



# Вязко-пластическое течение материалов

---

Физико-математические основы технологии  
обработки давлением

*под общей редакцией И.А. Кийко*

**Пластическое течение материалов.  
Физико-математические основы технологии обработки  
давлением**

Представляемая вниманию читателя книга состоит из двух частей. Первая содержит изложение четырех статей А.А. Ильюшина по теории пластических течений, выполненных им в 50-е годы прошлого века. Во второй излагается современное состояние проблемы. Приводится математическая формулировка общей задачи течения, выводятся условия подобия и правила моделирования, устанавливается аналогия с теорией малых упруго-пластических деформаций; излагается теория течения тонких слоев материала по поверхностям. Развивается тензорная (линейная и нелинейная) теория исчерпания запаса пластичности, устанавливаются правила моделирования этого явления. Рассмотрены многочисленные примеры. Формулируются проблемы, решения которых способствовало бы дальнейшему развитию теории.

Книга будет полезна научным работникам и инженерам исследователям, занимающимся анализом и конструированием технологических процессов обработки давлением; много полезного найдут в ней аспиранты и студенты соответствующих специальностей.

# ОГЛАВЛЕНИЕ

## Часть I

### Работы А.А.Ильюшина по теории пластических течений (продолжение)

4. Некоторые вопросы теории пластического течения. (Изв. АН СССР, ОТН, №2, 1958, с. 64–86) ..... 5

## Часть II

### Теория пластических течений — современное состояние и некоторые проблемы (И.А.Кийко)

#### Глава I. Основы теории

- §1. Определяющие соотношения ..... 48
- §2. Начально–краевая задача ..... 55
- §3. Исчерпание запаса пластичности ..... 63
1. Тензор и меры пластичности ..... 65
  2. Линейная теория ..... 68
  3. Обобщения и примеры ..... 72

#### Глава II. Течение в тонких слоях

- §1. Задача Л.Прандтля и ее обобщения ..... 77
1. Сжимаемость ..... 78
  2. Упрочняющийся материал ..... 84
  3. Трехслойная полоса ..... 89
  4. Учет сил инерции ..... 92
- §2. Течение плоского слоя — динамика ..... 97
1. Постановка задачи ..... 97
  2. Первый основной вариант ..... 99
  3. Обобщения и примеры ..... 106

§3. Течение плоского слоя — кинематика .....	111
1. Уравнение растекания .....	111
2. Решение подобия .....	117
3. Возможная неустойчивость течения .....	118
4. Сжимаемый материал .....	121
<b>Некоторые нерешенные вопросы .....</b>	<b>125</b>
<b>Литература .....</b>	<b>129</b>

## НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ ТЕОРИИ ПЛАСТИЧЕСКОГО ТЕЧЕНИЯ<sup>1)</sup>

В процессах обработки металлов давлением между инструментом и заготовкой существует как силовое, так и тепловое взаимодействие.

Для расчета механических параметров таких процессов можно пользоваться теорией пластического течения, основные положения которой рассмотрены в работах [1-3] и инженерными методами. Схематическое изложение более общей теории дано в работе [4]. Обзор иностранных работ дан Прагером [5].

Обозначая через  $x, y, z$  неподвижные относительно какой-либо точки рассматриваемого объема среды или движущиеся с постоянной скоростью оси координат, мы имеем две основные возможности для описания явлений деформации, которые соответственно называются лагранжевым или эйлеровым представлениями движения.

Можем считать, что  $x, y, z$  есть начальные координаты какой-либо точки  $A$  тела при  $t = 0$ , которые затем, при  $t > 0$ , изменяются во времени и обозначаются  $X, Y, Z$ , так что проекции перемещения точки  $A$  будут

$$U_x = X - x, \quad U_y = Y - y, \quad U_z = Z - z. \quad (0.1)$$

Рассматривая соседнюю начальную точку  $A'(x', y', z')$  и зная ее движение  $(X', Y', Z')$ , можно найти удлинение волокна  $AA'$ , а рассматривая еще одну соседнюю точку  $A''$ , можно найти и угол между волокнами  $AA'$  и  $AA''$  в любой момент времени, т. е. определить конечные деформации в окрестности точки  $A$ . Выражения всех шести компонент конечной деформации через координаты  $X, Y, Z$  или перемещения  $U_x, U_y, U_z$  известны. Однако метод лагранжевых координат для постановки задач теории пластического течения, с нашей точки зрения, менее удобен.

Обозначая через  $v_x, v_y, v_z$  проекции скорости различных точек, проходящих через неподвижную геометрическую точку  $x, y, z$  в разные моменты времени, мы, очевидно, будем иметь

---

<sup>1)</sup> Доклад на научной сессии ОТН АН СССР, посвященной сороковой годовщине Великой Октябрьской социалистической революции.

возможность довольно просто описать лишь изменение деформации тела, происходящие за бесконечно малый промежуток времени  $dt$ . Пусть в момент времени  $t$  в точке  $x, y, z$  находится точка  $M$ , а в близких геометрических точках  $(x', y', z')$  и  $(x'', y'', z'')$  находятся точки  $M'$  и  $M''$ . Тогда за  $dt$  координаты  $M$  изменятся на  $v_x dt, v_y dt, v_z dt$ , а координаты  $M'$  и  $M''$  на  $v'_x dt, v'_y dt, v'_z dt$  и  $v''_x dt, v''_y dt, v''_z dt$ , и, таким образом, можно найти изменение за  $dt$  длин волокон  $MM', MM''$  и угла между  $MM'$  и  $MM''$ . Относя к  $dt$  величины получающихся приращений деформаций, получим известные точные выражения скоростей деформаций [2]

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial v_x}{\partial x}, \dots, \quad \varepsilon_{xy} = \frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x}, \dots \quad (0.2)$$

Обозначим  $X, Y, Z$  лагранжевы координаты точки  $M$  и пусть в момент  $t$  точка  $M$  находится в точке  $(x, y, z)$  эйлерова пространства, так что в этот момент  $X = x, Y = y, Z = z$ . Тогда, очевидно

$$\frac{dX}{dt} = v_x, \quad \frac{dY}{dt} = v_y, \quad \frac{dZ}{dt} = v_z, \quad (0.3)$$

причем  $v_x(x, y, z, t) = v_x(X, Y, Z, t)$ . Если скорости  $v_x, v_y, v_z$  известны как функции координат  $x, y, z, t$ , то уравнения (0.3) позволяют найти лагранжевы координаты этой точки и таким образом устанавливают связь между эйлеровым и лагранжевым представлениями движения.

Любая физическая величина  $N$ , связанная с фиксированной физической точкой (плотность  $\rho$ , давление  $p$ , температура  $\vartheta$ , содержание какой-нибудь составляющей в многофазной системе, координата, скорость, ускорение и т. д.), может быть изучена как в лагранжевом, так и в эйлеровом пространствах. Пусть во втором  $N = N(x, y, z, t)$ . Тогда согласно (0.3) скорость ее изменения по времени в определенной физической точке  $M$  будет

$$\frac{dN}{dt} = \frac{\partial N}{\partial x} v_x + \frac{\partial N}{\partial y} v_y + \frac{\partial N}{\partial z} v_z + \frac{\partial N}{\partial t}, \quad (0.4)$$

причем нужно положить  $x = X, y = Y, z = Z$ . Выражение (0.4) называется полной или субстанциональной производной от  $N$

по времени. Например, ускорение точки  $M$  будет

$$\frac{dv_x}{dt} = \frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z}. \quad (0.5)$$

**§1. Скалярные и векторные свойства пластически деформируемого металла [5,6].** Рассмотрим в момент  $t$  в окрестности точки  $M$  некоторый объем металла. Скорость его относительного изменения будет

$$\Delta = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}. \quad (1.1)$$

Полное относительное изменение этого объема металла за весь промежуток времени  $t$  можно определить величиной  $\theta$ , полная производная по времени от которой равна скорости  $\Delta$ :

$$\frac{d\theta}{dt} = \Delta = 3\varepsilon, \quad (1.2)$$

где полная производная  $d\theta/dt$  выражается согласно (0.4).

Плотность  $\rho$  удовлетворяет уравнению сохранения массы

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho v_x) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v_y) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho v_z) = 0. \quad (1.3)$$

Отсюда и из (1.2) имеем

$$\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} + \frac{d\theta}{dt} = 0 \text{ или } \theta = \ln \frac{\rho_0}{\rho}. \quad (1.4)$$

Давление окружающего вещества на рассматриваемый малый объем в твердом теле не является равномерным со всех сторон, но все же существует среднее давление  $p$ , которое следует рассматривать, как среднее арифметическое истинных давлений по любым трем взаимно ортогональным площадкам, причем известно, что величина  $p$  не зависит от способа выбора этих площадок, т. е. является инвариантной.

Температура  $\vartheta$  рассматриваемого объема может изменяться с течением времени, причем плотность вещества  $\rho$  будет изменяться как за счет теплового объемного расширения, так и за

счет изменения структуры вещества, происходящего при высоких температурах.

Опыт показывает, что при давлениях  $p$ , превосходящих сопротивление металла сдвигу при любой температуре, сама сдвиговая пластическая деформация лишь очень мало влияет на изменение плотности и составляет не более 5-10% от величины упругого изменения плотности за счет давления  $p$ .

Через неподвижный геометрический параллелепипед с ребрами  $dx, dy, dz$  в точке  $(x, y, z)$  эйлерова пространства протекает металл. В момент  $t$  в нем находится определенный физический объем массы  $\rho dx dy dz$ . За время  $dt$  форма этого элемента изменится, так что скорости деформации будут

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial v_x}{\partial x}, \dots, \quad \varepsilon_{xy} = \frac{\partial \varepsilon_y}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon_x}{\partial y}, \dots \quad (1.5)$$

Выделяя среднее изменение длин граней за счет изменения объема  $\Delta$  (1.1), т. е. удлинение  $\varepsilon = \Delta/3$ , заключаем, что сдвиговая скорость деформации характеризуется величинами

$$v_{xx} = \varepsilon_{xx} - \varepsilon \dots, \quad v_{xy} = \varepsilon_{xy}/2, \dots \quad (1.6)$$

причем, как известно [7], она представляет собой октаэдрическую скорость сдвига, которая с точностью до множителя равна

$$\varepsilon_i = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{\frac{(v_{xx} - v_{yy})^2 + (v_{yy} - v_{zz})^2 + (v_{zz} - v_{xx})^2 + 6(v_{xy}^2 + v_{yz}^2 + v_{zx}^2)}{}} \quad (1.7)$$

Сдвиговое октаэдрическое напряжение  $\tau_i = (\sqrt{2}/3)\sigma_i$ , есть результирующее касательное напряжение<sup>2)</sup>. Напряжения, действующие по граням неподвижного прямоугольного параллелепипеда  $dx dy dz$ , можно записать в виде

$$\begin{aligned} \sigma_x &= -p + S_{xx}, & \tau_{xy} &= S_{xy}, \\ \sigma_y &= -p + S_{yy}, & \tau_{yz} &= S_{yz}, \\ \sigma_z &= -p + S_{zz}, & \tau_{zx} &= S_{zx}, \end{aligned} \quad (1.8)$$

---

<sup>2)</sup> Оно, как и  $\gamma_i$  характеризуется не только величиной  $\tau_i$ , но и направлением, т.е. одним углом на октаэдрической площадке и тремя главными осями октаэдра.

и потому

$$\sigma_i = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{(S_{xx} - S_{yy})^2 + \dots + 6(S_{xy}^2 + \dots)}. \quad (1.9)$$

Процесс деформации малого объема металла во времени является весьма сложным, что ясно и с формальной точки зрения: из шести величин  $v_{xx}, \dots, v_{xy}$  пять являются независимыми ( $v_{xx} + v_{yy} + v_{zz} = 0$ ) и могут во времени изменяться совершенно произвольно; значит, главные оси скоростей деформаций и направление октаэдрической скорости сдвига будут менять свою ориентацию относительно физических частиц объема. Значит, например, в поликристаллическом теле с течением времени сдвиги будут идти не по одним и тем же плоскостям одних и тех же зерен, а перераспределяться между зернами и плоскостями. В механике сплошной среды такой процесс мы называем сложным нагружением.

Можно считать доказанным [6], что для так называемых траекторий нагружения малой кривизны главные оси скоростей деформаций сдвигов и направление октаэдрической скорости сдвига совпадают в каждый момент с главными осями напряжений и направлением октаэдрического напряжения соответственно. Это векторное свойство процессов пластического течения металлов (если до деформации они в среднем изотропны) справедливо при различных, в том числе и переменных температурах. Математически оно выражается формулами:

$$S_{xx} = \frac{2\sigma_i}{3\varepsilon_i} v_{xx}, \dots, \quad S_{xy} = \frac{2\sigma_i}{3\varepsilon_i} v_{xy}. \quad (1.10)$$

Эти формулы, по существу, были предложены еще Сен-Венаном [9] и Леви [10], но только недавно [6] установлено для каких процессов они действительно справедливы. Из них вытекает, между прочим, что если тело сжимается в направлении оси  $x$  с постоянной скоростью, то достаточно приложить весьма малую силу в поперечном направлении, чтобы возникла поперечная скорость, во столько раз меньшая, во сколько поперечная сила меньше продольной.

Теперь можно составить выражение элементарной работы, которую за время  $dt$  совершают действующие на единичный

объем вещества (мысленно выделенный из тела в точке  $x, y, z$ ) напряжения; бесконечно малые деформации равны  $\varepsilon_{xx}dt, \dots, \varepsilon_{xy}dt, \dots$  и потому  $\delta U = \sigma_x \varepsilon_{xx}dt + \dots + \tau_{xy} \varepsilon_{xy}dt$ .

На основании (1.5), (1.8), (1.10) и (1.16) получаем

$$\delta U = -p d\theta + \sigma_i \varepsilon_i dt,$$

т. е. работа складывается из работы давления  $p$  на изменении объема  $d\theta$  и работы сдвигового напряжения  $\sigma_i$  на элементарном сдвиге  $\varepsilon_i dt$ . Отсюда ясна целесообразность введения новой скалярной характеристики деформации — степени деформации  $e$ , которая подобно  $\theta$  (1.2) определяется соотношением

$$\frac{de}{dt} = \varepsilon_i \quad (1.11)$$

Степень деформации  $e$  в процессах сложного нагружения является аналогом известной величины интенсивности деформаций в теории малых деформаций. В общем случае она находится из дифференциального уравнения (1.11), причем  $de/dt$  есть полная производная по времени. Поясним ее на примере.

Однородной простой конечной деформацией тела называется такая, при которой главные оси остаются неизменными и всюду одинаково направленными в теле, причем если эти оси выбирать в качестве эйлеровых координат, то скорости определяются формулами

$$v_x = A\varphi(t)x = \frac{dx}{dt}, \quad v_y = B\varphi(t)y = \frac{dy}{dt}, \quad v_z = C\varphi(t)z = \frac{dz}{dt}.$$

Отсюда, полагая  $\int \varphi dt = \Psi$ , находим лагранжевы координаты

$$A\Psi = \ln \frac{X}{X_0}, \quad B\Psi = \ln \frac{Y}{Y_0}, \quad C\Psi = \ln \frac{Z}{Z_0},$$

где  $X_0, Y_0, Z_0$  — начальные длины отрезков  $XYZ$ .

Находим

$$\varepsilon_{xx} = A\varphi, \quad \varepsilon_{yy} = B\varphi, \quad \varepsilon_{zz} = C\varphi, \quad \varepsilon_{xy} = \varepsilon_{yz} = \varepsilon_{zx} = 0,$$

и, определяя  $\varepsilon_i$  по (1.7), получаем уравнение (1.11) в виде

$$\frac{de}{dt} = \frac{\sqrt{2}}{3} \varphi \sqrt{(A-B)^2 + (B-C)^2 + (C-A)^2}.$$

После интегрирования по  $t$ , учитывая найденные выше выражения  $A\Psi$ ,  $B\Psi$ ,  $C\Psi$ , находим степень деформации:

$$e = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{\left(\ln \frac{XY_0}{X_0Y}\right)^2 + \left(\ln \frac{YZ_0}{Y_0Z}\right)^2 + \left(\ln \frac{ZX_0}{Z_0X}\right)^2}. \quad (1.12)$$

Как видим, в рассматриваемом случае величина  $e$  есть интенсивность главных логарифмических деформаций.

На основании (1.11) выражение элементарной работы принимает вид, где  $W$  — мощность.

$$\delta U = W dt = -p d\theta + \sigma_i de \quad (W = -p\Delta + \sigma_i \varepsilon_i). \quad (1.13)$$

Если вся кинематическая и тепловая история процесса деформации рассматриваемого элемента тела известна, должна быть известна и работа  $\delta U$  или мощность  $W$ . Значит должно существовать два соотношения, определяющих силовые скалярные величины  $p$  и  $\sigma_i$  через всевозможные кинематические и температурные скалярные величины. Эти соотношения называются уравнениями состояния материала и в достаточно общем случае они могут иметь вид

$$\rho = \Phi_1[\theta, \vartheta, e, t], \quad \sigma_i = \Phi_2[\theta, \vartheta, e, t], \quad (1.14)$$

где  $\Phi_1$ ,  $\Phi_2$  — некоторые функционалы указанных параметров по времени, учитывающие наряду с другими и влияние сдвигов на плотность, давления на сопротивление сдвигу, температуры, фазовых превращений, ползучести и др..

Эти функционалы для твердых тел в широком диапазоне изменения параметров еще очень мало изучены и отыскание их составляет сложную проблему физики твердого тела. Вместе с векторным свойством металлов (1.10) уравнения (1.14) определяют выражения внутренних напряжений через три компоненты скорости движения  $v_x$ ,  $v_y$ ,  $v_z$  и температуру  $\vartheta$

$$\sigma_x = -p + \frac{2\sigma_i}{3\varepsilon_i} \left( \frac{\partial v_x}{\partial x} - \varepsilon \right), \dots, \quad \tau_{xy} = \frac{\sigma_i}{3\varepsilon_i} \left( \frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y} \right), \dots \quad (1.15)$$

В процессах обработки металлов давлением достигаются весьма значительные деформации сдвига, температура обычно

не превосходит порядка  $1000^\circ$ , а давления ограничены мощностью прессов. При этих условиях температурные объемные деформации, включая и составляющие за счет фазовых превращений, вместе с упругими изменениями объемов оказываются весьма малыми сравнительно со степенью деформации  $e$ . Поэтому первое уравнение (1.14) принимает вид обычного условия несжимаемости

$$\Delta = 0, \quad (\theta = 0). \quad (1.16)$$

Это же условие почти всегда применяется и при расчете ползучести металлов.

Сдвиговое сопротивление в этих задачах главным образом зависит от температуры  $\vartheta$ , скорости деформации  $\varepsilon_i$  и степени деформации  $e$ , причем обычно производные от  $\sigma_i$  конечны и удовлетворяют неравенствам:

$$\frac{\partial \sigma_i}{\partial \vartheta} \leq 0, \quad \frac{\partial \sigma_i}{\partial \varepsilon_i} > 0, \quad \frac{\partial \sigma_i}{\partial e} \geq 0. \quad (1.17)$$

Таким образом, достаточно общим выражением сдвиговых свойств металлов, охватывающим процессы пластического течения при обработке металлов давлением и, в основном, ползучести, будет уравнение  $\sigma_i = \Phi(\vartheta, \varepsilon_i, e) = 3\mu\varepsilon_i(1 - \omega)$ , которое, согласно (1.17), можно написать в виде

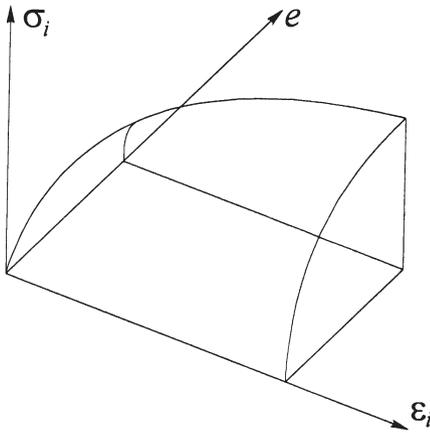
$$\sigma_i = \Phi(\vartheta, \varepsilon_i, e) = 3\mu\varepsilon_i(1 - \omega), \quad (1.18)$$

где  $\mu[\vartheta, e]$  — функция температуры и  $e$ , которую назовем условным коэффициентом вязкости, а функция  $\omega$  зависит от  $\vartheta$ ,  $\varepsilon_i$  и  $e$ .

Учитывая неравенства (1.17), условный коэффициент вязкости  $\mu$  всегда можно подобрать так, чтобы выполнялось условие  $1 > \omega \geq 0$  или  $|\omega| < 1$ .

Для определения вида функции (1.18), определяющей скалярное свойство вещества, необходимы опытные данные лишь при простейших напряженных состояниях, например при растяжении цилиндрических образцов. В этом случае  $\sigma_i$  есть растягивающее истинное напряжение.  $\varepsilon_i$  — мгновенная скорость удлинения и  $e$  — логарифмическая деформация удлинения, так что

$$e = \ln \frac{l}{l_0}, \quad \varepsilon_i = \frac{de}{dt} = \frac{1}{l} \frac{dl}{dt}.$$



Фиг. 1

В интересующем диапазоне скоростей деформаций, степеней деформаций, температур и времен необходимо построить: либо графики  $\varepsilon_i$  по  $\sigma_i$  при различных  $e$  и  $\vartheta$ , либо  $\sigma_i$  по  $e$  при различных  $\varepsilon_i$  и  $\vartheta$ , либо  $\sigma_i$  по  $\vartheta$  при различных  $\varepsilon_i$  и  $e$ . Это даст семейство поверхностей сдвигового сопротивления, каждая из которых относится к определенной постоянной температуре. Примерный вид такой поверхности дан на фиг. 1.

Пластические течения при высоких температурах, включая и установившуюся ползучесть, характеризуются отсутствием влияния степени деформации, и сдвиговое сопротивление определяется формулой

$$\sigma_i = \Phi(\varepsilon_i, \vartheta) = 3\mu\varepsilon_i[1 - \omega(\varepsilon_i, \vartheta)]. \quad (1.19)$$

Что же касается пластических течений, происходящих при высоких температурах за небольшие времена сравнительно со временем релаксации, то в них малую роль играет и скорость деформации  $\varepsilon_i$ , и потому

$$\sigma_i = \Phi(\vartheta) = \sigma_s(\vartheta), \quad (1.20)$$

т. е. это есть, например, обычная температурная кривая предела прочности.

Примером зависимости типа  $\sigma_i = \Phi(\vartheta, \varepsilon_i, e)$  можно считать следующую

$$\sigma_i = Ae^\alpha \varepsilon_i^\beta, \quad (1.21)$$

где  $A, \alpha, \beta$  — определенные опытные функции температуры  $\vartheta$ . При малых деформациях и простом нагружении она принимает вид [11]

$$\sigma_i = Ae^\alpha \left( \frac{de_i}{dt} \right)^\beta. \quad (1.22)$$

Если в области течения  $\varepsilon \geq \varepsilon_m$  для любых  $x, y, z, t$ , где  $\varepsilon_m$  — постоянная величина, то соотношение (1.18) записывается в виде (1.19), причем

$$\begin{aligned} \mu &= \frac{\sigma_m(\vartheta, e)}{3\varepsilon_m}, \quad \sigma_m = (\sigma_i)_{\varepsilon_i = \varepsilon_m}, \\ \omega &= 1 - \left( \frac{\varepsilon_m}{\varepsilon_i} \right)^{1-\beta} \quad \text{при } \varepsilon_i \geq \varepsilon_m, \\ \omega &= 0 \quad \text{при } \varepsilon_i \leq \varepsilon_m. \end{aligned} \quad (1.23)$$

Примерами зависимости типа  $\sigma_i = \Phi(\vartheta, \varepsilon_i)$  могут быть довольно распространенные в теории установившейся ползучести и вязкости степенная

$$\sigma_i = A\varepsilon_i^\beta \quad (\beta < 1) \quad (1.24)$$

или закон гиперболического синуса (Надаи)

$$\sigma_i = A \operatorname{arc sh}(B\varepsilon_i), \quad (1.25)$$

или логарифмическая (Прандтль)

$$\sigma_i = \sigma(\vartheta) \left[ 1 + \alpha(\vartheta) \ln \frac{\varepsilon_i}{\varepsilon_m} \right], \quad (1.26)$$

где  $\sigma_m(\vartheta)$  — температурная кривая предела текучести при скорости деформации  $\varepsilon_m$  и  $\alpha(\vartheta)$  — экспериментальная функция температуры, определяемая из простых опытов при различных скоростях деформаций. В случае (1.19), позволяющем изучать

как довольно быстрые течения, так и установившуюся ползучесть в предположении (1.19),  $\mu$  и  $\omega$  имеют следующий вид

$$\begin{aligned}\mu &= \frac{\sigma_m(\vartheta)}{3\varepsilon_m}, \quad \omega = 0 \text{ при } \varepsilon_i \leq \varepsilon_m, \\ \omega &= 1 - \left(\frac{\varepsilon_m}{\varepsilon_i}\right)^{1-\beta} \text{ при } \varepsilon_i \geq \varepsilon_m.\end{aligned}\tag{1.27}$$

Наконец, примером зависимости типа  $\sigma_i = \Phi(\vartheta)$  может быть линейная функция

$$\sigma_i(\vartheta) = \sigma_0(\vartheta_0) + (\vartheta - \vartheta_0) \left(\frac{d\sigma_i}{d\vartheta_0}\right),\tag{1.28}$$

если только в области течения температура  $\vartheta$  не слишком отклоняется от некоторой постоянной температуры.

Процесс пластического течения сопровождается, во-первых, выделением тепла за счет необратимой работы на деформациях сдвига, т. е. мощности  $\sigma_i \varepsilon_i$  (в единице объема тела), во-вторых, за счет выделения или поглощения тепла вследствие объемных деформаций (они по крайней мере частично обратимы), в-третьих, выделением (или поглощением) тепла за счет структурных превращений и, в-четвертых, за счет изменения внутренней энергии. Обозначая через  $q_C dt$  секундное количество тепла за счет последних двух составляющих, получим согласно первому началу термодинамики полное количество тепла, выделяемого в единице объема тела за время  $dt$

$$\delta Q = -\frac{p d\theta}{I} + \frac{\sigma_i de}{I} - q_C dt.$$

Мощность источника тепла, следовательно, равна

$$-\frac{p\Delta}{I} + \frac{\sigma_i \varepsilon_i}{I} - q_C = \frac{W}{I} - q_C = \frac{k\sigma_i \varepsilon_i}{I} \quad \left(k = \frac{W - Iq_C}{\sigma_i \varepsilon_i}\right),\tag{1.29}$$

где  $I$  — механический эквивалент теплоты.

Если при пластических деформациях в рассматриваемом диапазоне температур структура тела стабильна и изменение объема пренебрежимо мало, то  $q_C$  будет скоростью изменения внутренней энергии, причем  $q_C$  положительна при возрастании

температуры и отрицательна при убывании. Множитель  $k$  в этих случаях можно считать приблизительно равным 1.

Наряду с конечными соотношениями и выражениями скалярных свойств типа (1.14), (1.29) и дифференциальным условием сохранения массы (1.3) или (1.5) в неоднородных течениях должно выполняться условие теплового баланса

$$\gamma c \frac{d\vartheta}{dt} = \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( \lambda \frac{\partial \vartheta}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \lambda \frac{\partial \vartheta}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \lambda \frac{\partial \vartheta}{\partial z} \right) \right] + \frac{k\sigma_i \varepsilon_i}{I}, \quad (1.30)$$

где после умножения на  $dt$ , слева — количество тепла, идущее в единице объема на повышение температуры за время  $dt$ , справа в квадратных скобках выражение тепла, поступившего за счет теплопроводности, последний член дает внутреннее выделение тепла, причем  $c$  — коэффициент теплоемкости,  $\lambda$  — теплопроводности,  $\gamma = \rho g$ . Если  $\lambda$  считать постоянной величиной в рассматриваемом диапазоне температур, то уравнение (1.30) принимает вид

$$\gamma c \frac{d\vartheta}{dt} = \lambda \Delta^2 \vartheta + \frac{k\sigma_i \varepsilon_i}{I}. \quad (1.31)$$

**§2. Общие уравнения пластического течения и методы решения задач.** Уравнения движения деформируемой среды в эйлеровом пространстве имеют вид

$$\rho \left( \frac{dv_x}{dt} - X \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial S_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial S_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial S_{xz}}{\partial z}, \dots$$

Медленными течениями будем называть такие, при которых максимальный скоростной напор  $\rho v_m^2/2$  меньше наименьшего сдвигового сопротивления во всей области течения  $\sigma_{im}$  (при этом предполагается что в области течения есть зона, где скорость  $v$  значительно меньше  $v_m$ , т. е. система координат связана с инструментом или телом)

$$\frac{\rho v_m^2}{2} < \sigma_{im}. \quad (2.1)$$

Предположение о том, что процессы обработки металлов давлением сопровождаются медленными течениями, в большинстве случаев справедливо, поскольку даже для сильно нагретых стальных заготовок с пределом текучести порядка 2

кг/мм<sup>2</sup> из условия (2.1) следует, что скорость должна быть меньше величины порядка сотни метров в секунду, что выполняется.

Следовательно, уравнения движения имеют вид

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial S_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial S_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial S_{xz}}{\partial z} + \rho X, \dots \quad (2.2)$$

Полная система дифференциальных уравнений течения получается путем присоединения к уравнениям (2.2) условия несжимаемости (1.16)

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \quad (2.3)$$

уравнений (1.10), в которых  $\sigma_i$ , согласно (1.18) или (1.19), или (1.20), следует считать выраженным через  $\varepsilon_i$ ,  $e$  и  $\vartheta$

$$S_{xx} = \frac{2\sigma_i}{3\varepsilon_i} \frac{\partial v_x}{\partial x}, \quad S_{xy} = \frac{\sigma_i}{3\varepsilon_i} \left( \frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right), \dots \quad (2.4)$$

и уравнения теплового баланса (1.31).

Механические граничные условия могут быть разнообразны. Например, на свободной части поверхности тела они имеют вид

$$S_{xx}l + S_{xy}m + S_{xz}n = pl, \dots, \quad (2.5.1)$$

где  $l$ ,  $m$ ,  $n$  — косинусы углов нормали с осями координат.

На движущейся поверхности контакта, уравнение которой  $F(x, y, z, t) = 0$ , условие непроницаемости имеет вид

$$\frac{\partial F}{\partial t} + v_x \frac{\partial F}{\partial x} + v_y \frac{\partial F}{\partial y} + v_z \frac{\partial F}{\partial z} = 0, \quad (2.5.2)$$

а условия равновесия касательных напряжений означают, что вектор касательного напряжения  $\tau_n$ , линейными зависимостями выражающийся через компоненты  $S_{xx}$  направлен вдоль относительной скорости скольжения тела по поверхности, а по модулю либо пропорционален нормальному давлению (по Кулону)

$$\begin{aligned} \tau_n &= -\mu\sigma_n, \\ \sigma_n &= -p + S_{xx}l^2 + S_{yy}m^2 + S_{zz}n^2 + 2S_{xy}lm + \\ &\quad + 2S_{yz}mn + 2S_{zx}nl, \end{aligned} \quad (2.5.3)$$

либо постоянен (по Прандтлю)

$$\tau_n = k, \quad (2.5.4)$$

либо определенным образом зависит от скорости скольжения и т. п. В случае полного сцепления тела и поверхности граничные условия будут:

$$v_x = f_1, \quad v_y = f_2, \quad v_z = f_3, \quad (2.5.5)$$

где  $f_i = f_i(x, y, z, t)$  — известные функции координат и времени. Если на границе заданы нагрузки  $X_\nu, Y_\nu, Z_\nu$ , условия имеют вид

$$X_x l + Y_y m + Z_z n = X_\nu. \quad (2.5.6)$$

Термодинамические граничные условия определяют теплообмен тела и окружающей среды. На изолированных участках поверхности, где исключен тепловой поток через границу и отсутствует трение, условие имеет вид

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial n} = 0. \quad (2.6.1)$$

На участке полного сцепления тела с поверхностью инструмента температура их должна быть одинакова и тепловой поток непрерывен, т. е. условия имеют вид

$$\vartheta = \vartheta_i, \quad \lambda \frac{\partial \vartheta}{\partial n} = \left( \lambda \frac{\partial \vartheta}{\partial n} \right)_i \quad (2.6.2)$$

и т. п. (индекс «i» относится к инструменту).

Начальное условие при  $t = 0$  должно определять начальное распределение температур в теле и инструменте, с которым будет происходить теплообмен

$$\vartheta = F_1(x, y, z), \quad \vartheta_i = F_2(x, y, z) \quad \text{при } t = 0. \quad (2.7)$$

Рассмотрим сначала общую задачу пластического течения в более простом случае, когда температура одинакова во всех точках тела и упрочнением материала можно пренебречь.

Поскольку сдвиговое сопротивление обладает свойством (1.17) и потому может быть представлено в виде (1.19)

$$\sigma_i = 3\mu \varepsilon_i [1 - \omega(\varepsilon_i)],$$

где  $\mu$  — постоянный приведенный коэффициент вязкости и функция  $\omega(\varepsilon_i)$  выражается, например, формулами (1.27) или другими аналогичными. Формально все уравнения теории течения совпадут с соответствующими уравнениями теории малых упруго-пластических деформаций, причем скорости  $v_x, v_y, v_z$  будут соответствовать перемещениям  $U_x, U_y, U_z$ .

Уравнения (2.2) после подстановки в них (2.4) примут вид

$$-\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \nabla^2 v_x + \rho X - \mu R_x = 0, \dots, \quad (2.8)$$

где

$$R_x = 2 \frac{\partial}{\partial x}(\omega \varepsilon_{xx}) + \frac{\partial}{\partial y}(\omega \varepsilon_{xy}) + \frac{\partial}{\partial z}(\omega \varepsilon_{xz}), \dots \quad (2.9)$$

Статические граничные условия на части поверхности тела, где заданы внешние силы  $X_V, Y_V, Z_V$ , принимают вид

$$-pl + \mu(2\varepsilon_{xx}l + \varepsilon_{xy}m + \varepsilon_{xz}n) = X_V + S_x \mu, \dots, \quad (2.10)$$

где

$$S_x = \omega(2\varepsilon_{xx}l + \varepsilon_{xy}m + \varepsilon_{xz}n), \dots \quad (2.11)$$

Кинематические граничные условия на части поверхности, где заданы скорости движения  $V_x, V_y, V_z$ , имеют обычный вид

$$v_x = V_x, \dots \quad (2.12)$$

Из отмеченной аналогии всех уравнений теории течения (ТПТ), т. е. (2.3), (2.8), (2.9), (2.10), (2.11), (2.12), соответствующим уравнениям теории малых упругопластических деформаций (ТУПД) с очевидностью вытекают следующие теоремы.

*Теорема 1.* Если для заданного тела при заданной кривой упрочнения (например, степенной) и при заданных внешних силах, осуществляющих простое нагружение, с помощью ТУПД найдено распределение напряжений и перемещений во всем теле, причем упругие области и области разгрузки отсутствуют, то тем самым найдено стационарное течение тела той же формы (в эйлеровом пространстве) под действием тех же нагрузок (с точностью до общего множителя), если кривая вязкости  $\sigma_i = \Phi(\varepsilon_i)$  подобна кривой упрочнения (например, также является степенной).

*Частная теорема 1:* Если в определенном теле (области деформаций) под действием системы сил  $X_{V_M}$  и при заданных на определенных участках границы перемещениях  $U_x, \dots$  возникает чисто пластическая деформация  $e_i \geq e_0$ , причем закон упрочнения является степенным  $\sigma_i = \sigma_0(e_i/e_0)^\beta$  и если в области  $M'$  эйлерова пространства под действием системы сил  $X_{V_{M'}}$ ,  $\dots$  и при заданных на определенных участках границы скоростях  $V_x, \dots$  существует стационарное пластическое течение, причем закон вязкого сопротивления является степенным  $\sigma_i = \sigma_m(\varepsilon_i/\varepsilon_m)^{\beta_m}$ ; если выполняются условия:

1. Области  $M$  и  $M'$  одинаковы и одинаковы соответствующие участки границ, где действуют внешние силы и заданы перемещения и скорости.

2. Отношение соответствующих внешних сил в соответствующих точках  $M$  и  $M'$  одинаково всюду

$$\frac{X_{V_M}}{X_{V_{M'}}} = \frac{Y_{V_M}}{Y_{V_{M'}}} = \dots = k = \text{const}, \quad (\text{а})$$

и заданные на участках границы тела  $M'$  скорости  $V_x$  пропорциональны заданным в соответствующих точках перемещениям

$$\frac{V_x}{U_x} = \frac{V_y}{U_y} = \dots = \frac{V}{U} = \text{const}, \quad (\text{б})$$

где  $V, U$  — соответствующие характерные скорость и перемещение.

3. Показатели степеней упрочнения и вязкости одинаковы ( $\beta_m = \beta$ ) и величины  $\sigma_m, \varepsilon_m$  удовлетворяют условию

$$\frac{k\sigma_0}{\sigma_m} = \left( \frac{e_0 V}{\varepsilon_m U} \right)^\beta \quad (\text{в})$$

При этих условиях отношение внутренних напряжений во всех соответствующих точках тел  $M'$  и  $M$  постоянно и равно  $k$

$$\frac{X'_x}{X_x} = \dots = \frac{p'}{p} = k,$$

и отношение скоростей движения к перемещениям постоянно

$$\frac{v_x}{U_x} = \frac{v_y}{U_y} = \frac{v_z}{U_z} = \dots = \frac{V}{U}.$$

Из этой теоремы возникает возможность экспериментального решения задач течения методом подобия, т. е. измерения малых упруго-пластических деформаций соответствующих тел. В том числе и установившаяся ползучесть детали сложной формы при сложной системе сил может быть изучена путем измерения упруго-пластических деформаций аналогичного тела при нормальной температуре, если только выполнить условия (а), (б), (в).

Если на участках границ тел  $M$  и  $M'$  граничные условия являются хотя бы частично кинематическими и в отношении скоростей и перемещений являются однородными (например, определенная проекция вектора скорости в  $M'$  и перемещения в  $M$  равна нулю), то условие (в) уже не налагает ограничений на  $\sigma_m$  и  $\varepsilon_m$  (значит они могут быть произвольны, т. е. подобие требует лишь равенства показателей  $\beta_m = \beta$ ); оно определяет характерную скорость течения

$$V = \frac{\varepsilon_m U}{c_0} \left( \frac{k\sigma_0}{\sigma_m} \right)^{1/\beta}$$

и потому позволяет находить скорость течения в любой точке  $M'$  через соответствующее перемещение в теле  $M$

$$v_x = U_x \frac{V}{U}, \dots$$

*Теорема 2.* Задача течения в виде уравнений (2.3), (2.8) – (2.12) при отсутствии «жестких» областей имеет единственное решение, и оно может быть найдено методом «упругих решений» [8]. Все вычисления по этому методу в ТПТ и ТУПД совершенно одинаковы.

Сам метод «упругих решений» применительно к задачам пластического течения следовало бы называть методом гидродинамических приближений, так как каждое приближение находится из уравнений (2.8), (2.10), (2.12), совпадающих с уравнениями движения вязкой несжимаемой жидкости.

*Теорема 3.* Истинное течение в области (стационарное или нестационарное) отличается от любого другого непрерывного и кинематически возможного, т. е. совместимого с кинематиче-

скими граничными условиями, тем, что в истинном движении

$$\begin{aligned} \iiint \sigma_i \delta \varepsilon_i dt = & \iiint \rho (X \delta V_x + Y \delta v_y + Z \delta v_z) + \\ & + \iint (X_\nu \delta v_x + Y_\nu \delta v_y + Z_\nu \delta v_z) dS, \end{aligned} \quad (2.13)$$

где  $\delta v_x, \dots$  — кинематически возможные вариации скоростей (изохронные),  $\delta \varepsilon_i$  — соответствующая вариация интенсивности скоростей деформации.

Эта теорема справедлива при  $\vartheta = \text{const}$  как в случае (1.18), когда  $\sigma_i \delta \varepsilon_i$  — есть полный дифференциал, так и в случае (1.19). Для плоской задачи она доказана в работе [1], для пространственной в случае (1.18) является математически тождественной вариационному уравнению Лагранжа. Уравнение (2.13) позволяет при помощи метода Ритца исследовать приближенно весьма сложные пластические течения.

**3. Некоторые задачи пластического течения при постоянной температуре.** Мы не будем рассматривать плоские задачи течения идеально пластического вещества, которые в большем количестве разработаны и изложены в монографиях [5,12]. Приведем решения и постановки некоторых пространственных задач.

*1. Течение тонкого слоя между жесткими поверхностями.*

Если  $a$  и  $h$  [12] — характерные размеры слоя по простираению и по толщине, причем  $a/h \gg 1$ , и если напряжение трения на поверхности порядка сопротивления слоя при сдвиге, то градиентом тангенциальных скоростей движения в направлении нормали к поверхности можно пренебречь, и из всех напряжений учитывать только среднее давление  $p$  и касательное напряжение на поверхностях  $\tau$ , которое может быть известной функцией от  $p$  (по закону Кулона, или Прандтля, или иному).

Обозначая обобщенное давление через  $P$

$$P = \int_{m\sigma_s}^p \frac{dp}{2\tau(p)}, \quad (3.1)$$

через  $x, y$  — длину дуг вдоль ортогональных координат на одной из жестких поверхностей и через  $h(x, y, t)$  — толщину слоя в

точке  $(x, y)$  в момент  $t$ , убедимся, что все уравнения теории пластического течения сведутся к условию несжимаемости и уравнениям

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial x} &= -\frac{\cos \theta}{h}, & \cos \theta &= \frac{v_x}{\sqrt{v_x^2 + v_y^2}}, \\ \frac{\partial P}{\partial y} &= -\frac{\sin \theta}{h}, & \sin \theta &= \frac{v_y}{\sqrt{v_x^2 + v_y^2}}. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Отсюда получается обобщенная аналогия с песчаной насыпью для функции  $P$ , так как

$$\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial P}{\partial y}\right)^2 = \frac{1}{h^2}.$$

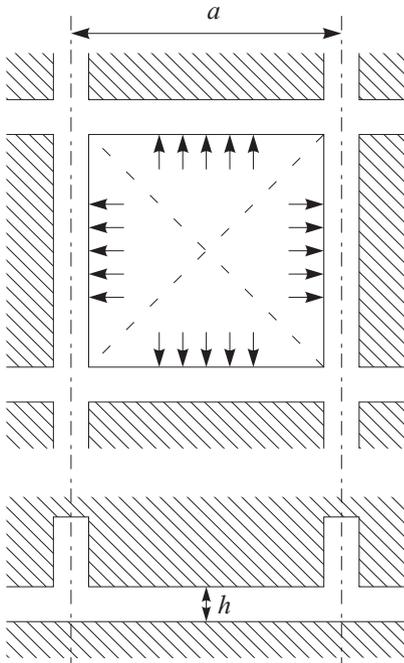
1а. В случае сжатия слоя произвольной формы в плане между плоскими параллельными плитами получается элементарный метод построения линий течения и эпюр контактных давлений, основанный на аналогии величины  $P$  с ординатой песчаной насыпи.

На фиг. 2 изображены в плане и разрезе плиты, между которыми течет слой, причем в одной из плит по определенному рисунку (квадратная ячейка) имеются пазы, в которые затекает металл слоя. До тех пор, пока пазы нигде не заполнились на всю их глубину, картина эпюры давления совпадает с формой песчаной насыпи на квадратную пластину (размер этой пластины должен быть одинаков с размером ячейки фиг. 2), а величина  $P$  находится через ординату насыпи  $z$  и коэффициент трения песка  $f$  по формуле

$$P = \frac{z}{fh}. \quad (3.3)$$

Диагонали будут ребрами насыпи, на контуре будет  $z = 0$ , и линии тока будут прямыми, перпендикулярными линии контура.

При увеличении силы по мере заполнения пазов, наконец, незаполненными останутся угловые области. Картина распределения  $P$  при заполнении углов совпадает с формой насыпи в песчаном ящике, дно которого совпадает с прежней пластиной,



Ôëã 2

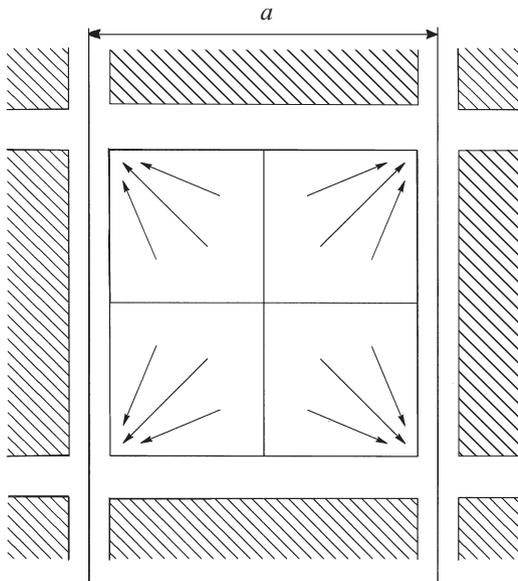


Рис. 3

но имеет отверстия в углах. Ребра эпюры насыпи будут параллельны сторонам, линии тока — прямые, сходящиеся к углам. Величина давления снова находится по формуле (3.3). Картина течения дана на фиг. 3.

Из этой приближенной теории вытекает, что сила, необходимая для получения указанным выше путем ребристых пластин, приходящаяся на одну ячейку, будет порядка

$$Q \sim \frac{2\tau a^3}{h} + \sigma_s a^2, \quad (3.4)$$

и эта сила практически целиком определяется касательным напряжением  $\tau$  трения между заготовкой и плитами, так как первое слагаемое в (3.4) будет значительно больше второго. Из этой теории вытекает также, что если дать действительную смазку или покрытие, в определенное число раз уменьшающее контактное трение, примерно во столько же раз уменьшится и потребная мощность пресса.

Кинематика конечного изменения формы сжимаемых между плитами заготовок исследована в работе [14].

16. При прокатке тонких листов или полос происходит уширение (фиг. 4). Если толщина листа  $h$  значительно меньше ширины  $a$  (вдоль прокатки) зоны захвата, и степень обжатия  $\varepsilon$  мала, из аналогии с песчаной насыпью легко находим давление  $P$  в области сцепления и уширения [13]. В областях III и IV и на изображенных ребрах эпюры давления, разделяющих области течения, продольные скорости валка и металла совпадают. Уширению подвергаются только примыкающие к продольным кромкам края листа, причем их суммарная ширина равна  $a$ . Величина уширения (если ширина полосы  $b \geq a$ ) равна

$$\varepsilon^{3/2} \sqrt{Rh}. \quad (3.5)$$

где  $\varepsilon$  — относительное утончение,  $R$  — радиус валка,  $h$  — толщина полосы на входе.

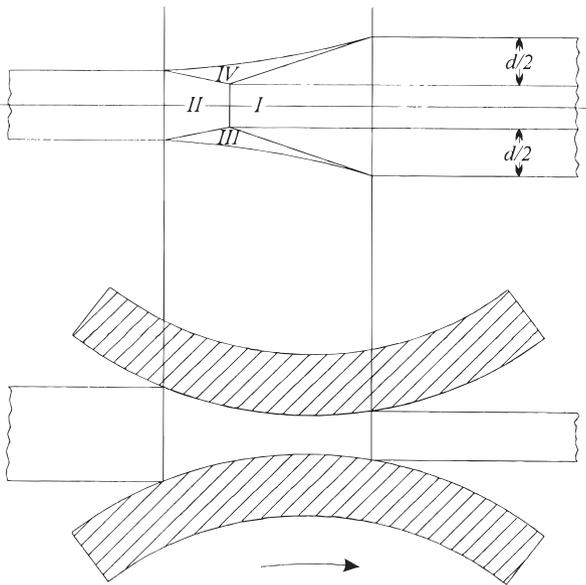
Если лист прокатывается в валках, один из которых имеет круговые канавки на расстояниях  $b > a$  для того, чтобы выходящий лист имел ребра ширины  $\delta$ , причем канавок много, то объем металла, затекающего в канавку, будет равен объему, идущему на уширение при свободной прокатке полосы шириною  $b$  в гладких валках. Значит высота ребер при прокатке будет

$$H = \frac{h}{\delta} \sqrt{Rh} \varepsilon^{3/2}. \quad (3.6)$$

При этом, конечно, глубина канавок должна быть больше  $H$ , чтобы втекание в них было свободным. При стесненном затекании расчет должен быть несколько видоизменен.

Дифференциальные уравнения, определяющие процесс конечного обжатия при прокатке с уширением полосы (или листа) начальной толщины  $h_0$ , имеют вид

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial P}{\partial y}\right)^2 &= \frac{1}{h^2}, \quad v_y \frac{\partial P}{\partial x} = (v_x + R\omega) \frac{\partial P}{\partial y} \left(\varepsilon = \frac{h_0 - h_1}{h_0}\right), \\ \frac{1}{h} \frac{\partial}{\partial x}(hv_x) + \frac{\partial v_y}{\partial y} &= 0, \end{aligned} \quad (3.7)$$



Фиг. 4

где  $\omega$  — угловая скорость,  $\varepsilon$  — степень сжатия,

$$h = h_0(1 - \varepsilon) + \frac{x^2}{R}.$$

Они подробно исследованы в работе<sup>3)</sup> для больших степеней обжатия  $\varepsilon$ .

*2. Прессование тонких цилиндрических оболочек методом истечения.*

Если профилированная (в том числе ребристая) цилиндрическая оболочка получается путем выдавливания металла из цилиндрического контейнера, в плоском дне которого имеется щель ширины  $\delta$  и соответствующего профиля (фиг. 5), картина течения получается весьма сложной даже и тогда, когда длина получаемой оболочки  $l$  значительно больше ее поперечных размеров с характерной величиной  $a$ . Истечение может быть значительно облегчено, если форма поперечного сечения полости контейнера удачно подобрана в соответствии с формой профиля выдавливаемой оболочки.

Пусть  $s$  будет дуга, откладываемая от какой-нибудь точки вдоль середины щели. Площадь всей щели равна

$$F_0 = \int \delta dS.$$

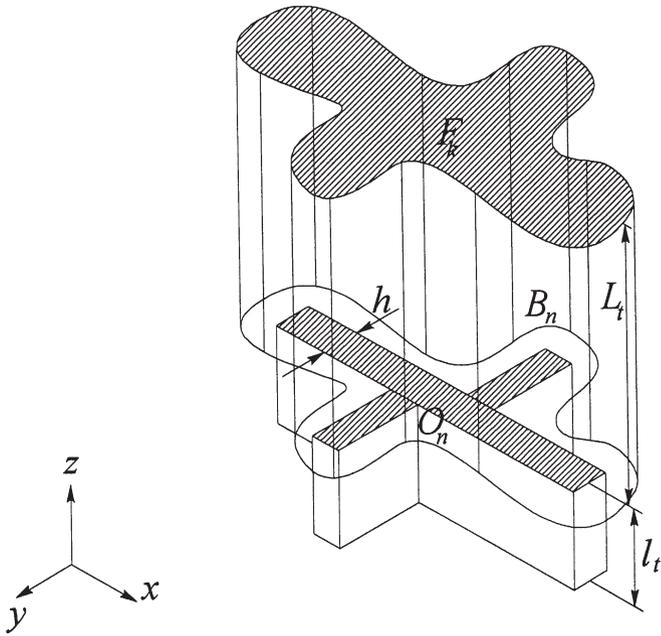
Это же есть площадь поперечного сечения получаемой оболочки. В зависимости от формы оболочки профиль щели может иметь особые точки: вершины (например, точки  $B_1, B_2, \dots$ ) и точки ветвления (например, точки  $O_1, O_2$ ). Будем предполагать, что любые две соседние точки ветвления расположены вдоль дуги  $s$  на расстоянии, значительно превышающем ширину щели  $\delta$ .

На фиг. 5 изображено сечение воображаемого контейнера, слиток в нем с площадью сечения  $F_k$ , длина слитка  $L_t$  и длина оболочки  $l_t$  в момент времени  $t$ , а также дно контейнера со щелью.

С точки зрения более правильного распределения по щели вытекающего металла сечение  $F_k$  должно быть вытянутым

---

<sup>3)</sup> Арутюнов Ю.С. Диссертация, МГУ, 1956.



Фиг. 5

вдоль  $s$  и до некоторой степени напоминающим форму щели. Пусть  $a$  — будет характерный размер сечения  $F_k$  поперек дуги  $s$  (скажем, это отношение площади  $F_k$  к длине дуги щели). В таком случае в начале прессования, когда  $L_t > a$ , поперечные сечения слитка, расположенные на высоте порядка  $a$  и выше дна контейнера, будут двигаться ко дну, оставаясь практически плоскими.

При дожатии остатка слитка, когда  $L_t$  станет меньше  $a$ , получится течение слоя металла между жесткими плитами, дном контейнера и торцевой плоскостью плунжера, причем в первой имеется щель, в которую вытекает металл, т. е. получится рассмотренное в п. 1 течение, удовлетворяющее уравнениям (3.1), (3.2), в которых нужно положить  $h = h_t$ .

Поскольку при  $h \rightarrow 0$ , давлении  $P \rightarrow \infty$  — остаток неизбежен, но он будет меньше при правильном выборе формы контейнера. Поскольку сила прессования остатка будет наибольшей, значит дожатие сравнительно тонкого слоя с точки зрения удельных давлений и мощностей является расчетным для процесса истечения. С этой точки зрения задача выбора формы сечения контейнера может быть сформулирована математически.

Рассмотрим только два требования из тех, которые могут быть предъявлены к процессу при заданных профиле и площади щели  $F_0$  (т. е. форме прессуемой оболочки) и площади сечения контейнера  $F_k$ : 1) суммарное усилие прессования должно быть наименьшим; 2) секундный расход металла в каждой точке щели должен быть пропорционален ее ширине  $\delta$ .

Первое требование существенно для выбора прессы, второе — для исключения возможностей образования разностенности оболочки, уменьшения вероятности образования трещин и уменьшения ее коробления.

Рассмотрим случай, когда радиус кривизны дуги  $R$  всюду значительно больше  $h$  и в несколько раз больше  $\delta$ . Явление истечения при дожатии очень наглядно изображается песчаной аналогией: плоская пластинка, по форме и размерам совпадающая с сечением контейнера, должна иметь тонкую щель по дуге  $s$ , совпадающей со средней линией щели в контейнере: по наружному контуру эта пластинка должна быть смонтирована в

цилиндрическую оболочку (из жести, фанеры и т. п.), имеющую форму полости контейнера. Такая модель контейнера должна быть поставлена вертикально и в нее засыпается сухой однородный песок с коэффициентом трения  $f$ . Обобщенное давление на плунжер  $P$  (приблизительно такой же и на дно контейнера) при прессовании определяется через ординату песчаной насыпи по формуле (3.3)

$$P = \frac{z}{h} \frac{1}{f},$$

причем объем песчаной насыпи  $V$ , согласно (3.1), связан с результирующим обобщенным давлением  $Q_P$  соотношением

$$Q_P = \frac{1}{fh} V \quad \left( V = \int_{F_k} z dF \right) \quad (3.8)$$

Результирующая обобщенная сила прессования оболочки

$$Q_P = \int_{F_k} P dF. \quad (3.9)$$

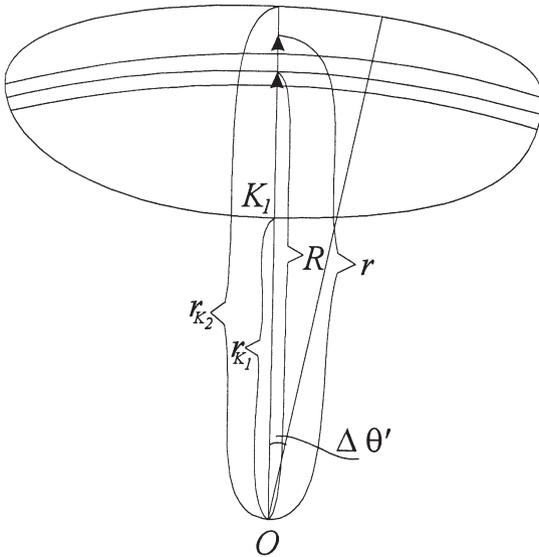
Линии уровня песчаной насыпи  $z = \text{const}$  будут и линиями постоянного давления  $p = \text{const}$  ( $P = \text{const}$ ).

Линии тока в проекции на дно есть все прямые, ортогональные линиям уровня: они начинаются на контуре  $s$  и заканчиваются у стенки (фиг. 6). В первом приближении на  $s$  можно считать  $P = 0$  (выбирая подходящее  $m$  в (3.1)), т. е ось щели считать линией нулевого уровня, и тогда линии тока совпадут с радиусами кривизны  $R(s)$  оси щели.

Обозначая  $r_{k1}$ ,  $r_{k2}$  ( $r_{k1} < R < r_{k2}$ ) расстояния вдоль  $R$  от центра кривизны до стенок контейнера, получим следующее выражение секундного объемного расхода, приходящегося на единицу длины дуги щели [13]

$$\frac{v_n}{2} \left( \frac{R^2 - r_m^2}{R} + \frac{r_{k2}^2 - R^2}{R} \right) = \frac{v_n (r_{k2}^2 - r_{k1}^2)}{2R},$$

где  $v_n$  — скорость подачи плунжера или дна контейнера (при обратном методе прессования).



Фиг. 6

Согласно условию 2), форма контейнера (т. е.  $r_{k1}$ ,  $r_{k2}$  для различных  $s$ ,  $R$ ) должна быть подобрана так, чтобы расход был пропорционален  $\delta$ , т. е. чтобы величина

$$\psi = \frac{r_{k2}^2 - r_{k1}^2}{2R\delta} \quad (3.10)$$

была постоянной в любой точке дуги  $s$  щели. В таком случае она заранее известна и представляет собой степень сжатия

$$\psi = \frac{F_k}{F_0}. \quad (3.11)$$

Вдоль луча  $Or$

$$\frac{\partial P}{\partial r} = \pm \frac{1}{h} \text{ или } P = \pm \frac{r - R}{h} \quad \left( \begin{array}{l} + \text{ для } r > R \\ - \text{ для } r < R \end{array} \right).$$

На единицу длины дуги  $s$  между соседними линиями тока  $r_{k2}$  ( $\Delta\theta = 1/R$ , фиг. 6) опирается площадь  $F_{12} = \Delta\theta \int_{r_{k1}}^{r_{k2}} r dr$ , и

на нее действует следующее обобщенное давление

$$Q_P = \Delta\theta \int_{r_{k1}}^{r_{k2}} P r dr = \frac{1}{6Rh} (2r_{k2}^3 - 3Rr_{k2}^2 + 2R^3 + 2r_{k1}^3 - 3Rr_{k1}^2). \quad (3.12)$$

Пользуясь соотношением между  $P$  и  $p$ , из (3.9) можно найти и истинную силу  $Q = \int_{F_k} p dF$ . Тогда условие 1) сводится к тому, чтобы найти минимум  $Q$  (варьируя только  $r_{1k}$  и  $r_{2k}$ ) при условии  $\psi = \text{const}$ . Если условие минимума  $Q$  заменить приближенным условием  $Q_{p1} = \min$ , то получим  $r_{k2} + r_{k1} = 2R$ , т. е. расстояние от дуги до контура по линии тока в каждой точке дуги  $s$  одинаково. Если же кривизна дуги  $s$  и ширина щели  $\delta$  постоянны ( $R = \text{const}$ ,  $\delta = \text{const}$ ), то и  $r_{k2}$ ,  $r_{k1}$  будут постоянны. Обозначая при этом  $r_{k2} - r_{k1} = a$ , получим

$$r_{k2} = R + \frac{a}{2}, \quad r_{k1} = R - \frac{a}{2}, \quad \psi = \frac{a}{\delta}, \quad Q_{P1} = \frac{a^2}{4h}.$$

В случае сухого трения по дну и торцу плунжера при  $\tau = \text{const}$  имеем  $P = (p - \sigma_s)/2\tau$ , и потому

$$Q_{P1} = \frac{1}{2\tau} Q - \frac{m\sigma_s}{2\tau} F_{12}, \quad Q = \frac{a^2}{4h} 2\tau + m\sigma_s a. \quad (3.13)$$

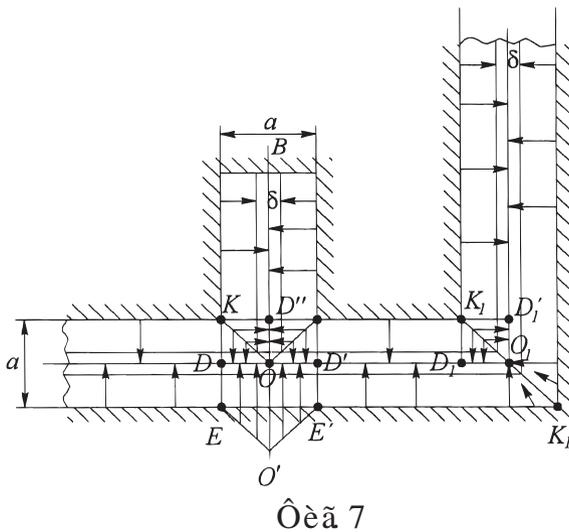
Эта сила в процессе дожатия может быть без особого труда вычислена при других условиях трения [13]. Ее интересно сравнить с силой в предшествующие моменты времени, когда  $L_t = h > a$ . При обратном методе прессования в эти моменты сила, приходящаяся на ту же площадь  $F_{12}$ , будет порядка

$$Q_t = \sigma_s a \left( \ln \frac{a}{\delta} + 0,5 \right). \quad (3.14)$$

Следовательно

$$\frac{Q}{Q_t} = \frac{1}{0,5 + \ln(a/\delta)} \left( m + \frac{a}{4h} \frac{2\tau}{\sigma_s} \right). \quad (3.15)$$

При сухом трении и  $h < a/4$  можно принять  $m = 1 + \pi/2$ , а  $\tau = \sigma_s/\sqrt{3}$ ; отсюда видно, что сила  $Q$  при дожатии действительно будет расчетной.



Объём 7

Выше рассмотрены области дуги  $s$ , удаленные от точки ветвления и угловых точек на расстояние более  $a/2$ .

В окрестности точек ветвления и угловых точек контура течение будет отличаться от найденного выше, поскольку из аналогии с песчаной насыпью вытекает, что к этим точкам будут сходиться ребра эпюры давлений [12]. На фиг. 7 изображены окрестности точки ветвления и угловой точки в двух вариантах: первый вариант сечения контейнера (сплошная линия) получается при формальном продолжении линий контура контейнера, найденных в зонах удаления от особых точек до точек их пересечения с ребрами эпюры  $OK$  и  $K_1O_1K'_2$ ; стрелками показаны линии тока в различных местах. Из фиг. 7 - 1 видно, что на единицу длины дуги щели в удалении от особых точек приходится площадь тока  $F_{12} = a$ , т. е. в единицу времени вытекает объем  $V_n a$ ; на суммарную же длину щели  $OD + OD' + OD'' = 3a/2$  приходится площадь тока  $a^2$ , т. е. вытекает объем  $V_n a^2$ ;  $a$ , значит, на единицу длины дуги в среднем приходится  $2V_n a/3$ , т. е. на 33% меньше. В угловой точке на длину дуги  $O_1D_1 + O_1D'_1 = a$  приходится площадь тока  $a^2$  и, значит, на единицу длины дуги приходится поток  $V_n a$ , т. е. такой же, как и в удаленной области.

Значит в зоне точки ветвления толщина прессуемой оболочки будет меньше ширины щели  $\delta$  в среднем на 33%, и в этой зоне при недостаточной пластичности металла могут образовываться трещины.

Второй вариант формы контейнера отличается от первого дополнительным углублением его контура сечения против точки ветвления (в виде треугольника  $EO'E'$ , площадь которого равна  $a^2/2$  фиг. 7, пунктир;  $EE' = a, OO' = a$ ). В этом случае средний поток на единицу длины дуги щели в зоне точки ветвления будет  $v_n a$ , т. е. таким же, как и в удалении от  $O$ . Картина линий тока в пятиугольнике  $DOD'E'O'ED$  при этом не изменится. Таким образом, вытекающие из песчаной аналогии рациональные формы сечения контейнеров определяются следующим законом площадей: площадь тока, приходящаяся на единицу длины дуги щели всюду, кроме угловых точек и точек ветвления, должна быть постоянна, а в зоне этих последних должна в среднем иметь то же значение; при этом зона точки ветвления или угловой и площади тока определяется по указанному выше правилу из песчаной аналогии.

Получаемые на основании песчаной аналогии рациональные формы контура сечения контейнеров, как видно, имеют угловые точки, и сами формы получаются сложными. Углы, конечно, следует сгладить, не нарушая закона площадей, который лежит в основе построения. Удельные давления  $p$  рассчитываются на основании песчаной аналогии по формулам (3.1) и (3.3) или аналитически, причем в контейнерах, построенных по закону сохранения площадей, концентрация давления получается в угловых точках  $O', K'_1$ .

**4. Течение пластического слоя между шероховатыми плитами при условии теплообмена между ними.** Пусть в момент  $t = 0$  плиты имеют постоянную температуру  $\vartheta_n$ , пластический слой толщины  $h$ , имеет постоянную температуру  $\vartheta_c < \vartheta_n$ ; при  $t > 0$  плиты сближаются по заданному закону  $h(t)$  и, сжимая слой, одновременно охлаждают его. Оси  $x, z$  располагаем в серединной плоскости слоя, ось  $y$  — по направлению сжатия, причем предполагаем, что течение в направлении  $z$  отсутствует (плоская деформация). Сдвиговое сопротивление материала слоя предполагается зависящим только от темпера-

туры

$$\sigma_s = \sigma(\vartheta). \quad (4.1)$$

Можно предвидеть, что течение обладает следующими свойствами

$$\vartheta = \vartheta(y, t), \quad v_y = v_y(y, t), \quad \varepsilon_{xy} = \varepsilon_{xy}(y, t) \quad (4.2)$$

При  $t = 0$  деформируется вся толщина  $h_0$  слоя, но при  $t > 0$  за счет охлаждения на границах контакта  $y = \pm h/2$  сопротивление сдвига повышается и, значит, возможно «затвердевание» прилегающих к границам слоев. Пусть  $y = \pm \mu(t)$  будет граница между затвердевшими (прилившими к плитам) слоями и центральным ядром, в котором продолжается течение. Казалось бы, из условий теплообмена, что материал, обладающий свойством (4.1), должен быстро «затвердеть» почти на всю толщину и течение его сконцентрируется в тонком центральном слое.

Этот вопрос решается следующим условием «затвердевания», которое мы выдвигаем, как общее условие для всех подобных задач: из всех кинематически возможных истинная граница «твердения» отличается тем, что затрачиваемая на деформацию тела мощность (внешних сил) является минимальной в каждый момент времени. Отсюда следует, что если силы действуют на деформируемое тело через жесткие тела (инструмент), имеющие заданное движение, то истинная граница твердения находится из условия минимума внешних сил в каждый момент времени.

Из условия твердения и характера теплообмена в рассматриваемом нами случае течения слоя ясно, что граница твердения будет тем больше опережать границу слоя  $h(t)$ , чем больше разность  $\vartheta_c - \vartheta_n$ , и чем сильнее зависимость (4.1), т. е. чем больше по модулю  $d\sigma/d\vartheta$  в интервале  $\vartheta_n \leq \vartheta \leq \vartheta_c$ .

Из условия несжимаемости

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0$$

находим

$$v_x = -x \frac{\partial v_y}{\partial y} + 2v(y, t), \quad \varepsilon_{xy} = -x \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial v}{\partial y}.$$

Отсюда и из (4.2) следует, что  $v_y$  — линейная функция  $y$ . Так как  $v_y = 0$  при  $y = 0$  и на границе твердения  $y = \eta(t)$ ,  $v_y = +dh/2dt$ , то получаем

$$\begin{aligned} v_x &= -\frac{x}{2\eta} \frac{dh}{dt} + 2v(y, t), \quad \varepsilon_{xx} = -\varepsilon_{yy} = \varepsilon, \quad \varepsilon = -\frac{1}{2\eta} \frac{dh}{dt}, \\ v_y &= \frac{y}{2\eta} \frac{dh}{dt}, \quad \varepsilon_{xy} = 2\frac{\partial v}{\partial y}, \quad \varepsilon_i = \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{\varepsilon^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2}. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Эти формулы вместе с (2.4) показывают, что девиатор напряжений  $S_{xx}$ , ... зависит только от  $y$  и  $t$

$$S_{xx} = -S_{yy} = \frac{\sigma\varepsilon}{\sqrt{3}\sqrt{\varepsilon^2 + (\partial v/\partial y)^2}}, \quad S_{xy} = \frac{\sigma}{\sqrt{3}\sqrt{\varepsilon^2 + (\partial v/\partial y)^2}} \frac{\partial v}{\partial y}. \quad (4.4)$$

Уравнения равновесия (2.2) принимают вид

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial S_{xy}}{\partial y}, \quad \frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial S_{yy}}{\partial y} \quad \text{или} \quad \frac{\partial^2 S_{xy}}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 S_{yy}}{\partial x \partial y} = 0, \quad (4.5)$$

и значит  $S_{xy}$  — линейная функция  $y$ , равная нулю при  $y = 0$ ; поскольку граница затвердевания  $y = \eta$  должна быть линией скольжения или огибающей таких линий, значит на ней

$$S_{xy} = \tau_{max} = -\frac{\sigma_i}{\sqrt{3}} = -\frac{1}{\sqrt{3}}(\sigma)_{y=\eta}.$$

Следовательно,

$$S_{xy} = -\frac{y}{\eta\sqrt{3}} \sigma_\eta, \quad \sigma_\eta = (\sigma)_{y=\eta}. \quad (4.6)$$

Из (4.5) теперь находим

$$p = -\frac{\sigma\varepsilon}{\sqrt{3}\sqrt{\varepsilon^2 + c(\partial v/\partial y)^2}} - \frac{x}{\eta\sqrt{3}} \sigma_\eta + c(t), \quad (4.7)$$

значит напряжения

$$X_x = -p + S_{xx}, \quad Y_y = -p + S_{yy}, \quad X_y = S_{xy}$$

согласно (4.4), (4.6), (4.7) будут известны, если известны функция  $\sigma[\vartheta(y, t)]$ ,  $v(y, t)$ ,  $\eta_t$ .

Первое соотношение между этими величинами находим, сравнивая  $S_{xy}$  (4.4) и (4.6)

$$\frac{\sigma \partial v / \partial y}{\sqrt{\varepsilon^2 + (\partial v / \partial y)^2}} = -\frac{y}{\eta} \sigma \eta. \quad (4.8)$$

Второе соотношение является уравнением теплообмена (1.31). В рассматриваемом случае теплообразованием за счет пластических деформаций можно пренебречь, сравнительно с теплом, возникающим за счет теплопроводности и конвекции.

Обозначая константы

$$a_n^2 = \frac{\lambda_n}{c_n \gamma_n} \left( y > \frac{h}{2} \right), \quad a_c^2 = \frac{\lambda_c}{c_c \gamma_c} \left( y < \frac{h}{2} \right) \quad (4.9)$$

и учитывая, что скорость  $v_y$  имеет, согласно (4.3), значения

$$v_y = \frac{1}{2} \frac{dh}{dt} = -\varepsilon \eta \quad (y \geq \eta), \quad v_y = \frac{y}{2\eta} \frac{dh}{dt} = -\varepsilon y \quad (y \leq \eta) \quad (4.10)$$

получим уравнение теплообмена для различных областей

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vartheta}{\partial t} &= \varepsilon \eta \frac{\partial \vartheta}{\partial y} + a_n^2 \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial y^2} \quad \left( y \geq \frac{h}{2} \right), \\ \frac{\partial \vartheta}{\partial t} &= \varepsilon \eta \frac{\partial \vartheta}{\partial y} + a_c^2 \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial y^2} \quad \left( \frac{h}{2} \geq y \geq \eta \right), \\ \frac{\partial \vartheta}{\partial t} &= \varepsilon y \frac{\partial \vartheta}{\partial y} + a_c^2 \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial y^2} \quad \left( \eta \geq y \geq 0 \right), \end{aligned} \quad (4.11)$$

причем на границе  $y = \eta$ , согласно этим уравнениям,  $\vartheta$ ,  $\partial \vartheta / \partial t$ ,  $\partial \vartheta / \partial y$ ,  $\partial^2 \vartheta / \partial y^2$  — непрерывны, а на границе с плитой требуется выполнение граничных условий

$$(\vartheta)_{y=h/2+0} = (\vartheta)_{h/2-0}, \quad \lambda_n \left( \frac{\partial \vartheta}{\partial y} \right)_{y=h/2+0} = \lambda_c \left( \frac{\partial \vartheta}{\partial y} \right)_{y=h/2-0} \quad \text{при } y = \frac{h}{2}. \quad (4.12)$$

Они означают непрерывность температуры и теплового потока. На плоскости  $y = 0$  имеет место условие:

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial y} = 0 \quad \text{при } y = 0. \quad (4.13)$$

Начальное условие имеет вид при  $t = 0$

$$\vartheta = \vartheta_n = \text{const для } y > \frac{h_0}{2}, \quad \vartheta = \vartheta_c = \text{const для } y < \frac{h_0}{2}. \quad (4.14)$$

Последнее уравнение, связывающее искомые функции, получим из условия затвердевания. Сила, совершающая работу при сближении плит в направлении оси  $y$  (по оси  $x$  они не перемещаются)

$$Q = - \int Y_y dx.$$

Полагаем, что симметрично слева и справа от начала координат на некотором расстоянии материал слоя свободно вытекает, и, значит, внешние силы там не совершают работы.

Из (4.4) и (4.7) имеем

$$Y_y = \frac{x}{\sqrt{3}} \frac{\sigma_\eta}{\eta} - c(t), \quad X_x = \frac{x}{\sqrt{3}} \frac{\sigma_\eta}{\eta} - c(t) + \frac{2\sigma\varepsilon}{\sqrt{3}\sqrt{\varepsilon^2 + (\partial v/\partial y)^2}}.$$

Из условия свободного течения на правой границе слоя  $x=l$ ,  $2 \int_0^{h/2} X_x dy = 0$  следует

$$c(t) = \frac{l}{\sqrt{3}} \frac{\sigma_\eta}{\eta} + \frac{2\varepsilon}{\eta\sqrt{3}} \int_0^\eta \frac{\sigma dy}{\sqrt{\varepsilon^2 + (\partial v/\partial y)^2}}.$$

Значит, сила сжатия плит  $Q$  на всей длине  $2l$  равна

$$Q = Q_0 \left( 1 + \frac{4\varepsilon}{\sigma_\eta l} \int_0^\eta \frac{\sigma dy}{\sqrt{\varepsilon^2 + (\partial v/\partial y)^2}} \right) \quad \left( Q_0 = \frac{l^2 \sigma_\eta}{\sqrt{3}\eta} \right). \quad (4.15)$$

Величина  $Q_0$  есть главная часть силы, поскольку выражение, стоящее в скобках (1.15), отличается от 1 на малую порядка  $\eta/l$ .

Условие затвердевания, определяющее границу  $\eta$ , состоит в том, что функция  $\eta(t)$  в каждый момент времени обращает в минимум  $Q$ . Оно может быть заменено условием минимума величины  $Q_0$ , т. е. имеет более простой вид (для  $\eta/l \ll 1$ )

$$\frac{\sigma_\eta}{\eta} = \min, \quad \eta(t) \leq \frac{h}{2}. \quad (4.16)$$

Уравнения (4.11), (4.16) и температурная зависимость (4.1)  $\sigma = \sigma(\vartheta)$  вместе с граничными и начальными условиями (4.12), (4.13), (4.14) и условием теплоотдачи на внешней границе плиты  $y = h(t)/2 + H$ , которое можно заменить условием  $y = \infty$ ,  $\vartheta = \vartheta_n$ , определяют  $\vartheta$ ,  $\sigma$  и  $\eta$ . После этого из (4.8) находим

$$\frac{\partial v}{\partial y} = -\varepsilon \frac{\sigma_\eta y / \sigma \eta}{\sqrt{1 - (\sigma_\eta y / \sigma \eta)^2}}. \quad (4.17)$$

Решение этой нелинейной задачи представляет существенный интерес и значительные трудности.

В случае постоянной температуры ( $\vartheta_n = \vartheta_c$ ) уравнения (4.11) обращаются в тождество при  $\vartheta = \text{const}$ ; значит,  $\sigma = \sigma_\eta = \text{const}$ , и потому из (4.16) имеем  $\eta = h/2$ . Как видно из (4.17), (4.3), (4.4), (4.7), получающееся при этом решение совпадает с решением Прандтля – Надаи.

Рассмотрим частный случай, когда коэффициенты теплопроводности слоя и плит одинаковы  $a_n = a_c = a$ .

Уравнение (4.11) запишем в виде

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial y^2} - \frac{1}{2} \frac{dh}{dt} \frac{\partial \vartheta}{\partial y} + I \quad (0 \leq y < \infty), \quad (4.18)$$

где

$$I = \begin{cases} 0 & (y = 0, \quad \eta \leq y < \infty), \\ \frac{1}{2} \frac{dh}{dt} \left(1 - \frac{y}{\eta}\right) \frac{\partial \vartheta}{\partial y} & (0 \leq y \leq \eta), \end{cases} \quad (4.19)$$

следовательно, малая сравнительно с  $\partial \vartheta / \partial t$  и  $a^2 \partial^2 \vartheta / \partial y^2$  непрерывная функция. Ее относительное значение определяется, например, величиной

$$\Delta = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{y}{\eta}\right) \frac{(dh/dt)(\partial \vartheta / \partial y)}{a^2 \partial^2 \vartheta / \partial y^2} \text{ при } 0 \leq y \leq \eta, \quad (4.20)$$

$$\left(\frac{\partial \vartheta}{\partial y}\right)_{y=0} = 0 \text{ при } y = 0,$$

которая вследствие монотонности функции  $\vartheta$  при средних значениях в интервале  $0 < y < \eta$  априори будет иметь порядок не

более

$$\Delta \sim \frac{h}{10a^2} \frac{dh}{dt} \quad (4.20.2)$$

сравнительно с 1. Относительное значение второго слагаемого в правой части (4.18) (главный конвективный член) будет примерно в 10 раз больше величины (4.20.2), т. е.

$$10\Delta \sim \frac{h}{a^2} \frac{dh}{dt}.$$

Очевидно, если  $\Delta \ll 1$ , в уравнении (4.18) следует отбросить величину  $I$ . Напротив, если  $10\Delta \gg 1$ , то теплопроводностью можно пренебречь и отбросить в (4.18) слагаемое  $a^2 \partial^2 \vartheta / \partial y^2$  всюду, кроме  $y = h/2$ . Это означает, что температура слоя в процессе сжатия остается постоянной и, значит,  $y \approx h/2$ ; величина  $I$  при этом будет весьма малой сравнительно со вторым слагаемым в первой части уравнения (4.18).

В таблице даны значения  $\Delta$ , при различных  $h$  и  $dh/dt$  для стали ( $a^2 \approx 1$ ) в системе кг, см, сек, °С, б. кал.

Значения  $\Delta = 0,8h dh/dt$

$h, \text{ см}$	$\frac{dh}{dt}, \frac{\text{см}}{\text{сек}}$						
	0.1	0.25	0.5	1	2.5	5	10
0.1	0.008	0.03	0.04	0.08	0.8	0.4	0.8
0.5	0.04	0.1	0.2	0.4	1.0	2.0	4.0
1.0	0.08	0.2	0.4	0.8	2.0	4.0	8.0
2.5	0.20	0.5	1.0	2.0	5.0	10.0	20.0
5.0	0.40	1.0	2.0	4.0	10	20	40
10.0	0.80	2.0	4.0	8.0	20	40	80
20	1.6	4.0	8.0	16.0	40	80	160
50	4.0	10	20	40	100	200	400

Исходя из данных оценок, найдем решение задачи при  $I = 0$ , которое во всех случаях должно быть хорошим приближением,

а с точки зрения построения точного решения является первым приближением, если применять метод последовательных приближений: во втором приближении  $I$  находить по результатам первого и уравнение (4.18) решать при известном источнике  $I$ ; этот процесс должен сходиться к точному решению, если в каждом приближении решение удовлетворяет начальным и граничным условиям и условию затвердевания (4.16).

Введем вместо координаты  $y$  расстояние  $z$  той же плоскости в тот же момент времени от плиты:

$$z = \frac{1}{2}h(t) - y, \quad (4.21)$$

где  $h(t)$  определяется заданным законом сближения плит. Тогда уравнение (4.18) примет обычный вид уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial z^2}. \quad (4.22)$$

Начальные условия будут при  $t = 0$

$$\begin{aligned} \vartheta = \vartheta_c = \text{const} \quad \text{для} \quad 0 \leq z < \frac{1}{2}h(0), \\ \vartheta = \vartheta_n = \text{const} \quad \text{для} \quad \frac{1}{2}h(0) < z \leq \infty, \end{aligned} \quad (4.23)$$

а граничные условия станут с одной подвижной границей:

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial z} = 0 \quad \text{для} \quad z = \frac{1}{2}h(t), \quad \vartheta = \vartheta_n = \text{const} \quad \text{для} \quad z = -\infty. \quad (4.24)$$

Решение задачи (4.22), (4.23), (4.24) не зависит от границы затвердевания  $\eta(t)$  и потому условие (4.16), определяющее подвижную границу

$$\zeta(t) = \frac{1}{2}h(t) - \eta(t), \quad (4.25)$$

принимает вид

$$\left\{ \frac{\sigma[\vartheta(y, t)]}{y} \right\}_{y=\eta(t)} = \min \quad \text{или} \quad \left( \frac{\partial \sigma}{\partial y} - \frac{\sigma}{y} \right)_{y=\eta(t)} = 0. \quad (4.26)$$

Заметим, что в методе последовательных приближений это условие должно выполняться для каждого приближения.

Полагая  $dh/dt = -V_0 = \text{const}$  и производя в (4.18) подстановку  $\vartheta = F(y)e^{-pt}$ , найдем фундаментальное решение, удовлетворяющее граничным условиям

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial y} = 0 \text{ при } y = 0, \quad y = b, \quad (4.27)$$

в виде

$$\vartheta_m = A_m \varphi_m(y) \exp \left[ -\beta y - a^2 p^2 t - \left( \frac{m\pi a}{b} \right) \right], \quad (4.28)$$

где  $A_m$  — произвольная постоянная,  $m$  — нечетное число,

$$\varphi_m(y) = \frac{m\pi}{b} \cos \frac{m\pi y}{b} + \beta \sin \frac{m\pi y}{b}, \quad \beta = \frac{V_0}{4a^2} = \frac{c_\gamma V_0}{4\lambda}, \quad (4.29)$$

причем функции  $\varphi_n, \varphi_m$  ортогональны

$$\int_0^b \varphi_n \varphi_m dy = \begin{cases} 0 & m \neq n, \\ b[(n\pi/b)^2 + \beta^2]/2 & m = n. \end{cases}$$

Если при  $t = 0$  дано распределение температуры  $\vartheta = \psi(y)$ , то, представляя  $\psi(y)$  в виде ряда  $\psi(y) = e^{-\beta y} \sum_{1,3,5,\dots} \varphi_n(y) A_n$ ,

найдем

$$A_n = \frac{2}{b} \frac{1}{(n\pi/b)^2 + \beta^2} \int_0^b \psi(y) e^{\beta y} \varphi_n(y) dy, \quad (4.30)$$

а потому распределение температуры  $\vartheta$  в слое и инструменте, удовлетворяющее общим условиям (4.27), будет

$$\begin{aligned} \vartheta = \frac{2}{l} \exp[-\beta y - a^2 \beta^2 t] \sum_{n=1,3,5,\dots} \frac{\varphi_n(y)}{(n\pi/l)^2 + \beta^2} \exp \left[ -\left( \frac{n\pi a}{l} \right)^2 \right] + \\ + \int_0^l \psi(y) e^{\beta y} \varphi_n(y) dy. \end{aligned} \quad (4.31)$$

В рассматриваемом частном случае начального распределения температуры (начальную температуру плит  $\vartheta_n$  можно принять за нулевую,  $\vartheta_0 = 0$ )

$$\psi = \begin{cases} \vartheta_c & \text{для } 0 < y < h_0/2, \\ 0 & \text{для } y > h_0/2, \end{cases}$$

получаем из (4.31)

$$\vartheta = \vartheta_c S(y, t) \exp \left[ -\beta \left( y - \frac{h_0}{2} \right) - a^2 \beta^2 t \right], \quad (4.32)$$

$$S(y, t) = \frac{2}{l} \sum_{1,3,5,\dots} \frac{\varphi_n(y) \sin n\pi h_0/2l}{\beta^2 + (n\pi/l)^2} \exp \left[ -\left( \frac{n\pi a}{l} \right)^2 t \right]. \quad (4.33)$$

Производя предельный переход  $l \rightarrow \infty$ ,  $n \rightarrow \infty$ ,  $n\pi/l = k$ ,  $\pi/l = \Delta k$ , получим для  $S$  следующее выражение

$$S(y, t) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\varphi_k(y) \sin(kh_0/2)}{k^2 + \beta^2} e^{-k^2 a^2 t} dk, \quad (4.34)$$

где

$$\varphi_k(y) = k \cos ky + \beta \sin ky.$$

Встречающиеся при вычислении  $S$  два интеграла полезно отметить

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{\sin mx}{x^2 + \zeta^2} e^{-x^2} x dx &= \frac{\pi}{4} e^{\zeta^2} [(\Phi(z_1) - 1)e^{m\zeta} + (\Phi(z_2) + 1)e^{-m\zeta}], \\ \zeta \int_0^\infty \frac{\cos mx}{x^2 + \zeta^2} e^{-x^2} dx &= \frac{\pi}{4} e^{\zeta^2} [(1 - \Phi(z_1))e^{m\zeta} + (\Phi(z_2) + 1)e^{-m\zeta}], \end{aligned} \quad (4.35)$$

где

$$z_1 = \zeta + \frac{m}{2}, \quad z_2 = -\zeta + \frac{m}{2}, \quad \Phi(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-z^2} dz. \quad (4.36)$$

После вычисления  $S(y, t)$  находим следующее распределение температуры в слое и плитах:

$$\frac{2\vartheta}{\vartheta_c} = 1 + \Phi\left(\frac{1-\bar{y}}{4\sqrt{\tau}} - \beta h_0\sqrt{\tau}\right) + e^{\beta h_0}\Phi\left(\frac{1+\bar{y}}{4\sqrt{\tau}} + \beta h_0\sqrt{\tau}\right) - e^{\beta h_0}, \quad (4.37)$$

где

$$\bar{y} = \frac{2y}{h_0}, \quad \tau = \frac{a^2 t}{h_0^2}, \quad \beta h_0 = \frac{V_0 h_0}{4a^2}. \quad (4.38)$$

Непосредственной подстановкой можно убедиться, что найденная функция (4.37) удовлетворяет уравнению (4.18) (при  $I = 0$ ) граничным и начальным условиям поставленной задачи. Остается из условия (4.26) найти границу  $y = \eta(t)$  «затвердевания» слоя. Обозначим через  $k$  величину, определяемую из температурной кривой  $\sigma = \sigma(\vartheta)$  при значении  $\vartheta = \vartheta_c/2$ , т. е. при температуре по Цельсию  $(\vartheta_c + \vartheta_n)/2$

$$k = \frac{d \ln \vartheta - d \ln \sigma}{d \ln \sigma} \text{ при } \vartheta = \frac{1}{2}\vartheta_c. \quad (4.39)$$

Тогда, считая, что в рассматриваемом диапазоне температур плит и слоя  $d\sigma/d\vartheta = \text{const}$  ( $k = \text{const}$ ), получаем

$$\bar{\eta} \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{2\vartheta_n}{\vartheta_c} \right) - \frac{2\vartheta_n}{\vartheta_c} = k, \quad \vartheta_n = (\vartheta)_{y=\eta}, \quad \bar{\eta} = \frac{2\eta(t)}{h_0}. \quad (4.40)$$

После простых преобразований находим следующее уравнение, определяющее границу «твердения»  $\eta(t)$

$$\begin{aligned} \frac{\bar{\eta}}{2\sqrt{\pi\tau}} \left\{ \exp \left[ - \left( \frac{1+\bar{\eta}}{4\sqrt{\tau}} + \beta h_0\sqrt{\tau} \right)^2 + \beta h_0 \right] - \right. \\ \left. - \exp \left[ - \left( \frac{1-\bar{\eta}}{4\sqrt{\tau}} - \beta h_0\sqrt{\tau} \right)^2 \right] \right\} - \Phi \left( \frac{1-\bar{\eta}}{4\sqrt{\tau}} - \beta h_0\sqrt{\tau} \right) - \\ - e^{\beta h_0} \Phi \left( \frac{1+\bar{\eta}}{4\sqrt{\tau}} + \beta h_0\sqrt{\tau} \right) + e^{\beta h_0} = k + 1. \end{aligned} \quad (4.41)$$

Анализ этой формулы, дающей неявное выражение  $\eta(t)$ , показывает, что при малых временах  $t \rightarrow 0$  толщина слоя «затвердения» возрастает по закону

$$\frac{h}{2} - \eta = 2a \sqrt{t \ln \frac{(\sigma_n - \sigma_0)h_0}{4\sigma_a \sqrt{\pi t}}}, \quad (4.42)$$

затем достигает максимальной величины и затем вновь начинает убывать, стремясь к  $\eta = h(t)/2$ .

Поступило 5 X 1957

### ЛИТЕРАТУРА

1. Ильюшин А.А. Деформация вязко-пластичного тела. Ученые записки МГУ, механика, вып. 39, 1940.
2. Ильюшин А.А. К вопросу о вязко-пластичном течении материала. Труды конференции по пластическим деформациям, декабрь 1936; Изв. АН СССР, ОТН, 1938.
3. Ильюшин А.А. Вопросы теории пластического течения вещества по поверхностям. ПММ, т.18, 1954, вып. 3.
4. Ильюшин А.А. Моделирование горячих и скоростных процессов обработки металлов давлением. ПММ, т. XVI, 1952.
5. Прагер В., Ходж Ф. Теория идеальной пластичности. ИЛ, 1956.
6. Ильюшин А.А. О связи между напряжениями и малыми деформациями в механике сплошных сред. ПММ, т. XVIII, 1954.
7. Ильюшин А.А. Современные вопросы теории пластичности. Вестник МГУ, 1955.
8. Ильюшин А.А. Пластичность. ГТТИ, 1948.
9. Сен-Венан. Теория пластичности. Сб. статей под ред. Ю.Н. Работнова, 1948.
10. Леви М. Теория пластичности. Сб. статей под ред. Ю.Н. Работнова, 1948.

11. Devis E.A. Creep and Relaxation of Oxygen — Free Copper, JAM, v. 10. N 2, 1943.
12. Соколовский В.В. Теория пластичности, ГТТИ, 1950.
13. Ильюшин А.А. Полная пластичность в процессах течения между жесткими поверхностями, аналогия с песчаной насыпью и некоторые приложения. ПММ, т. XIX, 1955.
14. Безухов В.Н. Некоторые задачи осадки пластического слоя. Изв. Ар. акад. им. Дзержинского, 1956.

## Часть II

### ПЛАСТИЧЕСКОЕ ТЕЧЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ — СОВРЕМЕННОЕ СОСТОЯНИЕ ТЕОРИИ И ПРОБЛЕМЫ

*Опыты Треска, одобренные Академией, заставили обратить особое внимание на такие процессы, как ковка, прокатка, штамповка и пр. Естественно было задаться вопросом: каким же законам подчиняются относительные перемещения тел, которые непрерывно деформируются таким образом, без нарушения связности, и какие при этом возникают внутренние силы?*

Б. Сен-Венан.

#### Глава 1

#### ОСНОВЫ ТЕОРИИ

Сложность физических явлений, сопровождающих развитие формоизменения материалов, обуславливает существенные трудности, возникающие при разработке физико-математических моделей, удовлетворительно описывающих процессы пластических течений. Как правило, это сложные объемные процессы, в которых границы тела заранее не известны и должны быть найдены при решении задачи. С другой стороны — это разнообразие параметров, определяющих свойства материалов. Например, в высокоскоростных процессах существенную роль начинают играть силы вязкости и инерции, в значительной мере затрудняющие моделирование; температурные градиенты приводят к существенной неравномерности свойств по объему тела, возможному образованию областей затвердевания; определяющее влияние могут оказывать внутренние структурные параметры типа размеров зерен и др. (например, в сверхпластическом состоянии материала); грубым оказывается предположение о несжимаемости и т.д.

Принимая для дальнейшего изложения феноменологический подход к построению модели процесса, будем полагать, в соответствии с общепринятыми на сегодня представлениями,

что векторные уравнения связи напряженного и деформированного состояний даются законом пластического течения Б. Сен-Венана и М.Леви. Все многообразие свойств, о которых шла речь выше, включается в скалярные определяющие соотношения, в число которых могут входить уравнения для определения параметров структуры, ограничения в форме неравенств и т.п. Постулируется, что все входящие в математическую модель процесса функционалы, функции, параметры могут быть определены из макроэкспериментов с привлечением необходимых сведений из физики и материаловедения.

В этой главе приводится полная система уравнений теории, формулируются начально-краевые задачи, приводится их анализ; чтобы не нарушать связность из изложения, мы допустим небольшие пересечения с текстом статьи [4] из первой части книги.

### §1. Определяющие соотношения.

Кинематика деформируемой среды (вязкопластического потока) задается полем вектора скорости  $\bar{v}(\bar{x}, t)$  в функции эйлеровых координат  $\bar{x} = \{x, y, z\}$  и времени. Соответственно этому определяется тензор скоростей деформаций  $v_{ij} = 0,5(\partial v_i/\partial x_j + \partial v_j/\partial x_i)$ , его девиатор  $V_{ij} = v_{ij} - \Delta\delta_{ij}/3$ ,  $\Delta = \text{div } \bar{v}$ , и интенсивность  $v_u = [(2/3)V_{ij}V_{ij}]^{1/2}$ , а также полное относительное изменение объема  $\Theta$  и степень деформации  $e_c$  через соотношения

$$\frac{d\Theta}{dt} = \Delta = \text{div } \bar{v}, \quad \frac{de_c}{dt} = v_u. \quad (1.1)$$

Обозначим  $\rho = \rho(\bar{x}, t)$  — плотность материала потока, тогда уравнение сохранения массы

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \text{div } \bar{v} = 0 \quad (1.2)$$

вместе с первым из (1.1) приводит к зависимости

$$\Theta = \ln(\rho_0/\rho) \quad (1.3)$$

здесь  $\rho_0$  — начальная плотность.

Напряженное состояние в данной геометрической точке потока характеризуется симметричным тензором истинных напряжений  $\sigma_{ij}$ ; в теории пластического течения принято вводить среднее гидростатическое давление  $3p = -3\sigma = -\sigma_{ij}\delta_{ij}$ , поэтому девиатор напряжений будет  $S_{ij} = \sigma_{ij} + p\delta_{ij}$ , его интенсивность  $\sigma_u = [(3/2)S_{ij}S_{ij}]^{1/2}$ .

Максимальное касательное напряжение  $\tau_{max}$  является основным при формулировке условий на поверхностях контакта, при выборе режимов течения и т.п., однако, для его вычисления необходимо определить главные напряжения, что связано с анализом корней кубического уравнения. В этом смысле удобнее пользоваться октаэдрическим напряжением  $\tau_\gamma$ , поскольку оно, как показывается ниже, отличается от  $\tau_{max}$  практически постоянным множителем независимо от свойств материала и характера его движения.

Действительно,  $\tau_{max}$  определяется как наибольшее по модулю из всех  $\tau_{\alpha\beta} = 0,5(\sigma_\alpha - \sigma_\beta)$ ,  $\alpha, \beta = 1, 2, 3$ . Составим отношение

$$\frac{\tau_\gamma}{\tau_{max}} = \frac{2}{3} \frac{(\tau_{12}^2 + \tau_{23}^2 + \tau_{31}^2)^{1/2}}{\max(\tau_{\alpha\beta})} \quad (1.4)$$

и положим, для определенности,  $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$ , тогда будет  $\tau_{max} = \tau_{31}$ . Обозначим  $\tau_{12}/\tau_{max} = a$ ,  $\tau_{23}/\tau_{max} = b$  и учтем, что  $|a| < 1$ ,  $|b| < 1$  и  $1 + a + b = 0$ . Из (1.4) получим  $\tau_\gamma/\tau_{max} = 2(1 + a^2 + b^2)^{1/2}/3$ ; экстремальные значения этого выражения легко вычисляются, поэтому окончательно

$$0,866 \cong \frac{\sqrt{3}}{2} \leq \frac{3\tau_\gamma}{2\sqrt{2}\tau_{max}} \leq 1.$$

Следовательно, положив это отношение равным 0,933, мы допустим ошибку не более 7%; с этой точностью  $\tau_\gamma/\tau_{max} = 0,878$ .

Векторное уравнение связи напряженного и деформированного состояний принимаем в форме закона Б. Сен-Венана, М. Леви — направляющие тензоры истинных напряжений и скоростей деформаций совпадают

$$S_{ij} = \sigma_{ij} + p\delta_{ij} = \frac{2\sigma_u}{3v_u}V_{ij} == \frac{2\sigma_u}{3v_u}(v_{ij} - \frac{1}{3}\Delta\delta_{ij}). \quad (1.5)$$

Скалярными уравнениями устанавливаются связи между инвариантными характеристиками процесса, температурой и параметрами структуры, которые мы обозначим  $\mu_k$ :

$$\sigma_u = \Phi_1(T, v_u, e_c, p, \mu_k); \quad \rho = \Phi_2(p, v_u, e_c, T, \mu_k), \quad (1.6)$$

здесь  $\Phi_{1,2}$  — функционалы от указанных параметров по времени,  $T$  — температура, аргументы расположены в убывающем порядке по степени их влияния на свойства. Параметры структуры определяются, как правило, уравнениями эволюционного типа

$$\frac{d\mu_k}{dt} = \varphi_k(\mu_s, T, v_u, e_c \dots), \quad (1.7)$$

в которых  $\varphi_k$  — функции. Конкретные формы функционалов  $\Phi_{1,2}$  и функций  $\varphi_k$  будут рассмотрены в соответствующих разделах книги, здесь же ограничимся замечаниями общего характера.

Функционалы (1.6) и функции (1.7) в широком диапазоне изменения параметров изучены еще недостаточно, их построение — фундаментальная, но весьма сложная задача современной механики и физики твердого тела. Поэтому неизбежны различного рода упрощения, оправданные для классов материалов, процессов и диапазонов изменения параметров.

Основным допущением принципиального характера является предположение о том, что в сравнительно монотонных процессах, не сопровождающихся фазовыми переходами, функционалы (1.6) могут быть заменены функциями. Изменение объема (или плотности), как правило, мало, влиянием температуры и параметров структуры на это изменение можно пренебречь, поэтому вместо второго уравнения из (1.6) получим

$$\rho = \rho_0(1 + \alpha f(p, v_u, e_c)), \quad (1.8)$$

при этом  $\alpha^2 \ll 1$ ,  $f \sim 1$ . Во многих случаях можно считать  $f = f(p)$ , тогда (1.8) станет обычным уравнением объемной сжимаемости.

Сдвиговое сопротивление  $\sigma_u$  как функция своих аргументов обладает известными свойствами

$$\frac{\partial \sigma_u}{\partial T} \leq 0, \quad \frac{\partial \sigma_u}{\partial e_c} \geq 0, \quad \frac{\partial \sigma_u}{\partial v_u} \geq 0, \quad \frac{\partial \sigma_u}{\partial p} \geq 0, \quad (1.9)$$

имеющиеся данные указывают на то, что с увеличением давления темп роста  $\sigma_u$  замедляется, т.е.

$$\frac{\partial \sigma_u}{\partial p} \ll 1, \quad \frac{\sigma_u}{p} \rightarrow 0 \text{ при } \frac{p}{p_0} \rightarrow \infty,$$

здесь  $p_0$  — характерное давление, при котором начинает ощущаться зависимость  $\sigma_u$  от  $p$ . Отмеченное свойство означает, что при весьма высоких давлениях (например, при высокоскоростном соударении твердых тел) сдвиговое сопротивление оказывает несущественное влияние на характер движения среды, и в первом приближении оно может быть рассчитано в рамках модели идеальной сжимаемой жидкости.

Таким образом, для большинства традиционных процессов достаточно общим выражением зависимости сдвиговых свойств материалов от кинематических и других параметров будет соотношение

$$\sigma_u = 3\mu v_u(1 + \omega), \quad (1.10)$$

в котором  $\mu = \mu(T, e_c)$  — условный коэффициент вязкости,  $\omega = \omega(T, e_c, v_u, \mu_k)$ . Заметим, что вследствие неравенств (1.9) вязкость  $\mu$  всегда можно подобрать так, чтобы выполнялось условие  $|\omega| < 1$ .

Рассмотрим подробнее процессы, когда деформационным упрочнением можно пренебречь:  $\sigma_u = \sigma_u(T, v_u, \mu_k)$ ; существенно оказывается характер зависимости  $\sigma_u$  от скорости деформации  $v_u$ , прежде всего, поведение  $\sigma_u$  при  $v_u \rightarrow 0$ .

Течение называется вязким, если как угодно малому значению  $v_u$  отвечает как угодно малое значение  $\sigma_u$ , т.е.  $\sigma_u \rightarrow 0$  при  $v_u \rightarrow 0$ . Течение называется вязкопластическим, если  $\sigma_u$  имеет конечный предел  $\sigma_0(T, \mu_k)$  при  $v_u \rightarrow 0$ , и при любой скорости деформации выполняется условие:  $v_u > 0, \sigma_u > \sigma_0(T, \mu_k)$ . Считается, что температура  $T$  и параметры  $\mu_k$  фиксированы. Если же при любой скорости деформации  $v_u$  справедливо  $\sigma_u = \sigma_s(T, \mu_k)$ , то течение называется идеально-пластическим.

Вязко-пластические течения, вследствие конечного предела сдвигового сопротивления при  $v_u \rightarrow 0$ , обладают важными характерными особенностями.

1. В области контакта с твердой непроницаемой стенкой возможно полное сцепление, если касательное напряжение  $\tau_m$  в ма-

териале удовлетворяет условиям

$$\tau_m < k\sigma_n < \tau_{max},$$

где  $k$  — коэффициент трения при существующей в точках границы температуре и скорости деформации  $v_u$ ;  $\sigma_n$  — нормальное давление. Условие полного сцепления принимает вид обычного условия прилипания: в точках контакта вектор скорости материала равен вектору скорости стенки. Если в результате решения задачи при условии прилипания окажется, что касательное напряжение  $\tau_m$  превосходит  $k\sigma_n$ , то в качестве граничного условия надо будет принять условие внешнего скольжения

$$\tau_m = k\sigma_n < \tau_{max}.$$

Если же в результате решения окажется, что  $k\sigma_n > \tau_{max}$  на любой части поверхности контакта, то надо будет принять условие внутреннего скольжения

$$\tau_m = \tau_{max}, \quad (1.11)$$

при этом граница станет поверхностью скольжения деформируемого материала. В двух последних случаях будет происходить проскальзывание текущего материала по поверхности контакта, и граничное условие будет необходимо дополнить условием непроницаемости (подробно об условиях на поверхностях контакта будет сказано ниже). Разумеется, возможны ситуации, когда на различных участках поверхности контакта будут выполняться различные (из перечисленных) граничные условия.

2. Внутри области течения могут возникать так называемые зоны застоя; на границах этих зон выполняются условия либо полного сцепления, либо внутреннего скольжения. Предельный случай зоны застоя — образование внутри области течения поверхностей разрыва; наиболее характерным это явление может быть для идеально пластических течений, при этом вдоль поверхности выполняется условие (1.11) и допускаются разрывы касательных скоростей.

3. В области течения могут возникать и распространяться границы твердения и плавления, а зоны застоя изменять свою конфигурацию. Эти явления могут быть порождены особыми

условиями теплообмена, например: течение нагретого металла между первоначально холодными телами инструмента; сильный односторонний нагрев материала, ведущий к распространению границы плавления, и т.п. Эти границы, будучи заранее неизвестными, определяются из специальных термофизических условий типа условий плавления или затвердевания, обозначающих, что поток тепла через границу (по нормали к ней) терпит разрыв на величину, равную скрытой теплоте, которая необходима для перемещения границы плавления или затвердевания

$$\left[ \lambda \frac{\partial T}{\partial n} \right]_{1,2} = \varphi(T, v_u);$$

температура при переходе через границу остается непрерывной.

Если граница является такой, что на ней прекращается течение, но материал не меняет своего агрегатного состояния, то дополнительным условием для определения такой границы будет соотношение

$$v_u = 0, \quad (1.12)$$

оно справедливо только для материалов, у которых

$$\frac{\partial \sigma_u}{\partial v_u} > 0.$$

В идеально пластическом теле могут возникать поверхности разрыва тангенциальных скоростей, и поэтому условие (1.12) на них выполняться, вообще говоря, не будет. В зависимости от того, какая будет выбрана система поверхностей разрыва, получатся различные решения, и возникает вопрос о выборе движения среды, наиболее близком к реальному. В некоторых случаях проблема выбора может быть решена применением принципа минимума мощности внешних сил, затрачиваемой на движение среды; более общим, однако, следует признать критерий: из множества идеально-пластических течений наиболее близким к действительному будет то, которое наиболее близко к вязко-пластическому течению с бесконечно малой скоростью деформации.

## §2. Начально-краевая задача.

Уравнения, описывающие течение вязкопластического материала, являются следствиями законов сохранения импульса, массы и баланса энтропии; это уравнения движения

$$\rho \frac{dv_i}{dt} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial S_{ij}}{\partial x_j} + \rho F_i, \quad (2.1)$$

неразрывности

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \bar{v} = 0, \quad (2.2)$$

и теплопроводности

$$\rho C_0 \frac{dT}{dt} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \lambda \frac{\partial T}{\partial x_i} \right) + k \sigma_u v_u, \quad (2.3)$$

здесь  $C_0 = C_0(T)$  — теплоемкость,  $\lambda = \lambda(T)$  — коэффициент теплопроводности,  $k = k_0/J_0$ ,  $J_0$  — механический эквивалент тепла,  $k_0$  — числовой коэффициент порядка единицы.

Обозначим  $\rho_0$  — начальное значение плотности материала потока,  $v_0$  — характерное значение скорости течения пластического материала,  $\sigma_s$  — характерное значение сдвигового сопротивления; тогда силами инерции в уравнениях движения (2.1) можно пренебречь при условии  $\rho_0 v_0^2 \ll \sigma_s$ . Отсюда

$$v_0 \ll \left( \frac{\sigma_s}{\rho_0} \right)^{1/2} = \left( \frac{\sigma_s E}{E \rho} \right)^{1/2} = C_1 \left( \frac{\sigma_s}{E} \right)^{1/2},$$

здесь  $C_1^2 = E/\rho_0$ ,  $E$  — модуль Юнга. Обычно  $C_1 \sim 5 \cdot 10^3$  м/сек,  $\sigma_s/E \lesssim 10^{-3}$ , отсюда  $v_0 \ll 2 \cdot 10^2$  м/сек. Видно, что процессы пластического течения при скоростях движения порядка десятков метров в секунду можно считать квазистатическими и рассчитывать на основании уравнений равновесия

$$\frac{\partial p}{\partial x_i} = \frac{\partial S_{ij}}{\partial x_j} + \rho F_i. \quad (2.4)$$

Уравнение неразрывности вместе с определяющим соотношением (1.8) приводят к равенству

$$\alpha \frac{df}{dt} + (1 + \alpha f) \operatorname{div} \bar{v} = 0$$

при условиях, которые оговаривались в предыдущем параграфе, можно считать  $(\alpha df/dt)^2 \ll 1$ , поэтому окончательно принимаем

$$\operatorname{div} \bar{v} + \alpha \frac{df}{dt} = 0. \quad (2.5)$$

Заметим, что наиболее часто в традиционной технологии принимается условие несжимаемости  $\operatorname{div} \bar{v} = 0$ .

Если  $\rho$ ,  $C_0$ ,  $\lambda$  можно с достаточной точностью принять постоянными по потоку величинами, то (2.3) принимает обычную форму уравнения теплопроводности

$$\frac{dT}{dt} = a^2 \Delta T + \beta \sigma_u v_u, \quad (2.6)$$

в котором  $a^2 = \lambda/\rho C_0$ ,  $\beta = k_0/\rho C_0$ .

Обозначим  $\lambda_q$ ,  $\rho_q$ ,  $C_q$  — теплофизические характеристики материала тел инструмента,  $\bar{v}_q$  — их скорости; тогда распределение температуры в инструментах будет описываться уравнениями вида

$$\frac{dT_q}{dt} = a_q^2 \Delta T_q. \quad (2.7)$$

Начальные значения параметров потока отвечают естественному состоянию: при  $t = 0$ ,  $\bar{v} = 0$ ,  $\sigma_{ij} = 0$ ,  $e_c = 0$ ,  $\rho = \rho_0$ ; инструменты и заготовка в момент  $t = 0$  нагреты до некоторой начальной температуры: при  $t = 0$   $T = T_0 \psi_1(\bar{x})$ ,  $T_q = T_{0q} \cdot \psi_2(\bar{x})$ , где  $T_0$ ,  $T_{0q}$  — характерные значения температур,  $\psi_1$ ,  $\psi_2$  — известные функции координат.

Пусть деформируемое тело занимает в эйлеровом пространстве область  $V$  с кусочно-гладкой границей  $\Gamma$ . Течение материала в области  $V$  происходит вследствие сложного взаимодействия его с рабочими телами инструмента и окружающей средой; это взаимодействие может быть кинематическим, динамическим и тепловым. Отметим, что, как правило, область  $V$  фиксирована лишь в начальный момент, затем она определяется в процессе решения задачи.

Если на части  $\Gamma_k$  границы области реализуются условия полного сцепления, то следует принять  $\bar{v} = \bar{f}(\bar{x}, t)$ ,  $\bar{x} \in \Gamma_k$ . Более распространенными, однако, являются смешанные условия контактного скольжения: непроницаемость поверхности инструмента и равновесие контактных касательных напряжений. Пусть

$F(\bar{x}, t) = 0$  — уравнение поверхности контакта, тогда условие непроницаемости запишется в виде

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \bar{v} \operatorname{grad} F = 0, \quad \bar{x} \in \Gamma_c. \quad (2.8)$$

Обозначим  $\Delta \bar{v}$  — вектор относительной скорости скольжения потока и поверхности инструмента,  $\bar{\tau}_m$  — вектор касательных напряжений в материале потока. Считаем, что  $|\bar{\tau}_m| = \varphi_e(\bar{x}, \nu, T, \sigma_n, |\Delta \bar{v}|, \dots)$  — известный функционал параметров процесса (в предыдущем параграфе об этом уже шла речь);  $\nu$  — коэффициент трения. Направление вектора  $\bar{\tau}_m$  определяется в общем случае матрицей  $A = \{a_{ik}\}$ , ( $i, k = 1, 2, 3$ ) анизотропии свойств поверхности контакта

$$\frac{\bar{\tau}_m}{|\bar{\tau}_m|} = -A \frac{\Delta \bar{v}}{|\Delta \bar{v}|} \quad (2.9)$$

в частном случае изотропного трения  $a_{ik} = \delta_{ik}$ , поэтому вектор  $\bar{\tau}_m$  направлен противоположно вектору  $\Delta \bar{v}$ . Отметим, что использование инструмента со свойствами (2.8) может оказаться полезным при разработке методов оптимального управления процессами течения.

На части границы  $\Gamma_p$ , где заданы напряжения  $\bar{q}(\bar{x}, t)$ , граничным условием будет

$$S_{ij} \ell_{nj} = p \ell_{ni} + \bar{q} \ell_{ni}, \quad x \in \Gamma_p$$

здесь  $\ell_{ni}$  — направляющие косинусы нормали к поверхности  $\Gamma_p$ .

Пусть будет  $\vartheta$  — температура окружающей среды,  $q_0(\bar{x}, t)$  — мощность подводимого потока тепла; тогда на свободной границе  $\Gamma_s$  достаточно общим будет условие

$$\lambda \frac{\partial T}{\partial n} = \alpha(T - \vartheta) + q_0(\bar{x}, t), \quad \bar{x} \in \Gamma_s.$$

Если подогрев отсутствует, а окружающей средой является воздух, то теплообменом можно пренебречь и с высокой точностью принять

$$\frac{\partial T}{\partial n} = 0, \quad \bar{x} \in \Gamma_s.$$

Тепловой контакт нагретого пластического материала с инструментом редко бывает идеальным, поэтому вводится понятие контактного теплового сопротивления  $R$  (или проводимости  $\kappa = R^{-1}$ ), с помощью которого условия теплового контакта записываются в виде

$$\lambda \frac{\partial T}{\partial n} = \lambda_q \frac{\partial T_q}{\partial n}, \quad \lambda R \frac{\partial T}{\partial n} = T - T_q, \quad \bar{x} \in \Gamma_c,$$

при  $R = 0$  отсюда получаем обычные условия идеального теплового контакта.

Если нельзя пренебречь выделением тепла, обусловленного трением на поверхности контакта (высокоскоростные процессы), то граничными условиями будут

$$\lambda \frac{\partial T}{\partial n} - \lambda_q \frac{\partial T_q}{\partial n} = \frac{|\bar{\tau}_m| |\Delta \bar{v}|}{J}; \quad \lambda R \frac{\partial T}{\partial n} = T - T_q; \quad \bar{x} \in \Gamma_c.$$

Рабочие органы инструмента, будучи телами упругими, от действия контактных напряжений и температуры деформируются, поэтому области контакта  $\Gamma_s$ , строго говоря, заранее не известны. Обозначим  $u_n(x, y, z, t)$  — нормальные перемещения точек поверхности контакта, а ее уравнение в недеформированном состоянии представим в виде:  $F \equiv z - f(x, y, t) = 0$ . Тогда из простых геометрических соображений получим уравнение деформированной поверхности  $\Gamma_s^l$ :

$$F_d \equiv z - f(x, y, t) - u_n(x, y, f(x, y, t)) / |\text{grad } F| = 0, \quad (2.10)$$

условие непроницаемости (2.8) должно быть записано теперь для функции  $F_d$  из (2.10).

Изменения в геометрии инструментов, обусловленные тепловыми воздействиями и касательными напряжениями трения, как правило, пренебрежимо малы и поэтому не учитываются. Перемещения  $u_n$ , следовательно, определяются нормальными напряжениями  $\sigma_n$ ; фактические вычисления могут быть проделаны двумя способами.

1) Известны функции жесткости  $K_q(\bar{x}, \bar{x}')$  инструментов, тогда  $u_{nq}$  вычисляются по формулам

$$u_{nq}(\bar{x}, t) = \iint_{\Gamma_c} K_q(\bar{x}, \bar{x}') \sigma_n(\bar{x}', t) d\Gamma.$$

2) В общем случае, когда  $K_q$  не известны, для тел инструментов формулируется задача теории упругости, в число граничных условий которой входит условие: на  $\Gamma_s$  задано нормальное напряжение  $\sigma_n$ .

В современных эффективных технологиях обработки давлением (особенно для получения изделий ответственного назначения) широко используется эффект сверхпластического (СП) деформирования; создание соответствующих математических моделей таких процессов представляется весьма актуальной проблемой. Принципиально важно, что в модели должны найти отражение специфические условия, характеризующие переход материала в СП-состояние и поведение его в этом состоянии: сравнительно узкий температурный диапазон, ограничения по размеру зерна и скорости деформации, сильная зависимость свойств от перечисленных параметров. Однако анализ публикаций, посвященных решению разнообразных технологических задач с использованием СП-деформирования, показывает, что в подавляющем большинстве из них отсутствует обсуждение постановок краевых задач (обоснование выбора определяющих соотношений, вида граничных и контактных условий, учет неоднородности температурного поля и т.д.). Ниже излагается попытка учесть основные аспекты сложного физического явления, каким является процесс СП-деформирования, и представить с необходимой полнотой математическую модель этого явления.

Кинематика процесса в эйлеровом представлении движения задается полем вектора скорости  $\bar{\nu}(\bar{x}, t)$ ; соответственно этому имеем тензор скоростей деформаций  $\nu_{ij} = 0,5(\partial\nu_i/\partial x_j + \partial\nu_j/\partial x_i)$ , его девиатор  $V_{ij} = \nu_{ij} - e\delta_{ij}$ ,  $3e = \text{div } \bar{\nu}$  и интенсивность  $\nu_u = \left(\frac{2}{3}V_{ij}V_{ij}\right)^{1/2}$ . Обозначим  $\rho$  - плотность материала, тогда условие сохранения массы запишется в обычном виде

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \bar{\nu}) = 0 \quad \text{или} \quad \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} + \text{div } \bar{\nu} = 0. \quad (2.11)$$

Напряженное состояние в точке эйлерова пространства характеризуется тензором напряжений Коши  $\sigma_{ij}$ , его девиатором  $S_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma\delta_{ij}$ ,  $3\sigma = \sigma_{kk}$  и интенсивностью  $\sigma_u = \left(\frac{3}{2}S_{ij}S_{ij}\right)^{1/2}$ .

Тензорное определяющее соотношение (векторный закон связи напряженного и деформированного состояний) мы принимаем в форме закона пластического течения Сен-Венана

$$S_{ij} = \frac{2\sigma_u}{3\nu_u} V_{ij}, \quad (2.12)$$

скалярные определяющие соотношения имеют, вообще говоря, вид функционалов по времени (или другому монотонному параметру процесса)

$$\sigma_u = F_1^t\{\nu_u, T, e_c, \chi_i \dots\}, \quad \rho = F_2^t\{\sigma, \nu_u, e_c, \chi_i \dots\}, \quad (2.13)$$

здесь  $T$  — температура,  $e_c$  — степень деформации, определяемая из уравнения  $de_c/dt = \nu_u$ ,  $\chi_i$  — структурные параметры типа размера зерна, пористости и др., которые, как правило, определяются эволюционными уравнениями

$$\frac{d\chi_i}{dt} = \varphi_i(\chi_j, T, \nu_u \dots), \quad i, j = 1, \dots, m. \quad (2.14)$$

Функционалы  $F_{1,2}^t$  настолько не исследованы, что всегда  $F_1^t$  заменяется функцией

$$\sigma_u = \varphi_u(\nu_u, T, e_c, \chi_j \dots), \quad (2.15)$$

а в подавляющем большинстве случаев принимается  $F_2^t = \rho_0$  — несжимаемость. Если предположение  $\rho = \rho_0$  не оправдано (пористые спеченные материалы, керамики и т.п.), мы принимаем  $\rho = \rho_0(1 + \alpha f(\sigma, \nu_u, \chi_j \dots))$ ,  $\alpha^2 \ll 1$ , и тогда из (2.11) с хорошей точностью следует

$$\operatorname{div} \bar{\nu} + \alpha \frac{df}{dt} = 0. \quad (2.16)$$

Начально-краевую задачу составляют уравнения движения

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = \rho \left( \frac{d\nu_i}{dt} - F_i \right), \quad (2.17)$$

уравнения теплопроводности (для изотропного однородного материала) в материале и инструментах (их отметим индексом  $q$ )

$$\rho C \frac{dT}{dt} = \lambda \Delta T + k \sigma_u \nu_u, \quad (2.18)$$

$$\rho_q C_q \frac{dT_q}{dt} = \lambda_q \Delta T_q, \quad (2.19)$$

уравнения (2.12), (2.14) и (2.16), начальные условия покоя, нулевых напряжений, заданных температур в материале и инструментах, а также условий на границах контакта материала с инструментом и на поверхностях смены состояний. Два последних момента являются принципиальными, второй из них вообще не обсуждается в научной литературе, поэтому на них остановимся подробно.

Вязкопластические материалы по своим математическим моделям разделяются на два класса в зависимости от того, как ведет себя сдвиговое сопротивление  $\sigma_u$  при  $\nu_u \rightarrow 0$ :

- а)  $\lim_{\nu_u \rightarrow 0} \sigma_u = 0$  — вязкая неньютоновская жидкость;
- б)  $\lim_{\nu_u \rightarrow 0} \sigma_u = \sigma_s(T, e_c, \chi_j \dots) > 0$  — твердое вязкопластическое тело.

Существенно, что тот и другой пределы существуют независимо от значений других параметров в (2.15).

а) *Модель вязкой жидкости.* Во всей области, занятой жидкостью, вектор скорости  $\vec{v}$  отличен от нуля; на поверхностях контакта жидкости с инструментами ставится условие прилипания и обычные условия (теплового контакта) равенства температур и тепловых потоков. Специально обращаем внимание на условия существования СП-состояния, записанные в форме неравенств,

$$T_1 \leq T \leq T_2, \quad \nu_u \leq \nu_u^*, \quad d \leq d_0, \quad \chi_i^{(1)} \leq \chi_i \leq \chi_i^{(2)}, \quad (2.20)$$

они разделяют всю область на подобласти, занятые несмешивающимися жидкостями с различными свойствами. На границах раздела областей (поверхностях смены состояний) должны быть выполнены условия непрерывности вектора скорости, температуры и теплового потока, нормальной и касательной составляющих тензора напряжений.

б) *Модель вязкопластического твердого тела.* Особенности пластического течения, обусловленные существованием конечного предела  $\sigma_s(T, e_c, \chi_j \dots)$  при как угодно малой скорости деформации детально исследованы и подробно изложены в предыдущих разделах книги; два следствия этого анализа принципиально важны.

На поверхностях контакта с инструментами не может быть всюду поставлено условие прилипания, поскольку оно может привести к неравенству  $\tau_{kas} > \tau_{max}$ , в котором  $\tau_{max}$  — максимальное касательное напряжение в материале, которое всегда порядка  $\sigma_s$ . Поэтому граничные контактные условия формулируются как смешанные граничные условия непроницаемости и контактного трения: если  $F(\bar{x}, t) = 0$  — уравнение поверхности, то должно быть

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \bar{\nu} \cdot \text{grad } F = 0 \quad (2.21)$$

$$\tau_{kas} = \psi(\sigma_N, \kappa, |\Delta \bar{\nu}|, T), \quad \bar{x} \in F, \quad \tau_{kas} = |\bar{\tau}_N|, \quad \bar{\tau}_N = -|\bar{\tau}_N| \frac{\bar{\nu}}{|\bar{\nu}|}, \quad (2.22)$$

здесь  $\psi$  — известная из опыта функция. В простейшем случае, как правило, принимается закон Кулона  $\psi = \kappa \sigma_N$  в области, где  $\kappa \sigma_N \leq \tau_{max}$ ; в областях, где  $\kappa \sigma_N > \tau_{max}$ , принимается условие прандтлевского скольжения:  $\psi = \tau_{max}$ .

В области течения возможно существование зон застоя или твердения; материал в них находится в недеформированном состоянии, при этом границы застоя определяются условием  $\nu_u = 0$ . Отметим, что вблизи зон застоя, если они контактируют с инструментом, в качестве граничного допустимо и условие прилипания.

Условия (2.20) существования СП-состояния выделяют, как и в предыдущем случае, подобласти, занятые различными материалами (СП-материалом и «обычным» вязкопластическим материалом); на границах раздела (поверхностях смены состояний) ставятся те же условия непрерывности.

Анализ размерностей, выявление параметров подобия течения материалов в условиях СП-состояния и, как следствие, — возможность физического моделирования (модель — натурра) проводится по известной методике. Важнейшим для СП-процессов является вывод о том, что моделирование на натурном материале невозможно, поскольку температура и особенно скорость деформации  $\nu_u$  переменны по области и времени (а именно к этим параметрам особенно чувствительны СП-материалы). Отметим, что «почти изотермические» процессы (именно таковыми полагаются многие технологические процес-

сы СП-деформирования — «изотермическая штамповка») допускают полное моделирование; поскольку в этом случае физическое время в натуре и модели одно и то же, эволюционные уравнения (наиболее важное из них — для роста зерна) будут иметь тождественные решения. Следует добавить, что при этом процессы накопления и исчерпания запаса пластичности также будут проходить идентично.

В заключение отметим оригинальный вариант постановки краевой задачи, прямо связанный с материаловедческим подходом к разработке технологических процессов получения изделий с заданными функциональными свойствами. Идея предлагаемого подхода состоит в следующем. Механические свойства материала зависят от состояния его структуры (это общее положение материаловедения ярко иллюстрируется на примере СП-материалов), следовательно, для обеспечения нужных функциональных свойств изделия необходимо обеспечить в материале изделия соответствующую структуру. При наличии банка данных «исходная микроструктура — термомеханическое воздействие — окончательная микроструктура» можно подобрать такие пути термомеханического воздействия на материал, которые приводили бы к получению в нем нужной микроструктуры. Тогда можно сформулировать математическую модель технологического процесса в форме стандартной начально-краевой задачи СП, но со специальным дополнительным условием: реализующиеся в технологическом процессе траектории деформаций и температурные поля в обрабатываемой заготовке должны быть по некоторому критерию максимально близки к множеству допустимых путей термомеханического воздействия на материал, выделенному с помощью упомянутого банка данных.

Представленная математическая модель — уравнения движения, неразрывности, теплопроводности вместе с начальными данными и условиями на поверхностях контакта является надежным теоретическим фундаментом для анализа и конструирования технологических процессов обработки давлением в широком диапазоне изменения параметров для обширного класса материалов.

### **§3. Исчерпание запаса пластичности.**

В процессе формоизменения заготовки в ее материале могут происходить нарушения сплошности: расслоение, образование каверн и т.п. (эти явления будем называть также разрушениями или исчерпанием запаса пластичности). Особенно это характерно для процессов с теплообменом, когда возникают зоны твердения (затрудненной деформации), слои размягчения и т.д. Другими словами, в некоторых точках области течения материал может достигнуть состояния критичности. Это происходит вследствие накопления недопустимо больших (критических) уровней деформации; напряженное состояние играет при этом существенную роль, но не является первичным. В самом деле, модуль вектора напряжения будет величиной порядка предела текучести, деформации же (в особенности деформации сдвига) могут быть произвольно большими. С другой стороны, большие напряжения всестороннего сжатия, как известно, затрудняют разрушение.

Высказанная точка зрения на сегодня общепринята и подтверждается многочисленными лабораторными и производственными испытаниями. Имеющиеся варианты теорий разрушения в процессах ОМД основаны на понятии так называемой предельной пластичности  $\Lambda_p$  — степени деформации, накопленной частицей материала к моменту разрушения в условиях простого нагружения при постоянной температуре и скорости деформации. При этом обнаруживается существенная зависимость предельной пластичности от параметров процесса: температуры, скорости деформации, характера напряженного состояния. Предложены различные критерии исчерпания пластичности, т.е. разрушения; они основаны на предположении, что предельная пластичность — единственная и универсальная характеристика материала.

Обозначим через  $p(t)$  относительную величину пластичности, достигнутой в частице материала к моменту времени  $t$ ; ее приращение пропорционально приращению степени деформации, поэтому для скорости изменения  $p$  получим

$$\frac{dp}{dt} = \frac{v_u(t)}{\Lambda_p[T(t), k(t), v_u(t)]},$$

где  $T$  — температура,  $k = \sigma/\sigma_u$  — показатель вида напряжен-

ного состояния. Отсюда

$$p = \int_0^t \frac{v_u(\tau) d\tau}{\Lambda_p [T(\tau), k(\tau), v_u(\tau)]}.$$

В качестве критерия разрушения принимается условие

$$p(t_*) = \int_0^{t_*} \frac{v_u(\tau) d\tau}{\Lambda_p [T(\tau), k(\tau), v_u(\tau)]} = 1, \quad (*)$$

из которого находится момент времени  $t_*$ , по истечении которого в частице, состоянии которой меняется по законам  $T = T(t)$ ,  $k = k(t)$ ,  $v_u = v_u(t)$ , произойдет разрушение.

Результаты расчетов по критерию (\*) достаточно хорошо совпадают с данными экспериментов, проведенных в условиях простых или близких к ним нагружений. Наоборот, попытки описать критерием (\*) результаты экспериментов, выполненных на цилиндрических образцах по программам сложных нагружений (комбинации растяжения с кручением), приводят к расхождениям примерно в полтора раза. Более того, экспериментами последнего времени убедительно доказано, что предельная пластичность металлов характеризуется по меньшей мере двумя функциями, соответствующими случаям разрушения от отрыва (опыт на растяжение) и от сдвига (опыт на кручение тонкостенного образца).

Сделаем несколько замечаний. Прежде всего отметим, что влияние напряженного состояния мы учитываем только с помощью показателя  $k$  и не вводим в число аргументов функций предельной пластичности третий инвариант тензора напряжений, поскольку на этот счет нет достоверных экспериментальных данных. Далее, очевидно, предельная пластичность металлов и сплавов зависит от многих факторов технологического и металлографического характера: химического состава, предварительной термической и механической обработки и т.д. Здесь эти вопросы обсуждаться не будут; как и выше, мы будем придерживаться феноменологической точки зрения, полагая, что способность материала деформироваться без разрушения характеризуется экспериментально определяемыми кривыми предельной пластичности.

1<sup>0</sup>. *Тензор и меры пластичности.* Построение теории, в которой последовательно учитывается существование, по крайней мере, двух функций предельной пластичности, требует более полного и общего определения математического объекта, который характеризует накопление степени деформации в микрочастице и ее разрушение.

В начальный момент времени состояние частицы будем считать естественным ( $\sigma_{ij}^0 = 0$ ,  $v_{ij}^0 = 0$ ,  $e_c^0 = 0$ ), а внешние воздействия отсутствующими; без приложения внешних сил и изменения температуры частица произвольно долго сохраняет свое состояние. Будем предполагать, что в любой момент времени вплоть до разрушения состояние макрочастицы является однородным; это весьма существенное предположение.

Основная кинематическая характеристика в процессах пластического течения — девиатор (принимая условие несжимаемости) скоростей деформаций  $v_{ij} = V_{ij}$ ; в соответствие ему может быть поставлен пятимерный вектор скорости деформаций  $\bar{v}$  с компонентами

$$v_1 = v_{11}, \quad v_2 = \frac{v_{22} - v_{33}}{\sqrt{3}}, \quad v_3 = \frac{2v_{12}}{\sqrt{3}}, \quad v_4 = \frac{2v_{23}}{\sqrt{3}}, \quad v_5 = \frac{2v_{31}}{\sqrt{3}},$$

при этом модуль вектора  $\bar{v}$  равен интенсивности скоростей деформаций

$$|\bar{v}| = v = (v_k v_k)^{1/2} = v_u = \left( \frac{2}{3} v_{ij} v_{ij} \right)^{1/2}.$$

При условии несжимаемости справедливы обратные соотношения:

$$\begin{aligned} v_{11} = v_1, \quad v_{22} = \frac{\sqrt{3} v_2 - v_1}{2}, \quad v_{33} = -\frac{\sqrt{3} v_2 + v_1}{2}, \\ v_{12} = \frac{\sqrt{3} v_3}{2}, \quad v_{23} = \frac{\sqrt{3} v_4}{2}, \quad v_{31} = \frac{\sqrt{3} v_5}{2}. \end{aligned}$$

Перечислим теперь гипотезы, на которых основано построение теории.

1. Постулируется существование тензора пластичности  $P(t, x_k)$ , который обладает свойствами:

а) однозначно определяется процессом деформации  $v_{ij}, T(t), k(t)$  макрочастицы; функционал

$$P \left\{ \begin{matrix} t \\ \tau=0 \end{matrix} v_{ij}(\tau), T(\tau), k(\tau) \right\}$$

предполагается вполне непрерывным на некотором классе достаточно гладких функций нагружения вплоть до состояний, как угодно близких к разрушению.

б) Тензор  $P$  характеризует накопление деформации в частице и состояние, непосредственно предшествующее ее разрушению, т.е. существуют меры накопленной пластической деформации  $M_1(P), M_2(P), \dots$ , являющиеся инвариантными относительно группы преобразования симметрии, такие, что если

$$M_1 < 1, \quad M_2 < 1, \dots,$$

то в частице не происходит нарушения сплошности, а если по отношению к какой-либо из мер выполняется условие

$$M_1 = 1, \quad \text{или} \quad M_2 = 1, \dots,$$

то происходит разрушение соответствующего вида.

в) Тензор  $P$  является нулевым, соответственно меры  $M_1, M_2, \dots$ , равны нулю на отрезке  $(0, t)$ , если на этом отрезке равен нулю тензор скоростей деформаций  $v_{ij}$ .

Тензор пластичности  $P$  как функционал трехмерного тензора может быть только трехмерным тензором; простейший вариант теории строится в предположении, что  $P$  является симметричным тензором (девиатором) второго порядка. Не исключается при этом, что он может быть и скаляром, каким-либо образом построенным на основе этого тензора; недостаточность такого подхода отмечена выше.

2. Свойства материала характеризуются функциями предельной пластичности  $\Lambda_p^s = \varphi_s(T, k, v_u)$ , каждая из которых определяется в опыте на простое нагружение образца. Таких функций, как отмечено выше, во всяком случае не менее двух.

3. Эксперименты по разрушению образцов, нагружаемых в условиях простой деформации, но изменяющихся параметров

процесса  $T$ ,  $k$ ,  $v_u$  описываются критериями исчерпания пластичности типа (\*)

$$\int_0^{t_*} \frac{v_u(\tau) d\tau}{\varphi_s[T(\tau), k(\tau), v_u(\tau)]} = 1,$$

где  $t_*$  — момент разрушения.

2<sup>0</sup>. *Линейная теория разрушения.* Линейную теорию накопления и исчерпания пластичности мы построим в предположении, что материал характеризуется двумя функциями пластичности: при растяжении  $\Lambda_p^1 = \varphi_1(T, k, v_u)$  и при сдвиге  $\Lambda_p^3 = \varphi_3(T, k, v_u)$ ; в этом случае тензор  $P = \{p_{ij}\}$  можно представить пятимерным вектором  $\bar{P}$  с координатами  $p_i$ . Вектор пластичности  $\bar{P}$ , построенный линейным образом на основе вектора скорости деформации  $\bar{v}$ , может быть представлен двояко:

$$p_i(t) = \int_0^t F_{ij} \left\{ \int_{\xi=0}^{t-\tau} T(\xi), k(\xi) \right\} dv_j(\tau), \quad (3.1)$$

$$p_i(t) = \int_0^t A_{ij}[T(\tau), k(\tau), v_n(\tau)] v_j(\tau) d\tau, \quad (3.2)$$

здесь симметричные матрицы функционалов  $F_{ij}$  или функций  $A_{ij}$  должны быть найдены из экспериментов. Будем предполагать материал начально изотропным; тогда в качестве мер накопленной пластической деформации можно принять: а)  $M_1 = p = p_u$  — модуль вектора  $\bar{P}$ ; б)  $M_2 = \tilde{p}_1$  — максимальное главное значение тензора  $P$ ; в)  $M_3 = |\tilde{p}_1 - \tilde{p}_3| = \gamma_{max}$  — максимальный сдвиг. Здесь  $\tilde{p}_1 > \tilde{p}_2 > \tilde{p}_3$  — главные значения тензора  $P$ . Предпочтительность каждой из мер должна быть установлена в опытах; заметим, что меры  $M_1$  и  $M_3$  мало различаются между собой.

Существующие теории в рамках сформулированных гипотез могут быть получены, если ввести в рассмотрение какую-либо инвариантную скалярную характеристику тензора  $P$  или вектора  $\bar{P}$ , например,  $p = |\bar{P}| = p_u$ , и принять  $\Lambda_p^s = \Lambda_p$  (в этом смысле такие теории могут быть названы скалярными, в отличие от предлагаемой — тензорной или векторной). Разные

предположения относительно скорости роста  $p$  приводят к различным вариантам теории. Если, например,  $dp/dt = v_u(t)/\Lambda_0$ ,  $\Lambda_0 = \text{const}$ , то получим

$$p = \frac{1}{\Lambda_0} \int_0^t v_u(\tau) d\tau = \frac{e_c(t)}{\Lambda_0},$$

где  $e_c$  — степень деформации. Критерий разрушения  $e_c(t_*) = \Lambda_0$  в этом простейшем случае означает, что степень деформации достигает некоторого критического значения  $\Lambda_0$ . В наиболее распространенном варианте теории принимается  $dp/dt = v_u(t)/\Lambda_p(T, k, v_u)$ , что приводит к уже отмеченному раньше критерию (\*), и т.д.

Прежде чем перейти к определению матриц  $F_{ij}$  и  $A_{ij}$ , сделаем некоторые замечания. В качестве меры пластичности всюду в дальнейшем будем принимать  $M_1 = p = p_u = |\bar{P}|$ . Далее, будем предполагать, что зависимость предельной пластичности от  $s$  скорости деформации может быть представлена в виде:

$$\Lambda_p^s = \varphi_s(T, k, v_u) = \psi_s(T, k) \left( \frac{v_u}{v_{0s}} \right)^{-\beta s}, \quad (3.3)$$

где  $v_{0s}$  — некоторая характерная скорость деформации. Это соотношение экспериментально подтверждено для многих сплавов в достаточно широком диапазоне изменения  $v_u$ .

Разберем сначала вариант связи (1). Положим  $F_{11} = F_{22} = F_1$ ;  $F_{33} = F_{44} = F_{55} = F_3$ ; все недиагональные компоненты посчитаем равными нулю. Функционалы  $F_1$  и  $F_3$  могут быть найдены из опытов на разрушение цилиндрических образцов при растяжении и кручении с постоянными скоростями деформации.

В опыте на растяжение  $v_{11} = v_{11}^0 h(t) = v_1^0 h(t)$ ,  $h(t)$  — единичная функция Хевисайда; из условия несжимаемости  $v_{22} = v_{33} = -0,5v_{11}$ ;  $v_{12} = v_{23} = v_{31} = 0$ . Поэтому для компонент вектора  $\bar{v}$  имеем:  $v_1 = v_1^0 h(t)$ ,  $v_s = 0$ ,  $s = 2, \dots, 5$ . В соответствии с этим из (3.1) найдем:

$$p_1 = v_1^0 F_1 \left\{ \begin{matrix} t \\ \xi=0 \end{matrix} T(\xi), k(\xi) \right\} \equiv v_1^0 F_1(t).$$

В этом случае  $p = p_1$ , и на основании критерия  $M_1(t_*) = 1$  находим

$$v_1^0(t_*)F_1(t_*) = 1. \quad (3.4)$$

С другой стороны, из третьей гипотезы следует равенство

$$\frac{1}{v_1^0} = \int_0^{t_*} \frac{d\tau}{\Lambda_p^1[T(\tau), k(\tau), v_1^0]},$$

которое в неявном виде дает зависимость между скоростью деформации  $v_1^0$  и временем разрушения. Приняв во внимание (3.3), получим отсюда:

$$\frac{1}{(v_1^0)^{1+\beta_1}} = \frac{1}{(v_{01})^{\beta_1}} \int_0^{t_*} \frac{d\tau}{\psi_1[T(\tau), k(\tau)]}.$$

Сравнивая это с (3.4), найдем  $F_1(t)$ :

$$F_1(t) = \frac{1}{v_{01}} \left( \int_0^t \frac{v_{01} d\tau}{\psi_1[T(\tau), k(\tau)]} \right)^{\alpha_1}, \quad \alpha_1 = \frac{1}{1 + \beta_1} < 1.$$

В опыте на кручение положим  $v_{12} = (v_3^0 \sqrt{3}/2) \cdot h(t)$ , так что будет  $v_3 = v_3^0 h(t)$ , а остальные компоненты вектора  $\bar{v}$  равны нулю. Рассуждения и выкладки, аналогичные предыдущим, приведут нас к выражению для функционала  $F_3(t)$ :

$$F_3(t) = \frac{1}{v_{03}} \left( \int_0^t \frac{v_{03} d\tau}{\psi_3[T(\tau), k(\tau)]} \right)^{\alpha_3}, \quad \alpha_3 = \frac{1}{1 + \beta_3} < 1,$$

при этом, вообще говоря,  $\alpha_3 \neq \alpha_1$ . Окончательно вектор пластичности запишется в виде

$$\begin{aligned} p_1 &= \frac{1}{v_{01}} \int_0^t \left( \int_0^{t-\tau} \frac{v_{01} d\xi}{\psi_1[T(\xi), k(\xi)]} \right)^{\alpha_1} dv_1(\tau), \\ p_3 &= \frac{1}{v_{03}} \int_0^t \left( \int_0^{t-\tau} \frac{v_{03} d\xi}{\psi_3[T(\xi), k(\xi)]} \right)^{\alpha_3} dv_3(\tau), \end{aligned} \quad (**)$$

остальные компоненты выписываются аналогично.

Рассмотрим частные случаи. Если функции предельной пластичности не зависят от скорости деформации, то  $\beta_1 = \beta_3 = 0$ ,  $\alpha_1 = \alpha_3 = 1$ ; тогда для  $p_1$ , например, получим

$$p_1 = \int_0^t \frac{v_1(t-\tau)d\tau}{\psi_1[T(\tau), k(\tau)]}. \quad (3.5)$$

В другом частном случае независимости  $\Lambda_p^s$  от температуры и показателя  $k$  (т.е. рассматриваются такие процессы, в которых  $T$  и  $k$  меняются слабо) следует положить  $\psi_s = a_s = \text{const}$ ; тогда будем иметь

$$p_1 = \left(\frac{v_{01}}{a_1}\right)^{\alpha_1} \int_0^t \frac{(t-\tau)^{\alpha_1} dv_1(\tau)}{v_{01}}, \quad (3.6)$$

остальные компоненты вектора пластичности  $P$  записываются по аналогии с (3.5) или (3.6).

Вариант теории, основанный на соотношениях (3.2), исследуется подобным же образом. Положим  $A_{11} = A_{22} = A_1$ ;  $A_{33} = A_{44} = A_{55} = A_3$ ; все недиагональные элементы посчитаем равными нулю. Ядро  $A_1$  определим из опыта на растяжение с постоянной скоростью деформации  $v_1 = v_1^0 h(t)$ ; подставив это в (3.2), найдем

$$p_1(t) = v_1^0 \int_0^t A_1[T(\tau), k(\tau), v_1^0] d\tau.$$

Из критерия разрушения  $M_1(t_*) = 1$  получим соотношение:

$$v_1^0 \int_0^{t_*} A_1[T(\tau), k(\tau), v_1^0] d\tau = 1.$$

Но такая же зависимость может быть найдена на основании третьей гипотезы:

$$v_1^0 \int_0^{t_*} \frac{d\tau}{\varphi_1[T(\tau), k(\tau), v_1^0]} = 1.$$

Два последних выражения будут тождественны (т.е. они дадут одинаковую зависимость между скоростью деформации  $v_1^0$  и временем разрушения  $t_*$ ), если, в частности, положить:

$$A_1(T, k, v_u) = [\varphi_1(T, k, v_u)]^{-1}.$$

Из опыта на кручение точно так же определим

$$A_3(T, k, v_u) = [\varphi_3(T, k, v_u)]^{-1}.$$

Теперь можно выписать вектор пластичности

$$p_1(t) = \int_0^t \frac{v_1(\tau) d\tau}{\varphi_1[T(\tau), k(\tau), v_u(\tau)]}, \quad (***)$$

$$p_3(t) = \int_0^t \frac{v_3(\tau) d\tau}{\varphi_3[T(\tau), k(\tau), v_u(\tau)]}.$$

Остальные компоненты выписываются аналогично. Мы видим, таким образом, что рассмотренный вариант является простейшим естественным обобщением скалярной теории.

*3<sup>0</sup>. Обобщения и примеры.* Развитая в предыдущем параграфе теория может быть формально обобщена, если, например, в матрице  $F_{ij}$ , удержать большее число элементов. Однако, фактическая возможность таких обобщений должна базироваться на данных соответствующего числа независимых экспериментов по определению функций предельной пластичности. К настоящему времени систематических результатов подобных экспериментов нет. Поэтому мы введем гипотезу о том, что свойства материала характеризуются третьей (независимой) функцией предельной пластичности  $\Lambda_p^2$ , именно — предельной пластичностью в условиях двусного растяжения плоского образца.

Матрицу  $F_{ij}$  представим таким образом:  $F_{11} = F_{22} = F_1$ ;  $F_{12} = F_{21} = F_2$ ;  $F_{33} = F_{44} = F_{55} = F_3$ . Функционал  $F_3$  определяется, как и раньше, из опыта на чистый сдвиг (кручение цилиндрического образца), функционалы  $F_1$  и  $F_2$  — из экспериментов на одноосное и двусное растяжение.

В первом случае  $v_{11} = v_1^0 h(t)$ ,  $v_{22} = v_{33} = -0,5 v_{11}$ , поэтому,  $v_1 = v_1^0 h(t)$ ,  $v_s = 0$ ,  $s = 2, \dots, 5$ . Из формул (3.1) находим

$$p_1 = v_1^0 F_1(t), \quad p_2 = v_1^0 F_2(t), \quad p_s = 0, \quad s = 3, 4, 5.$$

Далее,  $p^2 = (v_1^0)^2 [F_1^2(t) + F_2^2(t)]$ , и в момент разрушения

$$[v_1^0(t_*)]^2 [F_1^2(t_*) + F_2^2(t_*)] = 1. \quad (3.7)$$

Но, в соответствии с третьей гипотезой, скорость деформации  $v_1^0$  — известный функционал процесса

$$\frac{1}{v_1^0(t_*)} = \frac{1}{v_{01}} \left( \int_0^{t_*} \frac{v_{01} d\tau}{\psi_1[T(\tau), k(\tau)]} \right)^{\alpha_1} = \varphi_1(t_*),$$

поэтому из (3.7) получаем

$$F_1^2(t) + F_2^2(t) = \varphi_1^2(t). \quad (3.8)$$

При двусосном растяжении  $v_{11} = v_{22} = v_2^0 h(t)$ ,  $v_{33} = -2v_{11}$ , отсюда  $v_1 = v_{11} = v_2^0 h(t)$ ,  $v_2 = \sqrt{3} v_{11} = \sqrt{3} v_2^0 h(t)$ . Подставляя это в (3.1), найдем:

$$p_1 = [F_1(t) + \sqrt{3}F_2(t)]v_2^0, \quad p_2 = [\sqrt{3}F_1(t) + F_2(t)]v_2^0, \quad p_s = 0, \\ s = 3, 4, 5, \quad p^2 = 4[v_2^0(t)]^2 [F_1^2(t) + F_2^2(t) + \sqrt{3}F_1(t)F_2(t)].$$

В момент разрушения  $p(t_*) = 1$ , следовательно

$$4[v_2^0(t_*)]^2 [F_1^2(t_*) + F_2^2(t_*) + \sqrt{3}F_1(t_*)F_2(t_*)] = 1. \quad (3.9)$$

На основании третьей гипотезы  $v_2^0$  — известный функционал процесса:

$$\frac{1}{2v_2^0(t_*)} = \frac{1}{v_{02}} \left( \int_0^{t_*} \frac{v_{02} d\tau}{\psi_2[T(\tau), k(\tau)]} \right)^{\alpha_2} = \varphi_2(t_*), \quad \alpha_2 = \frac{1}{1 + \beta_2}.$$

Сравнивая это выражение с (3.9), находим:

$$F_1^2(t) + F_2^2(t) + \sqrt{3}F_1(t)F_2(t) = \varphi_2^2(t). \quad (3.10)$$

Уравнения (3.8) и (3.10) имеют решение (аргумент  $t$  опущен):

$$F_1 = \frac{\varphi_1}{\sqrt{2}} \left\{ 1 + \left[ 1 - \frac{4}{3} \left( 1 - \frac{\varphi_2^2}{\varphi_1^2} \right)^2 \right]^{1/2} \right\}^{1/2}, \quad (3.11)$$

$$F_2 = -\frac{\varphi_1}{\sqrt{2}} \left\{ 1 - \left[ 1 - \frac{4}{3} \left( 1 - \frac{\varphi_2^2}{\varphi_1^2} \right)^2 \right]^{1/2} \right\}^{1/2}. \quad (3.12)$$

В тех случаях, когда функционалы  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  мало различаются (а нам представляется, что именно так будет в большинстве случаев), выражения (3.11), (3.12) можно заметно упростить. Действительно, тогда  $(1 - \varphi_2^2/\varphi_1^2) \leq \alpha < 1$ , значит  $\alpha^2 \ll 1$ , и поэтому правые части (3.11), (3.12) можно разложить по малому параметру. Получим в результате разложения:

$$F_1 \simeq \varphi_1 \left[ 1 - \frac{1}{6} \left( 1 - \frac{\varphi_2^2}{\varphi_1^2} \right)^2 \right] \simeq \varphi_1(t), \quad F_2 \simeq -\varphi_1 \left( 1 - \frac{\varphi_2^2}{\varphi_1^2} \right). \quad (3.13)$$

Мы видим, таким образом, что с точностью до величины порядка  $\alpha^2$  функционал  $F_1$  определяется так же, как и в простейшей линейной теории предыдущего параграфа, а различие в свойствах учитывается в качестве поправки порядка  $\alpha$  с помощью функционала  $F_2$ .

В заключение рассмотрим один из возможных вариантов нелинейной связи между векторами  $\bar{P}$  и  $\bar{v}$ . Положим

$$p_\alpha(t) = \int_0^t B_1 \left\{ \begin{matrix} t-\tau \\ \xi=0 \end{matrix} T(\xi), k(\xi) \right\} dv_\alpha(\tau) + \\ + \int_0^t B_3 \left\{ \begin{matrix} t-\tau \\ \xi=0 \end{matrix} T(\xi), k(\xi) \right\} v_\alpha(\tau) dv_\alpha(\tau);$$

функционалы  $B_1$  и  $B_3$  по-прежнему находятся из опытов на растяжение и кручение.

В первом опыте  $v_1 = v_1^0 h(t)$ , поэтому  $p_1(t) = v_1^0 B_1(t) + (v_1^0)^2 B_3(t)$ , и из критерия разрушения находим

$$v_1^0 B_1(t_*) + (v_1^0)^2 B_3(t_*) = 1.$$

Но  $[v_1^0(t_*)]^{-1} = \varphi_1(t_*)$  — известный функционал процесса, следовательно

$$\varphi_1(t) B_1(t) + B_3(t) = \varphi_1^2(t). \quad (3.14)$$

Во втором опыте  $v_3 = v_3^0 h(t)$ ,  $p_3(t) = v_3^0 B_1(t) + (v_3^0)^2 B_3(t)$ , и аналогично предыдущему

$$\varphi_3(t) B_1(t) + B_3(t) = \varphi_3^2(t). \quad (3.15)$$

Система (3.14), (3.15) имеет решение

$$B_1(t) = \varphi_1(t) + \varphi_3(t), \quad B_3(t) = -\varphi_1(t)\varphi_3(t).$$

Рассмотрим несколько примеров.

1. Осуществим сложное нагружение трубчатого образца по программе: растяжение с постоянной скоростью деформации  $v_1 = v_1^0 h(t)$  до момента времени  $t_1$ , затем закручивание с постоянной скоростью деформации  $v_3 = v_3^0 h(t - t_1)$  до момента разрушения  $t_*$ . В этом случае на каждом этапе нагружения  $T = \text{const}$ ,  $k = \text{const}$ , поэтому из соотношений (\*\*) находим

$$\left( \frac{v_1^0 t_1}{\Lambda_p^1} \right)^{2\alpha_1} + \left( \frac{v_3^0 (t_* - t_1)}{\Lambda_p^3} \right)^{2\alpha_3} = 1. \quad (3.16)$$

Для описания подобного эксперимента, из соображений малоциклового усталости предложена зависимость типа (3.16) с показателем  $2\alpha_1 = 2\alpha_2 = 1,92$ ; видно хорошее согласие критерия (3.16) с экспериментом. В то же время скалярная теория (\*) доставляет линейное соотношение

$$\frac{v_1^0 t_1}{\Lambda_p^1} + \frac{v_3^0 (t_* - t_1)}{\Lambda_p^3} = 1,$$

которое приводит к отличию от экспериментальных результатов почти в полтора раза. Нетрудно видеть, что если воспользоваться соотношениями варианта (3.11), (3.12), то мы снова придем к формуле (3.16). Если, наконец, воспользоваться вариантом (\*\* \*), то получим формулу

$$\left( \frac{v_1^0 t_1}{\Lambda_p^1} \right)^2 + \left( \frac{v_3^0 (t_* - t_1)}{\Lambda_p^3} \right)^2 = 1, \quad (3.17)$$

которая, как видно, несколько отличается от (3.16); это отличие обусловлено тем, что в (3.17) зависимость предельной пластичности от скорости деформации может быть произвольной

(в смысле ее аналитического выражения), в теории же (\*\*) эта зависимость принята конкретной (степенной). Очевидно, варианты (3.16) и (3.17) совпадут, если  $\Lambda_p^s$  не зависит от  $v_u$ .

2. Простое нагружение образца проведем по программе  $v_2 = \alpha v_1$ ,  $v_1 = v_1^0 h(t)$ ; это испытание трубчатого тонкостенного образца на растяжение с внутренним давлением, когда растягивающая сила и давление поддерживаются в таком отношении, чтобы обеспечить равенство  $v_{22} = 0,5(\alpha\sqrt{3} - 1)v_{11}$  между поперечной и продольной скоростями деформаций.

По варианту теории, в котором удерживается три функционала в матрице  $F_{ij}$ , получим:

$$p_1 = v_1^0 \left[ F_1(t) + \alpha F_2(t) \right], \quad p_2 = v_1^0 \left[ \alpha F_1(t) + F_2(t) \right],$$

остальные  $p_s$  равны нулю. Поэтому будем иметь

$$p^2 = \left\{ (1 + \alpha^2) [F_1^2(t) + F_2^2(t)] + 4\alpha F_1(t)F_2(t) \right\} (v_1^0)^2.$$

Подставив сюда выражения (3.11), (3.12) и воспользовавшись критерием  $p(t_*) = 1$ , придем к уравнению для определения  $t_*$

$$\frac{4\alpha}{\sqrt{3}} [v_1^0 \cdot \varphi_2(t_*)]^2 \left[ 1 + \frac{(\alpha - \sqrt{3})(\alpha\sqrt{3} - 1)}{4\alpha} \frac{\varphi_1^2(t_*)}{\varphi_2^2(t_*)} \right] = 1. \quad (3.18)$$

Случай равномерного двусосного растяжения следует отсюда при  $\alpha = \sqrt{3}$ ; случай одноосного растяжения ( $\alpha \rightarrow 0$ ) очевидным образом получается из (3.18) как предельный.

Соотношения простейшей линейной теории получим, если положим  $\varphi_2 = \varphi_1$ , тогда  $F_2(t) = 0$ ,  $p_2(t) = \alpha p_1(t) = \alpha F_1(t)$ , и вместо (3.18) будем иметь

$$\sqrt{1 + \alpha^2} v_1^0 \varphi_1(t_*) = 1.$$

Интересно отметить, что в предельном случае  $\alpha \rightarrow \infty$ ,  $v_1^0 \rightarrow \infty$ . Но  $\alpha v_1^0 = v_2^0$  остается конечной величиной (деформация трубчатого образца внутренним давлением в условиях плоской деформации), оба последних соотношения приводят к одному результату:

$$v_2^0 \varphi_1(t_*) = 1.$$

*... тот, кто захочет применять и интерпретировать теорию, ... должен сперва изучить ее. После этого приложения не поплывут ему сами в руки, но приобретенное знание даст ему инструмент для их эффективного моделирования или по крайней мере для классификации, описания и обучения уже известным приложениям.*

К.Трусделл.

## Глава 2

### Течение в тонких слоях

Из всего многообразия процессов пластического течения выделяется класс, характеризующийся общим свойством: течение материала в таких процессах происходит в форме сравнительно тонкого слоя, заключенного между рабочими поверхностями тел инструмента, движение которых определяет характер и геометрию течения. В технологии такие процессы достаточно распространены: тонколистовая прокатка, штамповка, прессование и др.; в то же время, для их описания оказывается возможным построить достаточно общую математическую модель и предложить эффективные методы аналитического и численного исследования.

Теория, предложенная в статьях [2] и [3] первой части книги, в этой главе развивается в различных направлениях: учитываются деформации инструментов: принимается, что материал слоя обладает сжимаемостью и упрочнением; допускается анизотропия трения на поверхностях контакта; подробно исследуется кинематика течения.

#### **§1. Задача Л. Прандтля и ее обобщения.**

Основная идея, в рамках которой построено решение задачи о сжатии тонкой полосы параллельными плитами, данное Л. Прандтлем и проанализированное А.А.Ильюшиным, оказалась, как показывает дальнейшее изложение, чрезвычайно содержательной и допускающей далеко идущие обобщения. Поскольку решение Л. Прандтля будет часто цитироваться, кратко повторим его.

Слой идеальнопластического материала занимает (в условиях плоской деформации) в плоскости  $x, y$  область  $S : \{|x| \leq$

$l, |y| \leq h$ }; грани полосы  $y = \pm h$  движутся со скоростями соответственно  $\mp v_0$ , заставляя слой растекаться в направлении оси  $x$ . Уравнения равновесия и условие пластичности Мизеса, дополненные граничными условиями внутреннего скольжения на гранях  $y = \pm h$ , имеют известное решение (в первом квадранте)

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= -\tau_s \left( \frac{l-x}{h} - 2\sqrt{1 - \frac{y^2}{h^2}} + \frac{\pi}{2} \right), & \sigma_{xy} &= -\tau_s \frac{y}{h}, \\ \sigma_{yy} &= -\tau_s \left( \frac{l-x}{h} + \frac{\pi}{2} \right), & \sigma_{xz} &= \sigma_{yz} = 0, \end{aligned} \quad (I)$$

граничное условие на краю  $x = l$  удовлетворено в интегральном смысле. Идея получения этого решения — независимость при  $h/l \ll 1$  девиатора напряжений от координаты  $x$ .

Вектор скорости  $\bar{v} = \{u, v\}$  находится из условия несжимаемости и закона течения Сен-Венана в предположении  $v = v(y)$ ; окончательно получаем

$$u = v_0 \left( \frac{x}{h} + \sqrt{1 - \frac{y^2}{h^2}} - \frac{\pi}{2} \right), \quad v = -v_0 \frac{y}{h}, \quad (II)$$

граничное условие при  $x = l$  удовлетворено также в интегральном смысле.

**1<sup>0</sup>. Сжимаемость.** Уравнение, связывающее плотность материала с параметрами процесса, примем в форме (1.8) первой главы:  $\rho = \rho_0(1 + \alpha f(p, v_u, \dots))$ , где  $\alpha^2 \ll 1$ . Из уравнения неразрывности при этом получим

$$\frac{\alpha}{1 + \alpha f} \cdot \frac{df}{dt} + \Delta = 0, \quad (1.1)$$

закон течения Сен-Венана при плоской деформации имеет следствиями соотношения

$$\sigma_{zz} = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} - \frac{\Delta}{3} \frac{\sigma_u}{v_u}, \quad \sigma = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} - \frac{\Delta}{9} \frac{\sigma_u}{v_u}. \quad (1.2)$$

Для дальнейшего существенно предположение о том, что материал слоя — идеальнопластический,  $\sigma_u = \sigma_s$ , предел текучести  $\sigma_s$  не зависит от плотности. Условие пластичности Мизеса

тогда запишется с учетом (1.1) в виде

$$(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + 4\sigma_{xy}^2 + \frac{4}{27} \frac{\alpha^2}{(1 + \alpha f)^2} \left( \frac{\sigma_s}{v_u} \cdot \frac{df}{dt} \right)^2 = 4\tau_s^2.$$

Предположив, что в материале слоя не происходит фазовых превращений и, следовательно,  $f$  — плавно меняющаяся функция, заключаем, что последним слагаемым слева можно пренебречь; это приводит к неожиданному и весьма важному результату

$$(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + 4\sigma_{xy}^2 \cong 4\tau_s^2$$

с точностью до малых высшего порядка по параметру сжимаемости сравнительно с единицей. Отсюда следует, что напряженное состояние в сжимаемой полосе из идеальнопластического сжимаемого материала с той же точностью совпадает с состоянием (I), найденным Л. Прандтлем.

Из соотношений (I) и закона Сен-Венана следует

$$\begin{aligned} \sigma_{xy} &= -\tau_s \frac{y}{h} = \frac{\tau_s}{\sqrt{3}v_u} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right), \\ \sigma_{xx} - \sigma_{yy} &= \frac{2\tau_s}{\sqrt{3}v_u} \left( \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) = 2\tau_s \sqrt{1 - \frac{y^2}{h^2}}, \end{aligned}$$

откуда находим

$$\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{h}{y} \sqrt{1 - \frac{y^2}{h^2}} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right), \quad (1.3)$$

из (1.1) получаем второе соотношение

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\alpha}{1 + \alpha f} \frac{df}{dt}. \quad (1.4)$$

Определение поля скоростей и плотности связано с заданием конкретного вида функции  $f$ ; ниже рассматривается два варианта.

В случае, когда плотность определяется только всесторонним давлением, положим  $\rho = \rho_0 \exp(-\alpha\sigma/\tau_s)$ ; для относительного изменения объема это приводит к линейной зависимости

$\Theta = \alpha\sigma/\tau_s$ , что вполне допустимо для получения результатов качественного характера.

Решение представим разложениями по малому параметру сжимаемости:  $u = u^0 + \alpha u^1 + \dots$ ;  $v = v^0 + \alpha v^1 + \dots$ ;  $\rho = \rho^0 + \alpha \rho^1 + \dots$ ;  $\sigma = \sigma^0 + \alpha \sigma^1 + \dots$ . Для функций нулевого приближения решение известно:  $\rho^0 = \rho_0$ ,

$$\begin{aligned}\sigma^0 &= \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} = -\tau_s \left( \frac{l-x}{h} - \sqrt{1-y_0^2} + \frac{\pi}{2} \right), \quad y_0 = \frac{y}{h}, \\ u^0 &= v_0 \left( \frac{x}{h} + 2\sqrt{1-y_0^2} - \frac{\pi}{2} \right), \quad v^0 = -v_0 y_0.\end{aligned}\tag{1.5}$$

Уравнение (1.3) справедливо для любого приближения, а из (1.4) с учетом (1.5) и (II) получим

$$\frac{\partial u^1}{\partial x} + \frac{\partial v^1}{\partial y} = \frac{v_0}{h} \left( \frac{2x-l}{h} + 2\sqrt{1-y_0^2} - \frac{\pi}{2} \right).\tag{1.6}$$

Решение может быть найдено в предположении  $v^1 = v^1(y)$ . Действительно из (1.6) тогда получим

$$u^1 = -\frac{\partial v^1}{\partial y} x + \frac{v_0}{h} \left( \frac{x^2-lx}{h} + 2x\sqrt{1-y_0^2} - \frac{\pi x}{2} \right) + f_2(y),\tag{1.7}$$

уравнение (1.3) преобразуется в следующее:

$$\left( f_2'(y) + \frac{\partial^2 v^1}{\partial y^2} x \right) \frac{1}{y_0} \sqrt{1-y_0^2} = \frac{v_0}{h} \left( 2\sqrt{1-y_0^2} - \frac{l}{h} - \frac{\pi}{2} \right) - 2 \frac{\partial v^1}{\partial y}.\tag{1.8}$$

Но последнее равенство возможно, если только  $\partial^2 v^1 / \partial y^2 = 0$ , откуда  $v^1 = a_1 y + b_1$ ; из однородных граничных условий следует  $a_1 = b_1 = 0$ , поэтому  $v^1 = 0$ . После этого из (1.8) определяется  $f_2(y)$  с точностью до слагаемых порядка  $h/l$  сравнительно с единицей:  $f_2(y) = (v_0 l/h) \sqrt{1-y_0^2} + c_1 v_0$ . Подставив в (1.7), найдем  $u^1$ :

$$u^1 = v_0 \left[ -\frac{x(l-x)}{h^2} + \frac{l}{h} \sqrt{1-y_0^2} \left( 1 + \frac{2x}{l} \right) - \frac{\pi x}{2h} + c_1 \right].\tag{1.9}$$

Постоянная  $c_1$  находится из условия сохранения массы

$$\int_0^l dx \int_0^h \frac{\partial \rho_0}{\partial t} dy + \int_0^l (\rho v)_{y=h} dx + \int_0^h (\rho u)_{x=l} dy = 0,$$

при этом для плотности  $\rho$  с хорошей точностью может быть принято выражение  $\rho \cong \rho_0(1 - \alpha\sigma^0/\tau_s)$ , в котором  $\sigma^0$  находится из (1.5). После несложных выкладок получаем  $c_1 = \pi l/(4h)$  с точностью до слагаемых порядка  $h/l$  сравнительно с единицей. Как видно, основную роль в выражении (1.9) играет первое слагаемое, поэтому с хорошей точностью решение задачи в первом приближении по параметру сжимаемости может быть принято в виде

$$\begin{aligned} u &\cong u_0 + \alpha u_1 = v_0 \left[ \frac{x}{h} \left( 1 - \alpha \frac{l-x}{h} \right) + 2\sqrt{1-y_0^2} - \frac{\pi}{2} \right], \\ v &\cong v^0 + \alpha v^1 = -v_0 y_0, \quad \rho = \rho_0 + \alpha \rho_1 = \rho_0 \left( 1 - \frac{\alpha\sigma^0}{\tau_s} \right). \end{aligned} \quad (1.10)$$

Отметим, что в полученном решении фактически «малым» следует считать параметр  $\alpha l/h$ .

Второй случай, который мы рассмотрим, может представить интерес при рассмотрении процессов течения материалов, обладающих явно выраженной внутренней структурой. Принимаем  $d\Theta/dt = \Delta = \alpha\varphi(v_u)$ ; вместе с (1.3) это приводит к системе уравнений

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = \alpha\varphi(v_u), \quad (1.11)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\sqrt{1-y_0^2}}{y_0} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right). \quad (1.12)$$

Решение, как и выше, может быть найдено в предположении, что  $v = v(y)$ ,  $v_u = v_u(y)$ ; из (3.11) при этом получим

$$u = \left( \alpha\varphi(v_u) - \frac{\partial v}{\partial y} \right) x + g(y), \quad (1.13)$$

откуда

$$\frac{\partial u}{\partial y} = x \cdot \frac{\partial}{\partial y} \left( \alpha\varphi(v_u) - \frac{\partial v}{\partial y} \right) + g'(y)$$

Внесем это выражение в (1.12) и вычтем почленно из (1.11), в результате получим

$$2\frac{\partial v}{\partial y} = \alpha\varphi + \frac{1}{y_0}\sqrt{1-y_0^2}\left[x\frac{\partial}{\partial y}\left(\alpha\varphi - \frac{\partial v}{\partial y}\right) + g'(y)\right]. \quad (1.14)$$

Это равенство возможно, если только  $\alpha\varphi - \partial v/\partial y = c$ ; отсюда, удовлетворяя граничные условия для  $v$ , будем иметь:

$$c = \frac{v_0}{h} - \frac{\alpha}{h}\int_0^h \psi(\xi) d\xi, \quad \psi(\xi) = \varphi(v_u(\xi)), \quad (1.15)$$

$$v = -v_0y_0 - \alpha y_0 \int_0^h \psi(\xi) d\xi + \alpha \int_0^y \psi(\xi) d\xi. \quad (1.16)$$

Теперь из (1.13) может быть найдена скорость  $u$

$$u = \frac{v_0x}{h} - \alpha \frac{x}{h} \int_0^h \psi(\xi) d\xi + g(y). \quad (1.17)$$

Решение, как видно, зависит от двух функций  $g(y)$  и  $v_u(y)$ . Первое из уравнений, связывающих эти функции, мы получим из закона Сен-Венана для  $\sigma_{xy}$  с учетом (I)

$$g'(y) = -y_0\sqrt{3}v_u(y), \quad (1.18)$$

второе уравнение получим из (1.14) с учетом равенств  $\partial v/\partial y = \alpha\varphi(v_u) - c$  и (1.18)

$$v_u = \frac{2c - \alpha\varphi(v_u)}{\sqrt{3}} \frac{1}{\sqrt{1-y_0^2}} \quad (1.19)$$

При известной функции  $\varphi(v_u)$  отсюда определяется  $v_u$ , после чего  $g(y)$  находится из уравнения (1.18).

Решение уравнения (1.19) разложением по малому параметру сжимаемости представляется естественным:  $v_u = v_u^0 + \alpha v_u^1 + \dots$ ; для нулевого приближения с учетом (1.15) получим

$$v_u^0 = \frac{2v_0}{\sqrt{3}h} \frac{1}{\sqrt{1-y_0^2}},$$

первое приближение имеет вид

$$v_u^1 = \frac{1}{\sqrt{3}\sqrt{1-y_0^2}} \left( \frac{2}{h} \int_0^h \psi^0(y) dy - \psi^0(y) \right),$$

где обозначено  $\psi^0(y) = \varphi(v_u^0)$ . Окончательно для  $v_u(y)$  имеем

$$v_u(y) \cong \frac{1}{\sqrt{3}\sqrt{1-y_0^2}} \left( \frac{2v_0}{h} - \frac{2\alpha}{h} \int_0^h \psi^0(y) dy - \alpha\psi^0(y) \right),$$

с такой же точностью можно принять  $\psi(y) \cong \psi^0(y)$  в формулах (1.16) и (1.17).

Заметим, что разложение по параметру и различные аппроксимации  $\varphi(v_u)$  следует применять с осторожностью, поскольку  $v_u^0$  имеет в точках  $|y| = h$  особенность.

Положим для примера  $\varphi(v_u) = v_u^\nu$ ,  $\nu < 1$ ; тогда получим

$$v_u \cong \frac{2c}{\sqrt{3}\sqrt{1-y_0^2}} - \frac{\alpha(2c)^\nu}{\sqrt{3}(1-y_0^2)^{\frac{\nu+1}{2}}},$$

$$v = -cy + \frac{\alpha h}{2} \left( \frac{2c}{\sqrt{3}} \right)^\nu B_{y_0^2} \left( \frac{1}{2}, 1 - \frac{\nu}{2} \right),$$

здесь  $B_{y_0^2}(1/2, 1 - \nu/2)$  — неполная бэта-функция; постоянная интегрирования определяется соотношением

$$c \cong \frac{v_0}{h} + \frac{\alpha}{2} \left( \frac{2v_0}{h} \right)^\nu B \left( \frac{1}{2}, 1 - \frac{\nu}{2} \right),$$

в котором  $B(1/2, 1 - \nu/2)$  — бэта-функция. Из (1.18) определяется  $g(y)$

$$g(y) = 2hc\sqrt{1-y_0^2} - \frac{\alpha h(2c)^\nu}{1-\nu} (1-y_0^2)^{\frac{1-\nu}{2}} + c_2,$$

а из (1.13) — скорость  $u(x, y) = cx + g(y)$ . Плотность материала определяется из уравнения

$$v_0 \frac{\partial f}{\partial h} - u \frac{\partial f}{\partial x} - v \frac{\partial f}{\partial y} = v_u,$$

после чего из уравнения сохранения массы может быть определена постоянная интегрирования  $c_2$ , чем завершается решение.

Из полученных решений следуют выводы:

1) напряженное состояние в полосе из сжимаемого материала определяется классическими формулами (I);

2) анализ кинематики течения, аналогичный проведенному А.А. Ильюшиным в статье [2] из первой части книги, приводит к тем же результатам; это позволяет обобщить теорию течения в тонких слоях на случай сжимаемых материалов, заменив уравнение несжимаемости условием сохранения массы и дополнив систему уравнений определяющим соотношением вида  $\rho = \rho_0(1 + \alpha f(\sigma, v_u, \dots))$ .

**2<sup>0</sup>. Упрочняющийся материал.** В этом разделе будем полагать, что материал несжимаем, а функция упрочнения имеет вид:  $\sigma_u = \sigma_u(v_u)$ . Решение, как и в предыдущем разделе, возможно в классе функций  $v = v(y)$ ,  $v_{xy}(y)$ . Из уравнения несжимаемости находим  $u = -(\partial v / \partial y)x + f_1(y)$ , откуда  $2v_{xy} = f_1'(y) - (\partial^2 v / \partial y^2)x$ . Но условие  $v_{xy} = v_{xy}(y)$  возможно, если только  $\partial^2 v / \partial y^2 = 0$ , откуда, с учетом граничных условий для  $v$ , получаем  $v = -v_0 y / h$ ; для скорости  $u$  находим:  $u = v_0 x / h + f_1(y)$ . Интенсивность скоростей деформаций получит вид

$$v_u = \frac{2v_0}{\sqrt{3}h}(1 + f'^2)^{1/2}, \quad f(y) = \frac{hf_1(y)}{2v_0}. \quad (1.19)$$

Отсюда следует, что девиатор скоростей деформаций и его интенсивность, а вместе с ними и девиатор напряжений являются функциями координаты  $y$  (и времени как параметра).

Запишем уравнения равновесия

$$\frac{\partial S_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} = -\frac{\partial \sigma}{\partial x}, \quad \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial S_{yy}}{\partial y} = -\frac{\partial \sigma}{\partial y},$$

из второго находим  $-\sigma = S_{yy} + \varphi(x)$ , из первого  $\sigma_{xy} = \varphi'(x)y + c_1$ . В качестве граничных условий для  $\sigma_{xy}$  примем:  $\sigma_{xy} = 0$  при  $y = 0$ ,  $\sigma_{xy} = -\tau_{max} = -\bar{m}\sigma_u|_{y=h}/\sqrt{3} \equiv -\sigma_0/\sqrt{3}$  при  $y = h$ . Отсюда находим

$$\sigma_{xy} = -\frac{\sigma_0 y}{\sqrt{3}h}, \quad \varphi(x) = -\frac{\sigma_0 x}{\sqrt{3}h} + c_1. \quad (1.20)$$

Сравнивая выражения для  $\sigma_{xy}$  из закона течения и из (1.20), получим уравнение для определения  $f(y)$

$$-\sigma_0 \frac{y}{h} = \frac{\sigma_u(v_u) f'}{(1 + f'^2)^{1/2}}, \quad (1.21)$$

вместо  $v_u$  сюда следует подставить (1.19). Правая часть в (1.21) — непрерывная и монотонная функция аргумента  $f'$  в замкнутом интервале  $[0, -f'_m]$ , при этом  $f'_m$  определяется из (1.21) при  $y = 1$ :  $f'_m = -\bar{m}/\sqrt{1 - m^2}$ . По известной теореме отсюда заключаем, что существует единственное (как непрерывная и монотонная функция) решение уравнения (1.21):  $f' = f'(y)$ . Параметр  $\sigma_0$  также легко определяется

$$\sigma_0 = m\sigma_u(v_u)|_{y=h} = m\sigma_u\left(\frac{2v_0}{\sqrt{3}h\sqrt{1 - m^2}}\right). \quad (1.22)$$

Приведем пример конкретного решения уравнения (1.21) в случае линейного упрочнения  $\sigma_u = \sigma_s(1 + \lambda_1 v_u) \equiv \sigma_s[1 + \lambda(1 + f'^2)^{1/2}]$ . Из (1.22) получаем выражение для  $\sigma_0$ :

$$\sigma_0 = m\sigma_s\left(1 + \frac{\lambda}{\sqrt{1 - m^2}}\right),$$

а из (1.21) — уравнение для определения  $f'$

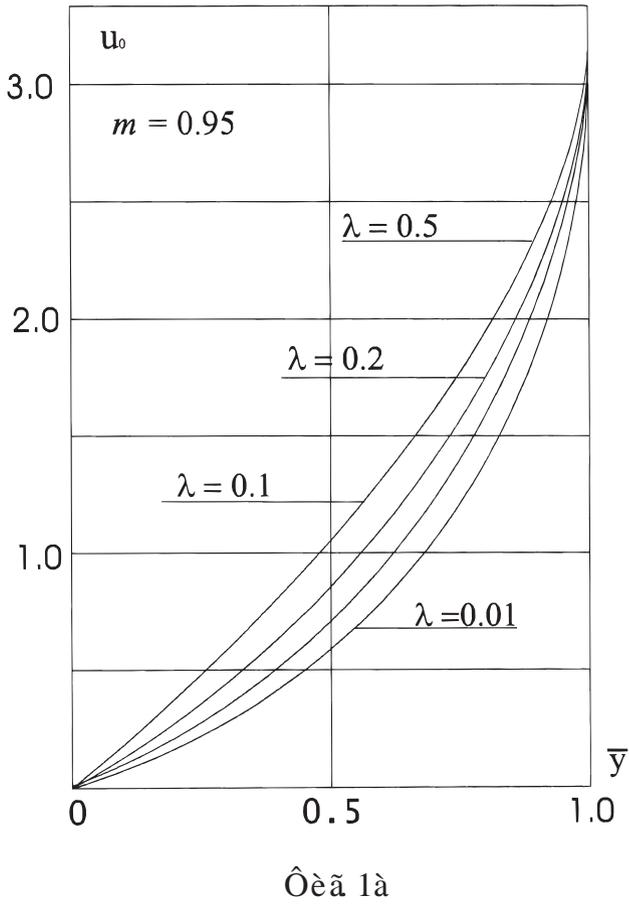
$$f' = -\omega \frac{y}{h} \frac{(1 + f'^2)^{1/2}}{1 + \lambda(1 + f'^2)^{1/2}}, \quad \omega = m\left(1 + \frac{\lambda}{\sqrt{1 - m^2}}\right).$$

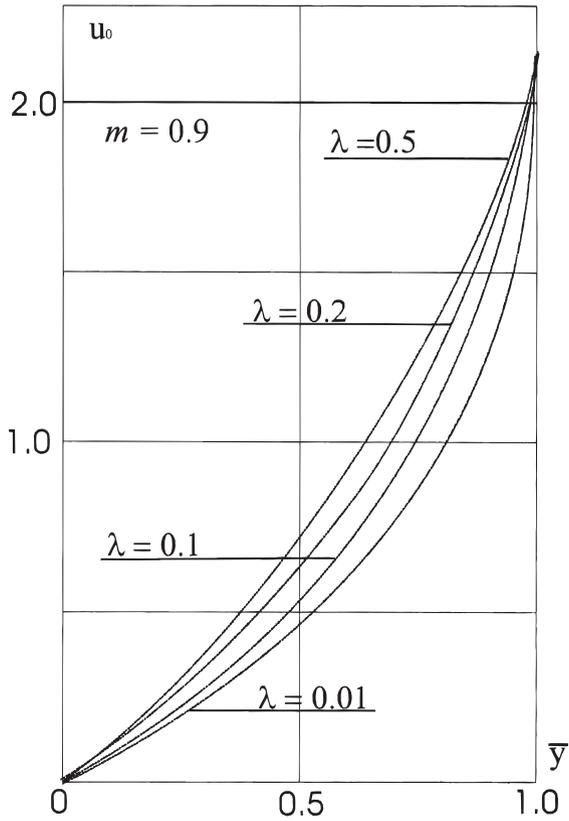
Если это уравнение разрешить в радикалах, получим выражения, мало пригодные для исследования; удобнее решать его численно, представив в форме

$$y_0 = \frac{y}{h} = \frac{u_0}{\omega(1 + u^2)^{1/2}} + \frac{\lambda u_0}{\omega}, \quad u_0 = -f',$$

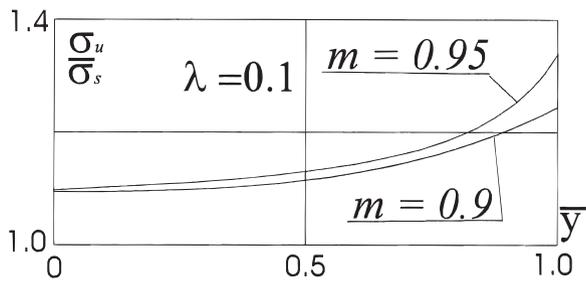
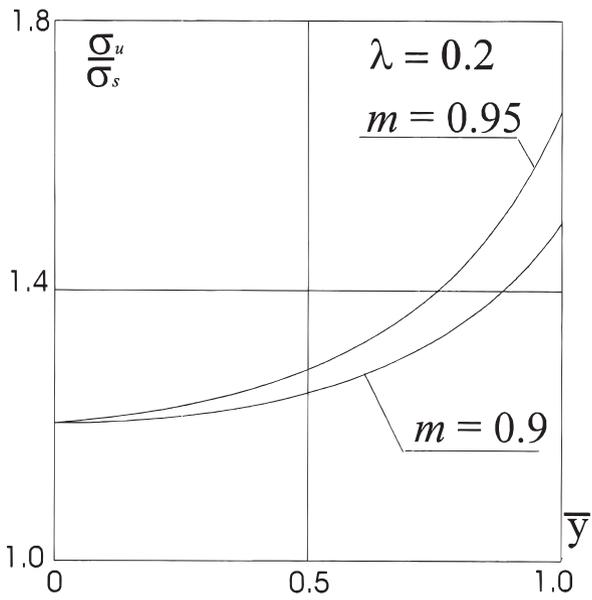
поскольку интервал применения параметра  $u_0$  известен

$$0 \leq u_0 \leq u_m = -f'_m = \frac{m}{(1 - m^2)^{1/2}}.$$





Ôi ã 1á



Ôëã 2

Результаты некоторых расчетов представлены на рис.1; видно, что  $f'(y_0)$  относительно слабо зависит от  $\lambda$  при данном  $m$ ; это дает основание определить  $f'(y_0)$  при некотором среднем значении  $\lambda$ , характерном для процесса (вспомним, что  $\lambda = \lambda_1 2v_0/\sqrt{3}h$ ), и здесь  $h$  — функция процесса). Изменение сдвигового сопротивления по толщине слоя показано на рис. 2; как видно, на степень неравномерности  $\sigma_u(y_0)$  оба параметра влияют одинаково сильно.

Приведем выражения для напряжений. Из закона течения с учетом (1.19) и (1.21) имеем

$$S_{yy} = -S_{xx} = -\frac{\sigma_u}{\sqrt{3}(1+f'^2)^{1/2}} = \frac{\sigma_0 y_0}{\sqrt{3} f'}, \quad y_0 = \frac{y}{h}$$

с другой стороны, выше было получено:  $\sigma = -S_{yy} + \varphi(x)$ , где  $\varphi(x)$  определено в (1.20); поэтому получим окончательно

$$\begin{aligned} \sigma_{yy} = S_{yy} + \sigma &= \frac{\sigma_0 x}{\sqrt{3}h} - c_1, & \sigma_{xy} &= -\frac{\sigma_0}{\sqrt{3}} y_0, \\ \sigma_{xx} = -S_{yy} + \sigma &= \frac{\sigma_0 x}{\sqrt{3}h} - c_1 - \frac{2\sigma_0 y_0}{\sqrt{3} f'}. \end{aligned}$$

Построенное решение, как видно, с точностью до слагаемых порядка  $h/l$  сравнительно с единицей совпадает с циклоидальным решением Л.Прандтля, в котором роль предела текучести на сдвиг  $\tau_s$  играет касательное напряжение трения  $\tau_{max} = \sigma_0/\sqrt{3}$ , определяемое свойствами материала, толщиной слоя и скоростью движения лицевых поверхностей; то же заключение можно сделать и относительно вектора скорости.

**3<sup>0</sup>. Трехслойная полоса.** Представим себе полосу, которая в пространстве занимает область  $S: \{|x| \leq l, |y| \leq h, |z| < \infty\}$ ; ее средняя часть  $|y| \leq h_2$  выполнена из материала с пределом текучести на сдвиг  $\tau_2$ , крайние части имеют толщину  $h_1$  (так что  $h_1 + h_2 = h$ ) и предел текучести на сдвиг  $\tau_1$ . Полоса сжимается плоскими жесткими плитами, которые движутся со скоростями  $v_0$  соответственно. В условиях плоской деформации и вследствие симметрии достаточно рассмотреть течение в первом квадранте  $0 \leq x \leq l, 0 \leq y \leq h$ .

В каждом из слоев должны быть выполнены следующие со-

отношения (индексы опускаем): уравнения равновесия

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = 0, \quad (x_1 \equiv x, x_2 \equiv y), \quad (1.22)$$

закон пластического течения Сен-Венана

$$S_{ij} = \frac{2\tau}{\sqrt{3}\nu_u} \nu_{ij}, \quad (i, j \leftarrow x, y), \quad (1.23)$$

условие несжимаемости

$$\operatorname{div} \bar{\nu} = 0, \quad \bar{\nu} = \{u, v\}, \quad (1.24)$$

условие пластичности Мизеса

$$(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + 4\sigma_{xy}^2 = 4\tau^2. \quad (1.25)$$

Выпишем граничные и контактные условия

$$y = h, \quad \sigma_{xy}^{(1)} = -\tau_1, \quad \nu^{(1)} = -\nu_0, \quad (1.26)$$

$$y = h_2, \quad \bar{\nu}^{(1)} = \bar{\nu}^{(2)}, \quad \sigma_{xy}^{(1)} = \sigma_{xy}^{(2)}, \quad \sigma_{yy}^{(1)} = \sigma_{yy}^{(2)}, \quad (1.27)$$

$$y = 0, \quad \nu^{(2)} = 0, \quad \sigma_{xy}^{(2)} = 0, \quad (1.28)$$

$$x = l, \quad \int_0^h u \, dy = \nu_0 l, \quad \int_0^h \sigma_{xx} \, dy = 0, \quad (1.29)$$

здесь  $S_{ij}$ ,  $\nu_{ij}$  — девиаторы напряжений и скоростей деформаций,  $\nu_u$  — интенсивность скоростей деформаций.

Система (1.22) – (1.29), как нетрудно проверить, имеет решение (Функции, не помеченные индексами, определяют решение по всей толщине полосы):

$$\sigma_{xy} = -\tau_1 \frac{y}{h}, \quad \sigma_{yy} = \tau_1 \frac{x}{h} - b, \quad (1.30)$$

$$\sigma_{xx}^{(1)} = \tau_1 \frac{x}{h} - b + 2\tau_1 \sqrt{1 - \frac{y^2}{h^2}}, \quad (1.31)$$

$$\sigma_{xx}^{(2)} = \tau_1 \frac{x}{h} - b + 2\tau_2 \sqrt{1 - \chi^2 \frac{y^2}{h^2}}, \quad \chi = \frac{\tau_1}{\tau_2}, \quad (1.32)$$

$$\nu = -\nu_0 \frac{y}{h}, \quad u^{(1)} = \nu_0 \left( \frac{x}{h} + 2\sqrt{1 - \frac{y^2}{h^2}} + g_1 \right), \quad (1.33)$$

$$u^{(2)} = \nu_0 \left( \frac{x}{h} + \frac{2}{\chi} \sqrt{1 - \chi^2 \frac{y^2}{h^2}} + g_2 \right), \quad (1.34)$$

$$g_1 = -\frac{\pi}{2} + \frac{\alpha}{\chi} \sqrt{1 - \chi^2 \alpha^2} - \alpha \sqrt{1 - \alpha^2} + \arcsin \alpha - \frac{\alpha}{\chi} \frac{\arcsin \chi \alpha}{\chi \alpha}, \quad (1.35)$$

$$g_2 = g_1 + 2\sqrt{1 - \alpha^2} - \frac{2}{\chi} \sqrt{1 - \chi^2 \alpha^2}, \quad \alpha = \frac{h_2}{h}. \quad (1.36)$$

Решение существует, если  $\alpha\chi \leq 1$ . Очевидно, что при  $\chi = 1$  будет  $g_1 = g_2 = -\pi/2$ , и решение совпадает с классическим.

Представляет интерес случай, когда  $\chi^2 \ll 1$ , а параметр  $\alpha$  порядка единицы; в технологии это — осаживание полосы со «смазкой» из тонких слоев «мягкого» пластического материала. Из (1.35), (1.36) получаем оценки

$$g_1 \cong -\frac{1}{2}\chi\alpha^2 - 2\sqrt{1 - \alpha^2}, \quad g_2 \cong -\frac{2}{\chi} + \frac{1}{2}\chi\alpha^2,$$

подставив в (1.33) (1.34), найдем

$$u^{(1)} \cong \nu_0 \left( \frac{x}{h} + 2\sqrt{1 - \frac{y^2}{h^2}} - \frac{1}{2}\chi\alpha^2 - 2\sqrt{1 - \alpha^2} \right), \quad (1.37)$$

$$u^{(2)} \cong \nu_0 \left( \frac{x}{h} - \chi \frac{y^2}{h^2} + \frac{1}{2}\chi\alpha^2 \right). \quad (1.38)$$

Определим постоянную  $b$  из второго условия (1.29)

$$b = \tau_1 \left( \frac{l}{h} + \frac{\pi}{2} - \alpha \sqrt{1 - \alpha^2} - \arcsin \alpha \right) + \tau_2 \left( \alpha \sqrt{1 - \chi^2 \alpha^2} + \frac{\arcsin \chi \alpha}{\chi} \right)$$

и проделаем оценки для случая  $\chi^2 \ll 1$ ,  $\alpha \approx 1$ , получим в результате

$$b \cong \tau_1 \frac{l}{h} + 2\tau_2.$$

Подставим это в (1.30) – (1.32)

$$\sigma_{yy} \cong -\tau_1 \left( \frac{l-x}{h} + \frac{2}{\chi} \right), \quad (1.39)$$

$$\sigma_{xx}^{(1)} \cong -\tau_1 \left( \frac{l-x}{h} + \frac{2}{\chi} + 2\sqrt{1 - \frac{y^2}{h^2}} \right), \quad \sigma_{xx}^{(2)} \cong -\tau_1 \left( \frac{l-x}{h} - \frac{\chi}{2} \frac{y^2}{h^2} \right). \quad (1.40)$$

Решение (1.37) – (1.40) качественно не отличается от прандтлевского, однако в количественном отношении отличается от него заметно. Как видно из (1.37), (1.38), продольные скорости очень слабо зависят от поперечной координаты; в частности, зависимость скорости  $u^{(2)}$  в основном слое от  $y$  пропорциональна малому параметру задачи. Напряжения  $\sigma_{xx}$  также слабо зависят от  $y$ . Давление со стороны слоя плиты  $\sigma_{yy}$  — линейная функция  $x$ , ее наклон определяется пределом текучести «смазочного» слоя, однако значение этого давления на границе определяется пределом текучести основного слоя; в этом, как нам представляется, состоит новый механический эффект полученного решения.

**4<sup>0</sup> Учет сил инерции.** Постановка задачи отличается от выписанной в предыдущем пункте тем, что полоса состоит из одного слоя ( $h_2 = h$ ) с пределом текучести  $\tau$ , а вместо (1.22) должны быть приняты уравнения движения. Запишем их в координатной форме, поскольку это потребуется при построении решения

$$\begin{aligned} \rho \left( \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + \nu \frac{\partial u}{\partial y} \right) &= \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y}, \\ \rho \left( \frac{\partial \nu}{\partial t} + u \frac{\partial \nu}{\partial x} + \nu \frac{\partial \nu}{\partial y} \right) &= \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y}, \end{aligned} \quad (1.41)$$

уравнения (1.23) – (1.25) остаются в силе, граничные условия очевидны.

Отметим сразу же, что в такой постановке и при обычно принимаемых предположениях относительно напряженно-деформированного состояния в полосе возникающие математические трудности становятся практически непреодолимыми. Поэтому ограничимся определением поправки, которую внесут силы инерции в квазистатическое решение, — при условии, что они малы. Параметром малости, очевидно, будет отношение  $\varepsilon_0 = P_{in}/P_{st}$  сил инерции  $P_{in} \sim \rho \nu_0^2 l^2 / h^2$  и квазистатических напряжений  $P_{st} \sim \tau l / h$ ; условие малости  $\varepsilon_0 \sim \rho \nu_0^2 l / (\tau h) \ll 1$  при-

водит при  $l/h \sim 10$  к скорости порядка нескольких метров в секунду. В дальнейшем будет фигурировать параметр  $\varepsilon = \rho\nu_0^2/\tau$ ; очевидно, что тем более будет  $\varepsilon \ll 1$ .

Представим решение в виде  $\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^0 + \sigma_{ij}^1$ ,  $u = u^0 + u^1$ ,  $\nu = \nu^0 + \nu^1$ , порядок поправок по отношению к основному состоянию (с индексом нуль) будет установлен в ходе решения. Подставив в (1.41) и (1.25), придем к системам уравнений

$$\frac{\partial \sigma_{ij}^0}{\partial x_j} = 0, \quad (\sigma_{xx}^0 - \sigma_{yy}^0)^2 + 4(\sigma_{xy}^0)^2 = 4\tau^2,$$

$$\rho \frac{du^0}{dt} = \frac{\partial \sigma_{xx}^1}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}^1}{\partial y}, \quad \rho \frac{d\nu^0}{dt} = \frac{\partial \sigma_{xy}^1}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}^1}{\partial y}, \quad (1.42)$$

$$(\sigma_{xx}^0 - \sigma_{yy}^0)(\sigma_{xx}^1 - \sigma_{yy}^1) + 4\sigma_{xy}^0\sigma_{xy}^1 = 0. \quad (1.43)$$

Основное состояние известно

$$\sigma_{xy}^0 = -\tau \frac{y}{h}, \quad \sigma_{xx}^0 = -\tau \left( \frac{l-x}{h} - 2\sqrt{1 - \frac{y^2}{h^2}} + \frac{\pi}{2} \right),$$

$$\sigma_{yy}^0 = -\tau \left( \frac{l-x}{h} + \frac{\pi}{2} \right), \quad \nu^0 = -\nu_0 \frac{y}{h},$$

$$u^0 = \nu_0 \left( \frac{x}{h} + 2\sqrt{1 - \frac{y^2}{h^2}} - \frac{\pi}{2} \right),$$

подставив его в (1.42), (1.43) получим для  $\sigma_{ij}^1$  статически определенную задачу с однородными (на краю  $x = l$  — в интегральном смысле) краевыми условиями

$$\frac{\partial \sigma_{xx}^1}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}^1}{\partial y} = \rho \frac{\nu_0^0}{h} \left( \frac{2x}{h} + 2\sqrt{1 - \frac{y^2}{h^2}} - \frac{\pi}{2} \right), \quad (1.44)$$

$$\frac{\partial \sigma_{xy}^1}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}^1}{\partial y} = 0, \quad (1.45)$$

$$(\sigma_{xx}^1 - \sigma_{yy}^1) \sqrt{1 - \frac{y^2}{h^2}} = 2\frac{y}{h} \sigma_{xy}^1. \quad (1.46)$$

Решение этой системы найдем в предположении  $\sigma_{xy}^1 = \sigma_{xy}^1(y, t)$ ; из (1.45) тогда следует  $\sigma_{yy}^1 = f_1(x, t)$ , а из условия пластичности

(1.46) получим

$$\sigma_{xx}^1 = 2\frac{y}{h}\sigma_{xy}^1\left(1 - \frac{y^2}{h^2}\right)^{-1/2} + f_1(x, t),$$

следовательно  $\partial^2\sigma_{xx}^1/\partial x\partial y = 0$ . Продифференцируем (1.44) по  $y$ :

$$\frac{\partial^2\sigma_{xy}^1}{\partial y^2} = 2\rho\frac{\nu_0^2}{h}\frac{\partial}{\partial y}\left(1 - \frac{y^2}{h^2}\right)^{1/2}$$

при условии, что  $\sigma_{xy}^1 = 0$  на границах  $y = 0$  и  $y = h$ , откуда получаем окончательно

$$\sigma_{xy}^1 = \rho\nu_0^2\left(\frac{y}{h}\sqrt{1 - \frac{y^2}{h^2}} + \arcsin\frac{y}{h} - \frac{\pi}{2}\frac{y}{h}\right). \quad (1.47)$$

Подставив это в (1.44), найдем

$$\sigma_{xx}^1 = \rho\nu_0^2\frac{x^2}{h^2} + f_2(y, t),$$

из условия пластичности (1.46) после этого следует

$$\rho\nu_0^2\frac{x^2}{h^2} + f_2(y, t) - f_1(x, t) = 2\frac{y}{h}\frac{\sigma_{xy}^1(x, t)}{\sqrt{1 - y^2/h^2}}.$$

Это равенство возможно, если только

$$f_1(x, t) = \rho\nu_0^2\frac{x^2}{h^2} - b(t), \quad f_2(y, t) = 2\frac{y}{h}\frac{\sigma_{xy}^1(y, t)}{\sqrt{1 - y^2/h^2}} - b(t).$$

Напряжения  $\sigma_{xx}^1$ ,  $\sigma_{yy}^1$  будут иметь окончательный вид

$$\begin{aligned} \sigma_{xx}^1 &= \rho\nu_0^2\frac{x^2}{h^2} + 2\frac{y}{h}\frac{\sigma_{xy}^1}{\sqrt{1 - y^2/h^2}} - b(t), \\ \sigma_{yy}^1 &= \rho\nu_0^2\frac{x^2}{h^2} - b(t), \quad b(t) = \rho\nu_0^2\frac{l^2}{h^2} + \rho\nu_0^2\left(\frac{8}{3} - \frac{\pi^2}{4}\right) \cong \rho\nu_0^2\frac{l^2}{h^2}. \end{aligned}$$

Как видно, порядок поправок к основному состоянию различен: у касательных напряжений это величина порядка  $\varepsilon$ , и ей

вполне можно пренебречь; у нормальных напряжений это величина порядка  $\varepsilon_0$ . С точки зрения физической этот результат вполне понятен: скоростной напор  $(\rho u^0)^2$  влияет на шаровую часть тензора, а она определяется нормальными напряжениями.

Переходя к отысканию поля скоростей, отметим сразу же, что попытка представить его в форме разложения по малому параметру не приводит к успеху: «поправки» оказываются содержащими сингулярные слагаемые типа  $(1 - y^2/h^2)^{-\alpha}$ ,  $\alpha > 0$ . Поэтому поступим непосредственно: по «полному» тензору напряжений  $\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^0 + \sigma_{ij}^1$  определим поле скоростей  $u, \nu$  из уравнений несжимаемости (1.24) и соотношений Сен-Венана (1.23).

Будем исходить из естественного предположения, что  $\nu = \nu(y, t)$  и  $\nu_{xy} = \nu_{xy}(y, t)$ , поскольку девиатор напряжений  $S_{ij}$  зависит только от  $y$  и  $t$ . Из уравнения несжимаемости тогда получим  $u = -(\partial\nu/\partial y)x + 2f(y, t)$  и соответственно этому  $\nu_{xy}(y, t) = 0,5 [-(\partial^2\nu/\partial y^2)x + 2f'(y, t)]$ . Но это возможно, если только  $\partial^2\nu/\partial y^2 = 0$ , откуда, с учетом граничных условий, находим  $\nu = -\nu_0 y/h$ ; для скорости  $u$  получаем:  $u = \nu_0 x/h + 2f(y, t)$ . Неизвестную пока функцию  $f(y, t)$  найдем из сравнения выражений для  $\sigma_{xy} = \sigma_{xy}^0 + \sigma_{xy}^1$ , полученного выше, и подсчитанного по соотношению Сен-Венана

$$\sigma_{xy} = \frac{\tau\nu_{xy}}{(\nu_{xx}^2 + \nu_{xy}^2)^{1/2}} = \frac{\tau f'(y, t)}{[\nu_0^2/h^2 + f'^2(y, t)]^{1/2}},$$

после несложных преобразований приходим для  $f'(y, t)$  к уравнению

$$f' = -\frac{\nu_0}{h} \frac{y/h - \varepsilon\varphi(y, t)}{\left[1 - (y/h - \varepsilon\varphi(y, t))\right]^{1/2}},$$

$$\varphi(y, t) = \frac{y}{h} \sqrt{1 - \frac{y^2}{h^2}} + \arcsin \frac{y}{h} - \frac{\pi}{2} \frac{y}{h}.$$

Вычислить получившийся интеграл в конечном виде не представляется возможным, разложение его по параметру  $\varepsilon$  приводит к расходящимся в точке  $y = h$  интегралам; поэтому вычислим  $f(y, h)$  приближенно.

Выполним замену переменной

$$\frac{y}{h} - \varepsilon\varphi = s, \quad dy = \frac{h}{\alpha} \left( 1 - \frac{2\varepsilon}{\alpha} \sqrt{1 - \frac{y^2}{h^2}} \right)^{-1} ds, \quad \alpha = 1 + \varepsilon \frac{\pi}{2},$$

уравнение  $y/h = s + \varepsilon\varphi$  может быть решено методом последовательных приближений; ограничившись первым из них, получим  $y/h = s + \varepsilon\varphi(s, t)$ , поэтому  $1 - y^2/h^2 = 1 - (s + \varepsilon\varphi)^2$ . После всех преобразований для  $f$  будем иметь

$$f = -\frac{\nu_0}{\alpha} \int \frac{s}{\sqrt{1-s^2}} \left[ 1 - \frac{2\varepsilon}{\alpha} \sqrt{1 - (s + \varepsilon\varphi)^2} \right]^{-1} ds,$$

второй из сомножителей разложим в ряд по параметру  $\varepsilon$ , сохранив только первую степень, а в подкоренном выражении отбросим слагаемое  $\varepsilon\varphi$ . Окончательно получим (слагаемые порядка  $\varepsilon^2$  также опущены)

$$f = \frac{\nu_0}{\alpha} \left[ 1 - \frac{y^2}{h^2} + 2\varepsilon \frac{y}{h} \varphi \right]^{1/2} - \varepsilon \nu_0 \frac{y^2}{h^2} + C_0.$$

Поле скоростей имеет, следовательно, вид

$$u = \nu_0 \frac{x}{h} + 2 \frac{\nu_0}{\alpha} \left[ 1 - \frac{y^2}{h^2} + 2\varepsilon \frac{y}{h} \varphi \right]^{1/2} - 2\varepsilon \nu_0 \frac{y^2}{h^2} + C_0, \quad \nu = \nu_0 \frac{y}{h},$$

параметр интегрирования  $C_0$  определяется из граничного условия (1.29); приближенное вычисление дает (последнее слагаемое под корнем опущено)  $C_0 \cong -\nu_0 (\pi/(2\alpha) - 2\varepsilon/3)$ .

Как видно из (1.48), при условии малости параметра  $\varepsilon_0$ , поправки к основному течению оказываются пренебрежимо малыми; этот результат представляется естественным, поскольку кинематика течения диктуется видом области течения, контактными условиями прандтлевского скольжения и несжимаемостью материала. Последнее наиболее существенно; мы полагаем, что учет совместного влияния сил инерции и сжимаемости, как показывают результаты, мог бы привести к заметному искажению классического поля скоростей. Обобщение задачи Л. Прандтля в этом направлении имеет принципиальное значение для современных технологий обработки давлением.

Второй важный вывод из полученного решения состоит в том, что теория течения тонких слоев в высокоскоростных процессах получила дополнительное обоснование.

## §2. Течение плоского слоя — динамика.

В этом параграфе мы рассмотрим первую основную задачу [2] для случая, когда поверхности мало отличаются от плоскостей; такие процессы будем называть течениями тонкого плоского слоя. При выводе уравнений, которые описывают течение, мы примем гипотезы, сформулированные в [2], [3], и дополним их предположениями о том, что материал слоя может быть сжимаемым и упрочняющимся, трение на поверхностях может быть анизотропным, а тела инструмента — деформируемыми. Предположения, которые будут делаться по ходу изложения, основываются на результатах предыдущего параграфа; ограничимся изотермическим случаем.

**1<sup>0</sup>. Постановка задачи.** Представим себе, что слой пластического материала занимает в плоскости  $xu$  область  $S$ , ограниченную кусочно-гладким контуром  $\Gamma$ , уравнение которого может быть записано либо в явном виде

$$y_0 = \varphi(x_0) \quad (2.1)$$

либо параметрическими уравнениями

$$x_0 = x_0(\tau), y_0 = y_0(\tau). \quad (2.2)$$

Будем считать, что слой сжимается между поверхностями, уравнения которых в недеформированном состоянии имеют вид  $z = f_1(x, y)$ ,  $z = f_2(x, y, t)$ , поэтому разность  $f_2(x, y, t) - f_1(x, y) = h_1(x, y, t)$  была бы известной толщиной слоя, сжимаемого жесткими поверхностями. Если  $-w_1, w_2$  — нормальные перемещения точек поверхностей  $f_1$  и  $f_2$ , то толщина слоя с хорошей точностью запишется в виде (см. формулу (2.10) первой главы)

$$h(x, y, t) = h_1(x, y, t) + w_1(x, y, t) + w_2(x, y, t). \quad (2.3)$$

Полагаем, что условия контактного трения на поверхностях  $f_1$  и  $f_2$  характеризуются матрицами  $A_1 = \{\alpha'_{ik}\}$ ,  $A_2 = \{\beta'_{ik}\}$ ,  $i, k = 1, 2$ ; без ущерба для общности можно принять, что  $\alpha'_{ik} =$

$\alpha_{ik}\delta_{ik}$ ,  $\beta_{ik}^l = \beta_{ik}\delta_{ik}$  (ортотропное трение), причем направления ортотропии на обеих поверхностях совпадают.

Обозначим  $p$  — давление со стороны слоя на поверхности,  $\bar{v} = \{u, v\}$  — осредненный по толщине вектор скорости частиц слоя и предположим, что тела инструмента не совершают внутренних движений; тогда уравнение равновесия элемента слоя  $h dx dy$  запишется в виде

$$h \operatorname{grad} p = \bar{T}.$$

Вектор контактных напряжений трения  $\bar{T}$  определяется выражением (2.9) первой главы

$$\bar{T} = -\tau_m(A_1 + A_2) \frac{\bar{v}}{|\bar{v}|},$$

подставим это в предыдущее выражение и распишем его по координатно

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{\tau_m}{h}(\alpha_{11} + \beta_{11}) \frac{u}{|\bar{v}|}, \quad \frac{\partial p}{\partial y} = -\frac{\tau_m}{h}(\alpha_{22} + \beta_{22}) \frac{v}{|\bar{v}|},$$

положив  $\alpha_{22} + \beta_{22} = \alpha$ ,  $\alpha_{11} + \beta_{11} = \mu\alpha$ , получим окончательно

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{\alpha\tau_m}{h} \frac{\mu u}{|\bar{v}|}, \quad \frac{\partial p}{\partial y} = -\frac{\alpha\tau_m}{h} \frac{v}{|\bar{v}|}. \quad (2.4)$$

На границе области течения на  $p$  накладывается условие

$$p(x_0, y_0) = \lambda\sigma_s, \quad (2.5)$$

здесь  $\lambda$  — множитель порядка единицы,  $\sigma_s$  — предел текучести материала при известных условиях процесса течения (температура, скорости и степени деформации и др.).

Из результатов предыдущего параграфа и работ [2], [3] следует, что для средней по толщине слоя интенсивности скоростей деформаций можно принять выражение  $v_u = -\delta dh/(h dt)$ , где  $\delta$  — множитель порядка единицы, поэтому для степени деформации получаем  $e_u = \delta \ln(h_0/h)$ . Теперь система определяющих соотношений замыкается скалярными уравнениями связи

$$\tau_m = \frac{\bar{m}}{\sqrt{3}}\sigma_s(T, v_u, e_u, \dots), \quad \rho = \rho_0(1 + \alpha f(p, e_u, v_u, \dots)), \quad (2.6)$$

а к уравнениям равновесия добавляется условие сохранения массы

$$\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} + \frac{1}{h} \frac{dh}{dt} + \operatorname{div} \bar{v} = 0, \quad (2.7)$$

которое может быть записано и в других формах

$$\frac{d(\rho h)}{dt} + \rho h \operatorname{div} \bar{v} = 0, \quad \frac{\partial(\rho h)}{\partial t} + \operatorname{div} (\rho h \bar{v}) = 0.$$

Толщина слоя  $h(x, y, t)$  в выражении (2.3) определяется при общей постановке задачи в процессе решения; в простейшем варианте, когда известны жесткости  $K_{1,2}(x, y; x', y')$  тел инструмента, для  $w_{1,2}$  имеем

$$w_{1,2} = \iint_S K_{1,2}(x, y; x', y') p(x', y') dx' dy',$$

поэтому из (2.3) находим

$$h = h_1 + \iint_S (K_1 + K_2) p(x', y') dx' dy'. \quad (2.8)$$

В общем случае для определения  $w_{1,2}$  ставится задача теории упругости для тел инструмента, как об этом говорилось выше.

Задача поставлена полностью: для определения скоростей  $u, v$ , давления  $p$  и толщины  $h$  имеем два уравнения равновесия (2.4), условие сохранения массы (2.7) (в одном из вариантов) выражение (2.8) для вычисления толщины слоя; к этому добавляются уравнения связи (2.6) и выражения для вычисления степени и скорости деформации  $e$  и  $v_u$ . Как видно, это сложная система нелинейных взаимосвязанных уравнений, полное исследование которой возможно только современными численными методами; этой задачей мы заниматься не будем. Мы рассмотрим варианты постановок, когда оказывается возможным достаточно далеко продвинуть аналитическое исследование и обнаружить эффекты качественного характера.

**2<sup>0</sup>. Первый основной вариант.** В этом разделе будем полагать, что поверхности  $f_1$  и  $f_2$  — плоскости, параллельные плоскости  $xy$ , так что  $h_1 = h_1(t)$  — известная функция

времени. Матрицы анизотропии трения будем считать единичными, поэтому в формулах (2.4)  $\alpha = 2$ ,  $\mu = 1$ . Материал слоя предположим несжимаемым и идеальнопластическим, т.е.  $\sigma_s = \sqrt{3}\tau_s = \text{const}$ ; положим, что во всей области контакта  $\tau_m = \tau_s$ . В результате задача свелась к системе уравнений

$$\text{grad } p = -\frac{2\tau_s}{h} \frac{\bar{v}}{|\bar{v}|}, \quad \text{div } \bar{v} + \frac{1}{h} \frac{dh}{dt} = 0, \quad p(x_0, y_0) = \lambda\sigma_s, \quad (2.9)$$

$$h = h_1 + \iint_S (K_1 + K_2)p(x', y') dx' dy'. \quad (2.10)$$

Первое важное для дальнейшего изложения свойство течения следует из первого уравнения (2.9): линии уровня  $p = \text{const}$  и линии тока ортогональны; поскольку контур — линия уровня, постольку линии тока ортогональны контуру. Отсюда следует второе свойство: слой сжимается, поэтому вектор скорости направлен в сторону контура, а значит внутри области существуют множества точек, в которых  $\bar{v} = 0$  — так называемые линии ветвления течения (их свойства отмечены в [2]).

Задача об определении давления и толщины выделяется из общей системы (2.9), (2.10); действительно, из первого уравнения (2.9) вместе с граничным условием имеем

$$|\text{grad } p|^2 = \frac{4\tau_s^2}{h^2}, \quad p(x_0, y_0) = \lambda\sigma_s, \quad (2.11)$$

присоединив сюда (2.10), получим замкнутую систему. После того, как  $p$  и  $h$  определены, вектор скорости  $\bar{v}$  находится из второго уравнения (2.9) и соотношения:  $u(\partial p/\partial y) = v(\partial p/\partial x)$ ; эта задача будет рассмотрена в других разделах.

Обозначим  $l$  — характерный размер области течения; координаты  $x, y$  отнесем к  $l$ , перемещение  $w$  — к  $h_1$  и оставим за ними прежние обозначения. Введем функцию давления  $z$  по формуле:  $z = (p - \lambda\sigma_s)h_1/(2\tau_s l)$ , тогда (2.11) перепишется в виде

$$|\text{grad } z|^2 = (1 + w)^{-2}, \quad z(x_0, y_0) = 0. \quad (2.12)$$

Из (2.10) найдем

$$w = \varkappa_0 \iint_S H dx' dy' + \varkappa_1 \iint_S H z(x', y') dx' dy', \quad (2.13)$$

здесь обозначено:  $\varkappa_0 = \delta \lambda \sigma_s l^2 / h_1$ ,  $\varkappa_1 = 2 \tau_s \delta l^3 / h_1^2$ ,  $\delta H = K_1 + K_2$ , параметр  $\delta$  характеризует размерность функций жесткости  $K_{1,2}$ . Первое слагаемое в (2.13) имеет порядок  $h_1/l$  относительно второго, поэтому с достаточной точностью им можно пренебречь; это, однако, не вносит упрощений.

Задачу (2.12), (2.13) естественно решать методом последовательных приближений: полагаем  $w^{(0)} = 0$  и далее

$$\begin{aligned} |\text{grad } z^{(k)}|^2 &= (1 + w^{(k)})^{-2}, \quad z^{(k)}(x_0, y_0) = 0, \\ w^{(k+1)} &= \varkappa_0 \iint_S H dx' dy' + \varkappa_1 \iint_S H z^{(k)}(x', y') dx' dy'. \end{aligned}$$

Не останавливаясь на вопросе сходимости (она должна быть установлена в каждом конкретном случае), отметим, что на любом шаге основную трудность составляет решение задачи (2.12) с известной правой частью, а вычисление  $w$  сводится к простой квадратуре. Задача нулевого приближения  $|\text{grad } w^{(0)}|^2 = 1$ ,  $z^{(0)}(x_0, y_0) = 0$  подробно разработана в [2], [3], поэтому она здесь не рассматривается.

Решение задачи Коши

$$|\text{grad } z|^2 = \frac{1}{g^2(x, y)}, \quad z(x_0, y_0) = 0 \quad (2.14)$$

может быть построено на основе вариационной постановки. Выберем внутри области  $S$ , в достаточно малой окрестности границы, некоторую точку  $x_1, y_1$  и введем в рассмотрение линию тока  $\gamma$ , проходящую через эту точку и пересекающую контур в точке  $x_0, y_0$ , пока неизвестной. В качестве параметра на линии тока выберем ее длину и будем отсчитывать ее от контура. Вдоль  $\gamma$  выполняются соотношения

$$\frac{dx}{ds} = -\cos(s, x) = -\frac{u}{|\vec{v}|}, \quad \frac{dy}{ds} = -\cos(s, y) = -\frac{v}{|\vec{v}|},$$

поэтому

$$\frac{dz}{ds} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{dx}{ds} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{dy}{ds} = \frac{1}{g(x, y)},$$

обозначив  $y = y(x)$  — явное уравнение линии тока, из последнего соотношения находим

$$z = \int_{\gamma} \frac{ds}{g(x, y)} = \int_{x_0}^{x_1} \frac{(1 + y'^2)^{1/2} dx}{g(x, y)} \equiv \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y') dx. \quad (2.15)$$

Таким образом, дело свелось к нахождению линий тока; если они известны, давление находится простой квадратурой. Мы утверждаем, что линии тока  $\gamma$  совпадают с экстремальями вариационной задачи для функционала (2.15). Доказательство основано на замене уравнения Эйлера – Лагранжа

$$\frac{d}{dx}(F'_{y'}) - F'_y = 0 \quad (2.16)$$

системой канонических уравнений с помощью преобразования Лежандра  $F'_{y'} = q$

$$\frac{dq}{dx} = -\frac{\partial L}{\partial y}, \quad \frac{dy}{dx} = \frac{\partial L}{\partial q},$$

здесь  $L(q, y, x) = qy' - F(x, y, q)$ . Выписанные уравнения — это характеристическая система, соответствующая дифференциальному уравнению первого порядка

$$\frac{\partial z}{\partial x} + L\left(x, y, \frac{\partial z}{\partial y}\right) = 0. \quad (2.17)$$

В нашем случае  $q = F'_{y'} = y'g^{-1}(1 + y'^2)^{-1/2}$ , откуда  $y'^2 = g^2q^2(1 - g^2q^2)^{-1}$ ,  $L = -(1 - g^2q^2)^{1/2}/g$ ; подставив это в (2.17), получим первое из уравнений (2.14). Условие трансверсальности для функционала (2.15) означает ортогональность, и это совпадает с условием ортогональности линии тока и контура. Доказательство тем самым завершено.

Уравнение Эйлера – Лагранжа (2.16) в рассматриваемой нами задаче течения представляет собой дифференциальное уравнение второго порядка

$$gy'' + (1 + y'^2)\left(\frac{\partial g}{\partial y} - \frac{\partial g}{\partial x}y'\right) = 0, \quad (2.18)$$

решение которого зависит от двух параметров:  $y = f(x; \alpha, \beta)$ ; следующие четыре условия позволяют найти эти параметры, а также определить точку контура  $x_0, y_0$

$$\begin{aligned} f(x_1; \alpha, \beta) &= y_1, & \varphi(x_0) &= y_0, \\ \varphi(x_0) &= f(x_0; \alpha, \beta); & \varphi'(x_0)f'(x_0; \alpha, \beta) &= -1. \end{aligned}$$

Условия, которым удовлетворяет линия контура, обеспечивают единственность построения всего поля линий тока и уровня, по крайней мере, в окрестности контура.

Обозначим  $R$  — радиус кривизны линии тока,  $N$  — единственный вектор нормали к ней; тогда (2.16) можно записать в векторной форме  $g = -RN \operatorname{grad} g$ , откуда следует качественный результат: линии тока изгибаются в сторону уменьшения толщины слоя  $g(x, y)$ .

Укажем на некоторые аналогии.

1) Если  $g(x, y) \equiv 1$ , то поверхность  $z = z(x, y)$  подобна поверхности, образованной насыпью из сухого однородного песка, основание которой образует область течения; этот случай — песчаная аналогия — подробно рассмотрен в [2], [3].

2) В геометрической оптике функционал  $z$  в (2.15) — это время распространения света из точки  $x_0, y_0$ , в точку  $x_1, y_1$ , со скоростью  $g(x, y)$ ; световым лучам эквивалентны линии тока, волновым линиям (или ) — линии уровня; условие  $\min z$  — это принцип Ферма.

3) В задаче о кручении стержня из неоднородного идеальнупластического материала уравнениями (2.14) определяется функция напряжений, причем обратному значению толщины слоя соответствует переменный предел текучести материала стержня. Линиям тока эквивалентны линии скольжения, линиям уровня — траектории касательных напряжений, удвоенному значению усилия, потребного для протекания процесса течения — предельный момент.

Рассмотрим два примера, когда решение задачи доводится до конца. В первом из них положим, что толщина является функцией одной координаты, например,  $g = g(x)$ . (Пример из технологии — прокатка тонкого листа с учетом сплющивания

дуги валка). Из (2.18) находим

$$\frac{dy'}{y'(1+y'^2)} = \frac{dg}{g},$$

откуда следует уравнение

$$y'^2 = \alpha^2 g^2 (1 + y'^2) \quad (2.19)$$

и его общий интеграл

$$y - \beta = \int \frac{g(x) dx}{\sqrt{1 - \alpha^2 g^2(x)}}, \quad (2.20)$$

в последующих формулах  $\alpha$ ,  $\beta$  — параметры интегрирования.

Обозначим  $\Theta$  — угол между касательной к линии тока и осью  $x$ ; тогда (2.19) можно записать в виде

$$\frac{y'^2}{\sqrt{1+y'^2}} = \sin^2 \Theta = \alpha^2 g^2, \quad \frac{\sin \Theta}{g(x)} = \text{const.}$$

Полученный результат позволяет продолжить аналогию с геометрической оптикой (теорема Буге); угол между направлением, в котором меняется толщина, и касательной к линии тока таков, что отношение  $\sin \Theta/g(x)$  остается постоянным вдоль линии тока. Отсюда получаем следствие: линия тока, вышедшая из точки контура, где  $\Theta = 0$ , будет прямой. Теорема Буге позволяет просто геометрически построить сетку линий тока и уровня и найти линию ветвления течения. В частном случае  $g(x) = 1 + \lambda x$  из (2.20) находим систему линий тока как двухпараметрическое семейство окружностей  $(y - \beta)^2 + (x + 1/\lambda)^2 = 1/(\alpha\lambda)^2$ , центры которых лежат на прямой  $x = -1/\lambda$ . Если область — круг радиуса  $R$  с центром в начале координат ( $\lambda R < 1$ ), то легко устанавливается, что линии тока — эллиптический пучок окружностей (все они собираются в точке  $x_1 = [(1 - \lambda^2 R^2)^{1/2} - 1]/\lambda$ , а линии уровня — гиперболический пучок окружностей.

Во втором примере рассмотрим класс задач, в которых толщина может быть представлена выражением вида  $g(x, y) = [\varphi_1(x) + \varphi_2(y)]^{-1/2}$ . В этом случае уравнение (2.14) имеет полный интеграл (интеграл Лиувилля)

$$z = \int [\varphi_1(x) - \alpha]^{1/2} dx - \int [\varphi_2(y) + \alpha]^{1/2} dy + \text{const},$$



же точке. Теперь ясно, что если имеется часть  $AmD$  свободной границы, поверхность  $z(x, y)$  будет огибающей таких концов. Часть  $CD$  проекции ребра (линии ветвления течения) определится обычным образом,  $DE$  — как геометрическое место точек, равноудаленных от точки  $B$  и дуги  $FA$ ,  $En$  — как прямая, равноудаленная от точек  $A$  и  $B$ . Перенесение результатов на случай переменной толщины очевидно.

**3<sup>0</sup>. Обобщения и примеры.** В этом разделе будут рассмотрены задачи: 1) течение по поверхностям с анизотропным трением; 2) течение слоя из упрочняющегося материала; 3) оценки деформаций инструментов (величины перемещений  $w$ ) в некоторых конкретных случаях.

1) *Анизотропные трения.* Будем исходить из системы (2.4), (2.5), (2.8) и перейдем в ней к новым переменным и функциям

$$\xi = \mu x, y, \quad h'(\xi, y) = h(\xi/\mu, y), \quad p'(\xi, y) = p(\xi/\mu, y), \\ K'_{1,2}(\xi, y; \xi', y') = K_{1,2}(\xi/\mu, y; \xi'/\mu, y').$$

Якобиан перехода к новым переменным равен  $\mu^{-1}$ , поэтому получим из уравнений (2.4), (2.5)

$$\left(\frac{\partial p'}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial p'}{\partial y}\right)^2 = \frac{\alpha^2 \tau_m^2}{(h')^2}, \quad p'(\xi_0, y_0) = \lambda \sigma_s,$$

соотношение (2.8) преобразуется к виду

$$h'(\xi, y) = h'_1(\xi, y) + \frac{1}{\mu} \iint_{S'} (K'_1 + K'_2) p'(\xi', y') d\xi' dy'.$$

Как видим, в новых переменных задача тождественна рассмотренной в предыдущем разделе и решается разработанными там методами. Анизотропия трения, однако, обуславливает новые механические эффекты качественного характера; проследим их на простом примере.

Пусть течение происходит в круге  $\xi^2 + y^2 = 1$ ,  $h_1 = 1$ ,  $w = 0$ , (все в безразмерных координатах и функциях),  $\tau_m = \tau_s = \text{const}$ . Очевидно, поверхность  $z'(\xi, y)$  — прямой круговой конус  $(1 - z)^2 = \xi^2 + y^2$ , линии тока — радиусы, линия ветвления течения вырождается в точку  $\xi = y = 0$ . Этот образ описывает процесс течения в эллиптической области  $\mu^2 x^2 + y^2 = 1$ ,

линии тока — прямые  $y = y_0 x/x_0$ , давление изображается конической поверхностью  $(1 - z)^2 = \mu^2 x^2 + y^2$ . Теперь представим себе течение в эллиптической области  $\mu^2 x^2 + y^2 = 1$ , но при изотропном трении. Линиями тока будут прямые, ортогональные контуру, поэтому линией ветвления течения будет отрезок прямой, соединяющей фокусы эллипса, поверхность  $z(x, y)$  — линейчатая поверхность равного ската (песчаная насыпь). Качественное различие решений очевидно.

2) *Упрочняющийся материал*. Одно из основных скалярных определяющих соотношений теории пластических течений записываются в виде  $\sigma_u = \Phi(v_u, e_u, T, p, \mu_k)$ . Будем рассматривать материалы и процессы, когда влиянием давления можно пренебречь, роль параметров структуры также несущественна, а температура постоянна по толщине слоя и достаточно плавно меняется по области течения, так что не возникают области застоя. Если тепловыделением и конвективным переносом тепла можно пренебречь, то  $T$  — известная функция координат и времени.

Выше было показано, что в процессах течения тонких слоев с хорошей точностью можно принять  $v_u = -\alpha dh/(hdt)$ ,  $e_u = \alpha \ln(h_0/h)$ , где  $\alpha$  — числовой множитель порядка единицы. Теперь последовательно рассматриваем возможные варианты:

— толщина слоя не зависит от координат,  $\tau_m = m\sigma_u$  — известная функция координат и времени, задача решается изложенными выше методами;

— в «холодных» изотермических процессах  $\sigma_u = \Phi(e_u)$ , поэтому приходим к первому основному варианту задачи;

— если толщина слоя и температура не зависят от координат, то задача решается методами аналогии с песчаной насыпью.

Во всех остальных случаях температура и параметры упрочнения зависят от кинематики течения, поэтому для решения задачи необходимо привлекать полную систему уравнений.

3) *Винклеровское основание*. В системе (2.12), (2.13) примем для функции влияния  $H$  выражение в виде  $\delta$ -функции:  $H(x - x', y - y') = k\delta(x - x', y - y')$ ; из (2.13) при этом получим

$$w = k(\varkappa_0 + \varkappa_1 z), \quad (2.21)$$

а из (2.12) будем иметь

$$|\text{grad } z|^2 = (1 + k\kappa_0 + k\kappa_1 z)^{-2} \equiv [\tau(z)]^{-2}, \quad z(x_0, y_0) = 0.$$

Введем обобщенное давление формулой

$$P = \int_0^z \tau(\zeta) d\zeta, \quad P(x_0, y_0) = 0, \quad (2.22)$$

оно, как следует из предыдущего соотношения, определяется уравнением и граничным условием

$$|\text{grad } P|^2 = 1, \quad P(x_0, y_0) = 0,$$

и потому равно  $s$  — расстоянию, которое отсчитывается от контура вдоль прямолинейной линии тока, ортогональной контуру. Из (2.22) имеем

$$P = \frac{1}{2k\kappa_1} [(1 + k\kappa_0 + k\kappa_1 z)^2 - (1 + k\kappa_0)^2] = s,$$

отсюда находим

$$k(\kappa_0 + \kappa_1 z) = w = [2k\kappa_1 s + (1 + k\kappa_0)^2]^{1/2} - 1.$$

Обозначим  $s_0$  — точку на линии ветвления течения, максимально удаленную от контура, тогда

$$w_{max} = w(s_0) = [2k\kappa_1 s_0 + (1 + k\kappa_0)^2]^{1/2} - 1. \quad (2.23)$$

Воспользуемся методом последовательных приближений; положим  $w^{(0)} = 0$ , тогда

$$|\text{grad } z^{(0)}|^2 = 1, \quad z^{(0)}(x_0, y_0) = 0,$$

поэтому получаем  $z^{(0)} = s$ . Из (2.21) находим  $w^{(1)}$

$$w^{(1)} = k(\kappa_0 + \kappa_1 z^{(0)}) = k(\kappa_0 + \kappa_1 s)$$

отсюда  $w_{max}^{(1)} = w^{(1)}(s_0) = k(\kappa_0 + \kappa_1 s_0)$ . Видно, что эти выражения получаются как главные члены в разложении (2.23) по параметру основания  $k$ .

Последующие построения проведем для круговой области  $x_0^2 + y_0^2 = 1$ ,  $s_0 = 1$ . Давление в первом приближении находится из уравнения

$$\frac{dz^{(1)}}{ds} = \frac{1}{1 + w^{(1)}} = \frac{1}{k(\varkappa_0 + \varkappa_1 s)}, \quad z^{(1)}(0) = 0,$$

отсюда находим  $z^{(1)} = 1/(k\varkappa_1) \ln(1 + \varkappa_1 s/\varkappa_0)$ . Перемещение  $w^{(2)}$  находится по (2.21)

$$w^{(2)} = k(\varkappa_0 + \varkappa_1 z^{(1)}) = K\varkappa_0 + \ln\left(1 + \frac{\varkappa_1 s}{\varkappa_0}\right),$$

последующие приближения вычисляются простыми квадратурами.

Положим для примера  $k\varkappa_0 = 1/(10\sqrt{3})$ ,  $k\varkappa_1 = 0,7$ , тогда последовательно получим  $w_{max}^{(1)} = 0,758$ ,  $w_{max}^{(2)} = 0,556$ ,  $w_{max}^{(3)} = 0,614$ ; точное значение находится из (2.23):  $w_{max} = 0,59$ . Как видим, последовательность  $w^{(k)}$  быстро сходится, второе приближение отличается от точного значения на 6%.

4) *Сжатие полосы.* Рассмотрим течение в полосе  $\{|x| \leq l, |y| < \infty\}$ ; если размеры тел инструмента велики по сравнению с  $l$ , то их приближенно можно считать упругими полупространствами. В этом случае функция жесткости имеет вид

$$H(x, x') = -(\delta_1 + \delta_2) \ln |x' - x| + c,$$

здесь  $\delta_{1,2} = 2(1 - \mu_{1,2}^2)/(\pi E_{1,2})$ ,  $E_{1,2}$ ,  $\mu_{1,2}$  — модули Юнга и коэффициенты Пуассона материала инструмента.

В рассматриваемом случае

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \pm \frac{2\tau_s}{h_1 + w}, \quad p(\pm l) = \lambda\sigma_s \quad (2.24)$$

через  $h_1$  обозначено значение толщины слоя на краях  $x = \pm l$ , поэтому  $w(\pm l) = 0$ . Запишем выражение для  $w(x)$ , проинтегрируем его один раз по частям, учтем (2.24) и граничное условие для  $w$  и введем, как и раньше, безразмерные координаты и про-

гиб  $w$ ; получим в результате

$$\begin{aligned}
 w(x) &= \int_{-l}^l H(x, x') p(x') dx' = \\
 &= \lambda_0 [\Gamma(x, 1) - 2(1 - \ln 2)] + \lambda_1 \int_0^1 \Gamma(x, x') \frac{dx'}{1 + w(x')}, \\
 \Gamma(x, x') &= 2x' - x' \ln|x'^2 - x^2| - x (\ln|x' + x| - \ln|x' - x|), \\
 \lambda_0 &= \frac{\lambda(\delta_1 + \delta_2)l\sigma_s}{h_1}, \quad \lambda_1 = \frac{2(\delta_1 + \delta_2)l^2\sigma_s}{\sqrt{3}h_1^2}.
 \end{aligned} \tag{2.25}$$

Уравнение (2.25) — это нелинейное интегральное уравнение Гаммерштейна; его решение может быть получено методом последовательных приближений, который, как нетрудно установить, сходится при не слишком обременительных ограничениях на параметры задачи. Так, достаточным условием сходимости будет неравенство  $\lambda_1 < 0,75$ ; если, для примера,  $\mu_{1,2} = 0,3$ ,  $E_1 = E_2 = E$ ,  $\sigma_s/E \cong 10^{-3}$ , то из приведенного неравенства получим  $l/h_1 \lesssim 25$ , что характерно для достаточно тонких слоев.

Вычислим первое приближение  $w^{(1)}(x)$ , положив под интегралом в (2.25)  $w = 0$  и, для определенности,  $\lambda = 1$ ; будем иметь ( $\lambda'_0 = \lambda_0/\lambda$ )

$$\begin{aligned}
 \frac{w^{(1)}(x)}{\lambda'_0} &= (1 + 2\alpha) \ln 4 + 2\alpha x^2 \ln x - [1 + \alpha(1 + x)](1 + x) \times \\
 &\times \ln(1 + x) - [1 + \alpha(1 - x)](1 - x) \ln(1 - x), \quad \alpha = \frac{l}{\sqrt{3}h_1}.
 \end{aligned}$$

Максимального значения  $w^{(1)}$  достигаем при  $x = 0$

$$w_{max}^{(1)} = w^{(1)}(0) = \lambda'_0(1 + 2\alpha) \ln 4.$$

Нетрудно оценить максимум разности  $w^{(1)} - w^{(2)}$ ; из (2.25)

имеем по теореме о среднем

$$\begin{aligned} w^{(1)}(x) - w^{(2)}(x) &= \lambda_1 \int_0^1 \Gamma(x, x') \left( 1 - \frac{1}{1 + w^{(1)}(x')} \right) dx' = \\ &= \lambda_1 \int_0^1 \Gamma(x, x') \frac{w^{(1)}(x') dx'}{1 + w^{(1)}(x')} \leq \lambda_1 w_{cp}^{(1)} \int_0^1 \Gamma(x, x') dx' \cong 1,2 \lambda_1 w_{cp}^{(1)}. \end{aligned}$$

при  $l/h_1 = 15$  и прежних значениях остальных параметров,  $\lambda_1 = 0,15$ , поэтому  $w^{(1)} - w^{(2)} \leq 0,18 w_{cp}^{(1)}$ ;  $w_{max}^{(1)} = 0,43$ ,  $w_{cp}^{(1)} \cong 0,22$  и окончательно  $w^{(1)} - w^{(2)} \lesssim 0,04$ , что указывает на быструю сходимость метода приближений.

В случае, когда заранее известно, что  $|w(x)|^2 \ll 1$ , можно положить  $(1 + w(x))^{-1} \cong 1 - w(x)$ , и тогда (2.25) приводится к уравнению Фредгольма второго рода, решение которого находится хорошо разработанными методами.

### §3. Течение плоского слоя — кинематика.

В предыдущих разделах предполагалось, что область течения фиксирована или известна в любой момент времени; в большинстве процессов течения, однако, область известна лишь в начальный момент, в последующие моменты она должна быть определена из полной системы уравнений. Эту задачу, которую назовем задачей о растекании, мы рассмотрим в данном параграфе. Изложение начнем с основного случая изотермического течения несжимаемого материала по жестким поверхностям с изотропным трением.

**1<sup>0</sup> Уравнение растекания.** Представим себе, что слой пластического материала в начальный момент времени занимает в плоскости  $xu$  некоторую область  $S_0$  с контуром  $\Gamma_0$ , уравнение которого  $y = \varphi_0(x) = \varphi(x, 0)$ . Толщина слоя, равная  $h_0(x, y)$  в начальный момент, изменяется по известному закону  $h = h(x, y, t)$ , соответственно этому слой растекается, принимая к моменту  $t$  форму области  $S$  с контуром  $\Gamma$ :  $y = \varphi(x, t)$ . Наша задача — определить функцию  $\varphi(x, t)$ ; в дальнейшем будем полагать, что  $\varphi$  имеет непрерывные производные третьего порядка.

Обозначим  $F(x, y, t) \equiv y - \varphi(x, t) = 0$  — неявное уравнение контура в момент  $t$ ; из условия, что оно справедливо и в момент

времени  $t + \Delta t$  при  $\Delta t \rightarrow 0$ , найдем

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \bar{v} \operatorname{grad} F = 0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial t} = -u \frac{\partial \varphi}{\partial x} + v, \quad (3.1)$$

здесь  $\bar{v} = u, v$  — вектор скорости частиц, расположенных в момент  $t$  на контуре.

Единичный вектор нормали к контуру определяется соотношением:  $\bar{n}^0 = \operatorname{grad} F / |\operatorname{grad} F|$ , нормальная составляющая вектора скорости частиц, расположенных на контуре, равна  $v_n = \bar{v} \cdot \bar{n}^0$ ; вычисления с учетом (3.1) приводят к соотношению

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = v_n \left[ 1 + \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 \right]^{1/2}. \quad (3.2)$$

Вычисление скорости  $v_n$  может быть проведено на основе следующих соображений. В предыдущем параграфе было показано, что линии тока задачи течения находятся из дифференциального уравнения Эйлера-Лагранжа

$$hy'' + (1 + y'^2) \left( \frac{\partial h}{\partial y} - \frac{\partial h}{\partial x} y' \right) = 0, \quad (3.3)$$

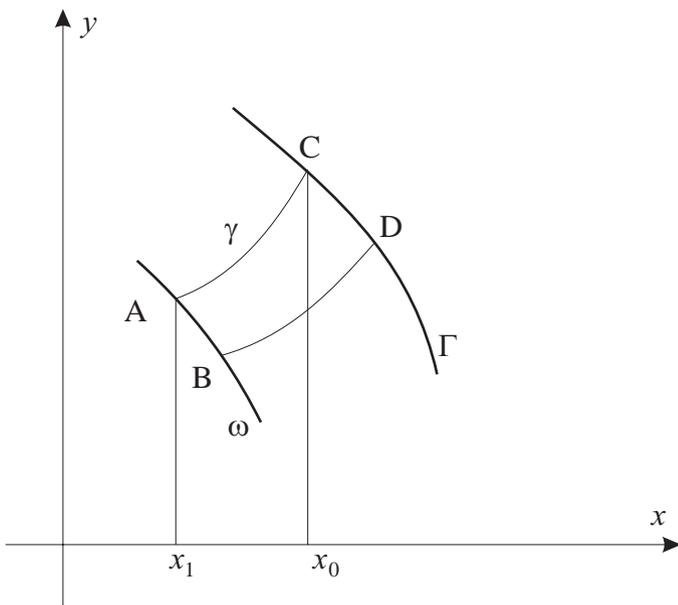
его решение  $y = f_1(x, \alpha, \beta)$  зависит от двух параметров, которые определяются граничными условиями ( $x_0, y_0$  — точка контура)

$$\varphi(x_0, t) = f_1(x_0, \alpha, \beta), \quad \varphi'(x_0, t) f_1'(x_0, \alpha, \beta) = -1.$$

Как видим, линия тока вполне определяется точкой контура, через которую она проходит, поэтому ее уравнение примем в виде

$$y = f(x, x_0, t) \quad (3.4)$$

Внутри области течения, как было установлено, существует линия ветвления течения  $\omega$ , на которой  $\bar{v} = 0$ ; линия тока, следовательно, начавшись на контуре, заканчивается на линии ветвления. Картина течения в момент  $t$  изображена на рис. 4:  $AC$  — линия тока (3.4),  $BD$  — соседняя линия тока, уравнение которой  $y_1 = f(x, x_0 + \Delta x_0, t) = f(x, x_0, t) + f'_{x_0}(x, \tilde{x}_0, t) \Delta x_0$ , при этом  $x_0 \leq \tilde{x}_0 \leq x_0 + \Delta x_0$ . Теперь можно записать уравнение сохранения массы в элементарной полоске толщиной  $h(x, y, t)$ ,



Ôëã 4

ограниченной соседними линиями тока  $AC$  и  $BD$ , дугой контура  $CD$  и дугой  $AB$  линии ветвления  $\omega$ ; уравнение будет иметь вид

$$\iint_{\sigma} (\rho v)_{\nu} d\sigma = 0, \quad (3.5)$$

здесь  $\sigma$  — боковая поверхность выделенной полосы,  $\nu$  — внешняя нормаль к ней.

Примем во внимание, что  $v_{\nu} = 0$  на линиях тока  $AC$  и  $BD$ , на  $AB$  (часть  $\omega$ ), а также на «нижней» поверхности слоя; на его «верхней» поверхности  $v_{\nu} = \partial h / \partial t$ . С учетом сказанного и с точностью до величины высшего порядка малости по сравнению с  $\Delta x_0$  из (3.5) получим

$$\int_{x_1}^{x_0} f'_{x_0}(x, \tilde{x}_0, t) \frac{\partial h}{\partial t} dx = v_n h(x_0, y_0, t) \frac{\Delta s_0}{\Delta x_0},$$

здесь  $\Delta s_0$  — длина дуги  $CD$ . Перейдем в этом равенстве к пределу  $\Delta x_0 \rightarrow 0$  (при этом  $\tilde{x}_0 \rightarrow x_0$ ) и поменяем обозначения  $x_0 \rightarrow x$ ,  $y_0 \rightarrow y = \varphi(x, t)$ ; с учетом (3.2) будем иметь

$$\int_{x_1}^x \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial h}{\partial t} d\xi = v_n h(x, y, t) \frac{ds_0}{dx} = \frac{\partial \varphi}{\partial t} h(x, y, t). \quad (3.6)$$

Подразумевается, что в левой части этого равенства уравнение линии тока имеет вид  $y = f(\xi, x, t)$ , а значения толщины берутся вдоль линии тока  $h = h(\xi, f(\xi, x, t), t)$ ; в правой части толщина вычисляется на контуре  $h = h(x, \varphi(x, t), t)$ .

Уравнение (3.6) вместе с начальным условием  $\varphi(x, 0) = \varphi_0(x)$  определяет контур области в моменты  $t > 0$ , т.е. решает поставленную задачу. Отметим, однако, что решить в общем виде уравнение (3.3) не представляется возможным, поэтому нижний предел интегрирования  $x_1$  в (3.6) также в общем случае не определен.

Рассмотрим класс задач, когда заранее известно, что линия совпадает с некоторым отрезком (конечным или полубесконечным) оси  $x$ ; это области, симметричные относительно оси  $x$ . В

этом случае абсцисса  $x_1$  находится из простого уравнения

$$f(x_1, x_0, t) = 0; \quad (3.7)$$

в примерах, которые будут рассмотрены ниже, решение уравнения (3.3) записывается в аналитическом виде.

В простейшем варианте  $h = h(t)$  линии тока совпадают с внутренними параметрами к контуру, поэтому решение (3.3) имеет вид

$$f(x, x_0, t) = \frac{x_0 - x}{\varphi'(x_0, t)} + \varphi(x_0, t),$$

из (3.7) находится  $x_1$

$$x_1 = x_0 + \varphi(x_0, t)\varphi'(x_0, t),$$

вычислим еще производную  $\partial f/\partial x_0$

$$\frac{\partial f}{\partial x_0} = \frac{(x - x_0)\varphi''(x_0, t)}{[\varphi'(x_0, t)]^2} + \frac{1 + [\varphi'(x_0, t)]^2}{\varphi'(x_0, t)}.$$

Изменив, как сказано выше, обозначения и подставив найденные выражения в (3.6), получим после несложных вычислений

$$\frac{\partial h}{\partial t} \left[ \varphi + \varphi \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} \varphi^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right] = -h \frac{\partial \varphi}{\partial t}.$$

Обозначим  $\tau = \ln(h_0/h)$ ; при монотонном изменении толщины  $h$  от начального значения  $h_0$  параметр  $\tau$  (степень деформации; здесь удобнее для нее ввести именно это обозначение) монотонно возрастает от нуля, поэтому его можно принять в качестве параметра времени. Из последнего уравнения после этого получим

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \varphi + \varphi \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} \varphi^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}, \quad (3.8)$$

вместе с начальным условием  $\varphi(x, 0) = \varphi_0(x)$  это уравнение составляет задачу Коши для функции  $\varphi(x, \tau)$ .

Другой вариант полного решения задачи — это случай, когда  $h = H(t)(1 + \alpha x)$ ; это значит, что слой сжимается между

плоскими плитами, которые сближаются, поворачиваясь вокруг шарнира, совпадающего с прямой  $x^0 = -1/\alpha$ . Последующие выкладки будут справедливы, если точки области, занятой слоем, удовлетворяют условию  $x > x^0$ . Из (3.3) находим линии тока как двухпараметрическое семейство окружностей

$$(y - \beta)^2 + \left(x + \frac{1}{\alpha}\right)^2 = R^2,$$

центры которых лежат на прямой  $x = x^0 = -1/\alpha$ . Из условий на контуре (ортогональность) и (3.7) находим параметры  $\beta$ ,  $R$  и точку  $x_1$

$$\beta = \varphi(x_0, t) - \varphi'(x_0, t) \left(x_0 + \frac{1}{\alpha}\right), \quad x_1 = -\frac{1}{\alpha} + \sqrt{R^2 - \beta^2},$$

$$R = \left(x_0 + \frac{1}{\alpha}\right) \left[1 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_0}\right)^2\right]^{1/2}.$$

Проделаем преобразования, аналогичные предыдущим, и подставим все в (3.6); получим интересный и весьма неожиданный результат

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \tau} = \varphi + \varphi \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \frac{1}{2} \varphi^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2},$$

как видим, это уравнение тождественно с (3.8), однако здесь  $\tau = \ln(H_0/H)$ ,  $H_0$  — начальное значение толщины слоя в точке  $x = 0$ .

Области рассматриваемого вида и толщина слоя симметричны относительно оси  $x$ , поэтому целесообразно сделать замену  $z = \varphi^2$ ; уравнение (3.8) при этом преобразуется в следующее

$$\frac{\partial z}{\partial \tau} = 2z + \frac{1}{4} \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \frac{1}{2} z \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}. \quad (3.9)$$

Отметим одно общее свойство решений уравнений (3.8) или (3.9) — их асимптотическое поведение при  $\tau \rightarrow \infty$  (так называемая предельная теорема): если  $S_0$  — замкнутая область, то  $z = \varphi^2 = R^2(\tau) - x^2 + O(\tau^{-1})$  при  $\tau \rightarrow \infty$ , т.е.  $S$  отличается как угодно мало от круговой.

2<sup>0</sup>. **Решения подобия.** Приведем примеры точных решений уравнения (3.9).

1)  $z = a(\tau)x + b(\tau)$  — двухпараметрическое семейство парабол. Подставив в (3.9) и приравняв коэффициенты при одинаковых степенях  $x$ , придем к системе

$$\frac{da}{d\tau} = 2a, \quad \frac{db}{d\tau} = 2b + \frac{1}{4}a^2,$$

решение которой имеет вид

$$a = a_0 e^{2\tau}, \quad b = \left[ b_0 + \frac{a_0^2}{8} (e^{2\tau} - 1) \right] e^{2\tau},$$

здесь  $a_0, b_0$  — начальные значения параметров. Окончательно получим

$$z = \varphi^2 = \frac{h_0^2}{h^2} \left[ a_0 x + b_0 + \frac{a_0^2}{8} \left( \frac{h_0^2}{h^2} - 1 \right) \right].$$

2)  $z = A(\tau)x^2 + B(\tau)$ ; если  $A > 0, B < 0$ , то мы имеем семейство гипербол, если  $A < 0, B > 0$  — семейство эллипсов; в этом случае  $|A| < 1$ , поскольку  $|A| = b^2/a^2$ , где  $a, b$  — полуоси эллипса. Поступая аналогично предыдущему, получим систему

$$\frac{dA}{dt} = 2A(1 + A), \quad \frac{dB}{dt} = B(2 + A),$$

и ее решение

$$A = \frac{C_1 e^{2\tau}}{1 - C_1 e^{2\tau}}, \quad B = \frac{C_2 e^{2\tau}}{(1 - C_1 e^{2\tau})^{1/2}}.$$

Постоянные интегрирования находятся из начальных данных

$$C_1 = \frac{A_0}{1 + A_0}, \quad C_2 = \frac{B_0}{(1 + A_0)^{1/2}}.$$

Если контур — гипербола, то  $A_0 > 0, 0 < C_1 < 1$ ; решение существует до момента  $\tau_1$ , пока  $A$  и  $B$  конечны

$$\tau < \tau_1 = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + A_0}{A_0}.$$

Полуоси гиперболы

$$a = \left| \frac{B}{A} \right|^{1/2} = \left| \frac{C_2}{C_1} \right|^{1/2} (1 - C_1 e^{2\tau})^{1/4}; \quad b = |B|^{1/2} = \frac{|C_2|^{1/2} e^\tau}{(1 - C_1 e^{2\tau})^{1/4}}$$

ведут себя так, что  $a \rightarrow 0$ ,  $b \rightarrow \infty$  при  $\tau \rightarrow \infty$ ; значит граница области течения асимптотически приближается к оси  $y$ .

В случае, когда область — эллипс, имеем  $-1 < A_0 < 0$ , поэтому  $-1 < C_1 < 0$ ,  $C_2 > 0$ . Решение существует в любой момент времени, с ростом  $\tau$  полуоси эллипса становятся практически одинаковыми

$$\tau \gg 1, \quad a \cong b = \left( \frac{C_2}{|C_1|^{1/2}} \right)^{1/2} e^{\tau/2} = \left( \frac{a_0 b_0 h_0}{h} \right)^{1/2},$$

здесь  $a_0$ ,  $b_0$  — начальные значения полуосей. Последнее равенство по существу выражает предельную теорему: при  $\tau \rightarrow \infty$   $\pi a_0 b_0 h_0 \cong \pi R^2 h$ , где  $R$  — радиус предельной окружности.

**3<sup>0</sup>. Возможная неустойчивость течения.** Предельная теорема и последний из примеров предыдущего пункта дают основание предполагать, что течения, описываемые уравнением (3.9), будут устойчивыми в том смысле, что малые отклонения от начальной формы контура с течением времени будут сглаживаться. Это наводит на мысль, что неустойчивость течения может проявиться в двухсвязных областях; подтверждением тому служит приводимый пример.

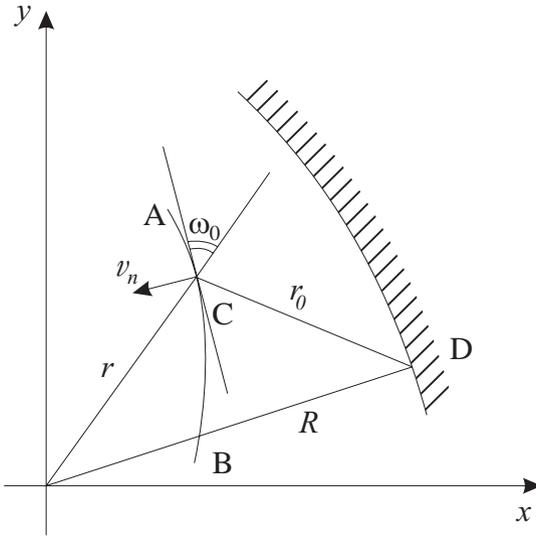
Рассмотрим при условии  $h = h(t)$  течение в кольцевой области, ограниченной непроницаемым контуром  $r = R = \text{const}$  (рис.5). В невозмущенном течении внутренний контур  $r = a(\tau)$  находится просто из условия несжимаемости

$$R^2 - a^2 = (R^2 - a_0^2)e^\tau, \quad \frac{da}{d\tau} = \frac{a^2 - R^2}{2a}, \quad (3.10)$$

здесь  $a_0$  — начальное значение внутреннего радиуса.

Пусть будет  $AB$  — контур в возмущенном течении; запишем его уравнение в полярной системе координат  $r$ ,  $\Theta$ :

$$r = \varphi(\Theta, \tau) = a(\tau) + \varphi_1(\Theta, \tau),$$



Ôëã 5

при этом  $|\varphi_1| \ll a$ ,  $\varphi_1(\Theta, 0) = \varphi_0(\Theta)$ . Кривизна дуги  $AB$  выражается известной формулой

$$\frac{1}{R_1} = \frac{\varphi^2 + 2\varphi'^2 - \varphi\varphi''}{(\varphi^2 + \varphi'^2)^{3/2}},$$

здесь штрихи обозначают производные по  $\Theta$ . Рассматривая, как и раньше, течение между соседними линиями тока (это нормали  $CD$  к дуге  $AB$ ), из условия сохранения массы найдем

$$v_n = \frac{d\tau}{dt} r_0 \left( 1 + \frac{1}{2} \frac{r_0}{R_1} \right).$$

С другой стороны, аналогично уравнению (3.2), можно получить

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} = v_n \frac{(\varphi^2 + \varphi'^2)^{1/2}}{\varphi}, \quad (3.11')$$

сравнивая два последних выражения, приходим к уравнению

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\tau} = - \frac{(\varphi^2 + \varphi'^2)^{1/2} r_0}{\varphi} \left( 1 + \frac{1}{2} \frac{r_0}{R_1} \right). \quad (3.11)$$

Осталось определить  $r_0$ ; из очевидных геометрических соображений имеем  $r_0^2 + 2rr_0 \sin \omega + r^2 = R^2$ ,  $\operatorname{tg} \omega = \varphi/\varphi'$ , откуда находим

$$r_0 = ([R^2(\varphi^2 + \varphi'^2) - \varphi^2\varphi'^2]^{1/2} - \varphi^2)(\varphi^2 + \varphi'^2)^{-1/2}.$$

Подставим все найденные выражения в (3.11); получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial \tau} = & \frac{\varphi^2 - [R^2(\varphi^2 + \varphi'^2) - \varphi^2\varphi'^2]^{1/2}}{\varphi} \times \\ & \times \left[ 1 + \frac{[R^2(\varphi^2 + \varphi'^2) - \varphi^2\varphi'^2]^{1/2} - \varphi^2}{2} \frac{\varphi^2 + 2\varphi'^2 - \varphi\varphi''}{(\varphi^2 + \varphi'^2)^2} \right]. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Проведем обычную процедуру линеаризации этого уравнения при очевидных оценках:  $\varphi \approx a$ ,  $\varphi' \approx \varphi'_1$ ,  $|\varphi'_1/\varphi| \approx |\varphi'_1/a| \ll 1$ ,  $|\varphi'/R| \ll 1$ ; подставив это в (3.12) с учетом (3.10), придем к уравнению

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial \tau} = \frac{1}{2}\varphi_1 \left( 1 + \frac{R^2}{a^2} \right) + \frac{1}{2}\varphi_1'' \left( \frac{R}{a} - 1 \right)^2.$$

Периодическое по  $\Theta$  решение этого уравнения примем в виде  $\varphi_1^{(n)} = T_n(\tau) \cos n\Theta$ , для  $T_n(\tau)$  будем иметь

$$\frac{dT_n}{d\tau} = \frac{1}{2} \left[ 1 + \frac{R^2}{a^2} - n^2 \left( \frac{R}{a} - 1 \right)^2 \right] T_n \equiv B(\tau, n) T_n(\tau),$$

откуда

$$T_n(\tau) = T_{n0} \exp \left( \int_0^\tau B(s, n) ds \right), \quad (3.13)$$

здесь  $T_{n0}$  — начальная амплитуда возмущения

Первый и основной вывод из полученного решения состоит в следующем. При  $n = 1$  выражение  $B(s, 1) = 2R/a$  под знаком интеграла положительно, следовательно, рассматриваемое течение всегда неустойчиво в том смысле, что по крайней мере в начальные моменты времени тенденция в развитии течения такова, что возмущения растут со временем.

Более высокие формы возмущений  $n > 1$  могут развиваться аналогичным образом, однако это накладывает ограничение на размеры области: должно быть  $B(\tau, n) > 0$ . Например, при  $n = 2$  из  $B > 0$  следует  $R/a < (4 + \sqrt{7})/3$ . Заметим, однако, что амплитуды таких возмущений хотя и растут со временем, но гораздо медленнее, чем амплитуда основного неустойчивого течения  $n = 1$ ; такое заключение следует из отношения

$$\frac{Tn}{T1} = \frac{T_{n0}}{T_{10}} \exp\left(\int_0^\tau [B(s, n) - B(s, 1)] ds\right),$$

в котором  $B(\tau, n) - B(\tau, 1) = -(n^2 - 1)(R/a - 1)^2 < 0$ .

В дальнейшем будет показано, что полученный результат обобщается на случай сжимаемого материала, когда его плотность зависит от всестороннего давления.

**4<sup>0</sup>. Сжимаемый материал.** В этом разделе рассмотрим задачу о растекании областей специального вида (как и выше) и только в случае  $h = h(t)$ . Картина течения (см. рис.4) трансформируется так, что линии тока  $AC$  и  $BD$  станут прямыми, ортогональными контуру, отрезок  $AB$  линии ветвления ляжет на ось  $x$ . Запишем условие сохранения массы в элементарной полоске  $ABDC$

$$\int_{\Omega} \frac{\partial \rho}{\partial t} d\Omega + \int_{\Sigma} (\rho \bar{v})_{\nu} d\Sigma = 0,$$

рассуждая аналогично предыдущему, перепишем это уравнение в форме

$$\int_0^a \frac{\partial \rho}{\partial t} \left(1 - \frac{a - \xi}{R}\right) d\xi + \frac{1}{h} \frac{\partial h}{\partial t} \int_0^a \rho \left(1 - \frac{a - \xi}{R}\right) d\xi + \rho_{\Gamma} v_n = 0, \quad (3.14)$$

здесь  $a = AC$ ,  $R$  — радиус кривизны контура,  $\rho_{\Gamma}$  — значение плотности материала в точках контура,  $\xi$  — расстояние, отсчитываемое вдоль  $AC$  от точки  $A$ .

Гидростатическое давление в слое  $\sigma$  связано с давлением слоя на плиты  $p$  соотношением  $\sigma = -p + 2\sigma_s/\sqrt{3}$ , поэтому можно считать  $\rho = \rho(\sigma) = \rho_0 f(\alpha p)$ , где  $\alpha$  — нормирующий множитель:

$\alpha^{-1} \cong 2\tau_s l/h_0$ . Для давления имеем  $p = \lambda\sigma_s + 2\tau_s(a - \xi)/h$ , поэтому функцию  $f(\alpha p)$  разложим в ряд Тейлора в окрестности точки  $\alpha\lambda\sigma_s$ :

$$\begin{aligned} \rho &= \rho_0 \left[ f(\alpha\lambda\sigma_s) + f'(\alpha\lambda\sigma_s)\zeta + \frac{1}{2}f''(\alpha\lambda\sigma_s)\zeta^2 + \dots \right] \equiv \\ &\equiv \rho_\Gamma (1 + b_1\zeta + b_2\zeta^2 + \dots), \end{aligned}$$

здесь обозначено  $\rho_\Gamma = \rho_0 f(\alpha\lambda\sigma_s)$ ,  $\zeta = 2\alpha\tau_s(\alpha - \xi)/h \equiv \omega(a - \xi)$ . Вычислим  $\partial\rho/\partial t$  с учетом равенства  $\partial a/\partial t = v_n$ ; примем во внимание геометрические соотношения  $a = -\varphi/\cos\Theta = \varphi(1 + \varphi'^2)^{1/2}$ ,  $a/R = \varphi\varphi''(1 + \varphi'^2)^{-1}$ ; удержим в разложении для  $\rho$  два первых слагаемых (хорошее приближение для начальных стадий процесса течения); отнесем  $\varphi$  и  $x$  к характерному размеру области  $l$ . После указанных преобразований внесем все нужные выражения в (3.14), получим в результате

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\varphi\varphi'' + \varphi(1 + \varphi'^2) - \frac{\partial\varphi}{\partial\tau} &= \omega_0 b_1 \varphi \frac{\partial\varphi}{\partial\tau} (1 + \varphi'^2)^{1/2} \left[ 1 + \frac{\varphi\varphi''}{2(1 + \varphi'^2)} \right] \\ \omega_0 &= 2\alpha\tau_s l/h = (2\alpha\tau_s l/h_0) \exp\tau \equiv \bar{\omega} \exp\tau. \end{aligned}$$

Заменой  $\varphi^2 = z$  последнее уравнение преобразуется

$$zz'' + \frac{1}{2}z'^2 + 4z - 2\frac{\partial z}{\partial\tau} = \bar{\omega} b_1 e^\tau \frac{\partial z}{\partial\tau} \left[ 1 + \frac{2zz'' - z'^2}{2(4z + z'^2)} \right] (4z + z'^2)^{1/2}. \quad (3.15)$$

Если сжимаемость материала порядка 0,1, то задача имеет малый параметр  $\bar{\omega}b_1 = \delta_1$ , и ее решение может быть построено методом последовательных приближений. Представим (3.15) в форме  $L(z) = \delta_1 R(z)$ , положим в нулевом приближении  $L(z_0) = 0$  и последовательно  $L(z_n) = \delta_1 R(z_{n-1})$ ,  $n = 1, 2, \dots$ . Вопрос о сходимости метода мы не рассматриваем.

*Растекание эллипса.* Как пример исследуем начальную стадию процесса растекания слоя, контуром которого в начальный момент является эллипс  $\varphi_0^2(x) = A_0 - B_0 x^2$  с полуосями  $a_0^2 = A_0/B_0$ ,  $b_0^2 = A_0$ . Нулевое приближение  $z_0 = A(\tau) - B(\tau)x^2$  получено раньше

$$\begin{aligned} A(\tau) &= C_2 e^{2\tau} (1 + C_1 e^{2\tau})^{-1/2}, & B(\tau) &= C_1 e^{2\tau} (1 + C_1 e^{2\tau})^{-1}, \\ C_1 &= B_0 (1 - B_0)^{-1}, & C_2 &= A_0 (1 - B_0)^{-1/2}. \end{aligned}$$

Уравнение первого приближения найдем из (3.15)

$$\begin{aligned} & \frac{\partial z_1}{\partial \tau} - 2z_1 - \frac{1}{2}z_1 z_1'' - \frac{1}{4}z_1'^2 = \\ & = -\delta A^{3/2} e^\tau (2 - B - 2\beta x^2) [2(1 - \beta x^2)^{1/2} - B(1 - \beta x^2)^{-1/2}], \end{aligned} \quad (3.16)$$

здесь  $\delta = \bar{\omega} b_1/2$ ,  $\beta = B(1 - B)/A$ . Правая часть в (3.16) — иррациональная функция  $x$ , отсюда заключаем, что в моменты  $\tau > 0$  область не будет эллиптической.

Решение (3.16) можно представить в форме ряда

$$z_1 = a(\tau) - b(\tau)x^2 + \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-1}x^{2n} \quad (3.17)$$

поскольку выражения  $(1 - \beta x^2)^{\pm 1/2}$  можно разложить в быстро сходящиеся ряды. Действительно,  $\beta x^2 \approx \beta x_0^2 = 1 - B < 1$ , где  $x_0$  соответствует значению  $z_0 = 0$ ; но  $1 - B$  — это квадрат эксцентриситета, а он быстро стремится к нулю с ростом  $\tau$ .

Разложим правую часть (3.16) в ряд, подставим в левую часть (3.17) и приравняем коэффициенты при одинаковых степенях  $x^2$ ; придем к последовательности уравнений

$$\begin{aligned} & \frac{da}{d\tau} - a(2 - b) = -\delta e^\tau A^{3/2} (2 - B)^2, \\ & \frac{db}{d\tau} - 2b(1 - b) + 6aa_1 = -\delta e^\tau BA^{1/2} (2 - B)(1 - B) \left( 3 + \frac{1}{2}B \right), \\ & \frac{da_1}{d\tau} - a_1(2 - 11b) - 15aa_2 = \\ & = \delta e^\tau A^{1/2} \left[ \frac{1}{4}\beta A(2 - B)(1 + 3B) - B(1 - B)(2 + B) \right], \\ & \quad \vdots \\ & \quad \vdots \end{aligned}$$

Ограничимся оценками влияния сжимаемости на параметры  $a(\tau)$ ,  $b(\tau)$  первые два уравнения системы запишем в виде (отбросим слева  $a_1$ )

$$\frac{da}{d\tau} - a(2 - b) = -\delta f_1(\tau), \quad \frac{db}{d\tau} - 2b(1 - b) = -\delta f_2(\tau). \quad (3.18)$$

Второе из них — это уравнение Риккати; подстановками  $b = (\partial u / \partial \tau) / (2u)$ ,  $u = v \exp \tau$  оно приводится к уравнению стандартного вида

$$\frac{d^2 v}{d\tau^2} - f(\tau)v = 0, \quad f(\tau) = 1 - 2\delta f_2(\tau),$$

приближенное решение которого может быть найдено методом ВКБ. По известной процедуре находится  $v(\tau)$ , затем  $u(\tau)$

$$u(\tau) = C_3 e^{\tau+g(\tau)} + C_4 e^{\tau-g(\tau)}, \quad g(\tau) = \int \sqrt{f(\tau)} d\tau,$$

после этого очевидным образом восстанавливается  $b\tau$ )

$$b(\tau) = \frac{C_1(1 + \sqrt{f})e^{2g} + (1 - \sqrt{f})}{2(1 + C_1 e^{2g})},$$

постоянная интегрирования  $C_1$  находится из начального условия  $b(0) = B_0$ . При известной функции  $b(\tau)$  первое из уравнений (3.18) для  $a(\tau)$  — линейное первого порядка, его решение записывается в квадратурах. Оценки для начальных моментов времени получим разложением по параметру  $\delta$

$$b(\tau) \cong \frac{\alpha_1 e^{2\tau}}{1 + \alpha_1 e^{2\tau}} + \delta \frac{f_2(\tau)(1 - \alpha_1 e^{2\tau})}{2(1 + \alpha_1 e^{2\tau})},$$

$$a(\tau) \cong \varphi_1(\tau) \left( \alpha_2 - \delta \int f_1(\tau) e^{2\tau} d\tau \right), \quad \varphi_1(\tau) = \frac{e^{2\tau}}{(1 + \alpha_1 e^{2\tau})^{1/2}},$$

как видно, учет сжимаемости естественно приводит к уменьшению полуосей растекающегося эллипса.

*Влияние сжимаемости на неустойчивость течения.* Вернемся к задаче, которая была рассмотрена в п. 3<sup>0</sup>, и обобщим полученный там результат на случай линейно-сжимаемого материала  $\rho = \rho_0(1 - \alpha\sigma)$ . Для всестороннего давления имеем  $\sigma = \lambda_1 \tau_s - 2\tau_s(r_0 - \xi)/h$ , поэтому  $\rho = \rho_\Gamma(1 + \bar{\omega}(r_0 - \xi))$ ,  $\rho_\Gamma = \rho_0(1 - \alpha\lambda_1 \tau_s)$ ,  $\bar{\omega} = 2\alpha\rho_0 \tau_s / (h\rho_\Gamma)$ . Уравнение сохранения массы в элементарной полоске, заключенной между соседними линиями тока (см. рис. 5), приводит к уравнению

$$v_n = r_0 \frac{d\tau}{dt} \left( 1 + \frac{1}{2} \frac{\rho_0}{R_1} \right) \left[ 1 + \bar{\omega} r_0 \left( 1 + \frac{1}{2} \frac{r_0}{R_1} \right) \right]^{-1}.$$

соотношение (3.11') между  $\varphi$  и  $v_n$  остается в силе; сравнивая его с последним уравнением, получим

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \tau} \left[ 1 + \bar{\omega} r_0 \left( 1 + \frac{1}{2} \frac{r_0}{R_1} \right) \right] = - \frac{r_0 (\varphi^2 + \varphi'^2)^{1/2}}{\varphi} \left( 1 + \frac{1}{2} \frac{r_0}{R_1} \right). \quad (3.19)$$

Пусть будет  $\varphi = \varphi_0(\tau)$  — невозмущенное течение; оно, как это следует из (3.19) при  $R = \varphi_0(\tau) + r_0$  и  $R_1 = \varphi_0$ , описывается уравнением

$$\frac{d\varphi_0}{d\tau} = - \frac{R^2 - \varphi_0^2}{2\varphi_0} \left( 1 + \bar{\omega} \frac{R^2 - \varphi_0^2}{2\varphi_0} \right)^{-1}. \quad (3.20)$$

Положим теперь  $\varphi(\tau) = \varphi_0(\tau) + \varphi_1(\Theta, \tau)$ , подставим это вместе с (3.20) в (3.19) и проведем выкладки аналогично предыдущему; получим уравнение в вариациях

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial \tau} = \frac{1}{2} \left[ \varphi_1 \left( 1 + \frac{R^2}{\varphi_0^2} \right) + \varphi_1'' \left( \frac{R}{\varphi_0} - 1 \right)^2 \right] \left( 1 + \bar{\omega} \frac{R^2 - \varphi_0^2}{2\varphi_0} \right)^{-2}.$$

Как видно, это уравнение отличается от соответствующего уравнения для несжимаемого материала только положительным множителем справа, зависящим от невозмущенного решения. Следовательно, свойства возмущенного течения, обнаруженные в п. 3<sup>0</sup>, остаются справедливыми и в рассматриваемом случае. Полученный результат справедлив для наиболее сильной — линейной сжимаемости; можно полагать поэтому, что он будет справедлив и для случаев произвольной зависимости плотности от давления.

Подчеркнем еще раз, что неустойчивость здесь понимается как тенденция в развитии течения в начальные моменты времени, поскольку уравнения (3.12) и (3.19) справедливы только для выпуклого внутреннего контура.

## Некоторые нерешенные вопросы

Теория пластического течения, изложенная в первой главе, в совокупности с современными методами численно-аналитического исследования составляет надежный фундамент для изуче-

ния и конструирования большинства технологических процессов обработки давлением. Очевидно, однако, что развитие новых прогрессивных технологий невозможно без совершенствования теории. Выделяются основные направления: а) в сравнительно монотонных процессах или в процессах сложного нагружения (с переходами, промежуточными отжигами и т.п.), но для материалов с несущественным упрочнением и нечувствительных к деформационной анизотропии — достаточным будет усовершенствование скалярных соотношений; б) в общем случае необходимы новые подходы к описанию и тензорных определяющих соотношений; это — основная проблема теории пластичности при сложных нагружениях и больших деформациях, и ее мы затрагивать не будем; в) Новые формулировки начально-краевых задач и развитие общих методов исследования.

1<sup>0</sup>. Сложные физические явления в материале, сопровождающие процесс развитого формоизменения (изменение параметров зернистости, разрыхление, накопление поврежденности и т.п.), не могут, вообще говоря, описываться математическими объектами простой природы (например, скаляром, хотя бы и функционалом процесса). Поэтому вводятся тензоры структурного состояния как функционалы процесса и соответствующие меры  $M_k$  как инварианты этих тензоров; предельному значению  $M_k = 1$  отвечает достижение критического состояния соответствующим структурным параметром (предельное значение размера зерна  $d^*$  при СП-деформировании, исчерпание запаса пластичности и др.). Вопрос о зависимости функционалов пластичности  $\sigma_u = F_1^t\{\dots\}$ ,  $\rho = F_2^t\{\dots\}$  (см. § 1, гл. I) от мер  $M_k$  является принципиально важным, однако исследован еще недостаточно. Что ответ неоднозначен, свидетельствуют примеры: состояние СП определяется условием  $d < d^*$ , поэтому структурный параметр  $d$  входит в  $F_1^t$ ; с другой стороны, на сегодня нет оснований к тому, чтобы число параметров в  $F_1^t$  вводить меры запаса пластичности.

В работе [10] этот вопрос рассматривается в достаточно общей постановке. Вводится тензорная мера повреждаемости как функционал процесса, полагая, что она входит в число аргументов, определяющих тензор напряжений. Приводится термодинамический анализ этой связанной системы соотношений, рас-

смаатриваются частные случаи.

2<sup>0</sup>. Вопросам моделирования и выявлению параметров и критериев подобия в процессах развитого формоизменения уделяется, к сожалению, неоправданно мало внимания, хотя роль их в постановке и трактовке результатов экспериментов (особенно промышленных) очевидна. Этот тезис подкрепляется еще и следующим соображением. Анализ полной системы уравнений, как уже отмечалось выше, приводит к однозначному выводу о практической невозможности точно моделировать процесс развитого формоизменения в рамках геометрического подобия. Это тем более верно, если необходимо учитывать влияние структурных параметров. Такая ситуация неизбежно приводит к необходимости проверить модельный эксперимент в условиях, лишь приближенно соответствующих натурным. Возникает, таким образом, математическая проблема приближенного моделирования; какой величины и по отношению к каким параметрам натурального процесса будет допущена погрешность при пересчете с модельного при невыполнении части критериев подобия. Возможна и другая постановка: какими из критериев подобия можно пренебречь, чтобы погрешность в определении заданных характеристик натурального процесса была минимальной или находилась бы в пределах допуска. Отмеченные задачи, насколько нам известно, математически не сформулированы и ждут своих исследователей.

Задачу можно поставить и таким образом: упрощения полной системы уравнений неизотермического течения провести не за счет пренебрежения чем-то, а за счет оптимального аналитического представления экспериментально определяемых функций в определяющих соотношениях. В случае, когда речь идет о зависимости сдвигового сопротивления от температуры и скорости деформации, существенные результаты [11,12] получены применением методов группового анализа к основной системе уравнений и ее упрощенным вариантам; исследования в этом направлении необходимо продолжить.

3<sup>0</sup>. Теория течения в тонких слоях, изложенная в предыдущей главе, построена в главном приближении: касательные напряжения опущены как малые в сравнении с нормальными. Очевидно, однако, что вблизи точек резкого изменения кривиз-

ны контура это может привести к заметному искажению поля скоростей, вплоть до появления линий, вдоль которых это поле разрывно. Для исследования процессов, в которых кинематика существенна (точность изготовления детали), необходимо разработать теорию в следующем приближении; существенные математические трудности, связанные с сильной нелинейностью задачи, вполне окупаются новыми результатами.

4<sup>0</sup>. Имеются разные варианты теории пластичности анизотропных тел; все они, однако, за редкими частными исключениями, построены для случая малых деформаций, когда можно считать, что тип анизотропии не меняется. Очевидно, для процессов развитого формоизменения это не так. Представляется, что при построении теории пластичности анизотропных тел для случая больших деформаций конструктивной будет предель о том, что носителями механических свойств материала, в том числе и класса анизотропии, являются материальные волокна, выделенные в теле в начальный момент процесса. Понятны трудности, возникающие на пути построения такой теории; прежде всего — это теория эксперимента по выявлению скалярных функционалов, определяющих свойства материала. Обсуждаемая проблема — одна из наиболее сложных, но и важных в МДТТ (А.А.Ильюшин оказался прав, когда полвека назад говорил, что построить анизотропную пластичность гораздо сложнее, чем пластичность при сложных нагружениях); тем более интересно заниматься ее разрешением.

## Список литературы

- [1] А.А.Ильющин. Пластичность. — Изд. АН СССР, М., 1963.
- [2] А.А.Ильющин. Механика сплошной среды. — Изд. МГУ, 1990.
- [3] И.А.Кийко. Пластическое течение металлов.//Научные основы прогрессивной техники и технологии. Сб. тр. под ред. Лымаркина, М., Машиностроение, 1985, 376 с.
- [4] Пластичность и разрушение.// Под ред. В.Л.Колмогорова. М., Металлургия, 1977.
- [5] В.Л.Колмогоров. Механика обработки металлов давлением — Изд. УрГТУ–УПИ, Екатеринбург, 2001.
- [6] И.А.Кийко. Теория пластического течения (учебное пособие) — Изд. МГУ, 1978.
- [7] Р.А.Васин, Ф.У.Еникеев. Введение в механику сверхпластичности. — АН Респ. Башкортостан, Уфа, 1998.
- [8] Д.В.Георгиевский. Устойчивость процессов деформирования вязкопластических тел. — УРСС, М., 1998.
- [9] И.А.Кийко. К теории пластического течения по деформируемым поверхностям. — Сб. Прочность и пластичность, М., Наука, 1971.
- [10] И.А.Кийко, Н.А.Морозов. Методы теории пластичности в ОМД.— Сб. Пластическая деформация легких и специальных сплавов, М., Металлургия, 1978.
- [11] И.А.Кийко. К постановке задачи о течении тонкого слоя в условиях теплообмена. — Сб. Пластическая деформация легких и специальных сплавов, М., Металлургия, 1982.
- [12] И.А.Кийко. Теория пластического течения (в приложении к процессам ОМД). — Сб. Вопросы прочности и пластичности, Изд. МГУ, 1984.

- [13] И.А.Кийко. Моделирование процессов пластического течения. — Сб. Проблемы механики деформируемого твердого тела, Калинин, 1986.
- [14] И.А.Кийко. Технология обработки давлением и новые постановки задач в теории пластичности. — Тр. IX Конференции по прочности и пластичности, т. III, М., 1996.
- [15] А.А.Ильющин. Об одной теории длительной прочности. — МТТ, Инж. журнал, 1967, вып. 3, с. 21-35.
- [16] В.А.Огородников. Оценка деформируемости металлов при обработке давлением. — Кузнечно-штамповочное производство, 1977, е 3, с. 15-18.
- [17] И.А.Кийко, В.А.Кадымов. Обобщение задачи Л.Прандтля о сжатии полосы. — Вестник Моск. ун-та, Сер. Математика. Механика. е , 2003.
- [18] Б.Е.Победря. О моделях повреждаемости реономных сред. — Изв. РАН, МТТ, е 4, 1998, с. 128-148.
- [19] Э.А.Леонова. Групповая классификация и инвариантные решения уравнений течения и теплообмена вязкопластической среды. — ЖПМТФ, 1966, е 4, с. 3-18.
- [20] Э.А.Леонова. Инвариантные свойства уравнений термовязкопластичности с неполной информацией о свойствах среды. — Сб. "Упругость и неупругость", М., Изд. МГУ, 1993, с. 55-87.



Вязко-пластическое течение материалов. Физико-математические основы технологии обработки давлением. М., Издательство Центра прикладных исследований при механико-математическом факультете МГУ, 132 стр.

*Оригинал макет изготовлен издательской группой кафедры теории упругости механико-математического факультета МГУ*

Подписано в печать 04.01.2003 г.  
Формат 60×90 1/16. Объем 8,4 п.л.  
Заказ 12 Тираж 250 экз.

---

Издательство ЦПИ при механико-математическом факультете МГУ

г. Москва, Воробьевы горы.

Лицензия на издательскую деятельность ИД № 04059 от 20.02.2001 г.

---

Отпечатано на типографском оборудовании механико-математического факультета и Франко-русского центра им. А. М. Ляпунова







