вим граф $B \xrightarrow[\varphi]{b} C$. Получим компоненты скорости $v_{Cx} = v_{Bx} - \dot{\varphi} b \sin\varphi$, $v_{Cy} = v_{By} + \dot{\varphi} b \cos\varphi$. Точка B — неподвижный шарнир, поэтому при $v_{Bx} = v_{By} = 0$ получаем скорость поршня $v_{Cx} = -\dot{\varphi} b \sin\varphi$, $v_{Cy} = \dot{\varphi} b \cos\varphi$, откуда $v_C^2 = (\dot{\varphi} b)^2$. Аналогично из графа $A \xrightarrow[\varphi]{a} B$ имеем $v_{Bx} = v_{Ax} - \dot{\varphi} a \sin\varphi$, $v_{By} = v_{Ay} + \dot{\varphi} a \cos\varphi$. Откуда находим компоненты скорости центра масс муфты $v_{Ax} = \dot{\varphi} a \sin\varphi$, $v_{Ay} = -\dot{\varphi} a \cos\varphi$, и $v_A^2 = (\dot{\varphi} a)^2$. Кинетическая энергия системы (муфта 1 и ползун 2) имеет вид

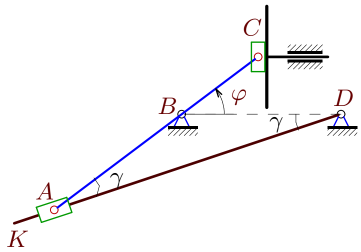

Рис. 137

$$T = \frac{m_1 v_A^2}{2} + \frac{J_1 \omega_1^2}{2} + \frac{m_2 v_C^2}{2},$$

где $\omega_1 = \dot{\varphi}/2$, или, с учетом выражений $v_C^2 = (\dot{\varphi} b)^2$, $v_A^2 = (\dot{\varphi} a)^2$, получаем вид $T = A\dot{\varphi}^2/2$. Обобщенная сила

$$Q = (-F v_{Cx} + (-m_1 g) v_{Ay} + (-m_2 g) v_{Cy} + M\omega_1) / \dot{\varphi} =$$
$$= F b \sin\varphi + (a m_1 - b m_2) g \cos\varphi + M/2.$$

Кинетическая энергия не зависит от обобщенной координаты, поэтому уравнение Лагранжа имеет простой вид $\ddot{\varphi} A = Q$.

Системы с двумя степенями свободы

Система уравнений Лагранжа 2-го рода для систем с двумя степенями свободы имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_1} = Q_1, \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_2}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_2} = Q_2. \end{aligned} \tag{3.12}$$

Обобщенный координаты q_1, q_2, соответствующие обобщенные силы — Q_1, Q_2.

Задача 39. Система состоит из однородного цилиндра радиусом R массой m_1 и бруска массой m_2 (рис. 138). Брусок скользит по гладкой горизонтальной поверхности, цилиндр катится без проскальзывания по бруску. К оси цилиндра приложена горизонтальная сила F, к цилиндру — момент M. Определить ускорение бруска.

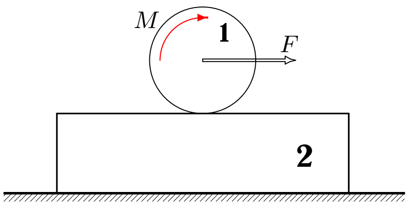

Рис. 138

Решение

Выбираем две независимые переменные $q_1 = x_1$ и $q_2 = x_2$, однозначно описывающие положение системы. Пусть переменная x_1 указывает положение центра цилиндра по отношению к неподвижной системе отсчета, а x_2 — положение бруска относительно той же неподвижной системы отсчета [1]. Направляем оси x_2 и x_1 в сторону движения, т.е. направо (рис.139).

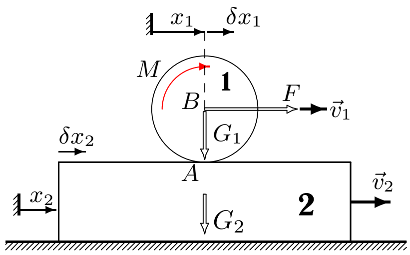

Рис. 139

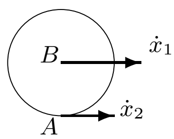

Рис. 140

Выражаем кинетическую энергию системы через обобщенные скорости $\dot{x}_1 = v_1$ и $\dot{x}_2 = v_2$. Кинетическую энергию всей системы представляем в виде суммы кинетических энергий цилиндра и бруска: $T = T_1 + T_2$. Находим кинетическую энергию цилиндра, совершающего плоское движение,

$$T_1 = \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{J\omega_1^2}{2}. \tag{3.13}$$

Угловая скорость ω_1 зависит от разности скоростей центра цилиндра и точки касания (рис. 140). Составляем кинематический граф $A \xrightarrow[\pi/2]{1} B$.

[1] В качестве обобщенной координаты q_1 можно также взять угол поворота цилиндра или смещение центра цилиндра относительно бруска. Возможны и иные наборы обобщенных координат.

Получаем уравнение для скоростей в проекции на ось x:

$$v_{Bx} = v_{Ax} - \omega_{1z} R \sin(\pi/2),$$

где R — радиус цилиндра. Так как цилиндр катится по бруску без проскальзывания, скорость v_{Ax} точки касания равна скорости бруска $\dot{x}_2$. Отсюда имеем

$$\omega_{1z} = (\dot{x}_2 - \dot{x}_1)/R. \tag{3.14}$$

Подставляем в (3.13) момент инерции однородного цилиндра относительно его оси, $J = m_1 R^2/2$. В результате, с учетом (3.14), получаем выражение для кинетической энергии цилиндра:

$$T_1 = \frac{m_1}{4}(2\dot{x}_1^2 + (\dot{x}_2 - \dot{x}_1)^2).$$

Кинетическая энергия бруска $T_2 = m_2 \dot{x}_2^2/2$. Кинетическая энергия всей системы

$$T = \frac{m_1}{4}(2\dot{x}_1^2 + (\dot{x}_2 - \dot{x}_1)^2) + \frac{m_2 \dot{x}_2^2}{2}.$$

Обобщенные силы Q_1, Q_2 вычисляем по формуле $Q_i = \partial N/\partial \dot{x}_i$, $i = 1, 2$, где N — мощность активных сил системы, вычисленная как сумма скалярных произведений сил на скорости точек их приложения и моментов на угловые скорости: $N = \vec{F} \cdot \vec{v}_B + \vec{M} \cdot \vec{\omega}_1$. Очевидно, $F_x = F$, $M_z = -M$. Отсюда имеем $N = F\dot{x}_1 - (M/R)(\dot{x}_2 - \dot{x}_1)$. Дифференцируем это выражение и находим $Q_1 = M/R + F$, $Q_2 = -M/R$.

Записываем уравнения Лагранжа (3.3.2) и вычисляем входящие в них производные:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial T}{\partial v_1} = m_1 v_1 + \frac{m_1}{2}(v_1 - v_2), && \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial v_1}\right) = \frac{3m_1}{2}\, a_1 - \frac{m_1}{2}\, a_2, \\
&\frac{\partial T}{\partial v_2} = m_2 v_2 + \frac{m_1}{2}(v_2 - v_1), && \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial v_2}\right) = -\frac{m_1}{2}\, a_1 + \left(\frac{m_1}{2} + m_2\right) a_2, \\
&\frac{\partial T}{\partial x_1} = 0, && \frac{\partial T}{\partial x_2} = 0,
\end{aligned}$$

где $a_1 = \dot{v}_1$, $a_2 = \dot{v}_2$. В результате, уравнения Лагранжа принимают вид

$$\begin{aligned}
&3a_1 m_1 - a_2 m_1 = 2F + 2M/R, \\
&-a_1 m_1 + a_2(m_1 + 2m_2) = -2M/R.
\end{aligned} \tag{3.15}$$

Решаем систему уравнений (3.15):

$$a_1 = \frac{F(m_1 + 2m_2) + 2m_2 M/R}{m_1(m_1 + 3m_2)}, \quad a_2 = \frac{F - 2M/R}{m_1 + 3m_2}.$$

Maple-программа для решения этой задачи дана на с. 211.

Задача 40. Механическая система с идеальными стационарными связями имеет две степени свободы и состоит из груза A и однородных цилиндров B и C. Цилиндр C падает вертикально вниз и передает движение цилиндру B и грузу A, с которыми он связан нерастяжимой нитью. Нить разматывается с цилиндра C. Даны массы тел m_A, m_B, m_C (рис.141). Найти ускорение груза A.

Решение

Выбираем две независимые переменные $q_1 = x$ и $q_2 = \varphi$, однозначно описывающие положение системы (рис.142). Переменная x указывает положение груза по отношению к неподвижной системе отсчета, а φ — поворот цилиндра C.

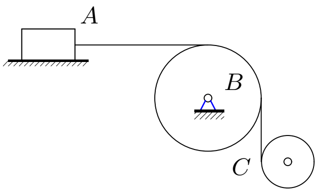

Рис. 141

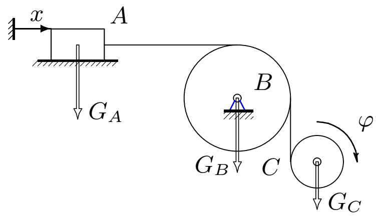

Рис. 142

Выражаем кинетическую энергию системы через обобщенные скорости $\dot{x}$ и $\dot{\varphi}$.

Кинетическую энергию всей системы представляем в виде суммы кинетических энергий груза и цилиндров: $T = T_A + T_B + T_C$.

Находим кинетическую энергию поступательного движения груза,

$$T_A = \frac{m_A \dot{x}^2}{2}.$$

Кинетическая энергия вращающегося цилиндра

$$T_B = \frac{J_B \omega_B^2}{2} = \frac{m_B R_B^2 (\dot{x}/R_B)^2}{2 \cdot 2} = \frac{m_B \dot{x}^2}{4}.$$

Находим кинетическую энергию цилиндра C, совершающего плоское движение:

$$T_C = \frac{m_C v_C^2}{2} + \frac{J_C \omega_C^2}{2}.$$

Угловая скорость цилиндра C равна $\omega_C = \dot\varphi$. Скорость центра масс складывается из переносной скорости $\dot x$ и относительной $R_C\dot\varphi$:

$$T_C = \frac{m_C(\dot x + R_C\dot\varphi)^2}{2} + \frac{m_C R_C^2\dot\varphi^2}{4}.$$

Кинетическая энергия всей системы

$$T = (1/2)\dot x^2(m_A + m_B/2 + m_C) + \dot x\dot\varphi m_C R_C + (3/4)\dot\varphi^2 m_C R_C^2.$$

Обобщенную силу Q_x вычисляем по формуле $Q_x = \delta A_x/\delta x$, где δA_x — элементарная работа всех сил на перемещении δx. Фиксируем угол поворота цилиндра C: $\delta\varphi = 0$. Груз A перемещается по горизонтали на расстояние δx, цилиндр B поворачивается на некоторый угол, а цилиндр C поступательно перемещается вниз на расстояние δx. На этом перемещении работу совершает только сила $m_C g$, следовательно, $\delta A_x = m_C g\delta x$ и $Q_x = m_C g$. Аналогично, фиксируя перемещение груза ($\delta x = 0$), даем приращение углу поворота цилиндра C и вычисляем $Q_\varphi = m_C g R_C$.

Записываем уравнения Лагранжа (3.3.2) и вычисляем входящие в них производные:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot x} = \dot x(m_A + 0.5m_B + m_C) + \dot\varphi R_C m_C,$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot x}\right) = \ddot x(m_A + 0.5m_B + m_C) + \ddot\varphi R_C m_C,$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot\varphi} = \dot x R_C m_C + 1.5\dot\varphi R_C^2 m_C,\quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot\varphi}\right) = \ddot x R_C m_C + 1.5\ddot\varphi R_C^2 m_C,$$

$$\frac{\partial T}{\partial x} = 0,\quad \frac{\partial T}{\partial \varphi} = 0.$$

В результате, уравнения Лагранжа принимают вид

$$\begin{aligned} &(m_A + 0.5m_B + m_C)\ddot x + m_C R_C\ddot\varphi = m_C g,\\ &m_C\ddot x + 1.5m_C\ddot\varphi R_C = m_C g. \end{aligned} \tag{3.16}$$

Решаем систему уравнений (3.16) и находим ускорения:

$$\ddot x = \frac{2m_C g}{6m_A + 3m_B + 2m_C},\quad \ddot\varphi = \frac{2(2m_A + m_B)g}{R_C(6m_A + 3m_B + 2m_C)}.$$

Задача 41. Цилиндр радиуса r катится без проскальзывания по бруску. Брусок скользит по гладкой горизонтальной поверхности (рис. 143). Масса бруска 1 равна $4m$, масса точки 2, расположенной на ободе цилиндра, равна m, цилиндра 3 — $3m$. За обобщенные координаты принять смещение бруска x и угол поворота цилиндра φ. Найти функцию Рауса.