

### Пример решения

**Задача.** Механизм с одной степенью свободы расположен в горизонтальной плоскости и состоит из двух шарнирно соединенных стержней длиной 1 м, цилиндра и штока, скользящего в направляющих, параллельных основанию, по которому катится цилиндр (рис. 190). Шток и цилиндр находятся в зацеплении. К стержню  $OA$  приложен момент  $M = 70$  Нм, к штоку — сила  $F = 5$  Н. Масса стержня  $OA$  равна 3 кг, штока — 2 кг, цилиндра — 3 кг. Найти угловое ускорение стержня  $OA$  при  $\sin \varphi = 0,6$ ,  $\dot{\varphi} = 2$  с<sup>-1</sup>.

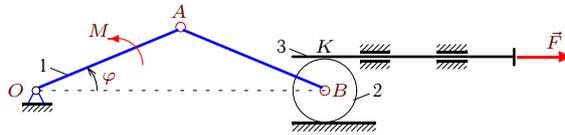


Рис. 190

### Решение

Для решения задачи составим уравнение Лагранжа 2-го рода (13.1), с. 328, выбрав за обобщенную координату угол  $\varphi$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = Q. \quad (13.6)$$

Кинетическая энергия вращательного движения стержня  $OA$  (обозначим его за тело 1) равна

$$T_1 = J_1 \dot{\varphi}^2 / 2,$$

где  $J_1 = m_1 l^2 / 3$  — момент инерции однородного стержня относительно его конца. Кинетическая энергия плоского качения однородного цилиндра (тело 2)

$$T_2 = J_2 \omega_2^2 / 2 + m_2 v_B^2 / 2, \quad (13.7)$$

где  $J_2 = m_2 R^2 / 2$  — момент инерции,  $v_B$  — скорость центра цилиндра,  $\omega_2$  — его угловая скорость. Выразим эти скорости через обобщенную скорость  $\dot{\varphi}$ , составив кинематический граф

$$O \xrightarrow{\dot{\varphi}} A \xrightarrow{-\dot{\varphi}} B.$$

Учитывая равнобедренность треугольника  $OAB$ , замечаем, что стержень  $AB$  ( $A$  — начало,  $B$  — конец) составляет с положительным направлением оси  $x$  угол  $2\pi - \varphi$  (угол отсчитывается против часовой стрелки). Дифференцируя этот угол по времени, получаем угловую

скорость стержня  $AB$ :

$$\omega_{ABz} = -\dot{\varphi}.$$

При этом из графа следует уравнение для скорости точки  $B$ :

$$v_{Bx} = v_{Ox} - \dot{\varphi}l \sin \varphi - (-\dot{\varphi})l \sin(-\varphi) = -2l\dot{\varphi} \sin \varphi. \quad (13.8)$$

Так как в точке касания цилиндром поверхности находится мгновенный центр скоростей цилиндра (МЦС), то модуль угловой скорости цилиндра легко найти:  $\omega_2 = v_B/R$ . Из (13.7) получаем <sup>1</sup>

$$T_2 = (3/4) m_2 v_B^2 = 3 m_2 l^2 \dot{\varphi}^2 \sin^2 \varphi.$$

Выразим кинетическую энергию поступательного движения штока (тело 3) через обобщенную скорость

$$T_3 = m_3 v_K^2/2,$$

где  $K$  — точка касания штока и цилиндра. Учитывая линейный характер распределения скоростей в цилиндре 2, находим

$$v_{Kx} = 2 v_{Bx} = -4l\dot{\varphi} \sin \varphi.$$

Кинетическая энергия всей системы  $T = T_1 + T_2 + T_3$ , выраженная через обобщенную скорость, имеет вид

$$T = \frac{\dot{\varphi}^2}{2} l^2 \left( \frac{m_1}{3} + 2(3m_2 + 8m_3) \sin^2 \varphi \right).$$

Введем обозначения для постоянных величин

$$C_1 = m_1 l^2/3, \quad C_2 = 2(3m_2 + 8m_3) l^2.$$

Отсюда имеем простое выражение для кинетической энергии, удобное для подстановки в уравнение Лагранжа

$$T = \frac{\dot{\varphi}^2}{2} (C_1 + C_2 \sin^2 \varphi). \quad (13.9)$$

Определим обобщенную силу системы, соответствующую обобщенной координате  $\varphi$

$$Q = (1/\dot{\varphi})(M\dot{\varphi} + Fv_{Kx}) = M - 4Fl \sin \varphi.$$

Подставим (13.9) в уравнение Лагранжа (13.6). Вычислим частные производные:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = \dot{\varphi} (C_1 + C_2 \sin^2 \varphi), \quad \frac{\partial T}{\partial \varphi} = \frac{\dot{\varphi}^2}{2} C_2 \sin(2\varphi).$$

<sup>1</sup>См. также (12.11), с. 306.

Полная производная по времени определяется по формуле

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = \ddot{\varphi}(C_1 + C_2 \sin^2 \varphi) + \dot{\varphi}^2 C_2 \sin(2\varphi).$$

Окончательно уравнение примет вид

$$\ddot{\varphi}(C_1 + C_2 \sin^2 \varphi) + (1/2)\dot{\varphi}^2 C_2 \sin(2\varphi) = Q.$$

Находим угловое ускорение

$$\ddot{\varphi} = \frac{Q - (1/2)\dot{\varphi}^2 C_2 \sin(2\varphi)}{C_1 + C_2 \sin^2 \varphi}.$$

С учетом данных задачи получаем коэффициенты (обобщенные моменты инерции):  $C_1 = 1 \text{ кгм}^2$ ,  $C_2 = 50 \text{ кгм}^2$ , обобщенную силу  $Q = 70 - 12 = 58 \text{ Нм}$  и угловое ускорение

$$\ddot{\varphi} = \frac{58 - 2 \cdot 50 \cdot 24/25}{1 + 50 \cdot 9/25} = -2 \text{ с}^{-2}.$$

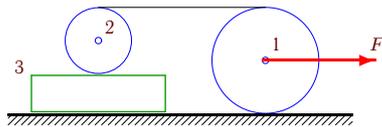
### Д13. Система с двумя степенями свободы

В этой задаче в отличие от предыдущей не заданы обобщенные координаты, система максимально простая, а кинематические соотношения получаются достаточно легко. Однако, две степени свободы есть две степени свободы, и без определенных навыков здесь можно ошибиться. Хорошей проверкой является решение с другим набором обобщенных координат.

#### Условия задач

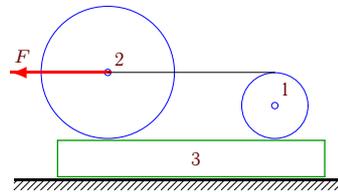
Механическая система из двух однородных цилиндров 1 и 2 и бруска 3 с идеальными стационарными связями расположена в вертикальной плоскости, имеет две степени свободы и движется под действием горизонтальной силы  $F$ . Трением пренебречь. Массы даны в килограммах, сила — в ньютонах. Найти ускорение бруска, скользящего по гладкой поверхности.

#### Д13.1.



$$F = 71, m_1 = 1, m_2 = 4, m_3 = 1.$$

#### Д13.2.



$$F = 136, m_1 = 1, m_2 = 3, m_3 = 2.$$