где v_C — скорость центра масс тела, $\vec{\omega}$ — вектор угловой скорости, J_C — тензор момента инерции тела относительно его главных центральных осей, введенный матрицей (13.3).

Д17. Кинетическая энергия произвольного движения

Пример решения

Задача. Найти кинетическую энергию однородной прямоугольной пластинки массой $m = 6$ кг, закрепленной шарнирно на трех стержнях параллельно плоскости xy (рис. 182). Задана скорость вершины D: $v_{Dx} = 12$ м/с, $v_{Dy} = 2$ м/с, $v_{Dz} = 0$. Размеры на рисунке даны в метрах.

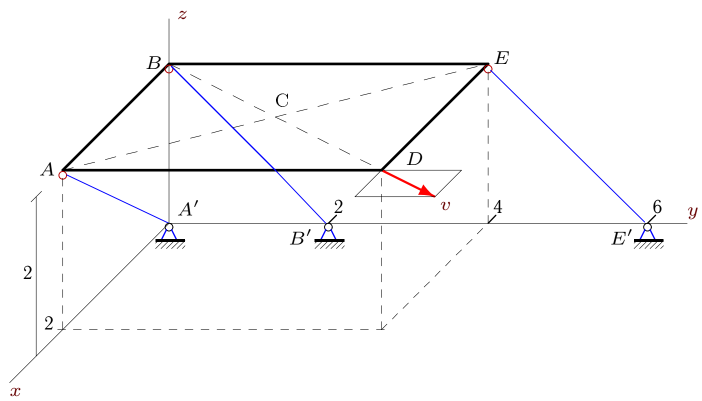

Рис. 182

Решение

Кинетическую энергию будем вычислять по формуле (14.1). Найдем угловую скорость пластины и скорость ее центра масс. Запишем три векторных уравнения, связывающие скорости точек пластины. Точку D с известной скоростью примем за полюс.

$$\begin{aligned} \vec{v}_A &= \vec{v}_D + \vec{\omega} \times \overrightarrow{DA}, \\ \vec{v}_B &= \vec{v}_D + \vec{\omega} \times \overrightarrow{DB}, \\ \vec{v}_E &= \vec{v}_D + \vec{\omega} \times \overrightarrow{DE}. \end{aligned} \tag{14.2}$$

Вектора скоростей концов стержней, шарнирно закрепленных на неподвижном основании, перпендикулярны стержням. Выразим это в виде равенства нулю следующих скалярных произведений

$$\begin{aligned} \vec{v}_A \cdot \overrightarrow{A'A} = 0, \\ \vec{v}_B \cdot \overrightarrow{B'B} = 0, \\ \vec{v}_E \cdot \overrightarrow{E'E} = 0. \end{aligned} \tag{14.3}$$

Радиусы-векторы, входящие в эти уравнения, имеют вид

$$\overrightarrow{DA} = \begin{bmatrix} 0 \\ -4 \\ 0 \end{bmatrix}, \ \overrightarrow{DB} = \begin{bmatrix} -2 \\ -4 \\ 0 \end{bmatrix}, \ \overrightarrow{DE} = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\overrightarrow{A'A} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \ \overrightarrow{B'B} = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}, \ \overrightarrow{E'E} = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Таким образом, имеем три векторных уравнения (14.2) и три скалярных уравнения (14.3), т.е. всего 12 уравнений для четырех векторных неизвестных $\vec{v}_A$, $\vec{v}_B$, $\vec{v}_E$, $\vec{\omega}$. Перепишем эту систему в скалярной форме с учетом данных задачи. Некоторые уравнения простые и сразу дают и ответы:

$$\begin{aligned} &v_{Ax} = 12 + 4\,\omega_z, && v_{Ay} = 2, && v_{Az} = -4\,\omega_x, \\ &v_{Bx} = 12 + 4\,\omega_z, && v_{By} = 2 - 2\,\omega_z, && v_{Bz} = -4\,\omega_x + 2\,\omega_y, \\ &v_{Ex} = 12, && v_{Ey} = 2 - 2\,\omega_z, && v_{Ez} = 2\,\omega_y. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2\,v_{Ax} + 2\,v_{Az} = 0, \\ -2\,v_{By} + 2\,v_{Bz} = 0, \\ -2\,v_{Ey} + 2\,v_{Ez} = 0. \end{aligned}$$

Получим решение системы уравнений (скорости в м/с, угловые скорости — в $с^{-1}$):

$$\begin{aligned} &\omega_x = 0,\ \omega_y = 4,\ \omega_z = -3, \\ &v_{Ax} = 0,\ v_{Ay} = 2,\ v_{Az} = 0, \\ &v_{Bx} = 0,\ v_{By} = 8,\ v_{Bz} = 8, \\ &v_{Ex} = 12,\ v_{Ey} = 8,\ v_{Ez} = 8. \end{aligned}$$

Скорость центра масс пластинки, совпадающего с ее геометрическим центром C, можно найти двумя способами. Один способ — непосредственное вычисление по формуле Эйлера через скорость полюса D, с использованием найденной угловой скорости пластинки

$$\vec{v}_C = \vec{v}_D + \vec{\omega} \times \overrightarrow{DC}.$$

Другой способ значительно проще. Пользуясь линейным характером распределения скоростей в твердом теле, скорость точки C найдем как полусумму скоростей A и E или B и D (в м/с):

$$\begin{aligned} v_{Cx} &= (v_{Ax} + v_{Ex})/2 = 12/2 = 6, \\ v_{Cy} &= (v_{Ay} + v_{Ey})/2 = (2+8)/2 = 5, \\ v_{Cz} &= (v_{Az} + v_{Ez})/2 = 8/2 = 4. \end{aligned} \tag{14.4}$$

Момент инерции параллелепипеда [1] (рис. 183) в осях x, y, z с размерами соответственно l_x, l_y, l_z относительно оси x, проходящей через его центр масс, имеет вид

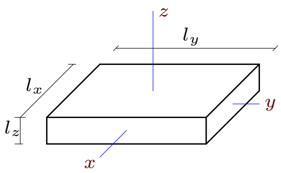

Рис. 183

$$J_x = m(l_y^2 + l_z^2)/12.$$

Моменты относительно других осей получаются круговой перестановкой индексов

$$J_y = m(l_x^2 + l_z^2)/12, \; J_z = m(l_x^2 + l_y^2)/12.$$

В частном случае тонкой пластинки ($l_z = 0$) имеем следующую матрицу тензора инерции

$$J_C = \begin{pmatrix} \dfrac{ml_y^2}{12} & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{ml_x^2}{12} & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{m(l_x^2 + l_y^2)}{12} \end{pmatrix}.$$

В рассматриваемом примере при $l_x = 2$ см, $l_y = 4$ см, $l_z = 0$. Получим матрицу тензора инерции (в кгм^2)

$$J_C = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}.$$

Пользуясь значениям скорости $\vec{v}_C$ (14.4), вычисляем первое слагаемое в (14.1)

$$\frac{mv_C^2}{2} = \frac{6(36 + 25 + 16)}{2} = 231 \text{ Нм}.$$

[1] См. также (13.11), с. 335 и таблицу 3, с. 382.

Во втором слагаемом сначала вычисляем произведение

$$J_C\vec{\omega} = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 8 \\ -30 \end{bmatrix},$$

затем скалярное произведение

$$\vec{\omega} \cdot J_C\vec{\omega} = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 8 \\ -30 \end{bmatrix} = 122 \text{ Нм}.$$

Окончательно получаем кинетическую энергию пластины

$$T = 231 + 122/2 = 292 \text{ Нм}.$$

Глава 15

Колебания

Одно из наиболее важных приложений теоретической механики в практике связано с исследованием явления колебаний. В этой главе представлены задачи на колебания точки и системы. Отдельно рассмотрены задачи для систем с двумя степенями свободы, для которых применение методики Лагранжа составления уравнения движения наиболее эффективно.

Д18. Свободное колебание точки

Условия задач

Груз массой m расположен на гладкой горизонтальной плоскости и скреплен с тремя пружинами, жесткости которых заданы. Определить частоту собственных колебаний груза. Массой пружин пренебречь.