

Для графа

$$P \rightarrow C \rightarrow B \rightarrow A \rightarrow O$$

запишем два других уравнения

$$-6\omega_{2z} + 17\omega_{1z} + 7\omega_{3z} - 6\omega_{5z} = 0,$$

$$6\omega_{2z} + 7\omega_{1z} - 7\omega_{3z} - 6\omega_{5z} = 0.$$

Отсюда найдем соотношения

$$\omega_{2z} = 2\omega_{1z}, \quad \omega_{3z} = \omega_{1z},$$

$$\omega_{4z} = 0, \quad \omega_{5z} = 2\omega_{1z}.$$

При этом из (3.38) следует

$$-96\omega_{1z} + 12\omega_{1z}F = 0,$$

откуда для $\omega_{1z} \neq 0$ находим искомую силу $F = 8$ Н.

Задача 122. Дано выражение кинетической энергии (кгм²/с²) и обобщенной силы (Нм) механической системы с одной степенью свободы

$$T = \frac{\dot{\varphi}^2}{2} (10 \sin^2(3\varphi) + 7), \quad Q = -3.$$

В некоторый момент известны значения обобщенной координаты $\varphi = \pi/4$ и скорости $\dot{\varphi} = 3$ с⁻¹. Найти ускорение $\ddot{\varphi}$.

Решение

Для решения задачи воспользуемся уравнениями Лагранжа 2-го рода (3.37), с. 167. Обобщенная координата в этой задаче является углом, поэтому обобщенная сила имеет размерность момента (Нм). Вычислим производные, входящие в это уравнение

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = \dot{\varphi} (10 \sin^2(3\varphi) + 7),$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = \ddot{\varphi} (10 \sin^2(3\varphi) + 7) + 30 \dot{\varphi}^2 \sin(6\varphi),$$

$$\frac{\partial T}{\partial \varphi} = 15 \dot{\varphi}^2 \sin(6\varphi).$$

Уравнение Лагранжа примет вид ¹

$$\ddot{\varphi} (10 \sin^2(3\varphi) + 7) + 15 \dot{\varphi}^2 \sin(6\varphi) = Q.$$

¹В общем случае при $T = (1/2)\dot{\varphi}^2 F(\varphi)$ имеем уравнение Лагранжа $\ddot{\varphi}F + (1/2)\dot{\varphi}^2 F'_{\varphi} = Q$.

Подставляя сюда известное значение обобщенной координаты $\varphi = \pi/4$ и скорости $\dot{\varphi} = 3 \text{ с}^{-1}$, находим ускорение

$$\ddot{\varphi} = \frac{135 - 3}{12} = 11 \text{ с}^{-2}.$$

Задача 123*. Дано выражение кинетической энергии ($\text{кгм}^2/\text{с}^2$) и обобщенной силы (Нм) механической системы с одной степенью свободы

$$T = \frac{\dot{\varphi}^2}{2}(2 \sin(2\varphi) + 6 \sin^2 \varphi + 1), \quad Q = 12.$$

В некоторый момент известны значения обобщенной координаты $\varphi = \pi/4$ и скорости $\dot{\varphi} = 2 \text{ с}^{-1}$. Найти ускорение $\ddot{\varphi}$.

Задача 124. Два невесомых стержня одинаковой длины l шарнирно прикреплены к штоку, скользящему в вертикальных направляющих (рис. 257). Стержень BC соединен с платформой, установленной

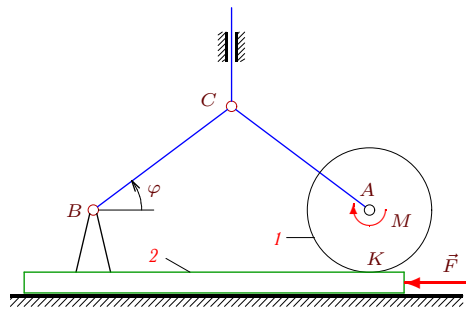


Рис. 257

на гладком горизонтальном основании. Диск радиусом R катится по платформе без проскальзывания. Масса диска $m_1 = 1 \text{ кг}$, платформы — $m_2 = 2 \text{ кг}$. К диску приложен момент $M = 3 \text{ Нм}$, к платформе — горизонтальная сила $F = 2 \text{ Н}$. Найти угловое ускорение стержня BC при $\sin \varphi = 0.6$, $\dot{\varphi} = 1 \text{ с}^{-1}$.

Решение

Составим уравнение Лагранжа 2-го рода (3.37), с. 167, выбрав за обобщенную координату угол φ

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = Q. \quad (3.39)$$

Кинетическая энергия плоского движения диска равна

$$T_1 = J\omega_1^2/2 + m_1 v_A^2/2,$$