Применить Закрыть

Рис. 25. Программа **LinkGear**: вид меню для ввода расчётных формул

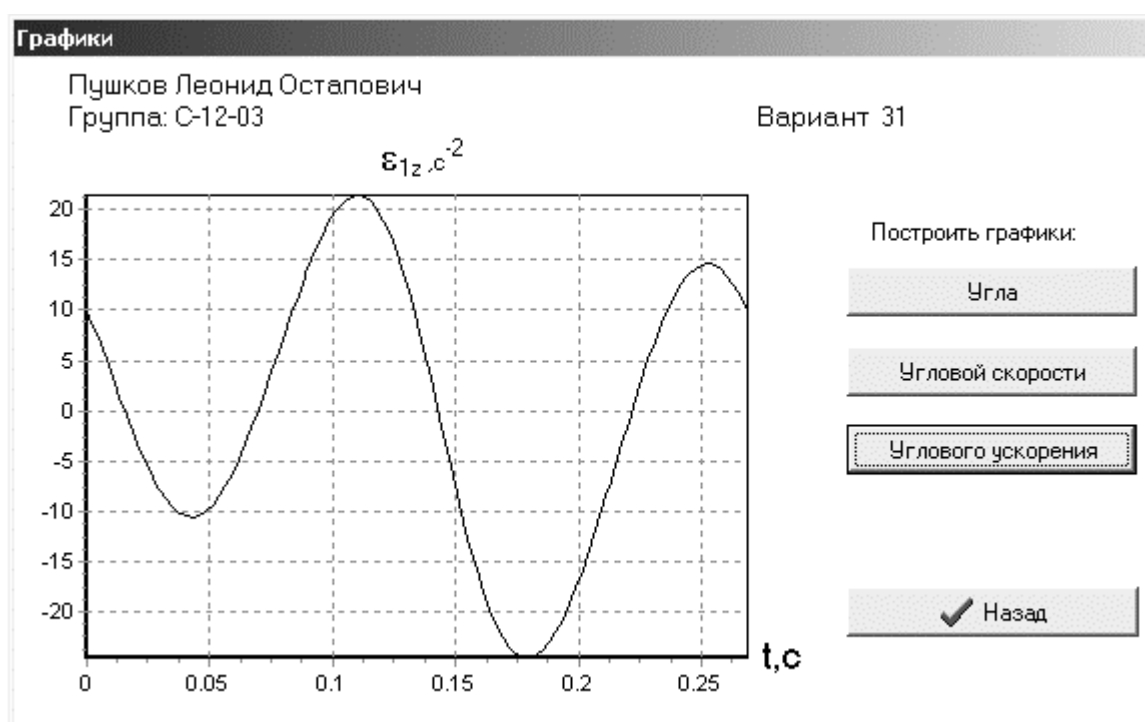


Рис. 26. Программа **LinkGear**: график зависимости $\varepsilon_{1z}(t)$

После сохранения результатов работы в виде отчёта работа студента в дисплейном классе завершается.

3.5. Нахождение динамических реакций

Освободим шкив 3 от связей и обозначим силу натяжения ведущей ветви ременной передачи через S_1 , а ведомой – через S_2 (рис.17, б).

Запишем дифференциальное уравнение вращения шкива вокруг его оси:

$$\frac{m_3 R_3^2}{2} \dot{\omega}_{3z} = M_{dz} + S_1 R_3 - S_2 R_3 . \quad (67)$$

Множитель при $\dot{\omega}_{3z}$ в левой части данной формулы – это момент инерции шкива 3 относительно его центра H , а в правой части (67) записана сумма моментов приложенных к шкиву сил относительно той же точки H .

Учитывая (58) и (63), отсюда находим:

$$S \equiv S_1 - S_2 = - (M_0 + k \omega_{1z} R_1 / R_3) / R_3 - m_3 R_1 \dot{\omega}_{1z} / 2 . \quad (68)$$

Найденное для S выражение и определяет разность сил натяжения ведущей и ведомой ветвей ременной передачи. Вычислим значение S , используя полученную во время работы в дисплейном классе таблицу результатов моделирования.

Угловое ускорение маховика принимает максимальное по модулю значение при $t = 0,179$ с (9-я строка таблицы счёта, рис.22). В этот момент времени $\omega_{1z} = 23,52$ с⁻¹, $\varepsilon_{1z} = -24,62$ с⁻². Подставляя в (68) числовые значения величин, получаем: $S = - (-27 + 0,228 \cdot 23,52 \cdot 0,36 / 0,09) / 0,09 - 7,71 \cdot 0,36 \cdot (-24,62) / 2 = 95,83$ Н.

Библиографический список

1. **Корецкий А.В., Осадченко Н.В.** Решение задач статики на персональном компьютере: Методическое пособие. М.: Издательство МЭИ, 2003. 64 с.
2. **Фигурнов В.Э.** IBM PC для пользователя. М.: Финансы и статистика, 1994. 368 с.
3. **Корецкий А.В., Осадченко Н.В., Устинов В.Ф.** Методические указания по работе студентов с обучающими программами по динамике. М.: Издательство МЭИ, 1996. 58 с.
4. **Новожилов И.В., Зацепин М.Ф.** Типовые расчёты по теоретической механике на базе ЭВМ. М.: Высш. шк., 1986. 136 с.
5. **Хайрер Э., Нёрсетт С., Ваннер Г.** Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Нежёсткие задачи. М.: Мир, 1990. 512 с.
6. **Динамика материальной точки / А.М.Александров, М.Ф.Зацепин, Ю.Г.Мартыненко, В.В.Филиппов.** М.: Моск. энерг. ин-т, 1993. 19 с.
7. **Бутенин Н.В., Лунц Я.Л., Меркин Д.Р.** Курс теоретической механики: Учебник. СПб.: Лань, 2002. 736 с.
8. **Кирсанов М.Н.** Решебник. Теоретическая механика. М.: Физматлит, 2002. 384 с.
9. **Теория механизмов и машин / К.В.Фролов, С.А.Попов, А.К.Мусатов и др.** М.: Высш. шк., 1987. 496 с.

10. **Корецкий А.В., Осадченко Н.В.** Методические указания к расчёту по курсу “Механика”. Термомеханика. М.: Моск. энерг. ин-т, 1991. 32 с.
11. **Зацепин М.Ф., Новожилов И.В.** Уравнения движения механических систем в избыточном наборе переменных / Сб. научно-метод. статей по теоретической механике. Вып.18. М.: Вышш. шк., 1987. С.62 – 66.
12. **Виттенбург Й.** Динамика систем твёрдых тел. М.: Мир, 1980. 292 с.
13. **Погорелов Д.Ю.** Введение в моделирование динамики систем тел. Брянск: Брянский гос. техн. ун-т, 1997. 156 с.
14. **Корецкий А.В., Осадченко Н.В.** Решение задач кинематики на персональном компьютере: Методическое пособие. М.: Издательство МЭИ, 2004. 48 с.

Содержание

Введение	3
1. Обзор обучающих программ по динамике	4
1.1. Общие сведения о назначении и использовании обучающих программ по динамике	4
1.2. Типовой расчёт по динамике материальной точки	8
1.3. Типовой расчёт по динамике твёрдого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси	10
1.4. Типовой расчёт по динамике машины с кулисным приводом	13
1.5. Типовой расчёт по динамике машины с кривошипно-ползунным приводом	18
1.6. Типовой расчёт по динамике манипулятора	22
1.7. Индивидуальное домашнее задание по динамике	28
2. Пример использования программы dk при выполнении индивидуального домашнего задания по динамике	38
3. Пример выполнения задания типового расчёта по динамике машины с кулисным приводом	44
3.1. Постановка задачи	44
3.2. Пример составления уравнений движения машины	52
3.3. Выполнение задания с помощью программы dk	56
3.4. Выполнение задания с помощью программы LinkGear	59
3.5. Нахождение динамических реакций	62
Библиографический список	62