

Подставим скорости и угловые скорости (3.31) – (3.33) в выражения для кинетических энергий (3.30). Получим

$$\begin{aligned} T_1 &= \frac{m_1 v_1^2}{2} = \frac{v_1^2}{2}, & T_2 &= \frac{\rho_2 m_2 v_1^2}{2 r_2^2} = 25 \frac{v_1^2}{2}, \\ T_3 &= \frac{R_2^2 m_3 v_1^2}{6 r_2^2} = \frac{3 v_1^2}{2}, \\ T_4 &= \frac{43 R_2^2 m_4 v_1^2}{54 r_2^2} = \frac{43 v_1^2}{2}, \\ T_5 &= \frac{25 R_2^2 m_5 v_1^2}{54 r_2^2} = 25 \frac{v_1^2}{2}. \end{aligned}$$

Следовательно, приведенные массы тел системы (коэффициенты при $v_1^2/2$) равны $\mu_1 = 1$ кг, $\mu_2 = 25$ кг, $\mu_3 = 3$ кг, $\mu_4 = 43$ кг, $\mu_5 = 25$ кг. Суммарная приведенная масса $\mu = 1 + 25 + 3 + 43 + 25 = 97$ кг.

Задача 118*. Механическая система, состоящая из трех стержней, однородного цилиндра 1 и блока 2, движется под действием внешних сил (рис. 252). Дан радиус цилиндра $R_1 = 3.5$ см и радиусы блока $R_2 = 4$ см, $r_2 = 3$. Радиус инерции блока $\rho_2 = 3$ см. Массы тел: $m_1 = 2$ кг, $m_2 = 1$ кг, $m_3 = 3$ кг, $m_4 = 9$ кг, $m_5 = 9$ кг. Стержни считать однородными. Стержень 3 в данный момент вертикальный, 5 — горизонтальный, $\beta = 45^\circ$. Вычислить приведенную массу системы.

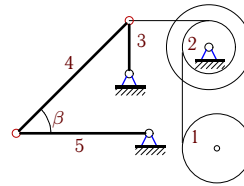


Рис. 252

Задача 119. Блок 1 и цилиндр 2 находятся в зацеплении. Груз 3 прикреплен к нерастяжимой нити, намотанной на внешний радиус блока (рис. 253). Даны массы $m_1 = 1$ кг, $m_2 = 2$ кг, $m_3 = 3$ кг и радиусы $R_1 = 40$ см, $r_1 = 30$ см, $\rho_1 = 20$ см. К грузу приложена сила $P = 3$ Н, к ободу цилиндра — сила $F = 4$ Н, к блоку — момент $M = 122$ Нм. Найти скорость, которую разовьет груз, переместившись из состояния покоя на расстояние $S = 40$ см.

Решение

Цилиндр и блок совершают вращательное движение, груз — поступательное. Кинетическая энергия системы складывается из кинетических энергий трех тел:

$$T = \frac{J_1 \omega_1^2}{2} + \frac{J_2 \omega_2^2}{2} + \frac{m_3 v^2}{2}, \quad (3.34)$$

где v — искомая скорость груза, J_1 и J_2 — моменты инерции блока и цилиндра. Выразим угловые скорости блока и цилиндра через v :

$$\omega_1 = v/R_1, \quad \omega_2 = \omega_1 r_1/R_2 = v r_1/(R_1 R_2). \quad (3.35)$$

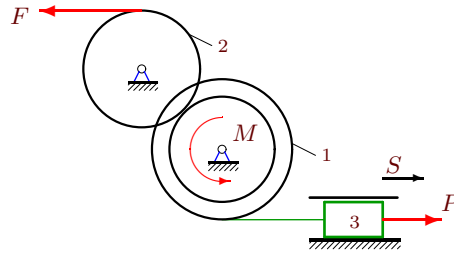


Рис. 253

Подставим эти выражения и значения моментов инерции $J_1 = m_1 \rho^2$, $J_2 = m_2 R_2^2/2$ в выражение (3.34)

$$T = \frac{v^2(2m_1 \rho^2 + m_2 r_1^2 + 2m_3 R_1^2)}{4R_1^2}.$$

С учетом числовых данных, получаем

$$T = \frac{61v^2}{32}.$$

Найдем работу внешних сил и момента, приложенных к системе на указанном перемещении. Силы тяжести тел 1, 2 работу не совершают, так как приложены к неподвижным точкам. Сила тяжести груза 3 перпендикулярна смещению, ее работа также равна нулю. Работа силы P , приложенной к грузу на перемещении S равна $A_P = PS$. Работа силы F равна $A_F = -FR_2\varphi_2$.

Эта работа отрицательная, так как сила вращает цилиндр против часовой стрелки, а вращение цилиндра вследствие смещения груза на расстояние S направлено в противоположную сторону — по часовой стрелке. Зная связь (3.35) угловых скоростей, интегрированием получаем связь между перемещениями

$$\varphi_2 = S r_1/(R_1 R_2).$$

Отсюда, суммарная работа имеет вид

$$A = A_P + A_F + A_M = S(P - F r_1/R_1 + M/R_1) = 122 \text{ Нм}.$$

По теореме об изменении кинетической энергии

$$T - T_0 = A.$$

В начальном состоянии система находилась в покое, и $T_0 = 0$. Получаем отсюда уравнение для определения скорости

$$61v^2 = 122 \cdot 32.$$

Находим скорость груза $v = \sqrt{64} = 8$ м/с.

Задача 120*. Механическая система состоит из двух блоков и двух грузов (рис. 254). Под действием сил тяжести система из состояния покоя приходит в движение. Качение блока D происходит без проскальзывания с коэффициентом трения качения $\delta = 3$ мм. Даны радиусы $r_C = 16$ см, $R_C = 31$ см, $r_D = 20$ см, $R_D = 28$ см, радиусы инерции $\rho_C = 30$ см, $\rho_D = 26$ см, массы $m_A = 28$ кг, $m_B = 6$ кг, $m_C = 10$ кг, $m_D = 4$ кг. Какую скорость приобретет груз A , переместившись на $S = 1$ м?

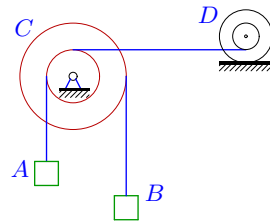


Рис. 254

3.3. Аналитическая механика

Принцип возможных перемещений утверждает, что равновесие механической системы с идеальными связями возможно тогда и только тогда, когда сумма элементарных работ всех активных сил на любых возможных перемещениях равна нулю

$$\sum_k \delta A(\vec{F}_k) = 0. \quad (3.36)$$

Уравнение Лагранжа 2-го рода ¹ для систем с s степенями свободы имеет вид

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i, \quad (3.37)$$

здесь T — кинетическая энергия системы, q_i — обобщенные координаты, Q_i — обобщенные силы, $i = 1, \dots, s$.

Задача 121. Механизм состоит из трех стержней, уголка, изогнутого под прямым углом, и цилиндра. Предполагается, что связи в механизме идеальные и стационарные. Механизм находится в равновесии под действием силы F и моментов $M_1 = 22$ Нм, $M_2 = 59$ Нм. Длины звеньев $OA = 6\sqrt{2}$ м, $AB = 7\sqrt{2}$ м, $AD = 12$ м, угол $\alpha = 45^\circ$. Стержни AD — горизонтальный, вертикальный. Уголок CB изогнут под прямым углом, длинная сторона его горизонтальна. Диск радиуса $R = 6$ м

¹Уравнение Лагранжа 1-го рода см. с. 151.