Ладейный полином

Найти ладейный полином заданной доски.

$$\begin{array}{r|c|c|c|c|}
\hline
4 & \ast & & & \\ \hline
3 & \ast & \ast & \ast & \ast \\ \hline
2 & & \ast & \ast & \\ \hline
1 & & & & \ast \\ \hline
\multicolumn{1}{r}{} & \multicolumn{1}{c}{a} & \multicolumn{1}{c}{b} & \multicolumn{1}{c}{c} & \multicolumn{1}{c}{d}
\end{array}$$

Решение

По правилу суммирования представим исходную доску B_0 в виде суммы B_1 и B_1'. Доску B_1 получаем из B_0 исключением клетки $d3$, а доску B_1' — вычеркивая столбец и строку клеток, на пересечении которых располагалась исключенная клетка.

$$B_1 = \begin{array}{|c|c|c|c|}
\hline
\ast & & & \\ \hline
\ast & \ast & \ast & \cdot \\ \hline
& \ast & \ast & \\ \hline
& & & \ast \\ \hline
\end{array}, \qquad B_1' = \begin{array}{|c|c|c|c|}
\hline
\ast & & & \cdot \\ \hline
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \hline
& \ast & \ast & \cdot \\ \hline
& & & \cdot \\ \hline
\end{array}$$

Получаем $L(B_0) = L(B_1) + xL(B_1')$. Аналогично, исключая из доски B_1 клетку $a3$, получаем по правилу суммирования $L(B_1) = L(B_2) + xL(B_2')$.

$$B_2 = \begin{array}{|c|c|c|c|}
\hline
\ast & & & \\ \hline
\cdot & \ast & \ast & \\ \hline
& \ast & \ast & \\ \hline
& & & \ast \\ \hline
\end{array}, \qquad B_2' = \begin{array}{|c|c|c|c|}
\hline
\cdot & & & \\ \hline
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \hline
\cdot & \ast & \ast & \\ \hline
\cdot & & & \ast \\ \hline
\end{array}$$

В доске B_2 можно выделить три независимых доски (у них нет общих строк и столбцов).

$$B_3 = \begin{array}{|c|c|c|c|}
\hline
& & & \\ \hline
& \ast & \ast & \\ \hline
& \ast & \ast & \\ \hline
& & & \\ \hline
\end{array}, \qquad B_3' = \begin{array}{|c|c|c|c|}
\hline
\ast & & & \\ \hline
& & & \\ \hline
& & & \\ \hline
& & & \\ \hline
\end{array}, \qquad B_3'' = \begin{array}{|c|c|c|c|}
\hline
& & & \\ \hline
& & & \\ \hline
& & & \\ \hline
& & & \ast \\ \hline
\end{array}$$

Воспользуемся правилом умножения: $L(B_2) = L(B_3)L(B_3')L(B_3'')$. В итоге $L(B_0) = L(B_1) + xL(B_1') = L(B_2) + xL(B_2') + xL(B_1') = L(B_3)L(B_3')L(B_3'') + xL(B_2') + xL(B_1')$. Имеем

$$\begin{aligned}
&L(B_1') = L(B_2') = (1+x)(1+2x),\\
&L(B_3) = 1 + 4x + 2x^2,\\
&L(B_3') = L(B_3'') = 1 + x.
\end{aligned}$$

Ладейный полином приобретает вид

$$L(B_0) = (1+x)^2(1+4x+2x^2) + 2x(1+x)(1+2x) = 1 + 8x + 17x^2 + 12x^3 + 2x^4.$$

Таким образом, на данной доске можно расставить четыре неконфликтных ладьи двумя способами (коэффициент при x^4). Легко видеть, это следующие расстановки

$$\begin{array}{|c|c|c|c|}
\hline
+ & & & \\ \hline
& + & & \\ \hline
& & + & \\ \hline
& & & + \\ \hline
\end{array}, \qquad \begin{array}{|c|c|c|c|}
\hline
+ & & & \\ \hline
& & + & \\ \hline
& + & & \\ \hline
& & & + \\ \hline
\end{array}$$