

МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО СПЕЦИАЛЬНОГО
ОБРАЗОВАНИЯ СССР

МОСКОВСКИЙ ордена ЛЕНИНА и ордена ОКТЯБРЬСКОЙ РЕВОЛЮЦИИ
ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

Ю. Г. МАРТЫНЕНКО

Утверждено
учебным управлением МЭИ
в качестве учебного пособия
для студентов



УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ

по курсу

«ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА»

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ДИНАМИКА
ЭЛЕКТРОМЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ



УДК 531.31

Аналитическая динамика электромеханических систем.
Мартыненко Ю. Г./Под ред. И. В. Новожилова.— М.: МЭИ,
1984.— 64 с.

Излагается методика составления дифференциальных уравнений движения электромеханических систем. Из энергетических соображений определяются выражения для ponderomotorных сил. Приведен ряд примеров анализа конкретных электромеханических систем.

Пособие предназначено для студентов первого и второго курсов энергетического института.

ПРЕДИСЛОВИЕ

Электромеханические системы находят широкое применение во многих областях техники. Электрические двигатели, генераторы, неконтактные (электромагнитные, электростатические) подвесы твердого тела, электроизмерительные приборы представляют различные примеры электромеханических систем. Для рационального конструирования и последующего анализа свойств таких систем современная инженерная практика требует создания корректных математических моделей, которые должны содержать дифференциальные уравнения механического движения, а также уравнения электромагнитных процессов. Для составления уравнений электромеханических систем весьма удобным является аппарат аналитической механики, в котором электромагнитные и механические величины, характеризующие систему, фигурируют как формально равноправные и уравнения движения получаются при помощи лагранжева формализма.

В данном пособии рассматриваются электромеханические системы, для описания динамики которых можно использовать конечномерные модели, т. е. модели, требующие задания конечного числа независимых механических и электрических параметров. Используя сведения из разделов «Электричество» и «Магнетизм» курса физики [1], уравнения электрических цепей приводятся к виду уравнений Лагранжа второго рода. Из энергетических соображений определяются выражения для пондеромоторных сил. Главное внимание обращается на этап составления замкнутой системы дифференциальных уравнений движения электромеханической системы. Излагается электромеханическая аналогия сила — напряжение. Приводится ряд примеров анализа конкретных электромеханических систем. Рассматривается электромагнитный подвес твердого тела. Анализируется работа простейшей модели динамомашин переменного тока. Составляются уравнения Лагранжа для разветвленной электрической цепи. Рассматривается несколько электромеханических систем электростатического

типа: конденсаторный микрофон, пассивный и активный электростатические подвесы. Проводится анализ работы электромагнитного тормоза. Обсуждается возможность применения теоремы Лагранжа—Дирихле для анализа устойчивости положения равновесия электромеханических систем, и при помощи этой теоремы решается вопрос об устойчивости вертикального положения якоря трехпозиционного электромагнитного реле.

Материал, включенный в настоящее пособие, в течение нескольких последних лет излагается в курсе теоретической механики в разделе «Аналитическая механика» на ряде факультетов МЭИ. Основное содержание этого материала не отражено в базовых учебниках по теоретической механике, которые не учитывают специфику подготовки инженеров электротехнических, электромеханических и радиотехнических специальностей. Данное учебное пособие ставит своей целью облегчить студентам изучение соответствующего раздела курса теоретической механики и подготовить их к соответствующим специальным курсам, читаемым в энергетическом институте.

1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ АНАЛИТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ ЭЛЕКТРОМЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Электромеханическими системами называются системы, в которых взаимосвязаны механические и электромагнитные процессы.

Такое определение электромеханических систем является достаточно широким, так как оно включает в себя механизмы и приборы, в которых механические системы и электрические цепи объединяются в разнообразных конструктивных сочетаниях. Существенной чертой электромеханических систем является преобразование механической энергии в электромагнитную.

Электромеханические системы играют важную роль в технике измерений, электроакустических устройствах, в системах автоматического регулирования и телеуправления. К электромеханике, естественно, относится теория электрических машин и электропривода.

Изучение электромеханических систем необходимо начать с формулировки основных допущений и принятия модели, которая учитывает только главные (определяющие свойства) явления и пренебрегает всем, менее существенным и второстепенным. Конечно, принимая те или иные гипотезы, следует помнить о пределах их применимости, так как, забыв об этом, можно прийти к совершенно неверным выводам. Это происходит тогда, когда условия решаемой задачи уже не удовлетворяют сделанным предположениям и неучитываемые свойства становятся существенными.

Как обычно в теоретической механике при описании механической части электромеханической системы будем использовать модель механической системы как некоторой совокупности N материальных точек (в частности, абсолютно твердых тел). Предположим, что наложенные связи являются голономными, идеальными, неосвобождающими. Число уравнений связи обозначим через s . Тогда положение механической подсистемы в пространстве может быть однозначно оп-

ределено обобщенными координатами q_1, \dots, q_n , $n=3N-s$ — число степеней свободы.

С заданием «положения» электрической части системы дело обстоит сложнее, так как для полного описания электромагнитных явлений в любом устройстве необходимо знать пространственное распределение векторов, определяющих электромагнитное поле — магнитной индукции \vec{B} и напряженности электрического поля \vec{E} , и их изменение во времени. Таким образом, задание состояния электрических систем, представляющих системы с распределенными в пространстве параметрами, требует бесконечно большого числа функций времени. Вместе с тем в курсе теоретической электротехники вводятся модели электрических и магнитных цепей, которые оперируют только конечным числом параметров — электрическим током, напряжением, магнитным потоком и т. д. Замена векторов \vec{B} , \vec{E} при описании электродинамических явлений конечным числом параметров аналогична использованию обобщенных координат в механике.

Теория электрических цепей базируется на введении параметров отдельных участков цепи, из которых основными являются индуктивности, емкости и сопротивления. Однако всем этим параметрам может быть придано вполне определенное значение только для стационарных режимов. Так, например, распределение магнитного поля около какого-либо электрического контура при заданном электрическом токе в контуре зависит не только от формы контура, но и от распределения тока внутри проводника, образующего контур. Только при постоянном токе распределение тока при заданных свойствах материала проводника однозначно определяется геометрической формой проводника. Соответственно, только при постоянном токе индуктивность однозначно определяется геометрическими размерами и формой контура цепи. Так, при достаточно большой частоте переменного тока, протекающего в цепи, электрический ток будет распределен только в поверхностном слое проводника, что ведет к ослаблению магнитного поля внутри проводника и к уменьшению индуктивности цепи.

Предположим, что поперечные размеры проводников малы по сравнению с их длиной (такие проводники и токи называются линейными). При этом зависимостью индукции \vec{B} от распределения тока по поперечному сечению проводника можно пренебречь. Кроме того, критерием справедливости теории электрических цепей является выполнение так назы-

ваемых условий квазистационарности, которые исключают из рассмотрения распространение электромагнитных волн, подобно тому, как модель абсолютно твердого тела в механике означает неучет высокочастотных упругих колебаний в реальных деформируемых телах.

Переменное электромагнитное поле распространяется в пространстве со скоростью, равной скорости света. Поэтому переменный ток с периодом T в электрической цепи длиной l можно считать квазистационарным, если выполнено условие $T \gg l/c$, где $c = 3 \cdot 10^8$ м/с — скорость света в вакууме.

В дальнейшем будем рассматривать только такие электромеханические системы, у которых электрические цепи удовлетворяют всем условиям квазистационарности и допускают исследование методами теории электрических цепей.

2. УРАВНЕНИЯ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ

Допустим, что в состав рассматриваемой электромеханической системы входят m контуров (рис. 2.1). Каждый контур состоит из последовательно соединенных линейных проводников и конденсаторов и разные цепи между собой электрически не связаны, но электромагнитные процессы в цепях, конечно, не независимы, так как все цепи находятся в общем магнитном поле. Обозначим через i_k ($k=1, 2, \dots, m$) ток, протекающий в k -м контуре, через u_k — заданную (стороннюю) электродвижущую силу (ЭДС), приложенную к k -му контуру.

Пусть e_k ($k=1, \dots, m$) — заряды конденсаторов, которые связаны с токами соотношениями $de_k = i_k dt$ или $e_k = \int i_k dt$, выражающими, что заряды приносятся и уносятся токами. Омическое сопротивление k -го контура обозначим через R_k , емкость конденсатора, входящего в состав k -го контура — через C_k . Электрическая емкость (электроемкость или просто емкость) конденсатора представляет отношение

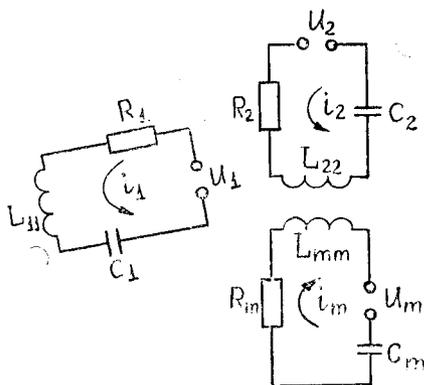


Рис. 2.1. Электрические цепи электромеханической системы

величины заряда одной из его обкладок e_k к разности потенциалов между обкладками u_k^e

$$C_k = \frac{e_k}{u_k^e}. \quad (2.1)$$

Заметим, что при изменении взаимного положения тел рассматриваемой электромеханической системы расстояние между обкладками конденсаторов может тоже изменяться, при этом величины емкостей будут функциями обобщенных координат системы

$$C_k = C_k(q_1, \dots, q_n). \quad (2.2)$$

Как известно из курса физики, энергия электрического поля, локализованного между обкладками заряженных конденсаторов, определяется выражением

$$W_e = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^m \frac{e_k^2}{C_k}. \quad (2.3)$$

Из соотношений (2.1) и (2.3) вытекает, что напряжение между обкладками u_k^e k -го конденсатора может быть найдено дифференцированием выражения для энергии электрического поля W_e по заряду e_k

$$u_k^e = \frac{\partial W_e}{\partial e_k} = \frac{e_k}{C_k}. \quad (2.4)$$

Предположим, что проводники с током находятся в неферромагнитной однородной и изотропной среде, и воспользуемся формулой из курса физики для энергии магнитного поля, созданного произвольной системой из m контуров с токами

$$W_m = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^m \sum_{r=1}^m L_{kr} i_k i_r, \quad (2.5)$$

где L_{kk} — индуктивность k -го контура; L_{kr} ($k \neq r$) — взаимная индуктивность k -го и r -го контуров. Индуктивность контура является мерой его инерции по отношению к изменению тока. Индуктивности L_{kr} зависят от размеров и формы k -го и r -го контуров, расстояния между ними, их взаимного расположения, а также от магнитной проницаемости окружающей среды. Следовательно, величины L_{kr} будут функциями обобщенных координат q_1, \dots, q_n

$$L_{kr} = L_{kr}(q_1, \dots, q_n). \quad (2.6)$$

Магнитный поток через k -й контур пропорционален токам в контурах системы

$$\Phi_k = \sum_{r=1}^m L_{kr} i_r. \quad (2.7)$$

Из сравнения (2.5) и (2.7) вытекает, что магнитный поток Φ_k может быть получен путем дифференцирования по току i_k выражения для магнитной энергии (2.5), которая представляет однородную квадратичную форму токов:

$$\Phi_k = \frac{\partial W_m}{\partial i_k}. \quad (2.8)$$

Перейдем к составлению уравнений для электрических цепей. Обозначим через u_k^i электродвижущую силу индукции, возникающую в k -м контуре при изменении магнитного потока Φ_k .

Согласно основному закону электромагнитной индукции, ЭДС индукции в замкнутом контуре численно равна и противоположна по знаку скорости изменения магнитного потока сквозь поверхность, натянутую на контур:

$$u_k^i = - \frac{d\Phi_k}{dt} = - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial W_m}{\partial i_k} \right). \quad (2.9)$$

Используя закон Ома для k -го контура, приравняем сумму ЭДС индукции и сторонней ЭДС падениям напряжения на омическом сопротивлении R_k и емкости C_k

$$u_k + u_k^i = R_k i_k + u_k^e. \quad (2.10)$$

Принимая во внимание (2.4) и (2.9), из (2.10) получаем

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial W_m}{\partial i_k} \right) + \frac{\partial W_e}{\partial e_k} + R_k i_k = u_k, \quad k = 1, \dots, m. \quad (2.11)$$

Введем электрическую диссипативную функцию

$$\Psi_e = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^m R_k i_k^2.$$

Функция Ψ_e представляет собой однородную квадратичную форму токов i_k . Заметим, что величина $2\Psi_e$ представляет джоулево тепло, необратимо рассеиваемое в системе на нагревание проводников. При этом $R_k i_k = \frac{\partial \Psi_e}{\partial i_k}$ и (2.11) могут

быть записаны в виде

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial W_m}{\partial i_k} \right) + \frac{\partial W_e}{\partial e_k} + \frac{\partial \Psi_e}{\partial i_k} = u_k, \quad k = 1, \dots, m. \quad (2.12)$$

3. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПОНДЕРОМОТОРНЫХ СИЛ

Силы, возникающие из-за действия на материальные тела электрических и магнитных полей, называются пондеромоторными силами.

В отличие от сил механической природы пондеромоторные силы будем отмечать* и обозначим обобщенную пондеромоторную силу, отвечающую обобщенной координате q_j , через Q_j^* .

Для нахождения выражения для обобщенных пондеромоторных сил составим уравнение баланса энергии системы. Работа, совершаемая сторонниками ЭДС, идет на джоулево тепло, на изменение энергии магнитного и электрического полей, а также на работу, совершаемую пондеромоторными силами.

Используя выражения для мощности сторонних ЭДС $\sum_{k=1}^m u_k i_k$, мощности, расходуемой на нагревание проводника, $\sum_{k=1}^m R_k i_k^2 = 2W_e$, получаем следующее уравнение баланса энергии системы

$$\sum_{k=1}^m u_k i_k = \sum_{k=1}^m R_k i_k^2 + \frac{dW_m}{dt} + \frac{dW_e}{dt} + \sum_{j=1}^n Q_j^* \dot{q}_j. \quad (3.1)$$

Здесь \dot{q}_j — обобщенная скорость, $\sum_{j=1}^n Q_j^* \dot{q}_j$ — мощность пондеромоторных сил.

Вначале займемся вычислением производной по времени от магнитной энергии системы, которая, согласно (2.5) и (2.6), зависит от токов i_k и обобщенных координат q_j . $W_m = W_m(i_k, q_j)$. Используя правило дифференцирования сложной функции, находим

$$\frac{dW_m}{dt} = \sum_{k=1}^m \frac{\partial W_m}{\partial i_k} \frac{di_k}{dt} + \sum_{j=1}^n \frac{\partial W_m}{\partial q_j} \dot{q}_j. \quad (3.2)$$

Принимая во внимание тождество

$$\frac{\partial W_m}{\partial i_k} \frac{di_k}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial W_m}{\partial i_k} i_k \right) - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial W_m}{\partial i_k} \right) i_k$$

и учитывая теорему Эйлера об однородных функциях

$$\sum_{k=1}^m \frac{\partial W_m}{\partial i_k} i_k = 2W_m,$$

преобразуем (3.2) следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{dW_m}{dt} &= \frac{d}{dt} \left(\sum_{k=1}^m \frac{\partial W_m}{\partial i_k} \cdot i_k \right) - \sum_{k=1}^m \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial W_m}{\partial i_k} \right) i_k + \sum_{j=1}^n \frac{\partial W_m}{\partial q_j} \dot{q}_j = \\ &= 2 \frac{dW_m}{dt} - \sum_{k=1}^m \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial W_m}{\partial i_k} \right) i_k + \sum_{j=1}^n \frac{\partial W_m}{\partial q_j} \dot{q}_j. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\frac{dW_m}{dt} = \sum_{k=1}^m \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial W_m}{\partial i_k} \right) i_k - \sum_{j=1}^n \frac{\partial W_m}{\partial q_j} \dot{q}_j. \quad (3.3)$$

Электрическая энергия системы, согласно (2.2) и (2.3), является функцией зарядов e_k и обобщенных координат q_j $W_e = W_e(e_k, q_j)$, поэтому производная по времени от электрической энергии имеет вид

$$\frac{dW_e}{dt} = \sum_{k=1}^m \frac{\partial W_e}{\partial e_k} \frac{de_k}{dt} + \sum_{j=1}^n \frac{\partial W_e}{\partial q_j} \dot{q}_j = \sum_{k=1}^m \frac{\partial W_e}{\partial e_k} i_k + \sum_{j=1}^n \frac{\partial W_e}{\partial q_j} \dot{q}_j \quad (3.4)$$

Подставляя (3.3) и (3.4) в соотношение для баланса энергии (3.1), получаем

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^m u_k i_k &= \sum_{k=1}^m R_k i_k^2 + \sum_{k=1}^m \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial W_m}{\partial i_k} \right) i_k - \sum_{j=1}^n \frac{\partial W_m}{\partial q_j} \dot{q}_j + \\ &+ \sum_{k=1}^m \frac{\partial W_e}{\partial e_k} i_k + \sum_{j=1}^n \frac{\partial W_e}{\partial q_j} \dot{q}_j + \sum_{j=1}^n Q_j^* \dot{q}_j. \end{aligned}$$

Переносим слагаемые, содержащие токи, в левую часть равенства, находим

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^m \left[u_k - R_k i_k - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial W_m}{\partial i_k} \right) - \frac{\partial W_e}{\partial e_k} \right] i_k = \\ = \sum_{j=1}^n \left(- \frac{\partial W_m}{\partial q_j} + \frac{\partial W_e}{\partial q_j} + Q_j^* \right) \dot{q}_j. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Учитывая уравнения для электрических цепей (2.12), замечаем, что левая часть соотношения (3.5) равна нулю, и, следовательно,

$$\sum_{j=1}^n \left(Q_j^* - \frac{\partial W_m}{\partial q_j} + \frac{\partial W_e}{\partial q_j} \right) \dot{q}_j = 0. \quad (3.6)$$

В рассматриваемой системе обобщенные скорости являются независимыми величинами, поэтому (3.6) должно выполняться при любых наборах обобщенных скоростей. В частности, возможна ситуация, когда все обобщенные скорости

$\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n$, кроме одной \dot{q}_j , равны нулю, поэтому (3.6) эквивалентно следующим n уравнениям:

$$Q_j^* = \frac{\partial W_m}{\partial q_j} - \frac{\partial W_e}{\partial q_j} = \frac{\partial}{\partial q_j}(W_m - W_e). \quad (3.7)$$

Из (3.7) вытекает, что обобщенные пондеромоторные силы могут быть найдены дифференцированием по обобщенным координатам разности между магнитной и электрической энергией. Подставляя (2.5) и (2.3) в (3.7), получим окончательно

$$Q_j^* = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^m \sum_{r=1}^m \frac{\partial L_{kr}}{\partial q_j} i_k i_r + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^m \frac{\partial C_k}{\partial q_j} \frac{e_k^2}{C_k^2}. \quad (3.8)$$

Конечно, следует иметь в виду, что найденное выражение для пондеромоторных сил справедливо только с точностью квазистационарного приближения.

4. УРАВНЕНИЯ ЛАГРАНЖА — МАКСВЕЛЛА

Впервые уравнения электромеханических систем написал Максвелл, который в 1873 году в своем трактате об электричестве и магнетизме применил методику Лагранжа составления уравнений в обобщенных координатах к системам тел, содержащих проводники с током. Полученные уравнения носят название уравнений Лагранжа—Максвелла.

Обозначим через T кинетическую энергию системы, которая в случае стационарных связей является однородной квадратичной формой обобщенных скоростей.

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j. \quad (4.1)$$

Здесь a_{ij} — коэффициенты инерции, зависящие от обобщенных координат q_1, \dots, q_n .

Потенциальная энергия механической части электромеханической системы будет функцией обобщенных координат

$$\Pi = \Pi(q_1, \dots, q_n).$$

Обозначим через $\Psi_m = \Psi_m(q_j, \dot{q}_j)$ механическую диссипативную функцию, отвечающую силам сопротивления типа вязкого трения.

Учитывая, что на механическую систему кроме потенциальных сил $-\frac{\partial \Pi}{\partial q_j}$, сил диссипации $-\frac{\partial \Psi_m}{\partial \dot{q}_j}$, неконсер-

вативных обобщенных сил механической природы Q_j действуют пондеромоторные силы, запишем уравнения для обобщенных координат в виде

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = - \frac{\partial \Pi}{\partial q_j} - \frac{\partial \Psi_m}{\partial \dot{q}_j} + Q_j + Q_j^*, \quad j=1, \dots, n. \quad (4.2)$$

Подставляя (3.7) в (4.2), выпишем уравнения электрических цепей (2.12) и уравнения механики (4.2) в виде замкнутой системы уравнений для рассматриваемой электромеханической системы

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial W_m}{\partial \dot{i}_k} \right) + \frac{\partial W_e}{\partial e_k} + \frac{\partial \Psi_e}{\partial i_k} &= u_k, \quad k=1, \dots, m; \quad (4.3) \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} + \frac{\partial \Pi}{\partial q_j} - \frac{\partial W_m}{\partial q_j} + \frac{\partial W_e}{\partial q_j} + \frac{\partial \Psi_m}{\partial \dot{q}_j} &= Q_j, \\ & j=1, \dots, n. \end{aligned}$$

Покажем теперь, что (4.3) можно записать в единой форме. Для этого введем функцию Лагранжа электромеханической системы

$$L = T(q_j, \dot{q}_j) - \Pi(q_j) + W_m(q_j, i_k) - W_e(q_j, e_k). \quad (4.4)$$

Подсчитаем частные производные от функции L по обобщенным координатам q_j , обобщенным скоростям \dot{q}_j , зарядам e_k и токам i_k

$$\frac{\partial L}{\partial q_j} = \frac{\partial T}{\partial q_j} - \frac{\partial \Pi}{\partial q_j} + \frac{\partial W_m}{\partial q_j} - \frac{\partial W_e}{\partial q_j}; \quad (4.5)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}; \quad \frac{\partial L}{\partial e_k} = - \frac{\partial W_e}{\partial e_k}; \quad \frac{\partial L}{\partial i_k} = \frac{\partial W_m}{\partial i_k}.$$

Кроме функции L , введем диссипативную функцию электромеханической системы, равную сумме электрической и механической диссипативных функций

$$\Psi = \Psi_e(i_k) + \Psi_m(q_j, \dot{q}_j).$$

Заметим, что электрическая диссипативная функция не зависит от обобщенных скоростей \dot{q}_j , а механическая диссипативная функция не зависит от токов i_k , поэтому

$$\frac{\partial \Psi_e}{\partial i_k} = \frac{\partial \Psi}{\partial i_k}; \quad \frac{\partial \Psi_m}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial \Psi}{\partial \dot{q}_j}. \quad (4.6)$$

Заменяя в (4.3) частные производные согласно (4.5), (4.6) и учитывая, что ток есть производная заряда по време-

ни $i_k = \dot{e}_k$, получаем систему уравнений Лагранжа—Максвелла электромеханической системы

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{e}_k} \right) - \frac{\partial L}{\partial e_k} + \frac{\partial \Psi}{\partial \dot{e}_k} = u_k, \quad k=1, \dots, m; \quad (4.7)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} + \frac{\partial \Psi}{\partial \dot{q}_j} = Q_j, \quad j=1, \dots, n.$$

Уравнения (4.7) образуют систему $n+m$ обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка относительно обобщенных координат и зарядов.

Связанность систем уравнений для зарядов и обобщенных координат обусловлена зависимостью коэффициентов квадратичных форм, определяющих энергии электрического и магнитного полей от обобщенных координат. Наличие этой связи предопределяет вхождение в уравнения электрических цепей слагаемых

$$\sum_{j=1}^n \sum_{r=1}^m \frac{\partial L_{kr}}{\partial q_j} \dot{q}_j \dot{e}_r,$$

представляющих ЭДС индукции, наведенные движением проводников с токами. В уравнения механического движения входят ponderomotorные силы (3.8), возникновение которых формально связано с зависимостью магнитной и электрической энергий от механических координат. Но от q_j может зависеть как расположение проводников с токами и пластин конденсаторов, так и распределение магнитной проницаемости μ и диэлектрической постоянной ϵ в пространстве. Этому отвечают различные виды ponderomotorных сил — силы взаимодействия между проводниками с токами, между заряженными телами, силы, действующие на тело, магнитная проницаемость которого отлична от магнитной проницаемости окружающей среды, и т. д. Однако в любом случае для ponderomotorных сил справедливо выражение (3.8).

Уравнения Лагранжа—Максвелла (4.7) являются, вообще говоря, нелинейными уравнениями, неразрешенными относительно старших производных, поэтому приведение уравнений (4.7) к форме Коши требует дополнительного преобразования.

Для интегрирования уравнений (4.7) надо задать $2(n+m)$ начальных условий для зарядов, токов, обобщенных координат и обобщенных скоростей

$$e_k|_{t=0} = e_k^0; \quad i_k|_{t=0} = i_k^0; \quad q_j|_{t=0} = q_j^0; \quad \dot{q}_j|_{t=0} = \dot{q}_j^0. \quad (4.8)$$

Для получения уравнений Лагранжа—Максвелла может быть применена методика составления уравнений Лагранжа для механических систем.

1. Выбираем обобщенные координаты q_1, \dots, q_n , однозначно определяющие положение тел механической системы, и заряды на конденсаторах e_1, \dots, e_m . Если в системе отсутствуют емкости, то вводим токи i_1, \dots, i_m в контурах системы.

2. Подсчитываем кинетическую, потенциальную, магнитную и электрическую энергии системы и согласно (4.4) составляем функцию Лагранжа L электромеханической системы.

3. Определяем диссипативную функцию Ψ , равную сумме механической и электрической диссипативных функций.

4. Находим выражения для обобщенных неконсервативных сил, которые представляют коэффициенты перед возможными обобщенными скоростями в выражении для мощности неконсервативных сил механической природы.

5. Выполняем операции дифференцирования функции Лагранжа и диссипативной функции и составляем уравнения (4.7).

5. ЭЛЕКТРОМЕХАНИЧЕСКИЕ АНАЛОГИИ

Укажем на аналогию электрических и механических величин, которая вытекает из уравнений Лагранжа—Максвелла и отражает сходство между электрическими и механическими системами. Предварительно заметим, что зависимость

$$u_L = \frac{d\Phi}{dt}; \quad \Phi = L_1 i,$$

определяющая напряжение на индуктивности, имеет форму второго закона Ньютона

$$F = \frac{dQ}{dt}; \quad Q = mv,$$

если напряжению u_L поставить в соответствие силу F , магнитному потоку Φ — количество движения Q , индуктивности L_1 — массу m , току i — скорость v .

Выражение

$$u_C = e/C,$$

определяющее напряжение на емкости C , по своему виду соответствует закону Гука для вычисления силы F , возникающей при деформации x пружины жесткости K :

$$F = Kx = x/K^{-1},$$

причем по-прежнему напряжение u_c отвечает силе F , величина емкости C — податливости пружины K^{-1} , заряд e — координате x .

Развивая указанную аналогию между электрическими и механическими явлениями, рассмотрим два простых примера.

На рис. 5.1 изображена материальная точка массы m , лежащая на гладкой горизонтальной поверхности. Точка совершает прямолинейное движение вдоль некоторой оси, которую примем за ось x . К точке прикреплены пружина жесткости K и демпфер, создающий силу сопротивления, пропорциональную скорости.



Рис. 5.1. Линейный осциллятор: 1 — масса; 2 — пружина; 3 — демпфер

Такая система, совершая затухающие колебания, называется линейным осциллятором. Выбирая в качестве обобщенной координаты x величину смещения точки из положения равновесия, составим выражения для кинетической $T = \frac{1}{2} m\dot{x}^2$ и потенциальной $\Pi = \frac{1}{2} Kx^2$ энергии системы. Следовательно, функция Лагранжа

$$L = T - \Pi = \frac{1}{2} m\dot{x}^2 - \frac{1}{2} Kx^2.$$

Диссипативная функция $\Psi = \frac{1}{2} b\dot{x}^2$, где b — коэффициент вязкого трения.

Уравнения движения

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial L}{\partial x} + \frac{\partial \Psi}{\partial \dot{x}} = 0$$

для линейного осциллятора имеют вид

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + Kx = 0. \quad (5.1)$$

Рассмотрим электрический колебательный контур (рис. 5.2), образованный конденсатором емкостью C и катушкой с неизменяющейся во времени индуктивностью L_1 . Омическое сопротивление контура обозначим через R . Заряд конденсатора e выбираем в качестве обобщенной координаты.

ты. Электромагнитная энергия катушки $W_m = \frac{1}{2} L_1 \dot{e}^2$, электрическая энергия $W_e = \frac{1}{2} \frac{e^2}{C}$.

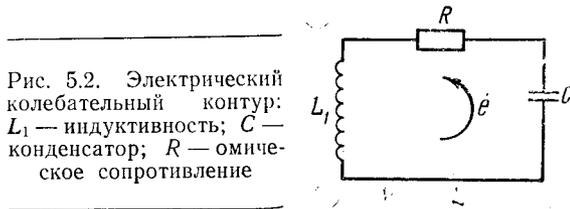


Рис. 5.2. Электрический колебательный контур: L_1 — индуктивность; C — конденсатор; R — омическое сопротивление

Функция Лагранжа

$$L = W_m - W_e = \frac{1}{2} L_1 \dot{e}^2 - \frac{1}{2} \frac{e^2}{C}.$$

Диссипативная функция

$$\Psi = \frac{1}{2} R \dot{e}^2.$$

Уравнения движения

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{e}} \right) - \frac{\partial L}{\partial e} + \frac{\partial \Psi}{\partial \dot{e}} = 0$$

после выполнения операций дифференцирования примут вид

$$L_1 \ddot{e} + R \dot{e} + \frac{e}{C} = 0. \quad (5.2)$$

Сопоставляя между собой обыкновенные дифференциальные уравнения (5.1) и (5.2), приходим к заключению о полной их идентичности, так как уравнения отличаются лишь обозначениями. Следовательно, течение механического и электрического процессов будет подчиняться одинаковым закономерностям. Сопоставляя между собой каждый из членов приведенных выше дифференциальных уравнений, можно установить взаимно однозначное соответствие между элементами и параметрами механической и электрической систем. Установление таких соответствий, разработка правил перехода от одной физической системы к другой, её эквивалентной, представляет собой содержание метода электромеханических аналогий. (Здесь под эквивалентными понимаются системы, описываемые одинаковыми дифференциальными уравнениями.)

Таблица 5.1

Механическая система	Электрическая система
Обобщенная координата q_j	Заряд e_k
Обобщенная скорость \dot{q}_j	Ток $i_k \equiv \dot{e}_k$
Коэффициенты инерции a_{ij} (приведенные массы; приведенные моменты инерции) в выражении для кинетической энергии	Коэффициенты само- и взаимной индукции L_{kr}
Количество движения Q	Магнитный поток Φ
Диссипативные коэффициенты β_{ij}	Омические сопротивления R_k
Податливость пружины K^{-1} (K — жесткость пружины)	Емкость конденсатора C
Обобщенная сила Q_j (сила F , момент пары M)	Электродвижущая сила (сторонняя) u_k
Кинетическая энергия $T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j$	Магнитная энергия $W_m = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^m \sum_{r=1}^m L_{kr} i_k i_r$
Потенциальная энергия $\Pi = \Pi(q_1, \dots, q_n)$	Электрическая энергия $W_e = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^m \frac{e_k^2}{C_k}$
Механическая диссипативная функция $\Psi_m = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \beta_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j$ — половина скорости изменения механической энергии системы	Электрическая диссипативная функция $\Psi_e = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^m R_k i_k^2$ — половина мощности, расходуемой на джоулево тепло
Мощность $\sum_{j=1}^n Q_j \dot{q}_j$	Мощность $\sum_{k=1}^m u_k i_k$

Метод электромеханических аналогий позволяет моделировать процессы в физической системе при помощи процессов в системе другой физической природы, ей эквивалентной.

Наиболее часто механические системы моделируются при помощи электрических, так как электрические системы легко перестраиваются, допускают многократное использование, позволяют варьировать в широких пределах внешние воздействия, начальные условия и т. п. В качестве примера практического использования метода моделирования на основе электромеханических аналогий можно указать на задачу моделирования колебаний крыльев летательных аппаратов при помощи эквивалентных электрических цепей. В этой задаче крыло заменяется системой с сосредоточенными параметрами: массами, соединенными упругими пружинами и демпферами. Затем для полученной механической цепи составляется эквивалентная электрическая цепь, анализ колебаний в которой позволяет осуществить предварительный выбор параметров реального крыла.

В заключение рассмотрения электромеханической аналогии сила — напряжение составим сводную таблицу соответствия между параметрами механических и электрических систем.

Следует отметить, что рассмотренная электромеханическая аналогия сила — напряжение не является единственной. В частности, иногда оказывается полезной и аналогия, основанная на соответствии между силой и током.

6. ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЙ ПОДВЕС ТВЕРДОГО ТЕЛА

Рассмотрим задачу о поступательном вертикальном движении вагона поезда в магнитном подвесе.

На вагоне поезда установлены электромагнит, который притягивается к T -образному феррорельсу (рис. 6.1). При номинальной силе тока в обмотке электромагнита и номинальном зазоре между электромагнитом и рельсом сила притяжения уравнивает силу тяжести вагона.

Будем считать, что вагон совершает поступательное прямолинейное движение вдоль вертикальной оси Y . За начало отсчета на оси Y примем точку O , с которой совпадает центр масс вагона C при номинальной величине зазора между электромагнитом и рельсом. В качестве обобщенной координаты выберем координату y центра масс вагона. Ток в об-

мотке электромагнита обозначим через i . Обобщенными координатами рассматриваемой электромеханической системы будут y и i . Система не содержит конденсаторов, поэтому

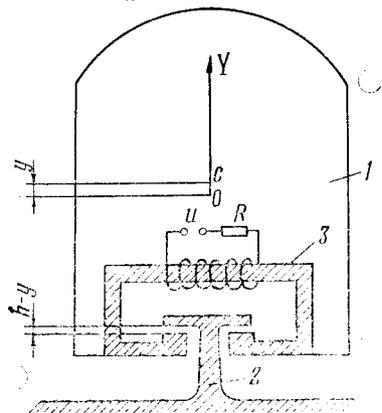


Рис. 6.1. Электромагнитный подвес вагона поезда: 1 — вагон; 2 — ферро-рельс; 3 — электромагнит

дифференциальное уравнение для тока в электромагните будет иметь 1-й порядок. В таком случае иногда говорят, что система имеет полторы степени свободы.

Используя формулу для кинетической энергии твердого тела, совершающего поступательное движение, выпишем выражение для кинетической энергии вагона

$$T = \frac{1}{2} \frac{P}{g} \dot{y}^2.$$

Здесь P — вес вагона.

Потенциальная энергия силы тяжести

$$\Pi = Py.$$

Энергия электрического поля равна нулю, так как в системе отсутствуют емкости.

Подсчитаем энергию магнитного поля, которая, как известно, определяется выражением (в системе СИ)

$$W_m = \frac{1}{2} \iiint_V \frac{1}{\mu} B^2 dV. \quad (6.1)$$

Здесь \vec{B} — вектор магнитной индукции; μ — магнитная проницаемость; V — область, содержащая магнитное поле.

Предположим, что зазор между магнитом и рельсом $h-y$ мал по сравнению с линейными размерами a и b (рис. 6.2).

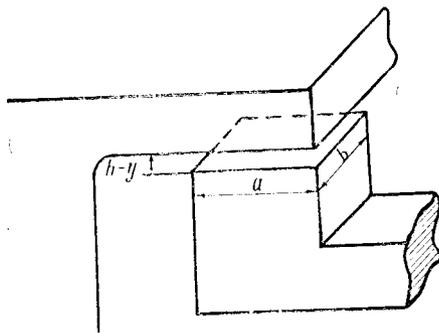


Рис. 6.2. Воздушный зазор между феррорельсом и электромагнитом

Тогда магнитное поле в воздушном зазоре между магнитом и рельсом можно считать однородным и пренебречь красивыми эффектами. Поле рассеяния (вне рельса, магнита, зазора) не учитываем. Предположим, что магнитная проницаемость μ магнита и рельса весьма велика и в (6.1) можно пренебречь интегралом по объему магнита и феррорельса. Тогда при сделанных допущениях в (6.1) останется интеграл от постоянного вектора \vec{B} по объему двух воздушных зазоров

$$W_m = \frac{1}{\mu_0} S (h-y) B^2, \quad (6.2)$$

где S — площадь магнита, μ_0 — магнитная проницаемость воздуха.

Магнитный поток через обмотку электромагнита

$$\Phi = BSN, \quad (6.3)$$

где N — число витков обмотки.

С другой стороны, согласно (2.7), магнитный поток пропорционален току в цепи

$$\Phi = L_{11} i, \quad (6.4)$$

где L_{11} — коэффициент самоиндукции.

Из (6.3) и (6.4) находим величину вектора магнитной индукции

$$B = L_{11}i / (SN).$$

Подставляя это выражение в формулу для магнитной энергии (6.2), получаем

$$W_m = \frac{(h-y) L_{11}^2}{\mu_0 SN^2} i^2. \quad (6.5)$$

Но из (2.6) вытекает, что

$$W_m = \frac{1}{2} L_{11} i^2. \quad (6.6)$$

Приравнявая (6.5) и (6.6), находим окончательное выражение для зависимости коэффициента самоиндукции от обобщенной координаты y

$$L_{11} = \frac{\mu_0 SN^2}{2(h-y)}$$

и магнитной энергии системы

$$W_m = \frac{\mu_0 SN^2}{4(h-y)} i^2.$$

Таким образом, лагранжиан электромеханической системы, составленный по (4.4), оказывается равным

$$L = \frac{1}{2} \frac{P}{g} \dot{y}^2 - Py + \frac{1}{4} \frac{\mu_0 SN^2}{h-y} i^2. \quad (6.7)$$

Диссипативная функция

$$\Psi = \frac{1}{2} b \dot{y}^2 + \frac{1}{2} Ri^2,$$

где b — коэффициент вязкого трения при движении вагона; R — омическое сопротивление цепи.

Предположим, что обобщенные неконсервативные силы Q ; механической природы отсутствуют, и обозначим через u напряжение, подаваемое на обмотку электромагнита. Для обеспечения устойчивости подвеса вагона это напряжение формируется в зависимости от показаний датчика, измеряющего величину зазора $h-y$ между электромагнитом и феррорельсом. При увеличении зазора ток в цепи должен возрастать, чтобы увеличить силу притяжения магнита к рельсу и

вернуть вагон в состояние равновесия, а при уменьшении зазора ток должен уменьшаться.

Уравнения Лагранжа—Максвелла будут иметь вид

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{i}} \right) + \frac{\partial \Psi}{\partial i} = u; \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} \right) - \frac{\partial L}{\partial y} + \frac{\partial \Psi}{\partial y} = 0.$$

Выполняя операции дифференцирования, находим

$$\frac{1}{2} \frac{\mu_0 SN^2}{h-y} \frac{di}{dt} + \frac{1}{2} \frac{\mu_0 SN^2}{(h-y)^2} yi + Ri = u; \quad (6.8)$$

$$\frac{P}{g} \ddot{y} + P - \frac{1}{4} \frac{\mu_0 SN^2}{(h-y)^2} i^2 + b\dot{y} = 0.$$

Выражение $-\frac{1}{2} \frac{\mu_0 SN^2}{(h-y)^2} yi$ представляет собой ЭДС индукции, возникающую при движении вагона; $\frac{\mu_0 SN^2}{4(h-y)^2} i^2$ есть пондеромоторная сила — притяжение вагона к рельсу.

Если в (6.8) $u = u(y)$, то система (6.8) будет системой нелинейных дифференциальных уравнений 3-го порядка.

Ограничимся для простоты случаем, когда напряжение, подаваемое на обмотки электромагнита, пропорционально величине зазора между вагоном и рельсом, т. е.

$$u = u_0 + k(h-y), \quad u_0 = \text{const}, \quad (6.9)$$

где k — коэффициент усиления сигнала датчика смещения вагона.

В положении равновесия вагона

$$y = 0, \quad \dot{y} = 0, \quad i = i_0 \quad (6.10)$$

и из уравнений (6.8) находим требуемые величины сторонней ЭДС и номинальной силы тока

$$u_0 = Ri_0 - kh; \quad i_0^2 = 2Ph/l_0. \quad (6.11)$$

Здесь $l_0 = \mu_0 SN^2 / (2h)$ — коэффициент самоиндукции в положении равновесия вагона, т. е. при $y = 0$.

Считая, что вагон смещается из положения равновесия незначительно $y \ll h$, предположим, что ток в обмотке электромагнита близок к своей номинальной величине i_0 , т. е. $i = i_0 + x$, где $x \ll i_0$.

Тогда с точностью до квадратичных членов по малым величинам x , y можно записать приближенные равенства

$$i^2 \approx i_0^2 + 2i_0x; \quad \frac{1}{(h-y)^2} = \frac{1}{h^2} \left(1 - \frac{y}{h}\right)^{-2} = \\ = \frac{1}{h^2} \left(1 + \frac{2y}{h} + \dots\right) \approx \frac{1}{h^2} + \frac{2y}{h^3}; \quad (6.12)$$

$$\frac{i^2}{(h-y)^2} \approx (i_0^2 + 2i_0x) \left(\frac{1}{h^2} + \frac{2y}{h^3}\right) \approx \frac{i_0^2}{h^2} + \frac{2i_0}{h^2}x + \frac{2i_0^2}{h^3}y.$$

Подставляя (6.12) в (6.8) и учитывая (6.9) и (6.11), отбросим в уравнениях движения нелинейные члены. Такая процедура пренебрежения нелинейными членами называется процедурой линеаризации уравнений движения вблизи положения равновесия. После соответствующих вычислений находим

$$l_0\ddot{x} + Rx + l_0r\ddot{y} + ky = 0, \quad r = \frac{i_0}{h}; \quad (6.13)$$

$$-l_0rx + m\ddot{y} + by - l_0r^2y = 0, \quad m = \frac{P}{g}.$$

Будем искать решение линейных дифференциальных уравнений (6.13) в следующей форме:

$$x = C_1 \exp(\lambda t); \quad y = C_2 \exp(\lambda t), \quad (6.14)$$

где C_1 , C_2 , λ — некоторые постоянные числа, которые требуется определить. Проинтегрируем эти выражения для x , y дважды по времени

$$\dot{x} = C_1\lambda \exp(\lambda t); \quad \ddot{x} = C_1\lambda^2 \exp(\lambda t); \quad \dot{y} = C_2\lambda \exp(\lambda t); \\ \ddot{y} = C_2\lambda^2 \exp(\lambda t).$$

Подставим выражения (6.14) и их производных в уравнения (6.13), сократим полученные равенства на общий множитель $\exp(\lambda t)$ и сгруппируем члены. В результате получим два алгебраических уравнения

$$(l_0\lambda + R)C_1 + (l_0r\lambda + k)C_2 = 0; \\ -l_0rC_1 + (m\lambda^2 + b\lambda - l_0r^2)C_2 = 0. \quad (6.15)$$

Так как эти линейные однородные уравнения относительно C_1, C_2 должны иметь решение, отличное от нулевого, то определитель системы должен равняться нулю

$$\det \begin{vmatrix} l_0\lambda + R & l_0r\lambda + k \\ -l_0r & m\lambda^2 + b\lambda - l_0r^2 \end{vmatrix} = 0. \quad (6.16)$$

Раскрывая определитель (6.16), получаем так называемое характеристическое уравнение для линейной системы (6.13), которое представляет алгебраическое уравнение 3-й степени для λ

$$ml_0\lambda^3 + (bl_0 + mR)\lambda^2 + bR\lambda + l_0r(k - rR) = 0. \quad (6.17)$$

Корни уравнения (6.17) комплексны. Если на комплексной плоскости переменной λ корни уравнения (6.17) $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ лежат в левой полуплоскости, т. е. $\text{Re } \lambda_k < 0$ ($k=1, 2, 3$), то решения (6.13) будут убывать с течением времени и вагон будет стремиться к положению равновесия (6.10).

В таком случае говорят, что положение равновесия является устойчивым, так как при малых отклонениях от положения равновесия в начальный момент времени система будет оставаться вблизи положения равновесия неограниченно большой промежуток времени.

Можно доказать (мы не будем здесь на этом останавливаться), что для того чтобы корни полинома 3-й степени

$$a_0\lambda^3 + a_1\lambda^2 + a_2\lambda + a_3 = 0, \quad a_0 > 0,$$

находились в левой полуплоскости, необходимо и достаточно, чтобы все коэффициенты полином были положительны $a_i > 0$ и, кроме того, выполнялось неравенство

$$a_1a_2 > a_0a_3. \quad (6.18)$$

Условие положительности свободного члена в (6.17) дает ограничение снизу на величину коэффициента усиления

$$k > rR.$$

С другой стороны, условие (6.18) применительно к рассматриваемому случаю и имеет вид

$$bR(bl_0 + mR) > ml_0^2r(k - rR).$$

Следовательно, коэффициент усиления должен быть также ограничен и сверху

$$k < \frac{bR(bl_0 + mR) + ml_0^2r^2R}{ml_0^2r}.$$

Таким образом, условие работоспособности магнитного подвеса поезда имеет вид

$$\frac{i_0 R}{h} < k < \frac{i_0 R}{h} + b \frac{h R (m R + b l_0)}{m l_0^2 i_0}. \quad (6.19)$$

Отметим, что при отсутствии демпфирования в системе $b=0$ условие (6.19) вырождается и подвес оказывается не работоспособным.

7. ПРОСТЕЙШАЯ МОДЕЛЬ ДИНАМО-МАШИНЫ ПЕРЕМЕННОГО ТОКА

Рассмотрим электромеханическую систему, образованную двумя контурами (рис. 7.1). Первый контур, через который протекает известный ток $i_1 = i_1(t)$, вращается внутри другого

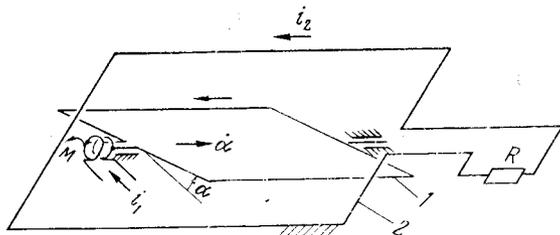


Рис. 7.1. Модель динамо-машины переменного тока:
1 — ротор; 2 — статор

под действием пары сил с постоянным моментом M . Второй контур, в котором индуцируется ток i_2 , является неподвижным. Ток i_2 поступает в цепь с омической нагрузкой R . Емкостей в обоих контурах нет. Описанная электромеханическая система представляет простейшую одновитковую модель динамо-машины переменного тока, причем первый контур обычно называется ротором, а второй статором.

Выберем в качестве механической обобщенной координаты угол поворота ротора вокруг оси вращения α , в качестве электрической координаты ток в статоре i_2 . Ток в роторе i_1 считается заданным. Можно предположить, что ток i_1 создается некоторым достаточно мощным источником, не включаемым здесь в рассмотрение. Аналогично этому в механике рассматривают задачи, в которых движение части тел предпри-

сывается наперед, а вопрос, как оно реализуется, не обсуждается (нестационарные связи, силы, зависящие от времени).

Таким образом, обобщенными координатами рассматриваемой электромеханической системы являются величины α , i_2 , а система имеет полторы степени свободы.

Обозначим через J момент инерции ротора относительно оси вращения, тогда кинетическая энергия ротора, вращающегося около неподвижной оси

$$T = \frac{1}{2} J \dot{\alpha}^2.$$

Пусть L_{11} и L_{22} — коэффициенты самоиндукции соответственно подвижного и неподвижного контуров ($L_{11} = \text{const}$, $L_{22} = \text{const}$); L_{12} — коэффициент взаимной индукции контуров, который зависит от ориентации ротора и статора, т. е. от угла α

$$L_{12} = L_{12}(\alpha).$$

Магнитная энергия системы определяется выражением

$$W_m = \frac{1}{2} L_{11} i_1^2 + L_{12}(\alpha) i_1 i_2 + \frac{1}{2} L_{22} i_2^2.$$

Составим согласно (4.4) функцию Лагранжа для электромеханической системы

$$L = T + W_m = \frac{1}{2} L_{11} i_1^2 + L_{12} i_1 i_2 + \frac{1}{2} L_{22} i_2^2 + \frac{1}{2} J \dot{\alpha}^2.$$

Пренебрегая силами механического вязкого трения, запишем диссипативную функцию системы в виде

$$\Psi = \frac{1}{2} R_2 i_2^2.$$

Возможная мощность пары сил, приложенной к ротору, $N = M \dot{\alpha}$, где $\dot{\alpha}$ — возможная обобщенная скорость ротора. Следовательно, в рассматриваемом случае обобщенная сила будет равна моменту

$$Q_\alpha = M. \quad (7.1)$$

Уравнения Лагранжа—Максвелла имеют вид

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial i_2} \right) + \frac{\partial \Psi}{\partial i_2} = 0; \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\alpha}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \alpha} + \frac{\partial \Psi}{\partial \alpha} = Q_\alpha.$$

Выполняя дифференцирование и учитывая (7.1), находим

$$L_{22} \frac{di_2}{dt} + R_2 i_2 + \frac{\partial L_{12}}{\partial \alpha} \dot{\alpha} i_1 + L_{12} \frac{di_1}{dt} = 0; \quad (7.2)$$

$$J \ddot{\alpha} - \frac{\partial L_{12}}{\partial \alpha} i_1 i_2 = M.$$

Состояние электромеханической системы должно быть найдено из совместного решения системы (7.2), которая представляет систему нелинейных дифференциальных уравнений 3-го порядка относительно переменных i_2 , α . Конечно, решение уравнений (7.2) требует конкретизации вида зависимости коэффициента L_{12} от угла α . В положении, в котором плоскости контуров взаимно ортогональны, коэффициент L_{12} обращается в нуль. В положении, когда плоскости контуров совпадают, коэффициент взаимной индукции L_{12} будет максимален, поэтому примем $L_{12} = L_0 \sin \alpha$, где угол α отсчитывается от положения, в котором плоскости первого и второго контуров взаимно перпендикулярны. Тогда при $i_1 = \text{const}$ уравнения (7.2) будут иметь вид

$$L_{22} \frac{di_2}{dt} + R_2 i_2 + i_1 L_0 \cos \alpha \dot{\alpha} = 0; \quad (7.3)$$

$$J \ddot{\alpha} - i_1 L_0 \cos \alpha \dot{\alpha} = M.$$

Считая сопротивление R_2 весьма большим (большая нагрузка в цепи статора), в первом уравнении (7.3) можно пренебречь членом с $\frac{di_2}{dt}$. Действительно, при больших R_2 характерное время изменения тока i_2 $T = L_{22}/R_2$ оказывается малым, переходный процесс в цепи быстро затухает, и дальнейшее движение протекает так, как если бы индуктивность L_{22} в первом уравнении (7.3) равнялась нулю. Поэтому при больших R_2 можно приближенно написать

$$i_2 = - \frac{L_{12} i_1}{R_2} \cos \alpha \dot{\alpha}. \quad (7.4)$$

Подставляя (7.4) во 2-е уравнение (7.3), получаем следующее дифференциальное уравнение вращения ротора динамо-машины:

$$J \ddot{\alpha} + \frac{L_0^2 i_1^2}{R_2} \cos^2 \alpha \dot{\alpha} = M. \quad (7.5)$$

Уравнение (7.5) может быть записано в форме Коши в виде системы 2-х дифференциальных уравнений 1-го порядка

$$\begin{aligned} \dot{\alpha} &= \Omega; \\ \dot{\Omega} &= \frac{M}{J} - \frac{L_0^2 i_1^2}{JR_2} \cos^2 \alpha \Omega. \end{aligned} \quad (7.6)$$

Если разделить 2-е уравнение (7.6) на 1-е, то получается 1 дифференциальное уравнение 1-го порядка, определяющее угловую скорость вращения ротора как функцию угла поворота $\alpha \Omega = \Omega(\alpha)$:

$$\frac{d\Omega}{d\alpha} = \frac{MR_2 - L_0^2 i_1^2 \cos^2 \alpha \Omega}{JR_2 \Omega}. \quad (7.7)$$

Правая часть уравнения (7.7) является периодической функцией угла α , поэтому уравнение (7.7) достаточно исследовать на одном полуобороте ротора, т. е. при $-\pi/2 \leq \alpha \leq \pi/2$.

При малых Ω , как следует из (7.7), $\frac{d\Omega}{d\alpha}$ положительно и угловая скорость ротора возрастает, т. е. $\Omega(-\pi/2) > \Omega(\pi/2)$.

При больших $\Omega(0)$ производная $\frac{d\Omega}{d\alpha}$ оказывается отрицательной и функция $\Omega(\alpha)$ будет убывающей (за исключением небольших интервалов в окрестности точек $\alpha = -\pi/2$ и $\alpha = \pi/2$, где $\Omega(\alpha)$ возрастает), поэтому $\Omega(\pi/2) < \Omega(-\pi/2)$.

Если на плоскости α, Ω (рис. 7.2) построить кривую

$$\Omega = \frac{MR_2}{L_0^2 i_1^2 \cos^2 \alpha}, \quad (7.8)$$

то в областях, лежащих ниже этой кривой, $\frac{d\Omega}{d\alpha} > 0$, а в областях, лежащих выше, $\frac{d\Omega}{d\alpha} < 0$. Следовательно, решения уравнения (7.7) будут иметь вид, изображенный на рис. 7.2. Из проведенного анализа вытекает, что уравнение (7.7) имеет единственное периодическое решение, у которого $\Omega(-\pi/2) < \Omega(\pi/2)$. К этому решению стремятся все остальные траектории уравнения (7.7), поэтому указанное периодическое решение называется предельным циклом уравнения (7.7).

Для оценки параметров периодического решения можно воспользоваться теоремой об изменении кинетической энергии, которая утверждает, что изменение кинетической энергии

гии, равно работе активных сил. Так как $\Omega(-\pi/2) = \Omega(\pi/2)$, то кинетическая энергия в начале и в конце периодического решения оказывается одинаковой и, следовательно, на пе-

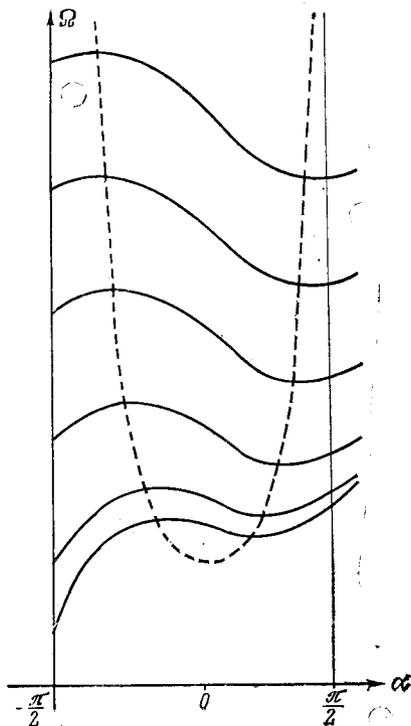


Рис. 7.2. Интегральные кривые уравнения (7.7)

риодическом решении работа момента M будет равна работе, совершаемой моментом пондеромоторных сил $\frac{L_0^2 i_1^2}{R_2} \cos^2 \alpha \Omega$.

Работа, совершаемая моментом M за один оборот ротора,

$$A_1 = \int_0^{2\pi} M d\alpha = 2\pi M. \quad (7.9)$$

Для подсчета работы момента пондеромоторных сил необходимо вычислить интеграл

$$A_2 = \int_0^{2\pi} \frac{L_0^2 i_1^2}{R_2} \cos^2 \alpha \Omega(\alpha) d\alpha. \quad (7.10)$$

Для приближенной оценки (7.10) вынесем из-под знака интеграла среднее значение скорости вращения ротора, тогда

$$A_2 \approx \Omega_{\text{ср}} \frac{L_0^2 i_1^2}{R_2} \int_0^{2\pi} \cos^2 \alpha d\alpha = \pi \Omega_{\text{ср}} \frac{L_0^2 i_1^2}{R_2}. \quad (7.11)$$

Приравняв работы (7.9) и (7.11), получаем следующую приближенную формулу для угловой скорости вращения ротора в установившемся режиме работы динамо-машины:

$$\Omega_{\text{ср}} = \frac{2MR_2}{L_0^2 i_1^2}. \quad (7.12)$$

Подставляя (7.12) в (7.4), получаем величину амплитуды тока, вырабатываемой динамо-машиной:

$$i_2 = \frac{2M}{L_0 i_1}. \quad (7.13)$$

Формулы (7.12), (7.13) дают решение задачи об определении основных характеристик динамо-машины переменного тока: средней угловой скорости вращения ротора и амплитуды вырабатываемого тока.

Конечно, в реальных конструкциях генераторов обычно применяются более сложные схемы, например машины с самовозбуждением, в которых индуцированный ток i_2 вводится в первый контур.

Кроме того, данная модельная задача оставляет без рассмотрения важные особенности реальных машин, связанные с существованием в них намагнитенных сердечников. Вместе с тем эта задача наглядно демонстрирует достоинства метода Лагранжа, позволяющего получить дифференциальные уравнения движения и оценить основные характеристики системы.

8. РАЗВЕТВЛЕННЫЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ЦЕПИ

Методика Лагранжа может быть использована и для составления уравнений разветвленных электрических цепей.

Разветвленная электрическая цепь состоит из участков, через любое сечение которых течет один и тот же ток, все эти участки располагаются между точками (узлами), в которых сходится не менее 3-х ветвей.

Число независимых уравнений m , необходимых для описания системы, определяется выражением

$$m = p - (q - 1),$$

где p — количество ветвей электрической схемы; q — число узлов. Для схемы на рис. 8.1 $p = 5$, $q = 3$, следовательно,

$$m = 5 - (3 - 1) = 3.$$

В большинстве случаев сложную цепь можно изобразить на плоскости так, чтобы она была сочетанием элементарных контуров, не содержащих внутренних ветвей (в примере, изображенном на рис. 8.1, число контуров $m = 3$).

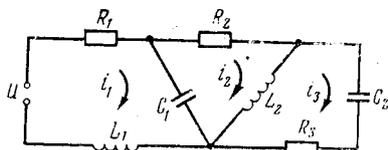


Рис. 8.1. Разветвленная электрическая цепь

Зададим в каждом контуре произвольно направленные контурные токи $i_1 = \dot{e}_1$, $i_2 = \dot{e}_2$, $i_3 = \dot{e}_3$, при этом ток, протекающий через индуктивность L_1 , есть i_1 , а через L_2 — ток $i_2 - i_3$. Тогда магнитная энергия

$$W_m = \frac{1}{2} L_1 i_1^2 + \frac{1}{2} L_2 (i_2 - i_3)^2. \quad (8.1)$$

Энергия электрического поля, локализованного между обкладками конденсаторов C_1 и C_2 :

$$W_e = \frac{1}{2} \frac{(e_2 - e_1)^2}{C_1} + \frac{e_3^2}{2C_2}. \quad (8.2)$$

Электрическая диссипативная функция

$$\Psi = \frac{1}{2} R_1 i_1^2 + \frac{1}{2} R_2 i_2^2 + \frac{1}{2} R_3 i_3^2. \quad (8.3)$$

Элементарная мощность ЭДС u на возможном токе i_1^B равна

$$N = ui_1^B. \quad (8.4)$$

Сторонние ЭДС u_1, u_2, u_3 , отвечающие зарядам e_1, e_2, e_3 , определяются соотношением

$$N = u_1 i_1^B + u_2 i_2^B + u_3 i_3^B. \quad (8.5)$$

Сравнив (8.5) и (8.4), получим

$$u_1 = u, \quad u_2 = u_3 = 0. \quad (8.6)$$

Лагранжиан рассматриваемой электрической цепи имеет вид

$$L = W_m - W_e = \frac{1}{2} L_1 i_1^2 + \frac{1}{2} L_2 (i_2 - i_3)^2 - \frac{(e_2 - e_1)^2}{2C_1} - \frac{e_3^2}{2C_2}. \quad (8.7)$$

Дифференцируя (8.7) по зарядам и токам и подставляя найденные частные производные в уравнения Лагранжа—Максвелла

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial i_k} \right) - \frac{\partial L}{\partial e_k} + \frac{\partial \Psi}{\partial i_k} = u_k, \quad k = 1, 2, 3,$$

получаем

$$L_1 \ddot{e}_1 + R_1 \dot{e}_1 + \frac{1}{C_1} (e_1 - e_2) = u;$$

$$L_2 (\ddot{e}_2 - \ddot{e}_3) + R_2 \dot{e}_2 + \frac{1}{C_1} (e_2 - e_1) = 0;$$

$$L_3 (\ddot{e}_3 - \ddot{e}_2) + R_3 \dot{e}_3 + \frac{1}{C_2} e_3 = 0.$$

9. ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ

Рассмотрение электромеханических систем электростатического типа начнем с конденсаторного микрофона, схема которого приведена на рис. 9.1. Основной частью микрофона является плоский конденсатор, одна из пластин которого представляет упругую мембрану. Звуковые волны вызывают колебания мембраны. Вследствие ее смещения емкость конденсатора изменяется. При этом в электрической цепи, образованной емкостью $C(x)$, сопротивлением R и источником постоянной ЭДС u , возникает переменный ток. Сигнал на вход усилителя снимается с омического сопротивления R .

Для описания упругих свойств мембраны используем модель абсолютно твердой пластины, соединенной пружиной

жесткости K с неподвижной обкладкой конденсатора. Пусть расстояние между пластинами конденсатора в недеформированном состоянии пружины будет h . Массу подвижной пластины обозначим через m , а силу, действующую на эту пластину при колебаниях воздуха, — через $F(t)$.

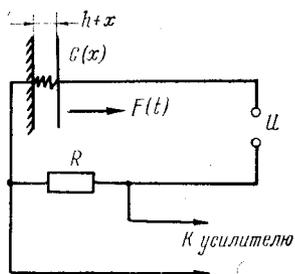


Рис. 9.1. Схема конденсаторного микрофона

Введем ось X , ортогональную плоскости пластин конденсатора, в качестве начала отсчета на оси возьмем точку O , в которой находится пластина в недеформированном состоянии пружины. Пусть x — координата смещения подвижной пластины из точки O .

В качестве обобщенной координаты рассматриваемой электромеханической системы выбираем заряд конденсатора e и величину смещения подвижной пластины x .

Кинетическая энергия подвижной пластины при поступательном движении

$$T = \frac{1}{2} m \dot{x}^2.$$

Потенциальная энергия пружины

$$\Pi = \frac{1}{2} K x^2.$$

Пренебрежем индуктивностью рассматриваемой электрической цепи и предположим, что магнитная энергия равна нулю.

Энергия электрического поля

$$W_e = \frac{e^2}{2C(x)}. \quad (9.1)$$

Для вычисления емкости между пластинами используем известную формулу плоского конденсатора

$$C(x) = \frac{\epsilon_0 \epsilon S}{d},$$

где ϵ_0 — диэлектрическая проницаемость вакуума; ϵ — относительная диэлектрическая проницаемость диэлектрика меж-

ду обкладками конденсатора; S — площадь пластин конденсатора; d — расстояние между ними. В рассматриваемом случае $d = h + x$, а при $x = 0$ емкость $C_0 = \epsilon_0 \epsilon S / h$. Отсюда $\epsilon_0 \epsilon S = C_0 h$, поэтому

$$C(x) = \frac{C_0 h}{h + x}.$$

Подставим это значение в выражение для энергии электрического поля (9.1)

$$W_e = \frac{e^2 (h + x)}{2 C_0 h}.$$

Диссипативная функция системы

$$\Psi = \frac{1}{2} b \dot{x}^2 + \frac{1}{2} R \dot{e}^2, \quad (9.2)$$

где b — коэффициент вязкого трения при движении подвижной пластины.

Обобщенные силы находим из выражения для мощности ЭДС источника и силы $F(t)$ на возможном токе \dot{e}^B и возможной скорости \dot{x}^B

$$N = u \dot{e}^B + F(t) \dot{x}^B.$$

Следовательно, $Q_e = u$, $Q_x = F(t)$.

Составим функцию Лагранжа

$$L = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 - \frac{1}{2} K x^2 - \frac{e^2}{2h C_0} (h + x). \quad (9.3)$$

Уравнения Лагранжа—Максвелла с учетом независимости лагранжиана от тока в рассматриваемом случае имеют вид

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial L}{\partial x} + \frac{\partial \Psi}{\partial \dot{x}} = Q_x; \quad - \frac{\partial L}{\partial e} + \frac{\partial \Psi}{\partial \dot{e}} = Q_e. \quad (9.4)$$

Вычисляя соответствующие производные от функции Лагранжа (9.3) и диссипативной функции (9.2) и подставляя эти данные в (9.4), получим

$$m \ddot{x} + b \dot{x} + Kx + \frac{1}{2} \frac{e^2}{h C_0} = F(t); \quad (9.5)$$

$$R \dot{e} + \frac{e}{h C_0} (h + x) = u.$$

Положение равновесия x_0 , e_0 исследуемой электромеханической системы при отсутствии внешнего воздействия $F(t) \equiv 0$

определяется из (9.5), где следует положить $\dot{e}=0$, $\dot{x}=0$, $\ddot{x}=0$:

$$Kx_0 + \frac{1}{2hc_0} e_0^2 = 0; \quad e_0(h+x_0) = uhC_0.$$

Отсюда находим уравнение для равновесного значения x_0

$$(x_0+h)^2x_0 + u_0 = 0, \quad u_0 = \frac{u^2hC_0}{2K}. \quad (9.6)$$

Координата неподвижной пластины конденсатора — h , поэтому физически могут быть реализованы только такие равновесные положения подвижной пластины, у которых $x_0 > -h$. Таким образом, действительные корни кубического уравнения (9.6) должны удовлетворять неравенству $x_0 > -h$. Это условие накладывает ограничение на физические параметры системы. Действительно, запишем уравнение (9.6) в виде

$$f(x_0) = -u_0.$$

График функции $y = f(x_0) \equiv (x_0+h)^2x_0$ приведен на рис. 9.2. Функция $f(x_0)$ положительна при $x_0 > 0$ и отрицательна при $x_0 < 0$. Она пересекает ось x_0 в точке $x_0 = 0$ и касается оси x_0 при $x_0 = -h$, так как в точке $x_0 = -h$ уравнение $f(x_0) = 0$ имеет двойной корень. Следовательно, на отрезке $-h \leq x_0 \leq 0$ функция $f(x_0)$ имеет минимум. Для нахождения этого минимума подсчитаем производную

$$\frac{df}{dx_0} = 2(x_0+h)x_0 + (x_0+h)^2 = (x_0+h)(3x_0+h).$$

Производная $\frac{df}{dx_0}$ обращается в нуль при $x_0 = -h$, где имеется максимум, и при $x_0 = -\frac{h}{3}$, где, следовательно, имеется минимум, при этом его величина оказывается равной $f\left(-\frac{h}{3}\right) = -\frac{4h^3}{27}$.

Для того чтобы кубическая парабола $y = f(x_0)$ пересекалась с прямой $y = -u_0$ при $-h \leq x_0 \leq 0$, величина найденного минимума должна быть меньше $-u_0$, т. е.

$$-\frac{4h^3}{27} < -u_0. \quad (9.7)$$

Таким образом, из (9.7) вытекает, что напряжение источника питания электрической цепи конденсаторного микрофона должно быть ограничено сверху

$$u^2 < \frac{8h^2K}{27C_0}.$$

В этом случае кривая $y=f(x_0)$ дважды пересекается на отрезке $-h \leq x_0 \leq 0$ с прямой $y=-u_0$, т. е. мембрана конденсаторного микрофона будет иметь два положения равновесия $x_0=x_1^*$, $x_0=x_2^*$ (рис. 9.2), причем, как показывает анализ, одно из этих положений оказывается устойчивым, а другое неустойчивым.

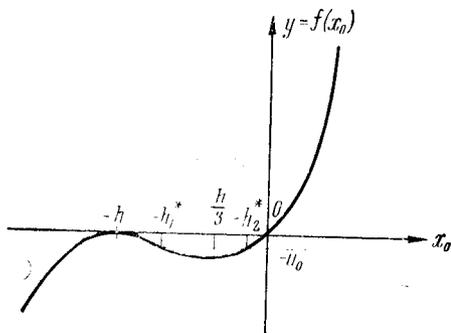


Рис. 9.2. Определение положений равновесия мембраны конденсаторного микрофона

Интересным примером электромеханической системы электростатического типа является так называемый пассивный одноосный электростатический подвес, который можно использовать в различных приборах для подвеса проводящих тел без какого-либо контакта с окружающими телами. Простейшая схема пассивного электростатического подвеса приведена на рис. 9.3.

Электрическая цепь системы образована индуктивностью L_1 , плоским конденсатором $C(y)$, омическим сопротивлением R . ЭДС внешнего источника, подключенного к цепи, изменяется по синусоидальному закону

$$u = u_0 \sin \omega t,$$

где u_0 — амплитуда; ω — частота.

Верхняя пластина конденсатора является неподвижной, а нижняя — подвижная пластина — должна удерживаться на некотором расстоянии от верхней в положении, когда сила веса пластины уравновешивается пондеромоторной силой притяжения, действующей на проводник в электрическом поле, созданном между обкладками конденсатора.

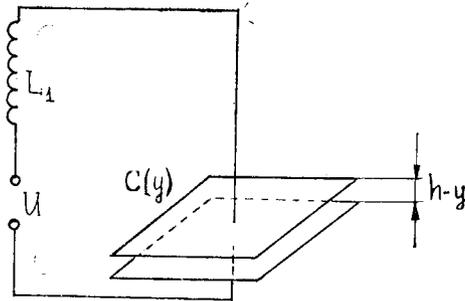


Рис. 9.3. Пассивный электростатический подвес

Обозначим через m массу пластины и введем вертикальную ось Y . За начало отсчета на оси Y выбираем точку O , в которой находится подвижная пластина в тот момент, когда расстояние между обкладками конденсатора равно h . Величина номинального зазора h будет указана ниже.

В качестве обобщенных координат электромеханической системы выбираем смещение подвижной пластины y из точки O и заряд на конденсаторе e .

При поступательном движении подвижной пластины вдоль оси Y кинетическая энергия

$$T = \frac{1}{2} m \dot{y}^2.$$

Потенциальная энергия силы тяжести

$$\Pi = mgy.$$

Магнитная энергия электрической цепи

$$W_m = \frac{1}{2} L_1 \dot{e}^2.$$

Энергия электрического поля находится аналогично рассмотренному выше случаю конденсаторного микрофона с по-

мощью формулы для емкости плоского конденсатора и оказывается равной

$$W_e = \frac{e^2}{2S} (h - y),$$

где $S = \epsilon \epsilon_0 s$, s — площадь пластины конденсатора; $h - y$ — зазор между пластинами.

Составим лагранжиан системы

$$L = T - \Pi + W_m - W_e = \frac{1}{2} m \dot{y}^2 - mgy + \frac{1}{2} L_1 \dot{e}^2 - \frac{e^2}{2S} (h - y).$$

Диссипативная функция имеет вид

$$\Psi = \frac{1}{2} b \dot{y}^2 + \frac{1}{2} R \dot{e}^2,$$

где b — коэффициент демпфирования при движении подвижной пластины.

Учитывая, что обобщенные неконсервативные силы механической природы в рассматриваемом случае отсутствуют, запишем уравнения Лагранжа—Максвелла

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{e}} \right) - \frac{\partial L}{\partial e} + \frac{\partial \Psi}{\partial \dot{e}} = u; \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} \right) - \frac{\partial L}{\partial y} + \frac{\partial \Psi}{\partial \dot{y}} = 0.$$

Выполняя операции дифференцирования, получаем уравнения движения твердого тела в электростатическом подвесе

$$L_1 \ddot{e} + R \dot{e} + \frac{(h-y)}{S} e = u_0 \sin \omega t; \tag{9.8}$$

$$m \ddot{y} + b \dot{y} + mg - \frac{e^2}{2S} = 0.$$

Система уравнений (9.8) представляет систему нелинейных неавтономных дифференциальных уравнений 4-го порядка относительно переменных e , y , нахождение аналитического решения этой системы не представляется возможным.

Проведем приближенное исследование уравнений (9.8) в случае, когда частота переменного тока ω велика по сравнению с частотами механического движения пластины. Другими словами, процессы электрического движения в системе протекают гораздо быстрее, чем механические, т. е. за период изменения тока $\frac{2\pi}{\omega}$ координата y не успевает существенно измениться. В этом случае можно решить 1-е уравнение (9.8), считая в нем переменную y постоянной величиной. Та-

кое предположение радикально упрощает задачу, так как при постоянном y 1-е уравнение (9.8) представляет линейное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами, решение которого не представляет трудностей. Действительно, разделим 1-е уравнение (9.8) на L_1 и введем обозначения

$$\eta = \frac{R_1}{2L_1}; \quad \xi^2 = \frac{h-y}{SL_1}; \quad U = \frac{u_0}{L_1}.$$

Следовательно, уравнение для заряда на конденсаторе можно записать в виде

$$\ddot{e} + 2\eta\dot{e} + \xi^2 e = U \sin \omega t. \quad (9.9)$$

Так как полученное линейное уравнение является неоднородным уравнением, то его решение состоит из двух частей: e_1 — общего решения однородного уравнения и e_2 — частного решения неоднородного уравнения. Общее уравнение e_1 удовлетворяет однородному уравнению

$$\ddot{e} + 2\eta\dot{e} + \xi^2 e = 0. \quad (9.10)$$

Общее решение уравнения (9.10) в зависимости от соотношения между величинами η и ξ выражается в одной из трех форм

$$\begin{aligned} \eta < \xi, \quad e_1 &= \exp(-\eta t) (C_1 \cos \sqrt{\xi^2 - \eta^2} t + C_2 \sin \sqrt{\xi^2 - \eta^2} t); \\ \eta = \xi, \quad e_1 &= \exp(-\eta t) (C_1 t + C_2); \\ \eta > \xi, \quad e_2 &= \exp(-\eta t) (C_1 \exp \sqrt{\eta^2 - \xi^2} t + C_2 \exp(-\sqrt{\eta^2 - \xi^2} t)). \end{aligned} \quad (9.11)$$

Здесь C_1, C_2 — произвольные постоянные, определяемые из условий, заданных в начальный момент времени.

Из соотношений (9.11) следует, что в любом случае из-за наличия множителя $\exp(-\eta t)$ общее решение стремится к нулю с возрастанием времени, т. е. затухает. При малых значениях коэффициента затухания $\eta < \xi$ затухающее движение носит колебательный характер, а при больших $\eta > \xi$ затухание так велико, что движение не является колебательным. Таким образом, по истечении достаточно большого времени общее решение (9.11) однородного уравнения становится сколь угодно малым и им можно пренебречь.

Перейдем к отысканию частного решения уравнения (9.9). Это решение называют вынужденным движением или вынужденным колебанием, так как это движение обуславливается действием внешней силы, стоящей в правой части (9.9).

Частное решение (9.9) будем искать в виде

$$e_2 = A_1 \cos \omega t + A_2 \sin \omega t. \quad (9.12)$$

Постоянные A_1 и A_2 подлежат определению из условия, что при подстановке (9.12) в (9.9) должно получиться тождество. Вычислим производные по времени от e_2

$$\dot{e}_2 = -\omega A_1 \sin \omega t + \omega A_2 \cos \omega t; \quad (9.13)$$

$$\ddot{e}_2 = -\omega^2 A_1 \cos \omega t - \omega^2 A_2 \sin \omega t.$$

Подставим значение e_2 и его производных в (9.9) и соберем члены при $\sin \omega t$ и $\cos \omega t$. Получим тождество

$$\begin{aligned} & [(\xi^2 - \omega^2)A_1 + 2\eta\omega A_2] \cos \omega t + \\ & + [-2\eta\omega A_1 + (\xi^2 - \omega^2)A_2 - U] \sin \omega t = 0. \end{aligned}$$

Так как синус и косинус переменного аргумента не равняются нулю одновременно, то полученное тождество может выполняться только тогда, когда каждое из постоянных в квадратных скобках равно нулю, т. е. при

$$(\xi^2 - \omega^2)A_1 + 2\eta\omega A_2 = 0; \quad -2\eta\omega A_1 + (\xi^2 - \omega^2)A_2 = U. \quad (9.14)$$

Решая систему 2-х линейных алгебраических уравнений (9.14) относительно неизвестных A_1 и A_2 , получаем

$$A_1 = \frac{-2\eta\omega U}{(\xi^2 - \omega^2)^2 + 4\eta^2\omega^2}; \quad A_2 = \frac{(\xi^2 - \omega^2) U}{(\xi^2 - \omega^2)^2 + 4\eta^2\omega^2}. \quad (9.15)$$

Чтобы получить окончательную форму вынужденного решения (9.9), преобразуем (9.12) следующим образом:

$$\begin{aligned} e_2 &= \sqrt{A_1^2 + A_2^2} \left(\frac{A_1}{\sqrt{A_1^2 + A_2^2}} \cos \omega t + \frac{A_2}{\sqrt{A_1^2 + A_2^2}} \sin \omega t \right) = \\ &= \sqrt{A_1^2 + A_2^2} (\sin \varphi \cos \omega t + \cos \varphi \sin \omega t) = A \sin(\omega t + \varphi); \quad (9.16) \\ \sin \varphi &= \frac{A_1}{\sqrt{A_1^2 + A_2^2}}; \quad \cos \varphi = \frac{A_2}{\sqrt{A_1^2 + A_2^2}}; \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{A_1}{A_2}. \end{aligned}$$

Здесь $A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2}$ — амплитуда вынужденных колебаний; φ — сдвиг фаз между внешней силой и вынужденным колебанием (9.16).

Учитывая выражение (9.15), получаем окончательную форму частного решения уравнения (9.9)

$$e = A \sin(\omega t + \varphi); \quad A = \frac{U}{\sqrt{(\xi^2 - \omega^2)^2 + 4\eta^2\omega^2}}. \quad (9.17)$$

Поставим найденное решение (9.17) во 2-е уравнение (9.8)

$$m\dot{y} + b\dot{y} + mg - \frac{A^2}{2S} \sin^2(\omega t + \varphi) = 0. \quad (9.18)$$

Функция $\sin^2(\omega t + \varphi) = 1/2 - 1/2 \cos(2\omega t + 2\varphi)$ представляется в виде суммы постоянной составляющей и слагаемого, быстро колеблющегося по синусоидальному закону с частотой 2ω . При исследовании медленного движения y быстро колеблющееся слагаемое в (9.18) можно отбросить и заменить $\sin^2(\omega t + \varphi)$ его средним значением, равным $1/2$. В результате для описания механического движения подвижной пластины получается нелинейное дифференциальное уравнение 2-го порядка относительно переменной y

$$m\ddot{y} + b\dot{y} + mg - f(h-y) = 0; \quad (9.19)$$

$$f(h-y) = \frac{A^2}{4S} = \frac{U^2}{4S[(\xi^2 - \omega^2)^2 + 4\eta^2\omega^2]} = \frac{u_0^2}{4S \left[\left(\frac{h-y}{S} - L_1\omega^2 \right)^2 + R^2\omega^2 \right]}.$$

Потребуем, чтобы точка $y=0$ была положением равновесия нижней пластины конденсатора. Тогда, полагая в (9.19) $y=0$, $\dot{y}=0$, $\ddot{y}=0$, получаем уравнение для определения номинального зазора h в пассивном электростатическом подвесе

$$mg = f(h) = \frac{u_0^2}{4 \left[\left(\frac{h}{S} - L_1\omega^2 \right)^2 + R^2\omega^2 \right] S}. \quad (9.20)$$

График функции $f(h)$ построен на рис. 9.4. На отрезке $0 < h < SL_1\omega^2$ функция $f(h)$ возрастает, а затем при $SL_1\omega^2 < h < \infty$ функция $f(h)$ монотонно убывает и при $h \rightarrow \infty$ стремится к нулю. Следовательно, максимум функции $f(h)$ достигается при $h = SL_1\omega^2$, а величина этого максимума равна

$$f_{\max} = f(SL_1\omega^2) = \frac{u_0^2}{4SR^2\omega^2}. \quad (9.21)$$

Для того чтобы (9.20) имело решение, необходимо, чтобы график функции $f(h)$ пересекался с прямой $f = mg$. Пересечение будет иметь место, если $mg < f_{\max}$ или

$$mg < \frac{u_0^2}{4SR^2\omega^2}. \quad (9.22)$$

Таким образом, вес пластины, которая может быть подвешена в электростатическом подвесе, ограничен сверху величиной f_{max} . Будем считать, что условие (9.22) выполнено, и предположим, что прямая $f=mg$ пересекается с графиком функции $f(h)$ в 2-х точках $h=h_1, h=h_2$ (рис. 9.4). При этом уравнение (9.20) будет иметь 2 положительных корня, а электростатический подвес — 2 положения равновесия.

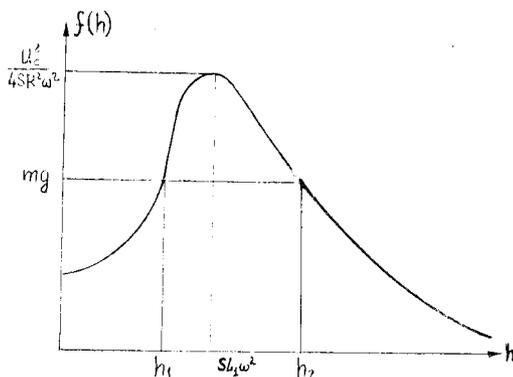


Рис. 9.4. График функции $f(h)$

Предположим, что отклонения пластины от положения равновесия малы, тогда на основании формулы Тейлора можно записать

$$f(h_k - y) \approx f(h_k) - \left. \frac{\partial f}{\partial h} \right|_{h=h_k} \cdot y, \quad k=1, 2. \quad (9.23)$$

Подставляя (9.23) в (9.19) и учитывая условие равновесия (9.20), приходим к линейным дифференциальным уравнениям 2-го порядка с постоянными коэффициентами

$$m\ddot{y} + b\dot{y} + \left. \frac{\partial f}{\partial h} \right|_{h=h_k} \cdot y = 0. \quad (9.24)$$

Решение уравнения (9.24) будет убывать, если все коэффициенты уравнения (9.24) положительны. Таким образом, условие устойчивости положения равновесия

$$\left. \frac{\partial f}{\partial h} \right|_{h=h_k} > 0.$$

Так как при $h=h_1$ функция $f(h)$ возрастает, то условие устойчивости равновесия нижней пластины выполнено при $h=h_1$. Положение равновесия $h=h_2$ оказывается неустойчивым.

Физический смысл полученного результата заключается в следующем. Пусть пластина находится в положении равновесия $h=h_1$. При уменьшении зазора между пластинами емкость конденсатора возрастает, а ток в цепи уменьшается. Сила притяжения между пластинами ослабевает и становится меньше веса пластины, которая в результате возвращается в положение равновесия. Наоборот, при увеличении зазора ток в цепи возрастает, сила притяжения увеличивается и становится больше силы веса. Возникшая подъемная сила возвращает пластину в положение равновесия. Аналогичное рассуждение, проведенное для другого положения равновесия $h=h_2$, показывает, что положение $h=h_2$ оказывается неустойчивым.

Таким образом, в пассивном электростатическом подвесе в окрестности точки $h=h_1$ колебательный контур выполняет роль регулятора, который автоматически поддерживает неизменным расстояние между пластинами подвеса, причем жесткость такого подвеса оказывается равной производной $\left. \frac{\partial f}{\partial h} \right|_{h=h_1}$.

Однако рассмотренная схема хорошо работает лишь при наличии демпфирования $b\dot{y}$ в уравнениях механического движения. При отсутствии демпфирования уравнение малых колебаний (9.24) представляет уравнение незатухающих колебаний, и, следовательно, нижняя пластина конденсатора будет совершать периодическое движение в окрестности положения равновесия $h=h_1$.

В заключение рассмотрения электромеханических систем электростатического типа остановимся на активном одноосном электростатическом подвесе, который может использоваться, например, для удержания во взвешенном состоянии магнитного барабана в запоминающем устройстве ЭЦВМ (рис. 9.5). Магнитный барабан представляет собой цилиндр из немагнитного материала с ферромагнитным покрытием. Ячейки памяти располагаются вдоль образующей цилиндра. Информация снимается с помощью магнитных головок, установленных у поверхности барабана параллельно его образующей. На оси барабана установлен проводящий диск, который находится в электрическом поле, созданном системой электродов S_1, S_2, S_3, S_4 . Электроды S_3 и S_4 заземлены, а на элект-

роды S_1 и S_2 подается напряжение u_1 , u_2 , чтобы пондеромоторные силы, действующие на диск в электрическом поле, обеспечивали бесконтактный подвес барабана вдоль вертикальной оси.

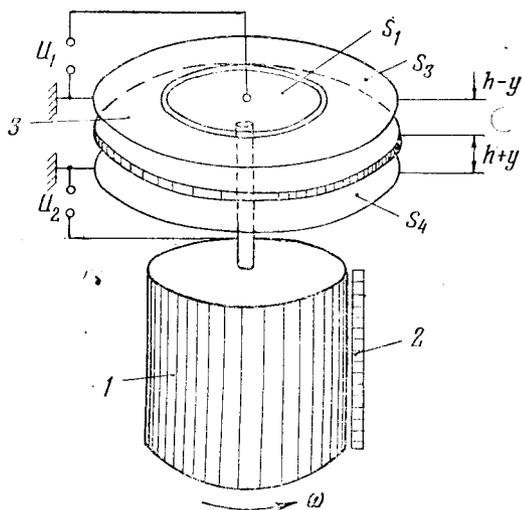


Рис. 9.5. Активный электростатический подвес магнитного барабана: 1 — барабан; 2 — считывающие магнитные головки; 3 — диск; S_1 , S_2 , S_3 , S_4 — электроды

Рассмотрим конструкцию, в которой площади всех электродов подвеса S_1 , S_2 , S_3 , S_4 одинаковы и равны s .

Обозначим через y смещение барабана вдоль вертикальной оси из положения, в котором диск находится на одинаковом расстоянии от верхнего и нижнего электродов. Будем рассматривать электрод S_k и близлежащую часть поверхности диска как плоский конденсатор с емкостью C_k , зависящей от положения диска (рис. 9.6). В силу равенства площадей электродов из формулы для емкости плоского конденсатора получаем

$$C_1 = C_3 = \frac{S}{h-y}; \quad C_2 = C_4 = \frac{S}{h+y}.$$

Здесь $S = \epsilon \epsilon_0 s$; ϵ_0 — диэлектрическая проницаемость; ϵ — относительная диэлектрическая проницаемость диэлектрика между обкладками конденсатора; s — площадь электродов.

В качестве обобщенных координат системы выбираем смещение y диска вдоль вертикальной оси и заряды e_1, e_2 соответственно на 1-м и 2-м электродах.

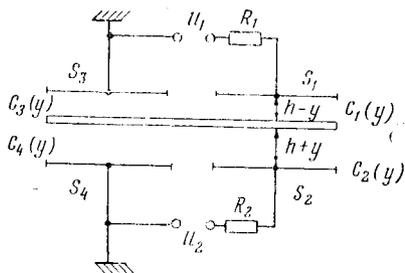


Рис. 9.6. Схема одноосного активно-пассивного электростатического подвеса: S_1, S_2, S_3, S_4 — электроды

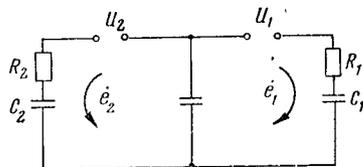


Рис. 9.7. Электрические цепи активно-пассивного электростатического подвеса

Обозначим через m суммарную массу диска и барабана и запишем выражение для кинетической энергии поступательного движения

$$T = \frac{1}{2} m \dot{y}^2.$$

Потенциальная энергия силы веса $\Pi = mgy$.

Магнитную энергию системы примем равной нулю, так как индуктивностью цепей электростатического подвеса будем пренебрегать.

Для нахождения энергии электрического поля, локализованного в пространстве между электродами и поверхностью диска, рассмотрим эквивалентную схему цепей подвеса, изображенную на рис. 9.7, где $C(y)$ представляет суммарную емкость, образованную электродами S_3, S_4 . Следовательно,

$$C(y) = C_3 + C_4 = \frac{S}{h-y} + \frac{S}{h+y} = \frac{2Sh}{h^2 - y^2}.$$

Через емкость $C(y)$ течет ток, равный $\dot{e}_1 + \dot{e}_2$, поэтому заряд на конденсаторе $C(y)$ оказывается равным $e_1 + e_2$. Таким образом, электрическая энергия определяется выражением

$$W_e = \frac{e_1^2}{2C_1} + \frac{e_2^2}{2C_2} + \frac{(e_1 + e_2)^2}{2C(y)} =$$

$$= \frac{e_1^2}{2S} (h-y) + \frac{e_2^2}{2S} (h+y) + \frac{(e_1+e_2)^2}{4Sh} (h^2-y^2).$$

Функция Лагранжа имеет вид

$$L = T - \Pi - W_e = \frac{1}{2} m \dot{y}^2 - mgy - \frac{e_1^2}{2S} (h-y) - \\ - \frac{e_2^2}{2S} (h+y) - \frac{(e_1+e_2)^2}{4Sh} (h^2-y^2).$$

Пренебрежем диссипативными силами механической природы и составим выражение для диссипативной функции

$$\Psi = \frac{1}{2} R_1 \dot{e}_1^2 + \frac{1}{2} R_2 \dot{e}_2^2,$$

где R_1, R_2 — омические сопротивления цепей подвеса (рис. 9.7).

Учитывая, что обобщенные неконсервативные силы механической природы отсутствуют, а магнитная энергия системы равна нулю, запишем уравнения Лагранжа—Максвелла

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \dot{e}_1} - \frac{\partial L}{\partial e_1} = u_1; \quad \frac{\partial \Psi}{\partial \dot{e}_2} - \frac{\partial L}{\partial e_2} = u; \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} \right) - \frac{\partial L}{\partial y} + \frac{\partial \Psi}{\partial \dot{y}} = 0.$$

Выполняя операции дифференцирования, получаем

$$R_1 \dot{e}_1 + \frac{e_1}{S} (h-y) + \frac{(e_1+e_2)}{2Sh} (h^2-y^2) = u_1; \\ R_2 \dot{e}_2 + \frac{e_2}{S} (h+y) + \frac{(e_1+e_2)}{2Sh} (h^2-y^2) = u_2; \quad (9.25) \\ m \ddot{y} + mg - \frac{e_1^2}{2S} + \frac{e_2^2}{2S} - \frac{(e_1+e_2)^2}{2Sh} y = 0.$$

Уравнения движения электростатического подвеса (9.25) образуют систему нелинейных дифференциальных уравнений 4-го порядка.

В случае, когда омические сопротивления R_1 и R_2 в цепях подвеса малы, членами $R_1 \dot{e}_1, R_2 \dot{e}_2$ в первых двух уравнениях (9.25) можно пренебречь. При этом вместо дифференциаль-

ных получаются конечные соотношения, связывающие заряды e_1 , e_2 с напряжениями на электродах u_1 , u_2 :

$$\frac{h-y}{S} e_1 + \frac{h^2-y^2}{2Sh} (e_1+e_2) = u_1; \quad (9.26)$$

$$\frac{h^2-y^2}{2Sh} (e_1+e_2) + \frac{h+y}{S} e_2 = u_2.$$

Приводя подобные члены в уравнениях (9.26), найдем

$$(3h+y)e_1 + (h+y)e_2 = \frac{2hS}{h-y} u_1; \quad (9.27)$$

$$(h-y)e_1 + (3h-y)e_2 = \frac{2hS}{h+y} u_2.$$

Решение системы уравнений (9.27) имеет вид

$$e_1 = \frac{S}{4h} \left(\frac{3h-y}{h-y} u_1 - u_2 \right), \quad e_2 = \frac{S}{4h} \left(-u_1 + \frac{3h+y}{h+y} u_2 \right).$$

Подставляя найденное решение в последнее уравнение (9.25), получаем дифференциальное уравнение поступательного движения диска вдоль вертикальной оси

$$m\ddot{y} + mg - \frac{S}{32h^2} \left(\frac{3h-y}{h-y} u_1 - u_2 \right)^2 + \\ + \frac{S}{32h^2} \left(-u_1 + \frac{3h+y}{h+y} u_2 \right)^2 - \frac{Sy}{8h} \left(\frac{u_1}{h-y} + \frac{u_2}{h+y} \right)^2 = 0.$$

Приводя подобные члены, найдем окончательный вид уравнений движения

$$m\ddot{y} + mg + F(y) = 0; \quad F(y) = \frac{S}{4} \left[\frac{u_2^2}{(h+y)^2} - \frac{u_1^2}{(h-y)^2} \right]. \quad (9.28)$$

Положения равновесия диска определяются из (9.28) при $\ddot{y} = 0$

$$F(y) = -mg. \quad (9.29)$$

График функции $F(y)$ приведен на рис. 9.8. Исследование функции $F(y)$ необходимо провести только на отрезке $-h \leq y \leq h$, так как в реальном подвесе движение происходит только на этом промежутке. При $y = \pm h$ происходит касание диска с электродами подвеса. Кроме того, при очень малых

расстояниях между диском и электродом (при y близких к $\pm h$) проведенное рассмотрение становится некорректным из-за явления пробоя, которое наступает при достаточно малых расстояниях $h-y$, $-h-y$.

Функция $F(y)$ монотонно убывает от $-\infty$ до $+\infty$ при $-h \leq y \leq h$. Производная F'_y на отрезке $-h \leq y \leq h$ всюду отрицательна. Следовательно, уравнение (9.29) имеет единственное решение и электростатический подвес имеет только одно положение равновесия $y=y^*$ (рис. 9.8).

Полагая $y=y^*+\Delta y$, на основании формулы Тейлора с точностью до квадратичных членов по Δy получим приближенное равенство

$$F(y^*+\Delta y) \approx F(y^*) + F'_y(y^*) \cdot \Delta y. \quad (9.30)$$

Подставляя (9.30) в (9.28) и учитывая, что в положении равновесия $F(y^*) = -mg$, находим

$$\Delta \dot{y} + K \Delta y = 0; \quad K = \frac{1}{m} F'_y(y^*) < 0. \quad (9.31)$$

Решение линейного дифференциального уравнения (9.31) имеет вид

$$\Delta y = C_1 \exp(\sqrt{-K}t) + C_2 \exp(-\sqrt{-K}t),$$

где C_1, C_2 — производные постоянные.

Величина Δy экспоненциально растет с ростом времени, и, следовательно, положение равновесия $y=y^*$ при постоянных u_1, u_2 является неустойчивым. Этот результат согласуется с известными теоремами физики (теоремы Ирришоу — Томсона) о том, что в любом постоянном во времени электростатическом поле проводящее тело не может находиться в состоянии устойчивого равновесия под действием только одних электрических сил.

Таким образом, для создания устойчивого электростатического подвеса необходимо изменять ЭДС u_1 и u_2 так, чтобы при уменьшении зазора между диском и электродами элект-

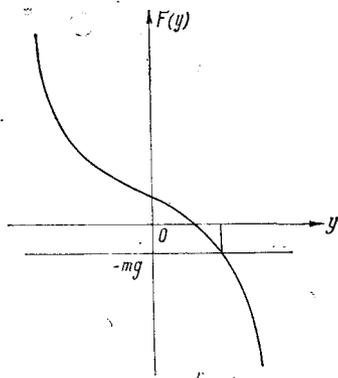


Рис. 9.8. График функции $F(y)$ при постоянных напряжениях u_1, u_2

ростатическое поле уменьшалось, а при увеличении зазора — поле увеличивалось.

Предположим, что у нас имеется некоторая система, которая измеряет смещение диска y и изменяет ЭДС u_1 и u_2 по закону

$$u_1 = V - ky; \quad u_2 = V + ky. \quad (9.32)$$

Здесь V — некоторое постоянное опорное напряжение; k — коэффициент усиления.

Подставляя (9.32) в (9.28), получаем

$$F(y) = \frac{S(kh - V)(Vh - ky^2)}{(h^2 - y^2)^2} y. \quad (9.33)$$

При $k > V/h$ график функции $F(y)$ построен на рис. 9.9. Функция $F(y)$ нечетная функция y . Она обращается в нуль в точках $y = 0$, $y = \pm \sqrt{\frac{Vh}{k}}$. Следовательно, на отрезке — $\sqrt{\frac{Vh}{k}} \leq y \leq \sqrt{\frac{Vh}{k}}$ ($\sqrt{\frac{Vh}{k}} < h$) функция $F(y)$ имеет два экстремума (один минимум F_{min} и один максимум F_{max}).

Величины этих экстремальных значений и определяют предельный вес тела, который может быть взвешен в электростатическом подвесе. Если вес $mg < F_{max}$, то уравнение $F(y) = -mg$ на отрезке $-h \leq y \leq h$ будет иметь три решения y_1, y_2, y_3 (рис. 9.9), причем решения y_1, y_3 будут неустойчивыми положениями равновесия, а решение y_2 является устойчивым положением равновесия тела в электростатическом подвесе.

10. ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЙ ТОРМОЗ

Тормозная колодка электромагнитного тормоза, расположенного в вертикальной плоскости, приводится в движение коромыслом BC , которое скреплено шарниром B с кривошипом OA (рис. 10.1). К кривошипу OA жестко прикреплен постоянный магнит NS , который при подаче на обмотку соленоида постоянного напряжения u втягивается внутрь соленоида. При обесточенном соленоиде кривошип OA занимает горизонтальное положение, опираясь на опору A_1 , а колесо свободно вращается вокруг оси, проходящей через точку O_1 . Суммарный вес кривошипа OA и постоянного магнита NS P_1 приложен в точке E , вес коромысла BC P_2 приложен в середине BC — точке G , а вес тормозной колодки P_3 — в точке

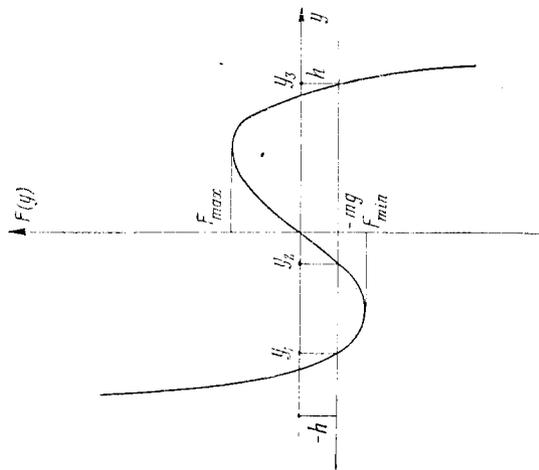


Рис. 9.9. График функции $F(y)$ при регулировании напряжений на электродах подвеса

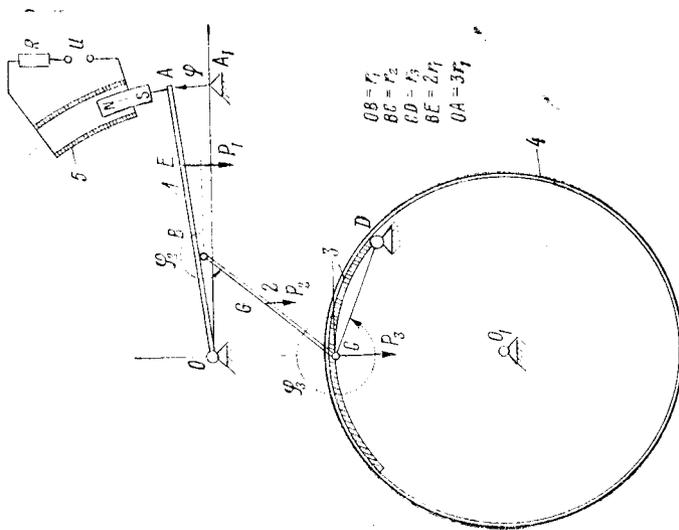


Рис. 10.1. Электромагнитный тормоз: 1 — кривошип; 2 — коромысло; 3 — тормозная колодка; 4 — колесо; 5 — соленоид

С. Пронумеруем звенья механизма: кривошип OA — 1, коромысло — 2, тормозная колодка — 3. Обозначим через J_1, J_3 моменты инерции первого и третьего тела системы относительно своих осей вращения, а через J_2 — момент инерции коромысла относительно центра масс G . Пусть длины звеньев механизма равны $OB=BE=EA=r_1, BC=r_2, CD=r_3$.

Электрическая часть устройства образована источником постоянного напряжения и обмоткой соленоида. Обозначим через L_{11} коэффициент самоиндукции обмотки соленоида, через R — омическое сопротивление цепи. Заменяем постоянный магнит соленоидом с постоянным током i_0 и обозначим через L_{10} коэффициент взаимной индукции обмотки соленоида с контуром эквивалентного тока i_0 .

Поставим задачу об определении наименьшего напряжения u , при котором возможно срабатывание тормоза, и отыскания времени с момента подачи напряжения до начала движения колодки.

Для решения указанной задачи составим уравнения Лагранжа—Максвелла для электромагнитного тормоза. Механическая часть системы есть шарнирный четырехзвенник (кривошипно-коромысловый механизм), который, как известно, представляет систему с одной степенью свободы. Электрическая часть системы содержит один контур с изменяющимся током. В качестве обобщенных координат электромеханической системы выбираем угол поворота φ кривошипа OA и ток i в обмотке соленоида.

Кинетическая энергия системы складывается из кинетической энергии T_1 кривошипа OA , кинетической энергии T_2 коромысла BC и кинетической энергии T_3 тормозной колодки CD . Кривошип и тормозная колодка совершают вращательное движение, поэтому

$$T_1 = \frac{1}{2} J_1 \Omega^2, \quad T_3 = \frac{1}{2} J_3 \Omega_{3z}^2, \quad \Omega = \dot{\varphi}, \quad \Omega_{3z} = \dot{\varphi}_3, \quad (10.1)$$

где φ_3 — угол поворота колодки вокруг полюса C .

Коромысло BC совершает плоскопараллельное движение, поэтому

$$T_2 = \frac{1}{2} \frac{P_2}{g} v_G^2 + \frac{1}{2} J_2 \Omega_{2z}^2; \quad \Omega_{2z} = \dot{\varphi}_2,$$

где v_G — скорость центра масс коромысла, φ_2 — угол поворота коромысла вокруг полюса B . Следовательно, полная кинетическая энергия системы

$$T = \frac{1}{2} J_1 \Omega^2 + \frac{1}{2} \frac{P_2}{g} v_G^2 + \frac{1}{2} J_2 \Omega_{2z}^2 + \frac{1}{2} J_3 \Omega_{3z}^2. \quad (10.2)$$

Выразим угловые скорости Ω_{2z} , Ω_{3z} и скорость точки G через обобщенную координату φ и угловую скорость Ω . Для этого составим кинематические уравнения для шарнирного четырехзвенника $OBCD$. В соответствии с известными формулами кинематики

$$\bar{v}_B = \bar{v}_0 + [\bar{\Omega}, \overline{OB}]; \quad \bar{v}_C = \bar{v}_B + [\bar{\Omega}_2, \overline{BC}]; \quad \bar{v}_D = \bar{v}_C + [\bar{\Omega}_3, \overline{CD}],$$

Последовательно исключая скорости в промежуточных точках, получим

$$\bar{v}_D = \bar{v}_0 + [\bar{\Omega}, \overline{OB}] + [\bar{\Omega}_2, \overline{BC}] + [\bar{\Omega}_3, \overline{CD}].$$

Учитывая, что $\bar{v}_D = \bar{v}_0 = 0$, имеем

$$[\bar{\Omega}, \overline{OB}] + [\bar{\Omega}_2, \overline{BC}] + [\bar{\Omega}_3, \overline{CD}] = 0.$$

Проектируя это векторное равенство на оси координат, получаем

$$-\Omega r \sin \varphi - \Omega_{2z} r_2 \sin \varphi_2 - \Omega_{3z} r_3 \sin \varphi_3 = 0; \quad (10.3)$$

$$\Omega r \cos \varphi + \Omega_{2z} r_2 \cos \varphi_2 + \Omega_{3z} r_3 \cos \varphi_3 = 0.$$

Умножая 1-е уравнение (10.3) на $\cos \varphi_3$, 2-е уравнение на $\sin \varphi_3$ и складывая, найдем

$$\Omega_{2z} = \Omega \frac{r_1 \sin (\varphi - \varphi_3)}{r_2 \sin (\varphi_3 - \varphi_2)}.$$

Аналогично определяем угловую скорость тормозной колески

$$\Omega_{3z} = \Omega \frac{r_1 \sin (\varphi - \varphi_3)}{r_3 \sin (\varphi_2 - \varphi_3)}.$$

Наконец, выпишем уравнение для скорости центра масс коромысла

$$\bar{v}_G = [\bar{\Omega}, \overline{OB}] + [\Omega_2, \overline{BG}].$$

Проектируя это векторное соотношение на оси координат, получаем

$$v_{Gx} = -\Omega r_1 \sin \varphi - \frac{1}{2} \Omega_{2z} r_2 \sin \varphi_2;$$

$$v_{Gy} = \Omega r_1 \cos \varphi + \frac{1}{2} \Omega_{2z} r_2 \cos \varphi_2;$$

$$v_G^2 = \Omega^2 r_1^2 + \Omega \Omega_{2z} r_1 r_2 \cos (\varphi - \varphi_2) + \frac{1}{4} \Omega_{2z}^2 r_2^2.$$

Из физического смысла задачи ясно, что углы φ , φ_2 , φ_3 в процессе работы системы изменяются незначительно, поэтому заменим в найденных кинематических соотношениях углы φ , φ_2 , φ_3 их начальными значениями $\varphi_1^0=0$, φ_2^0 , φ_3^0 . Тогда после подстановки в (10.2) получаем

$$T = \frac{1}{2} J \dot{\varphi}^2; \quad (10.4)$$

$$J = J_1 + \frac{P_2 r_1^2}{g} \left[1 + \frac{\cos \varphi_2^0 \sin \varphi_3^0}{\sin(\varphi_2^0 - \varphi_3^0)} + \frac{\sin^2 \varphi_3^0}{4 \sin^2(\varphi_3^0 - \varphi_2^0)} \right] +$$

$$+ r_1^2 \frac{J_2 r_3^2 \sin^2 \varphi_3^0 + J_3 r_2^2 \sin^2 \varphi_2^0}{r_2^2 r_3^2 \sin^2(\varphi_3^0 - \varphi_2^0)}.$$

Величина J носит название приведенного момента инерции и при точном решении задачи является функцией обобщенной координаты φ , однако в силу сделанного допущения о малости изменения углов поворотов звеньев системы величину J можно считать постоянной.

Потенциальная энергия системы

$$\Pi = P_1 y_E + P_2 y_G + P_3 y_C,$$

где y_E , y_G , y_C — ординаты точек E , G , C . Подставляя в выражение для потенциальной энергии

$$y_E = 2r_1 \sin \varphi, \quad y_G = r_1 \sin \varphi + \frac{1}{2} r_2 \sin \varphi_2, \quad y_C = r_1 \sin \varphi + r_2 \sin \varphi_2,$$

получаем

$$\Pi = (2P_1 + P_2 + P_3) r_1 \sin \varphi + \left(\frac{1}{2} P_2 + P_3 \right) r_2 \sin \varphi_2 \quad (10.5)$$

Заметим, что при дифференцировании выражения (10.5) по обобщенной координате φ нужно учитывать зависимость угла φ_2 от φ , причем в силу найденных выше кинематических соотношений

$$\frac{d\varphi_2}{d\varphi} = \frac{\Omega_{22}}{\Omega} = \frac{r_1 \sin(\varphi - \varphi_3)}{r_2 \sin(\varphi_3 - \varphi_2)}.$$

Следовательно,

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \varphi} = P r_1,$$

$$P r_1 = \left[(2P_1 + P_2 + P_3) \cos \varphi + \left(\frac{1}{2} P_2 + P_3 \right) \frac{\cos \varphi_2 \sin(\varphi - \varphi_3)}{\sin(\varphi_3 - \varphi_2)} \right] r_1.$$

При малом изменении углов φ , φ_1 , φ_2 приведенный момент $P r_1$ можно считать постоянным, а выражение для потенциальной энергии записать в виде

$$\Pi = P_0 r_1 \varphi,$$

где

$$P_0 = 2P_1 + P_2 + P_3 + \left(\frac{1}{2} P_2 + P_3 \right) \frac{\cos \varphi_2^0 \sin \varphi_3^0}{\sin (\varphi_2^0 - \varphi_3^0)}.$$

Выпишем выражение для магнитной энергии системы

$$W_m = \frac{1}{2} L_{11} i^2 + L_{10} i i_0.$$

Коэффициент взаимной индукции L_{10} зависит от положения якоря внутри соленоида, и, следовательно, от угла поворота φ кривошипа OA . При малых углах φ функцию $L_{10}(\varphi)$ можно разложить в ряд Тейлора и пренебречь квадратичными членами

$$L_{10}(\varphi) = L_{10}(0) + \left. \frac{\partial L_{10}}{\partial \varphi} \right|_{\varphi=0} \varphi.$$

При этом магнитная энергия системы примет вид

$$W_m = \frac{1}{2} L_{11} i^2 + L_{10}(0) i_0 i + f i \varphi,$$

где $f = i_0 \left. \frac{\partial L_{10}}{\partial \varphi} \right|_{\varphi=0} = \text{const.}$

Учитывая, что емкости в электрической цепи отсутствуют и электрическая энергия равна нулю, составим функцию Лагранжа для рассматриваемой электромеханической системы

$$L = \frac{1}{2} J \dot{\varphi}^2 - P_0 r_1 \varphi + \frac{1}{2} L_{11} i^2 + L_{10}(0) i_0 i + f i \varphi.$$

Если пренебречь трением в шарнирах, то диссипативная функция системы будет определяться только потерями на Джоулево тепло

$$\Psi = \frac{1}{2} R i^2.$$

Обобщенные неконсервативные силы механической природы в системе отсутствуют, поэтому уравнения Лагранжа—Максвелла имеют вид

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \varphi} + \frac{\partial \Psi}{\partial \dot{\varphi}} = 0; \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial i} \right) + \frac{\partial \Psi}{\partial i} = u.$$

Выполняя операции дифференцирования, получаем

$$J\ddot{\varphi} + P_0 r_1 - f i = 0; \quad (10.6)$$

$$L_{11} \frac{di}{dt} + f \dot{\varphi} + R i = u.$$

Дифференциальные уравнения (10.6) описывают процессы, происходящие в механической и электрической частях устройства.

При подключении питания ток в цепи начинает увеличиваться, а якорь останется неподвижным до тех пор, пока момент пондеромоторной силы, втягивающей якорь в соленоид, не станет равным приведенному моменту $P_0 r_1$.

В течение всего указанного промежутка $\varphi = 0$, $\dot{\varphi} = 0$, $\ddot{\varphi} = 0$ и, следовательно, 2-е уравнение (10.6) примет вид

$$L_{11} \frac{di}{dt} + R i = u. \quad (10.7)$$

Интеграл уравнения (10.7) имеет вид

$$i = \frac{u}{R} + C \exp\left(-\frac{Rt}{L_{11}}\right),$$

где произвольная постоянная C находится из начального условия: при $t=0$ $i=0$. Следовательно, $C = -u/R$, откуда

$$i = \frac{u}{R} \left[1 - \exp\left(-\frac{Rt}{L_{11}}\right) \right]. \quad (10.8)$$

Обозначим через τ момент трогания с места тормозной колодки, ток в цепи в этот момент — через i_* , тогда согласно (10.8)

$$i_* = \frac{u}{R} \left[1 - \exp\left(-\frac{R\tau}{L_{11}}\right) \right]. \quad (10.9)$$

С другой стороны, из 1-го уравнения (10.6) получаем, что в момент трогания с места

$$P_0 r_1 = f i_*.$$

Подставляя в эту формулу выражение (10.9), получаем величину интервала времени между подачей напряжения на обмотку соленоида и началом движения тормозной колодки

$$\tau = \frac{L_{11}}{R} \ln \frac{f u}{f u - P_0 r_1 R}.$$

Из полученной формулы следует, что движение якоря возможно лишь при условии положительности выражения, стоящего под знаком логарифма. Следовательно,

$$u > \frac{P_0 r_1 R}{f}.$$

Это соотношение и решаст задачу о величине минимального напряжения, при котором возможна работа электромагнитного тормоза.

11. ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРЕМЫ ЛАГРАНЖА — ДИРИХЛЕ ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ УСТОЙЧИВОСТИ ПОЛОЖЕНИЯ РАВНОВЕСИЯ ЭЛЕКТРОМЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Достаточные условия устойчивости равновесия консервативной механической системы определяются известной теоремой Лагранжа—Дирихле: если в положении равновесия консервативной системы с идеальными стационарными связями потенциальная энергия имеет минимум, то положение равновесия устойчиво. В случае максимума потенциальной энергии положение равновесия оказывается неустойчивым.

Этот результат может быть использован и для анализа устойчивости положения равновесия электромеханической системы. Действительно, рассмотрим электромеханическую систему, не содержащую конденсаторов. Предположим, что токи в электрических цепях системы поддерживаются постоянными при помощи достаточно мощного внешнего источника. Как следует из (2.5), (3.7), магнитная энергия электромеханической системы $W_m(q_1, \dots, q_n, i_1, \dots, i_m)$ играет двоякую роль: по отношению к токам, т. е. обобщенным скоростям электромагнитного характера, она является кинетической энергией, по отношению к механическим обобщенным координатам она представляет взятую с обратным знаком потенциальную энергию. При постоянных токах исследование движения электромеханической системы сводится к изучению дифференциальных уравнений движения системы материальных точек, на которые помимо потенциальных сил действуют еще и пондеромоторные силы. Следовательно, справедливо утверждение: если в положении равновесия электромеханической системы с заданными постоянными токами разность между потенциальной и магнитной энергиями имеет мини-

мум, то положение равновесия устойчиво, а в случае максимума — неустойчиво.

Таким образом, для решения вопроса об устойчивости положения равновесия электромеханической системы достаточно убедиться, что выражение $\Pi(q_1, \dots, q_n) - W_m(q_1, \dots, q_n, i_1, \dots, i_m)$ имеет минимум.

Для системы с одной степенью свободы определение минимума функции $f(q) = \Pi(q) - W_m(q, i_1, \dots, i_m)$ решается элементарно. Действительно, в этом случае производная 2-го порядка от функции $f(q)$ по обобщенной координате q , вычисленная в положении равновесия $q = q_0$, должна быть положительна (предполагается, что она существует). Следовательно, условие устойчивости имеет вид

$$\left. \frac{\partial^2 \Pi}{\partial q^2} \right|_{q=q_0} > \left. \frac{\partial^2 W_m}{\partial q^2} \right|_{q=q_0}.$$

Для системы, имеющей n степеней свободы, критерий минимума имеет более сложный вид. В этом случае нужно так выбрать обобщенные координаты, чтобы в положении равновесия все обобщенные координаты были равны нулю (для этого достаточно отсчет их вести от положения равновесия). Затем нужно разложить потенциальную и магнитную энергии в ряд по степеням q_1, \dots, q_n , ограничиваясь членами 2-го порядка малости. Члены 1-го порядка малости в разложении исчезают, так как в положении равновесия все обобщенные силы равны нулю и

$$\left. \frac{\partial \Pi}{\partial q_j} \right|_{q_j=0} = \left. \frac{\partial W_m}{\partial q_j} \right|_{q_j=0}.$$

Следовательно,

$$\Pi - W_m = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij} q_i q_j + \dots \quad c_{ij} = \frac{\partial^2 (\Pi - W_m)}{\partial q_i \partial q_j}, \quad (11.1)$$

где точками обозначены члены высшего порядка. Коэффициенты c_{ij} вычисляются в положении равновесия при $q_1 = q_2 = \dots = q_n = 0$ и, следовательно, все c_{ij} — постоянные числа, причем $c_{ij} = c_{ji}$.

Вопрос о знаке любой квадратичной формы решается при помощи критерия Сильвестра: для того чтобы квадратичная форма была определенно положительной, необходимо и достаточно, чтобы все главные диагональные миноры матрицы квадратичной формы были положительны. Доказательство этой теоремы можно найти в курсах линейной алгебры. Мат-

рица квадратичной формы и ее главные диагональные миноры имеют вид

$$\begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & \dots & c_{2n} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & \dots & c_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n1} & c_{n2} & c_{n3} & \dots & c_{nn} \end{vmatrix}, \quad \Delta_1 = |c_{11}|, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{vmatrix},$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{vmatrix}, \quad \dots, \quad \Delta_n = \begin{vmatrix} c_{11} & \dots & \dots & c_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n1} & \dots & \dots & c_{nn} \end{vmatrix}.$$

Если все $\Delta_i > 0$, то положения равновесия электромеханической системы устойчивы.

Аналогичное рассмотрение может быть проведено и для электромеханических систем электростатического типа, у которых заряды на конденсаторах поддерживаются постоянными. В этом случае токи в системе оказываются равными нулю, а к механическим потенциальным силам нужно добавить ponderomotorные силы электростатического поля. Формулировка теоремы Лагранжа—Дирихле будет иметь вид: если в положении равновесия электромеханической системы электростатического типа, заряды в которой поддерживаются постоянными, сумма потенциальной и электрической энергий имеет минимум, то это положение равновесия устойчиво.

Для иллюстрации сформулированных теорем рассмотрим вопрос об устойчивости вертикального положения якоря трехпозиционного электромагнитного реле (рис. 11.1). Якорь реле вращается вокруг горизонтальной оси, и при увеличении тока в одной из обмоток электромагнита замыкает соответствующие контакты в контактной группе 5. При равенстве токов в обмотках электромагнитов притяжение якоря к полюсам электромагнитов одинаково, и якорь занимает среднее положение, устойчивость которого обеспечивается специальной выборкой коэффициента жесткости пружины 4.

Рассмотрим задачу об определении величины коэффициента жесткости пружин, обеспечивающего устойчивость вертикального положения якоря реле при равенстве токов в обмотках электромагнитов.

В качестве обобщенной координаты выбираем угол поворота якоря реле. Вес якоря обозначим через P , расстояние

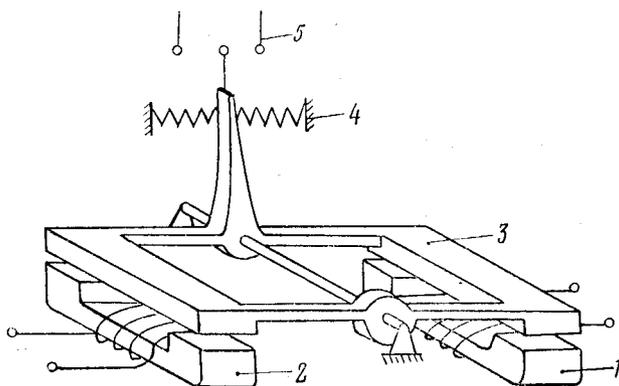


Рис. 11.1. Трехпозиционное электромагнитное реле: 1, 2 — электромагниты; 3 — якорь; 4 — пружины; 5 — контакты

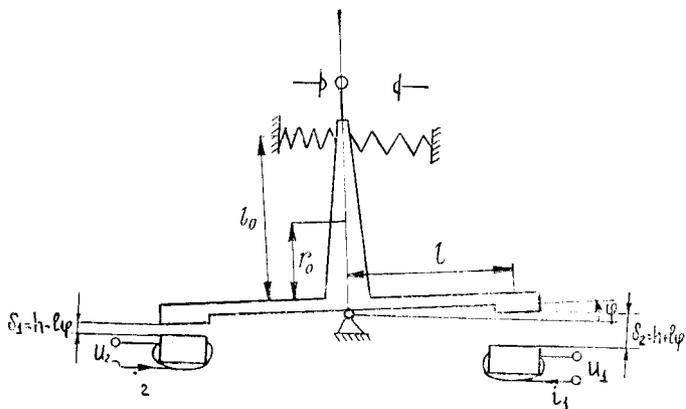


Рис. 11.2. Возмущенное положение электромагнитного реле

между центром масс якоря и осью вращения — через r_0 (рис. 11.2). Тогда потенциальная энергия силы веса

$$\Pi_1 = Pr_0 \cos \varphi.$$

Обозначим через l_0 расстояние от оси вращения до точки крепления пружин. Тогда деформация пружины будет иметь $l_0\varphi$, а потенциальная энергия

$$\Pi_2 = \frac{1}{2} K (l_0\varphi)^2,$$

где K — суммарная жесткость пружин.

Подсчет энергии магнитного поля проведем в предположении, что магнитная проницаемость материала магнита и пластин якоря, находящихся над электромагнитами, велика, а магнитное поле в воздушных зазорах между якорем и полюсами электромагнитов является однородным. Средний зазор между полюсами 1-го электромагнита и пластиной якоря $\delta_1 = h - l\varphi$, а для 2-го электромагнита $\delta_2 = h + l\varphi$. Тогда, повторяя рассуждения, проведенные при расчете магнитной энергии в электромагнитном подвесе, получаем

$$W_m = \frac{\mu_0 SN^2}{4(h-l\varphi)} i_1^2 + \frac{\mu_0 SN^2}{4(h+l\varphi)} i_2^2,$$

где μ_0 — магнитная проницаемость воздуха; S — площадь полюса электромагнита; N — число витков обмотки электромагнита; i_1, i_2 — токи в обмотках.

При равенстве i_1, i_2 из (11.1) получаем

$$W_m = \frac{\omega_0 h^2}{h^2 - l^2 \varphi^2}; \quad \omega_0 = \frac{\mu_0 SN^2 i^2}{2h},$$

где ω_0 — магнитная энергия системы при вертикальном положении якоря.

Таким образом, в рассматриваемом случае разность между потенциальной и магнитной энергиями имеет вид

$$\Pi - W_m = \frac{1}{2} K (l_0\varphi)^2 + Pr_0 \cos \varphi - \frac{\omega_0 h^2}{h^2 - l^2 \varphi^2}.$$

Вычисляя вторую производную от этой функции в точке $\varphi=0$, получаем условие устойчивости

$$Kl_0^2 - Pr_0 - \frac{2\omega_0 l^2}{h^2} > 0.$$

Следовательно, при

$$K > \frac{Pr_0}{l_0^2} + 2 \frac{\omega_0 l^2}{h^2 l_0^2} = \frac{Pr_0}{l_0^2} + \frac{\mu_0 SN^2 i^2 l^2}{h^3 l_0^2}$$

вертикальное положение якоря будет устойчивым.

ЛИТЕРАТУРА

1. Детлаф А. А., Яворский Б. М., Милковская Л. Б. Курс физики. Т. 2.— М.: Высш. школа, 1977.— 376 с.
 2. Лурье А. И., Ходжаев К. Ш. Уравнения Лагранжа—Максвелла в курсе теоретической механики.— В кн.: Теоретическая механика: Сб. науч.-метод. статей. Вып. 6.— М.: Высш. школа, 1976, с. 72—81.
 3. Львович А. Ю. Основы теории электромеханических систем.— Л.: ЛГУ, 1973.— 196 с.
 4. Неймарк Ю. И., Фуфаев Н. А. Динамика неголономных систем.— М.: Наука, 1967.— 520 с. (для изучения гл. VII).
-

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	3
1. Основные понятия аналитической механики электромеханических систем	5
2. Уравнения электрических цепей	7
3. Определение пондеромоторных сил	10
4. Уравнения Лагранжа—Максвелла	12
5. Электромеханические аналогии	15
6. Электромагнитный подвес твердого тела	19
7. Простейшая модель динамо-машины переменного тока	26
8. Разветвленные электрические цепи	31
9. Электростатические системы	33
10. Электромагнитный тормоз	50
11. Применение теоремы Лагранжа—Дирихле для исследования устойчивости положения равновесия электромеханических систем	57
Литература	62

Юрий Григорьевич Мартыненко

Учебное пособие

по курсу

«Теоретическая механика»

**АНАЛИТИЧЕСКАЯ ДИНАМИКА ЭЛЕКТРОМЕХАНИЧЕСКИХ
СИСТЕМ**

(Кафедра теоретической механики)

Технический редактор *О. В. Силуянова.*

Корректор *Л. В. Варламова.*

Л—17046 Подписано к печати 30.08.1984 г.

Формат бумаги 60×84/16.

Печ. л. 4,0.

Уч.-изд. л. 3,2.

Тираж 1000.

Заказ 2294.

Цена 15 коп.

Типография МЭИ, Красноказарменная, 13