Уравнение Гамильтона

Консервативная система имеет s степеней свободы с обобщенными координатами $q_i, i = 1, .., s$. Уравнения Лагранжа для не имеют вид

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0,\ \ i = 1, .., s, \tag{1}$$

Докажем, что эта система уравнений эквивалентна системе $2s$ уравнений первого порядка

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i},\ \ i = 1, .., s, \tag{2}$$

где

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}. \tag{3}$$

Введена функция Гамильтона

$$H(p_j, q_j, t) = \sum_{i=1}^{s} p_i \dot{q}_i - L(q_j, \dot{q}_j, t), \tag{4}$$

$j = 1, ..., s$.

Доказательство

Из системы s уравнений (3) выразим обобщенные скорости $\dot{q}_i$. Таким образом, в (4) функция Гамильтона зависит от p_i, q_i, t. Полный дифференциал левой части (4):

$$dH = \sum_{i=1}^{s} \frac{\partial H}{\partial p_i} dp_i + \sum_{i=1}^{s} \frac{\partial H}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial H}{\partial t} dt. \tag{5}$$

Полный дифференциал правой части (4):

$$\sum_{i=1}^{s} \dot{q}_i dp_i + \sum_{i=1}^{s} p_i d\dot{q}_i - \sum_{i=1}^{s} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} d\dot{q}_i - \sum_{i=1}^{s} \frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i - \frac{\partial L}{\partial t} dt. \tag{6}$$

Упрощаем согласно (3)

$$\sum_{i=1}^{s} \dot{q}_i dp_i - \sum_{i=1}^{s} \frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i - \frac{\partial L}{\partial t} dt. \tag{7}$$

Сравнивая правую (7) и левую (5) части вариации, получаем

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i},\ \frac{\partial H}{\partial q_i} = -\frac{\partial L}{\partial q_i},\ \frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t}. \tag{8}$$

Согласно уравнению Лагранжа (1)

$$\dot{p}_i = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) = \frac{\partial L}{\partial q_i},\ \ i = 1, .., s, \tag{9}$$

В итоге

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i},\ \ \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}. \tag{10}$$

Свойства функции Гамильтона.

1. Вычислим полную производную

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} + \sum_{i=1}^{s} \frac{\partial H}{\partial q_i}\dot{q}_i + \sum_{i=1}^{s} \frac{\partial H}{\partial p_i}\dot{p}_i. \tag{11}$$

Подставим сюда $\dot{q}_i$ и $\dot{p}_i$ из (10)

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} + \sum_{i=1}^{s} \frac{\partial H}{\partial p_i}\frac{\partial H}{\partial q_i} - \sum_{i=1}^{s} \frac{\partial H}{\partial p_i}\frac{\partial H}{\partial q_i}. \tag{12}$$

Следовательно, *полная и частная производные от H по времени равны.*

2. На основании теоремы Эйлера об однородных функциях[1]

$$\sum_{i=1}^{s} \dot{q}_i p_i = \sum_{i=1}^{s} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i = \sum_{i=1}^{s} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i = 2T. \tag{13}$$

Согласно (4)

$$H = \sum_{i=1}^{s} p_i\dot{q}_i - L = 2T - (T - \Pi) = T + \Pi = E.$$

В случае стационарных связей функция Гамильтона равна полной механической энергии.

Задача. Найти функцию Гамильтона механической системы с двумя степенями свободы по известной функции Лагранжа

$$L = \dot{q}_1^2 + \dot{q}_1\dot{q}_2 + \dot{q}_2^2 - \dot{q}_2\cos q_1 + \sin q_2.$$

Решение

1. Дифференцируя функцию Лагранжа по $\dot{q}_1$ и $\dot{q}_2$, находим обобщенные импульсы p_j:

$$\begin{aligned} p_1 &= 2\dot{q}_1 + \dot{q}_2, \\ p_2 &= \dot{q}_1 + 2\dot{q}_2 - \cos q_1. \end{aligned} \tag{4}$$

2. Решаем систему (4) относительно обобщенных скоростей:

$$\begin{aligned} \dot{q}_1 &= (2p_1 - p_2 - \cos q_1)/3, \\ \dot{q}_2 &= (2p_2 - p_1 + 2\cos q_1)/3. \end{aligned} \tag{5}$$

3. Записываем функцию Гамильтона (1), в которой обобщенные скорости заменяем на выражения (5):

$$H = \frac{1}{3}\left(p_1^2 - p_1p_2 + p_2^2 + (2p_2 - p_1)\cos q_1 + \cos^2 q_1\right) - \sin q_2.$$

Литература

1. Бухгольц Н.Н. Основной курс теоретической механики. В 2-х частях. Ч. 2. Динамика системы материальных точек. — СПб.: Лань, 2009.

2. Голубев Ю.Ф. Основы теоретической механики. М.: МГУ, 2000.

3. Яблонский А.А. Курс теоретической механики. Часть 2. М.: Высшая школа., 1970.

[1] Пример 1. Функция $f(x, y, z) = x^2yz + xy^3 + z^4$ — однородная 4-й степени. Пример 2. Функция $T(u, v) = u^2 + v^2 + uv$ — однородная 2-й степени.