где A и B константы: $A = m_1R^2/2 + m_3a^2/3$, $B = 2a^2(3m_2 + m_3)$.

4. Находим обобщенную силу, вычисляя виртуальные мощности активных сил:

$$Q = \frac{1}{\dot\varphi}(\vec G_1 \cdot \vec v_A + \vec G_2 \cdot \vec v_C + \vec G_3 \cdot \vec v_D + \vec M \cdot \vec\omega_A + \vec F \cdot \vec v_C).$$

Горизонтальная плоскость, по которой катится цилиндр, и шарнир, на котором закреплен цилиндр 1, являются идеальными связями. Виртуальные мощности этих реакций равны нулю, и в выражение для Q эти силы не входят. Аналогично, не входит в обобщенную силу и сила трения, приложенная при отсутствии проскальзывания к неподвижной точке (точке касания поверхности) цилиндра 2. Учитывая выражения для векторов сил,

$$\vec G_i = (0,\ -m_ig,\ 0), i = 1...3,\ \vec F = (F,\ 0,\ 0),$$

момента $\vec M = (0,\ 0,\ M)$, выражение $\vec\omega_A = (0,\ 0,\ \dot\varphi)$ и соотношения (2), получаем в результате обобщенную силу:

$$Q = M - 0.5m_3ag\cos\varphi - 2aF\sin\varphi.$$

5. Находим частные производные,

$$\frac{\partial T}{\partial\dot\varphi} = \dot\varphi(A + B\sin^2\varphi), \quad \frac{\partial T}{\partial\varphi} = \frac{\dot\varphi^2}{2}B\sin 2\varphi,$$

и полную производную по времени

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot\varphi}\right) = \ddot\varphi(A + B\sin^2\varphi) + \dot\varphi^2 B\sin 2\varphi.$$

Записываем уравнение Лагранжа 2-го рода:

$$\ddot\varphi(A + B\sin^2\varphi) + 0.5\dot\varphi^2B\sin 2\varphi = M - 0.5m_3ag\cos\varphi - 2aF\sin\varphi.$$

Пример 2. Механическая система с одной степенью свободы обладает нелинейными кинематическими соотношениями (рис. 161). Кривошипно-кулисный механизм состоит из маховика 1, кулисы 2, двигателя со шкивом 3, катка 4 и штока 5. К шкиву 3 приложен момент двигателя $M_{\text{Д}z} = M_0 - k\omega_{3z}$. Каток своим внешним ободом катится без проскальзывания и без трения качения по горизонтальной поверхности. Внутренним ободом каток также без проскальзывания приводит в движение шток, к которому приложена полезная нагрузка, моделируемая силой $F_{\text{Н}x} = -\mu v_{5x}$. Трением пальца A в прорези кулисы 2 пренебрегаем. Шкив 3 считаем однородным цилиндром, момент инерции маховика 1 вместе с пальцем A, закрепленным на нем, равен $J_1 = 2.5$ кг м^2. Даны массы: $m_A = 1$ кг, $m_2 = 15$ кг, $m_3 = 10$ кг, $m_4 = 16$ кг, массу штока 5 считать равной нулю. Даны радиусы: $R_1 = 0.4$ м, $O_1A = r_1 = 0.1$ м, $R_3 = 0.3$ м, $r_4 = 0.2$ м, $R_4 = 0.41$ м; радиус инерции

$i_4 = 0.32$ м. Пусковой момент $M_0 = -30$ Нм; крутизна статической характеристики двигателя $k = 0.2$ Нмс; коэффициент сопротивления $\mu = 950$ Н с/м. Составить уравнение движения системы [1].

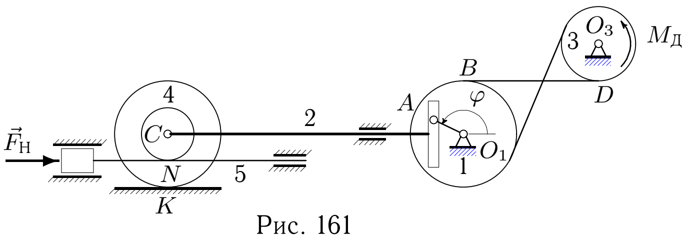

Рис. 161

Решение

1. Выбираем обобщенную координату φ — угол поворота шкива 1, отсчитываемый от горизонтальной оси x (направленной, как всегда, направо) против часовой стрелки.

2. Составляем кинематические графы системы:

$$O_1 \xrightarrow[\varphi]{r_1} A\,; \quad O_1 \xrightarrow[\pi/2]{R_1} B\,; \quad D \xrightarrow[\pi/2]{R_3} O_3\,; \quad K \xrightarrow[\pi/2]{R_4} C\,; \quad K \xrightarrow[\pi/2]{R_4 - r_4} N\,.$$

Точка K является точкой касания внешнего обода блока 4 неподвижной поверхности, проскальзывание отсутствует, поэтому $\vec{v}_K = 0$. Шток 5 касается внутреннего обода блока 4 в точке N, скорость штока $v_{5x} = v_{Nx}$. Получаем выражения для проекций скоростей:

$$\begin{aligned}
&v_{Ax} = -r_1\dot{\varphi}\sin\varphi, && v_{Ay} = r_1\dot{\varphi}\cos\varphi,\\
&v_{Bx} = -R_1\dot{\varphi}, && v_{Dx} = R_3\omega_{3z},\\
&v_{Cx} = -R_4\omega_{4z}, && v_{Nx} = v_{5x} = -(R_4 - r_4)\omega_{4z}.
\end{aligned} \tag{3}$$

Нить BD нерастяжимая, отсюда следует кинематическая связь: $v_{Dx} = v_{Bx}$. Вместе с (3) это дает $\omega_{3z} = -(R_1/R_3)\dot{\varphi}$, т.е. тела 3 и 1 вращаются в разные стороны. Так как шток 2 кулисы является жестким, то $v_{Ax} = v_{Cx}$. Отсюда находим угловую скорость блока 4 $\omega_{4z} = (r_1/R_4)\dot{\varphi}\sin\varphi$ и скорость штока $v_{5x} = -(R_4 - r_4)r_1/R_4\dot{\varphi}\sin\varphi$.

3. Вычисляем кинетическую энергию системы как сумму кинетических энергий четырех тел. Маховик 1 с моментом инерции J_1 и шкив 3 с моментом инерции $m_3R_3^2/2$ вращаются, каток 4 совершает плоское

[1] За основу задачи взято задание Д-5 из сборника [22].

движение, а кулиса 2 — поступательное:

$$T = T_1 + T_2 + T_3 + T_4 = \frac{J_1\dot{\varphi}^2}{2} + \frac{m_2(r_1\dot{\varphi}\sin\varphi)^2}{2} + \frac{m_3R_3^2}{2}\,\frac{(\dot{\varphi}R_1/R_3)^2}{2} + \\ + \frac{m_4(r_1\dot{\varphi}\sin\varphi)^2}{2} + \frac{m_4i_4^2(r_1/R_4\dot{\varphi}\sin\varphi)^2}{2}.$$

Для удобства вычислений представим кинетическую энергию в виде

$$T = \frac{\dot{\varphi}^2}{2}(A + B\sin^2\varphi), \tag{4}$$

где $A = J_1 + m_3R_1^2/2,\ B = m_2r_1^2 + m_4(i_4r_1/R_4)^2 + m_4r_1^2$.

4. Вычисляем обобщенную силу:

$$Q = \frac{1}{\dot{\varphi}}(\vec{G}_A \cdot \vec{v}_A + \vec{F}_{\text{Н}} \cdot \vec{v}_5 + \vec{M}_{\text{Д}} \cdot \vec{\omega}_3).$$

Учитывая выражения для векторов,

$$\begin{aligned} &\vec{G}_A = (0,\ -m_Ag,\ 0), && \vec{v}_A = (-r_1\dot{\varphi}\sin\varphi,\ r_1\dot{\varphi}\cos\varphi,\ 0),\\ &\vec{F}_{\text{Н}} = (-\mu v_{5x},\ 0,\ 0), && \vec{v}_5 = (-(R_4 - r_4)r_1/R_4\dot{\varphi}\sin\varphi,\ 0,\ 0),\\ &\vec{M}_{\text{Д}} = (0,\ 0,\ M_0 - k\omega_{3z}), && \vec{\omega}_3 = (0,\ 0,\ -(R_1/R_3)\dot{\varphi}),\end{aligned}$$

получаем в результате обобщенную силу, которую представляем в виде суммы $Q = Q_{\text{Н}} + Q_{\text{Т}} + Q_{\text{Д}}$, где $Q_{\text{Н}} = -\mu(r_1(R_4 - r_4)/R_4\sin\varphi)^2\dot{\varphi}$, $Q_{\text{Т}} = -m_Agr_1\cos\varphi$, $Q_{\text{Д}} = -(M_0 + k\dot{\varphi}R_1/R_3)R_1/R_3$.

5. Находим частные производные,

$$\frac{\partial T}{\partial\varphi} = 0.5\dot{\varphi}^2B\sin 2\varphi, \quad \frac{\partial T}{\partial\dot{\varphi}} = \dot{\varphi}(A + B\sin^2\varphi),$$

и полную производную по времени

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot{\varphi}}\right) = \ddot{\varphi}(A + B\sin^2\varphi) + \dot{\varphi}^2B\sin 2\varphi.$$

Записываем уравнение Лагранжа 2-го рода:

$$\ddot{\varphi}(A + B\sin^2\varphi) + 0.5\dot{\varphi}^2B\sin 2\varphi = Q_{\text{Т}} + Q_{\text{Н}} + Q_{\text{Д}}. \tag{5}$$

Полученное нелинейное дифференциальное уравнение движения системы может быть проинтегрировано численно (§ 17.2.).