Глава 3

ДИНАМИКА

3.1. Кинетическая энергия системы

При вычислении кинетической энергии системы тел потребуется формула для момента инерции цилиндра радиусом R относительно его оси $J = mR^2/2$, выражение для момента инерции тела через его радиус инерции $J = mi^2$ и три основные формулы для кинетической энергии.

1. Вращательное движение: $T = J_z\omega^2/2$, где J_z — момент инерции тела относительно оси вращения, ω — угловая скорость.

2. Поступательное движение: $T = mv^2/2$, где v — скорость какой-либо точки тела.

3. Плоское движение:

$$T = mv_{\mathrm{C}}^2/2 + J_{\mathrm{C}}\omega^2/2, \tag{3.1}$$

где v_{C} — скорость центра масс тела, J_{C} — момент инерции тела относительно оси, проходящей через центр масс.

В частном случае, кинетическая энергия однородного цилиндра массой m радиусом R, катящегося без проскальзывания по какой-либо неподвижной поверхности (рис. 127), имеет вид

$$T = 3mv_{\mathrm{C}}^2/4, \tag{3.2}$$

что следует из (3.1) при $\omega = v_{\mathrm{C}}/R$, $J_{\mathrm{C}} = m_{\mathrm{C}}R^2/2$. К этому случаю относится и движение цилиндра, падающего вертикально с разматыванием навитой на его обод нити, один конец которой закреплен ("качение по нити", рис. 128) и вращение цилиндра вокруг оси на его ободе ("качение по точке", рис. 129).

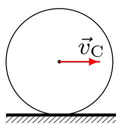

Рис. 127

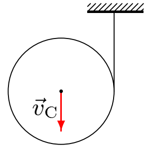

Рис. 128

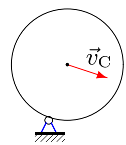

Рис. 129

Задача 29. Механическая система состоит из грузов A, E, блоков B, C и цилиндра D. Блок B вращается вокруг неподвижной оси, блок C и цилиндр катятся по поверхности. Груз A движется вертикально (рис. 130). Нить, прикрепленная к оси цилиндра D, навита на меньший обод блока. Нить к грузу A вертикальная, остальные горизонтальные. Даны радиусы ободов и радиусы инерции блоков: $R_B = 5$ см, $r_B = 4$ см, $i_B = 3$ см, $R_C = 8$ см, $r_C = 2$ см, $i_C = 6$ см. Массы тел $m_A = 7$ кг, $m_B = 25$ кг, $m_C = 8$ кг, $m_D = 16$ кг, $m_E = 50$ кг. Найти приведенную массу системы в формуле $T = \mu v_A^2/2$, где v_A — скорость груза.

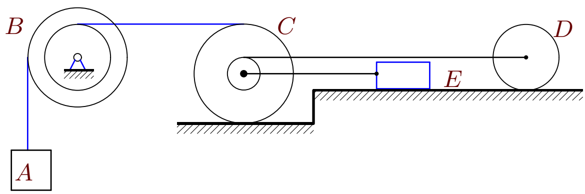

Рис. 130

Решение

Грузы A и E совершают поступательное движение, блок B — вращательное, блок C и цилиндр D — плоское. Предполагается, что груз A опускается и нити натянуты. Выписываем выражения для соответствующих кинетических энергий

$$\begin{aligned} &T_A = m_A v_A^2/2, \quad T_B = J_B\omega_B^2/2, \quad T_C = m_C v_C^2/2 + J_C\omega_C^2/2, \\ &T_D = (3/4)m_D v_D^2, \quad T_E = m_E v_E^2/2, \end{aligned} \tag{3.3}$$

где v_D и v_C — скорости осей цилиндра и блока соответственно. Кинетическая энергия всей системы имеет вид

$$T = T_A + T_B + T_C + T_D + T_E. \tag{3.4}$$

Переходя от одного тела к другому, последовательно выражаем все

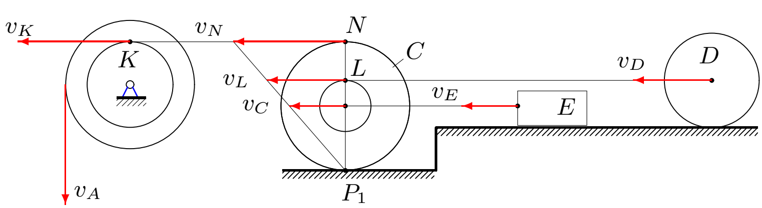

Рис. 131

кинематические величины, входящие в (3.3), через скорость груза A. Используем метод мгновенных центров скоростей [1]. Выражаем угловую скорость блока B через v_A: $\omega_B = v_A/R_B$. Отсюда легко получить скорость точки K на внутреннем ободе блока B: $v_K = \omega_B r_B = v_A r_B/R_B$. Нить нерастяжима, следовательно $v_N = v_K$. Мгновенный центр скоростей P_1 блока C находится в точке касания поверхности. Получаем угловую скорость блока: $\omega_C = v_N/(2R_C) = v_A r_B/(2R_B R_C)$. Определяем скорость центра масс блока

$$v_C = V_N/2 = \omega_C R_C = v_A r_B/(2R_B)$$

и скорость точки L меньшего обода блока

$$v_L = \omega_C(R_C + r_C) = v_A r_B(R_C + r_C)/(2R_B R_C).$$

Очевидно, опять же по причине нерастяжимости нити, $v_L = v_E$.

Таким образом, все кинематические величины, входящие в кинетическую энергию системы выражены через v_A. Для моментов инерций имеем формулы $J_B = i_B^2 m_B$, $J_C = i_C^2 m_C$. Кинетическая энергия (3.3) цилиндра D вычислена с использованием формулы для момента инерции однородного диска: $J_D = m_D R_D^2/2$. Подставляем скорости, угловые скорости и моменты инерции в (3.3). С учетом числовых данных получаем

$$T_A = 7\frac{v_A^2}{2}, \quad T_B = \frac{m_B\, {i_B}^2\, v_A^2}{2\, {R_B}^2} = \frac{25\cdot 9\, v_A^2}{2\cdot 25} = 9\frac{v_A^2}{2},$$

$$T_C = \frac{m_C\, {r_B}^2\, ({i_C}^2 + {R_C}^2)\, v_A^2}{8\, {R_B}^2\, {R_C}^2} = \frac{8\cdot 16\,(36+64)\, v_A^2}{8\cdot 25\cdot 64} = v_A^2,$$

$$T_D = \frac{3\, m_D\, v_A^2\, (R_C + r_C)^2 {r_B}^2}{16\, R_B^2 R_C^2} = \frac{3\cdot 16\, v_A^2 (8+2)^2\cdot 16}{16\cdot 25\cdot 64} = 3v_A^2,$$

$$T_E = \frac{m_E\, v_A^2\, {r_B}^2}{8\, {R_B}^2} = \frac{50\cdot\ v_A^2\, 16}{8\cdot 25} = 4v_A^2.$$

Отсюда имеем приведенные массы тел: $\mu_A = 7$ кг, $\mu_B = 9$ кг, $\mu_C = 2$ кг, $\mu_D = 6$ кг, $\mu_E = 8$ кг. Приведенная масса всей системы, согласно (3.4), равна $\mu = 7 + 9 + 2 + 6 + 8 = 32$ кг.

Заметим, что радиус цилиндра D по условию не задан и для решения не потребовался.

Maple-программа для решения этой задачи дана на с. 300.

---

[1] Метод мгновенных центров скоростей удобно применять при определении *модулей* скоростей, как, например здесь, где в кинетическую энергию входят только квадраты скоростей. Там, где требуются *знаки проекций*, например, в задачах на принцип возможных перемещений (задача 30) или при составлении уравнения Лагранжа 2-го рода (задачи 31 – 40), лучше использовать метод кинематических графов.