x. Учитывая соотношение скоростей (11.23), получим, что перемещение Δ_{Kx} связано со смещением пресса по формуле

$$\Delta_{Kx} = S\,(1 + \sin\alpha)\,\mathrm{tg}\,\alpha.$$

Отсюда $A_F = F\,S\,(1 + \sin\alpha)\,\mathrm{tg}\,\alpha$. И, наконец, работа момента на угле поворота цилиндра равна $M\varphi$. Интегрируя по времени (11.22), получим $\varphi = -(S/R)\,\mathrm{tg}\,\alpha$. Следовательно, работа момента имеет вид $A_M = -M\,(S/R)\,\mathrm{tg}\,\alpha$. Суммарная работа

$$A = A_P + A_F + A_M = S\,(P + F\,(1 + \sin\alpha)\,\mathrm{tg}\,\alpha - (M/R)\,\mathrm{tg}\,\alpha),$$

или, с учетом данных задачи,

$$A = 0{,}04(13 + 10 \cdot 12 \cdot (9/5) \cdot (4/3) - 9/1 \cdot (4/3)) = 1 \text{ Нм}.$$

По теореме об изменении кинетической энергии

$$T - T_0 = A.$$

Но так как в начальном состоянии система находилась в покое, и $T_0 = 0$, то отсюда получаем уравнение для определения скорости $25v^2 = 1$. Находим скорость пресса

$$v = \sqrt{1/25} = 0{,}2 \text{ м/с} = 20 \text{ см/с}.$$

Глава 12

Аналитическая механика

Из множества задач, решаемых методами аналитической механики в этой главе рассматриваются задачи на принцип возможных перемещений и составление уравнений Лагранжа 2-го рода для систем с одной ($s = 1$) или двумя ($s = 2$) степенями свободы. Уравнение имеет вид

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i, \tag{12.1}$$

Здесь T — кинетическая энергия системы, q_i — обобщенная координата, Q_i — обобщенная сила, $i = 1, ..., s$. В некоторых задачах обобщенные координаты заданы, в некоторых их требуется выбрать самостоятельно. Ответ не зависит от выбора обобщенных координат, а вот решение может быть короче или длиннее. Почти во всех случаях наиболее сложная часть задачи — кинематика. Рекомендуется использовать метод кинематических графов.

Д11. 27.

$T = \dfrac{\dot\varphi^2}{2}(7\sin(2\varphi) + 14\cos^2(3\varphi))$,

$Q = 378$, $\varphi = \pi/4$, $\dot\varphi = 4$.

Д11. 28.

$T = \dfrac{\dot\varphi^2}{2}(7\sin(2\varphi) + 18\sin^2\varphi + 1)$,

$Q = 42$, $\varphi = \pi/4$, $\dot\varphi = 4$.

Д11. 29.

$T = \dfrac{\dot\varphi^2}{2}(14\sin^2(3\varphi) + 3)$,

$Q = -84$, $\varphi = \pi/4$, $\dot\varphi = 2$.

Д11. 30.

$T = \dfrac{\dot\varphi^2}{2}(10\sin^2\varphi + 11\cos\varphi)$,

$Q = -224$, $\varphi = \pi$, $\dot\varphi = 6$.

Пример решения

Задача. Дано выражение кинетической энергии и обобщенной силы механической системы с одной степенью свободы

$$T = \frac{\dot\varphi^2}{2}(1 - \sin^4\varphi), \quad Q = 4 \text{ Нм}.$$

В некоторый момент известны значения обобщенной координаты $\varphi = \pi/4$ и скорости $\dot\varphi = 4$ с$^{-1}$. Найти ускорение $\ddot\varphi$.

Решение

Для решения задачи воспользуемся уравнением Лагранжа 2-го рода (12.1), с. 298. Обобщенная координата в этой задаче является углом, поэтому обобщенная сила имеет размерность момента (Нм). Вычислим производные, входящие в это уравнение

$$\frac{\partial T}{\partial\dot\varphi} = \dot\varphi(1 - \sin^4\varphi),$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial\dot\varphi} = \ddot\varphi(1 - \sin^4\varphi) - 4\,\dot\varphi^2\sin^3\varphi\cos\varphi,$$

$$\frac{\partial T}{\partial\varphi} = -2\,\dot\varphi^2\sin^3\varphi\,\cos\varphi.$$

Уравнение Лагранжа примет вид [1]

$$\ddot\varphi\,(1 - \sin^4\varphi) - 2\,\dot\varphi^2\sin^3\varphi\,\cos\varphi = Q.$$

Отсюда при $\varphi = \pi/4$ и $\dot\varphi = 4$ с$^{-1}$ находим

$$\ddot\varphi = \frac{4 + 8}{1 - 1/4} = 16 \text{ с}^{-2}.$$

[1] В общем случае при $T = (1/2)\dot\varphi^2F(\varphi)$ имеем уравнение Лагранжа $\ddot\varphi F + (1/2)\varphi^2 F'_\varphi = Q$.