

По заданной угловой скорости $\bar{\omega}$ и направлению вращения рабочего колеса определяется вектор $\bar{\omega}$ угловой скорости колеса. Вычисляются проекции этого вектора на оси трехгранника $Oxyz$. Дается проекциями $\bar{r}(x, y, 0)$ радиус-вектор точки. Через проекции векторов $\bar{\omega}$ и \bar{r} выражаются все векторы, входящие в уравнение (2), которое расписывается затем по осям x и y .

Указания к решению задачи на ЭВМ. Уравнения движения содержат коэффициенты с множителем ω^2 , принимающим большие числовые значения. Чтобы уменьшить разрядность используемых при счете чисел, уравнения рекомендуется привести к нормализованной форме, в которую входят коэффициенты порядка единицы. Для этого уравнения следует поделить на множитель m и перейти затем к безразмерному времени $t_1 = \omega t$. Соответствующее изменение масштаба времени нужно сделать в значениях начальных скоростей и величине интервала интегрирования.

Нормализованные уравнения приводятся к форме Коши и интегрируются тем или иным численным методом на интервале безразмерного времени $\tau_1 = \omega t$. Один из возможных вариантов программы, использующий конечно-разностную схему Эйлера с шагом, равным шагу печати $\Delta t_1 = \tau_1/24$, приведен в рассмотренном ниже примере. Студентам, имеющим практические навыки программирования, рекомендуется интегрировать уравнения методом Рунге — Кутты, используя стандартные подпрограммы.

Контроль решения. В правильно решенной задаче построенные графики должны быть плавными кривыми, согласованными с начальными условиями.

Защита расчета. Типовые вопросы:

1. Объяснить механический смысл слагаемых исходного векторного уравнения.

2. Как изменятся скалярные уравнения движения, если ротор будет вращаться в противоположную по сравнению с условиями сторону?

3. Как изменятся уравнения при неравномерном вращении ротора $\omega_z = \varepsilon_z \neq 0$?

4. Как изменятся уравнения, если знак угла α изменить на противоположный?

5. Расписать исходное векторное уравнение по оси z и объяснить его механический смысл.

6. Как с помощью уравнения по оси z можно было бы определить момент возможного отрыва точки от поверхности?

7. Как изменится траектория движения, если изменить знак $v_y(0)$?

8. Как будет выглядеть траектория при $x(0), y(0), v_x(0) = 0, v_y(0) > 0$ и при $v_y(0) < 0$?

9. Для заданного момента времени построить на траектории вектор относительного ускорения.

10. Объяснить операторы программы.

(Вариант 31, $n=3$, $N=7$)

Постановка задачи. Материальная частица движется по плоской поверхности лопатки центробежной турбины (рис. 47). Здесь ось z_1 направлена по оси вращения рабочего колеса. Колесо

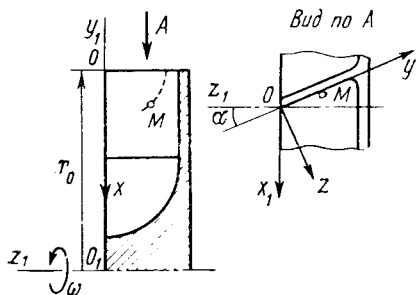


Рис. 47

вращается против часовой стрелки, если смотреть с положительного направления оси z_1 . Оси x, y лежат в плоскости лопатки, ось z направлена по нормали к ней.

Сила сопротивления между частицей и поверхностью пропорциональна относительной скорости точки. Влияние веса и аэродинамической силы со стороны потока газа считается пренебрежимо малым.

Дано: $m=1,37 \cdot 10^{-6}$ кг; $\omega_z=500$ рад/с; $r_0=0,47$ м; $\mu=0,107$ кг/с; $\tau=0,00147$ с; $\alpha=15^\circ$; $x(0)=0$; $y(0)=0,03$ м; $v_x(0)=100$ м/с; $v_y(0)=-30$ м/с.

Требуется: 1. Составить дифференциальные уравнения относительного движения частицы в плоскости лопатки. 2. Привести уравнения к нормализованной форме и проинтегрировать на ЭВМ при заданных начальных условиях. 3. Построить траекторию движения частицы в плоскости x, y и графики зависимости от безразмерного времени v_x^r, v_y^r . 4. Для момента времени, соответствующего $N+2=9$ -й строке таблицы счета, построить на траектории вектор относительной скорости точки и проекции векторов сил инерции Φ_{xy}^c, Φ_{yx}^c .

Вывод дифференциальных уравнений относительного движения. Движение материальной точки относительно подвижной системы координат $Oxyz$ описывается дифференциальными уравнениями

$$m\omega_x^r = F_x + \Phi_x^e + \Phi_x^c;$$

$$m\omega_y^r = F_y + \Phi_y^e + \Phi_y^c. \quad (3)$$

Здесь $\Phi_x^e = -m\omega_x^e$, $\Phi_y^e = -m\omega_y^e$, $\Phi_x^c = -m\omega_x^c$, $\Phi_y^c = -m\omega_y^c$ — проекции переносной и кориолисовой сил инерции. Сила \bar{F} , действующая на точку, складывается из силы нормальной реакции \bar{N} поверхности, направленной по оси z , и силы сопротивления \bar{R} , лежащей в плоскости лопатки и пропорциональной относительной скорости. Следовательно, ее проекции

$$R_x = -\mu v_x^r; \quad R_y = -\mu v_y^r. \quad (4)$$

Переносное и кориолисово ускорения определяются формулами

$$\begin{aligned}\bar{w}^e &= \bar{w}_O + \frac{d\bar{\omega}}{dt} \times \bar{r} + \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{r}); \\ \bar{w}^c &= 2\bar{\omega} \times \bar{v}^r.\end{aligned}\quad (5)$$

Положение частицы в системе координат $Oxyz$ зададим вектором $\bar{r} = \bar{i}x + \bar{j}y + \bar{k} \cdot 0$. Тогда

$$\bar{v}^r = \bar{i}\dot{x} + \bar{j}\dot{y} + \bar{k} \cdot 0; \quad \bar{w}_r = \bar{i}\ddot{x} + \bar{j}\ddot{y} + \bar{k} \cdot 0. \quad (6)$$

Проведем вычисление слагаемых в (5). Так как $\bar{\omega} = \bar{i} \cdot 0 + \bar{j}(-\omega \cos \alpha) + \bar{k}(-\omega \sin \alpha) = \text{const}$, то $d\bar{\omega}/dt = 0$. Ускорение \bar{w}_O точки O имеет только нормальную составляющую, поэтому $\bar{w}_O = \bar{i}(\omega^2 r_O) + \bar{j}0 + \bar{k} \cdot 0$. Векторные произведения таковы:

$$\begin{aligned}\bar{\omega} \times \bar{r} &= \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 0 & -\omega \cos \alpha & -\omega \sin \alpha \\ x & y & 0 \end{vmatrix} = \\ &= \bar{i}(y\omega \sin \alpha) + \bar{j}(-\omega x \sin \alpha) + \bar{k}(\omega x \cos \alpha); \\ \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{r}) &= \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 0 & -\omega \cos \alpha & -\omega \sin \alpha \\ \omega y \sin \alpha & -\omega x \sin \alpha & \omega x \cos \alpha \end{vmatrix} = \\ &= \bar{i}(-\omega^2 x) + \bar{j}(-\omega^2 y \sin^2 \alpha) + \bar{k}(\omega^2 y \sin \alpha \cos \alpha); \\ \bar{\omega} \times \bar{v}^r &= \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 0 & -\omega \cos \alpha & -\omega \sin \alpha \\ \dot{x} & \dot{y} & 0 \end{vmatrix} = \\ &= \bar{i}(\omega \dot{y} \sin \alpha) + \bar{j}(-\omega \dot{x} \sin \alpha) + \bar{k}(\omega \dot{x} \cos \alpha).\end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned}w_x^e &= \omega^2(r_O - x); \quad w_y^e = -\omega^2 y \sin^2 \alpha; \\ w_x^c &= 2\omega \dot{y} \sin \alpha; \quad w_y^c = -2\omega \dot{x} \sin \alpha.\end{aligned}\quad (7)$$

Подставляя (7) в (3), получим

$$\begin{aligned}m\ddot{x} &= -\mu \dot{x} - m[\omega^2(r_O - x) + 2\omega \dot{y} \sin \alpha]; \\ m\ddot{y} &= -\mu \dot{y} + m(\omega^2 y \sin^2 \alpha + 2\omega \dot{x} \sin \alpha).\end{aligned}\quad (8)$$

Решение задачи на ЭВМ и обработка результатов. Разделим левую и правую части (8) на m и перейдем к безразмерному времени

$$t_1 = \omega t. \quad (9)$$

Тогда

$$\frac{dx}{dt} = \omega \frac{dx}{dt_1}; \quad \frac{dy}{dt} = \omega \frac{dy}{dt_1};$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \omega^2 \frac{d^2x}{dt_1^2}; \quad \frac{d^2y}{dt^2} = \omega^2 \frac{d^2y}{dt_1^2},$$

и уравнения (8) примут вид

$$\frac{d^2x}{dt_1^2} = -\frac{\mu}{m\omega^2} \frac{dx}{dt_1} - r_0 + x - 2 \frac{dy}{dt_1} \sin \alpha;$$

$$\frac{d^2y}{dt_1^2} = -\frac{\mu}{m\omega^2} \frac{dy}{dt_1} + y \sin^2 \alpha + 2 \frac{dx}{dt_1} \sin \alpha. \quad (10)$$

Приведем (10) к форме Коши и подставим числовые значения параметров:

$$\frac{dx}{dt_1} = v_x; \quad \frac{dy}{dt_1} = v_y; \quad \frac{dv_x}{dt_1} = w_x; \quad \frac{dv_y}{dt_1} = w_y;$$

$$w_x = -0,312v_x - 0,518v_y + x - 0,47;$$

$$w_y = -0,312v_y + 0,518v_x + 0,067y. \quad (11)$$

Начальные условия системы (11) по переменным v_x, v_y и интервал интегрирования τ_1 в соответствии с (9) будут

$$v_x(0) = v'_x(0)/\omega = 0,2; \quad v_y(0) = v'_y(0)/\omega = -0,06; \quad \tau_1 = 0,735.$$

Один из возможных вариантов программы интегрирования уравнений (11) методом Эйлера с шагом, равным шагу печати $\Delta t_1 \approx 0,0307$, приведен на рис. 48.

Обозначение переменных в программе:

Переменные	t_1	Δt_1	x	y	v_x	v_y	w_x	w_y
Обозначения	T	DT	X	Y	VX	VY	WX	WY

На печать выводятся переменные $t_1, x, y, v_x, v_y, w_x, w_y$.

По результатам счета (см. рис. 48) на рис. 49 построены графики $v_x(t_1), v_y(t_1)$. На рис. 50 построена траектория движения точки в плоскости Oxy .

Извлечем из таблицы счета для $t_1 = 0,245$ (девятая строка) значения координат и скорости точки в безразмерном времени $x = 0,036$ м; $y = 0,018$ м; $v_x = 0,0829$ м; $v_y = -0,0371$ м.

В размерном времени соответствующие значения скоростей будут

$$v'_x = v_x \omega = 0,0829 \cdot 500 = 41,7 \text{ м/с};$$

$$v'_y = v_y \omega = -0,0371 \cdot 500 = -18,7 \text{ м/с}.$$

Вычислим, используя (7), проекции на оси x, y сил инерции:

$$\Phi_x^e = -m\omega^2 x = -m\omega^2 (r_0 - x) =$$

```

DATA DT,T,X,Y,VX,VY/
*0.0307,2*0.,0.03,0.199,-0.06/
DO 12 K=1,25
WX=-0.312*VX-0.518*VY-0.47
WY=-0.312*VY+0.518*VX+0.067*Y
PRINT 30731,T
* ,X,Y,VX,VY,WX,WY
30731 FORMAT(10F10.3)
X=X+VX*DT
Y=Y+VY*DT
VX=VX+WX*DT
VY=VY+WY*DT
12 T=T+DT
STOP
END

```

0.0	0.0	0.030	0.199	-0.060	-0.501	0.124
0.031	0.006	0.028	0.184	-0.056	-0.492	0.115
0.061	0.012	0.027	0.169	-0.053	-0.484	0.105
0.092	0.017	0.025	0.154	-0.049	-0.475	0.097
0.123	0.022	0.023	0.139	-0.047	-0.468	0.088
0.153	0.026	0.022	0.125	-0.044	-0.460	0.080
0.184	0.030	0.021	0.111	-0.041	-0.453	0.072
0.215	0.033	0.019	0.097	-0.039	-0.447	0.064
0.246	0.036	0.018	0.083	-0.037	-0.441	0.056
.
0.706	0.032	0.003	-0.106	-0.034	-0.387	-0.044
0.737	0.030	0.002	-0.117	-0.035	-0.386	-0.050

Рис. 48

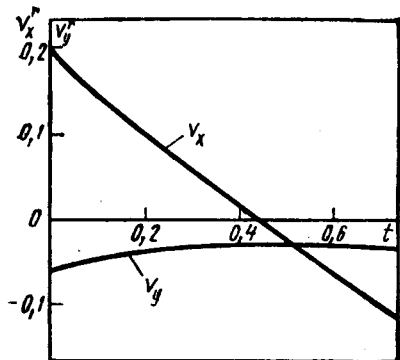


Рис. 49

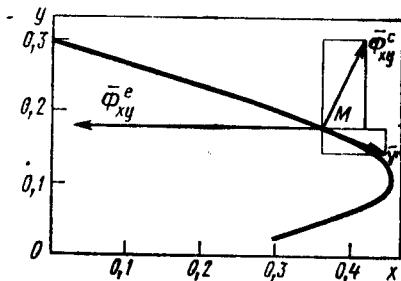


Рис. 50

$$= -1,37 \cdot 10^{-6} \cdot 2,5 \cdot 10^5 (0,47 - 0,036) = -150 \cdot 10^{-3} \text{ Н};$$

$$\begin{aligned} \Phi_y^e &= -m\omega_y^e = m\omega^2 y \sin^2 \alpha = 1,37 \cdot 10^{-6} \cdot 2,5 \cdot 10^5 \cdot 0,018 \cdot 0,259^2 = \\ &= 0,41 \cdot 10^{-3} \text{ Н}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Phi_x^c &= -m\omega_x^c = -2m\omega v_y' \sin \alpha = 2 \cdot 1,37 \cdot 10^{-6} \cdot 500 \cdot 18,7 \cdot 0,259 = \\ &= 6,64 \cdot 10^{-3} \text{ Н}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Phi_y^c &= -m\omega_y^c = 2m\omega v_x' \sin \alpha = 2 \cdot 1,37 \cdot 10^{-6} \cdot 500 \cdot 41,7 \cdot 0,259 = \\ &= 14,8 \cdot 10^{-3} \text{ Н}. \end{aligned}$$

Вектор относительной скорости и проекции векторов сил инерции $\overline{\Phi}_{xy}^e$, $\overline{\Phi}_{xy}^c$ построены на рис. 50. Векторы $\overline{\Phi}_{xy}^e$, $\overline{\Phi}_{xy}^c$ для наглядности построены в разных масштабах.

Контроль решения. Графики $v_x^r(t_1)$, $v_y^r(t_2)$ и траектории движения (рис. 49, 50) являются плавными кривыми, согласованными с исходными начальными условиями.

Динамика манипулятора

РАСЧЕТ Д-3

Описание задания. Цель расчета — приобретение опыта кинематического и кинетостатического описания движения плоских механизмов, ознакомление с методикой решения обратных задач динамики механических систем.

Рассматривается механизм типа манипулятора с двумя степенями свободы, предназначенный для перемещения груза. Варианты кинематических схем механизмов приведены на рис. 51—54. Переносимый точечный груз A массой m за время τ под действием двигателей управления, расположенных в шарнирах B и D , перемещается из точки a в точку b с заданной скоростью

$$v_{Ax} = 0, \quad v_{Ay} = v \sin pt. \quad (1)$$

Элементы конструкции механизма считаются абсолютно жесткими и безынерционными. Силы трения в шарнирах и ползунах отсутствуют. В вариантах 4, 9, 15, 17, 19, 22, 25 каток 2 относительно опорной поверхности не проскальзывает.

Исходные данные задаются формулами (2) и табл. 8:

$$\begin{aligned} r_1 &= r_{1r} + 0,01n; \quad r_i = r_{ir} + 0,01N \quad (i=2,3); \\ v &= \pi/N; \quad \tau = 0,24N; \quad p = \pi/\tau; \\ \varphi_i(0) &= \varphi_{ir} + 0,01N \quad (i=1, 2, 3); \quad m = 10 + N. \end{aligned} \quad (2)$$

Требуется исследовать с помощью ЭВМ движение манипулятора. Перечень пунктов исследования приведен ниже в примере.

Указания к составлению уравнений кинетостатики для моментов управления. Система освобождается от связей и разделяется на от-

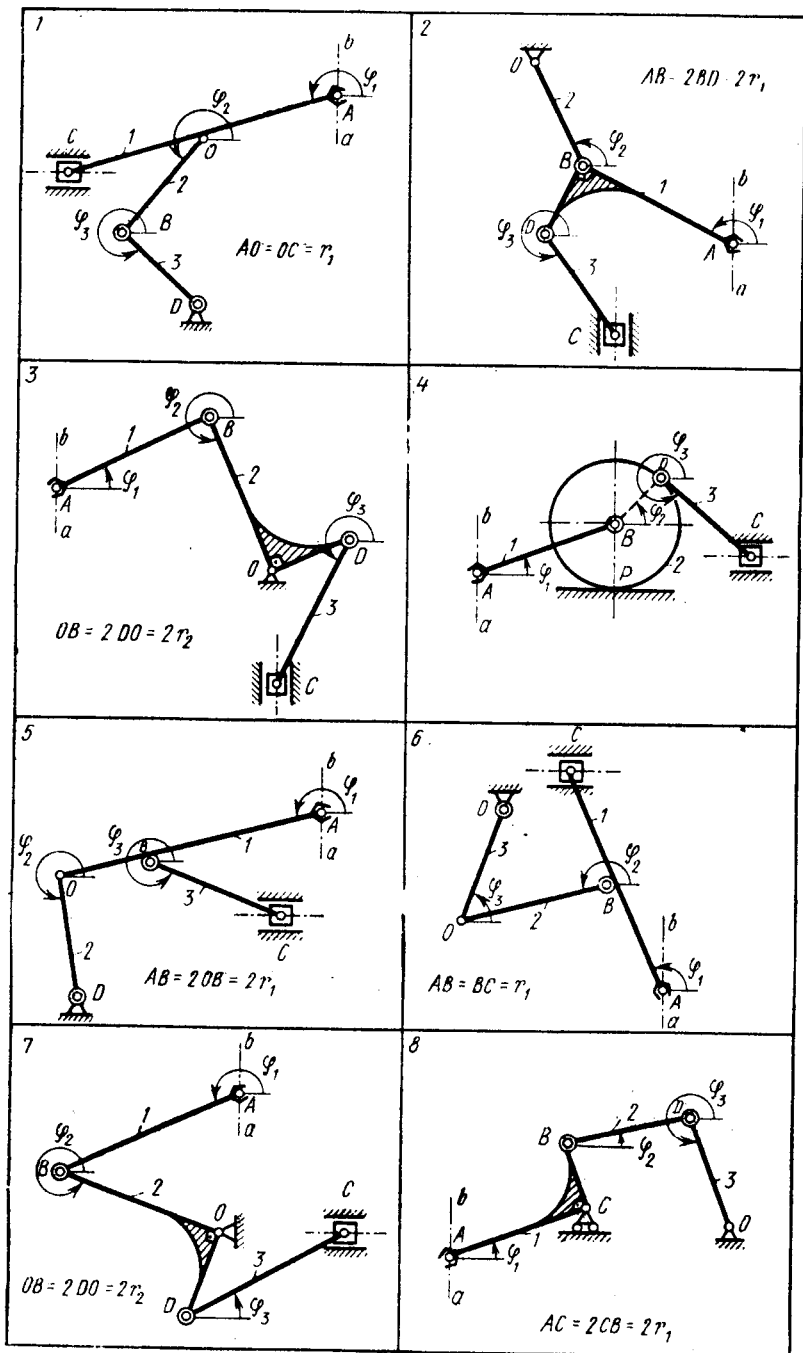


Рис. 51

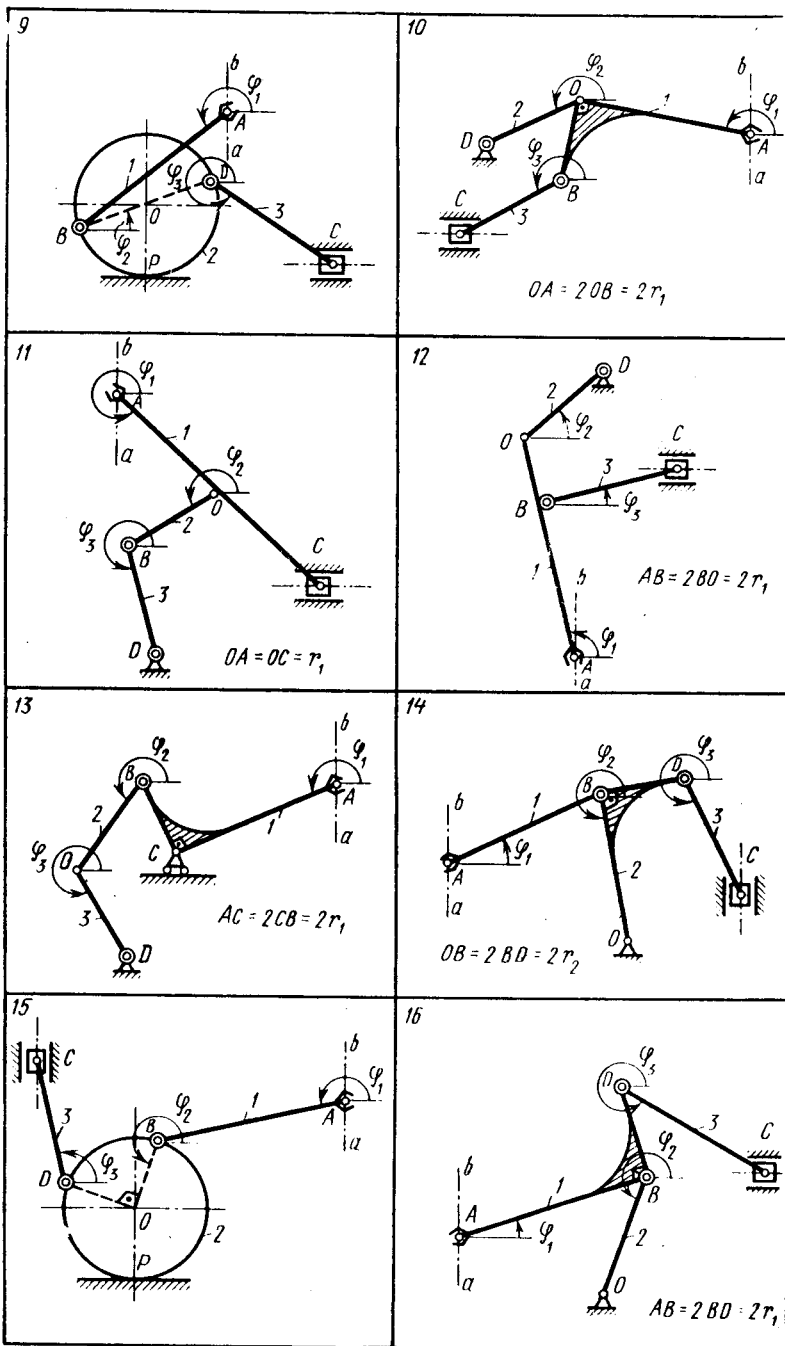


Рис. 52

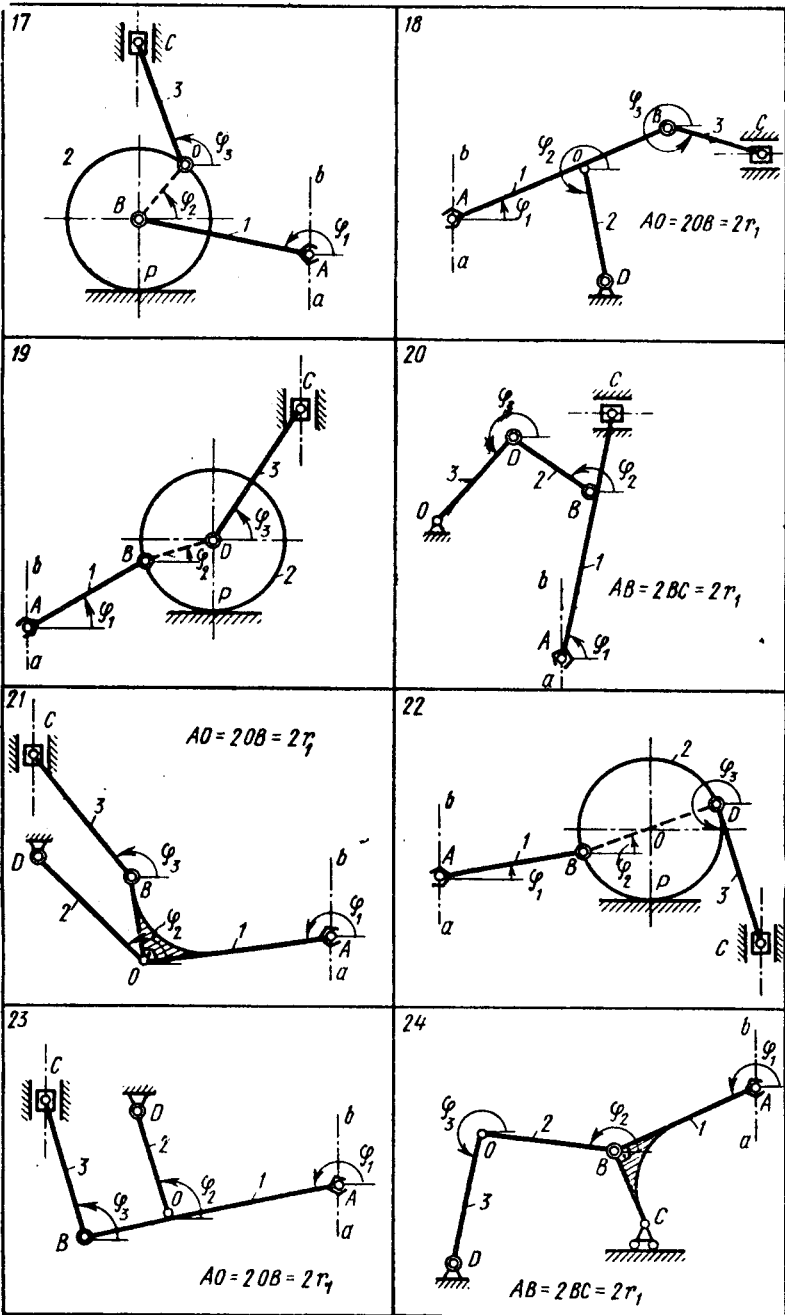


Рис. 53

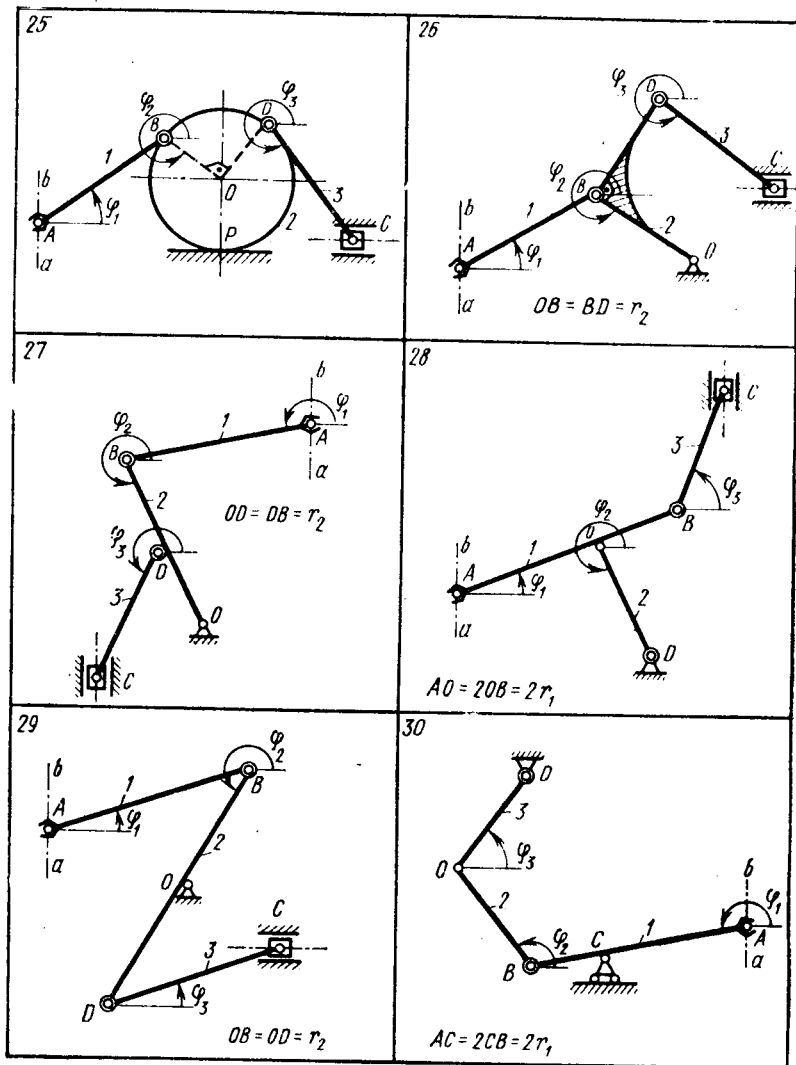


Рис. 54

дельные звенья или группы звеньев. Вводятся реакции связей. Задаются активные силы: внешняя сила — вес точки A — и внутренние моменты управления M_{Bz} и M_{Dz} . При освобождении от связей в точках B и D к смежным звеньям прикладываются моменты противоположных знаков. За положительный для определенности принимается момент, прилагаемый со стороны звена с большим индексом к звену с меньшим индексом. По принципу Даламбера к точке A условно прикладывается сила инерции $\overline{F} = -m\overline{w}_A$. Она определяется для заданного движения (1) точки A .

Ва- риант	r_{1r}	r_{2r}	r_{3r}	φ_{1r}	φ_{2r}	φ_{3r}
1	0,8	0,7	0,7	3,1	3,7	5,5
2	0,4	0,6	0,6	2,5	2,0	2,0
3	0,8	0,4	0,8	0,5	5,2	4,2
4	0,9	0,5	0,8	0,4	0,7	5,7
5	0,4	0,6	0,6	3,0	4,9	5,8
6	0,7	0,7	0,6	2,0	3,4	1,3
7	0,9	0,4	0,8	3,1	5,9	0,6
8	0,4	0,7	0,7	0,5	0,5	5,1
9	0,9	0,4	0,8	3,7	0,4	5,8
10	0,4	0,6	0,6	2,8	3,6	3,7
11	0,8	0,5	0,6	5,8	3,2	4,7
12	0,4	0,6	0,7	1,9	0,7	0,4
13	0,4	0,6	0,6	3,2	3,9	5,4
14	0,9	0,4	0,7	0,5	5,0	5,2
15	0,9	0,5	0,7	2,8	4,5	1,8
16	0,5	0,7	0,7	0,4	4,2	5,0
17	0,9	0,5	0,7	2,6	0,7	2,0
18	0,4	0,6	0,5	0,4	5,0	5,8
19	0,7	0,5	0,8	0,5	0,3	1,0
20	0,4	0,5	0,6	1,1	2,5	3,7
21	0,5	0,7	0,7	3,1	2,5	2,5
22	0,9	0,5	0,8	0,3	0,4	5,1
23	0,4	0,6	0,7	3,3	2,1	2,2
24	0,4	0,7	0,7	3,1	3,0	4,2
25	0,9	0,5	0,8	0,5	5,6	5,5
26	0,8	0,6	0,7	0,5	5,7	5,6
27	0,9	0,5	0,7	3,0	5,1	4,2
28	0,5	0,7	0,7	0,5	5,2	1,2
29	0,9	0,5	0,8	0,4	4,2	0,5
30	0,6	0,6	0,6	3,0	2,1	0,7

Уравнения для M_{Bz} , M_{Dz} образуются из уравнений кинестатики для механической системы, включающей точку A , и статических уравнений для механических систем, образованных из безынерционных звеньев. Из этих уравнений определяются

$$M_{Bz} = M_{Bz}(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, t); \quad M_{Dz} = M_{Dz}(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, t). \quad (3)$$

Указания к составлению кинематических уравнений движения. Выражения для зависимости трех неизвестных угловых скоростей ω_{1z} , ω_{2z} , ω_{3z} от заданной скорости точки A получаются так же, как в расчетах К-1, К-2, из уравнений трех внешних связей, налагаемых на систему. Из этих уравнений

$$\begin{aligned} \omega_{1z} &= \omega_{1z}(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, t); \quad \omega_{2z} = \omega_{2z}(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, t); \\ \omega_{3z} &= \omega_{3z}(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, t). \end{aligned} \quad (4)$$

Уравнения (4) позволяют определить угловые скорости звеньев для фиксированного момента времени при заданных в этот момент значениях φ_1 , φ_2 , φ_3 . Изменение φ_1 , φ_2 , φ_3 , а следовательно, и ω_{1z} ,

ω_{2z} , ω_{3z} во времени определится, если дополнить систему (4) уравнениями

$$\dot{\varphi}_1 = \omega_{1z}; \quad \dot{\varphi}_2 = \omega_{2z}; \quad \dot{\varphi}_3 = \omega_{3z}. \quad (5)$$

Уравнения (4), (5) образуют систему дифференциальных уравнений, интегрированием которой при заданных начальных значениях $\varphi_1(0)$, $\varphi_2(0)$, $\varphi_3(0)$ решается кинематическая задача о движении плоского механизма. Эти уравнения манипулятора, являющегося системой с двумя степенями свободы, записаны в избыточном наборе трех переменных φ_1 , φ_2 , φ_3 . Поэтому начальные значения углов нельзя задавать произвольно. Они вычисляются предварительно для заданного начального положения точки A и приводятся в (2) и табл. 8.

Указания к решению задачи на ЭВМ. Нелинейная система дифференциальных уравнений (4), (5) с заданными начальными условиями интегрируется на интервале времени τ . Одновременно с вычислением φ_i по формулам (3) находятся величины M_{Bz} , M_{Dz} . Шаг печати выбирается равным $\Delta t = \tau/24 = 0,01$ с. На печать выводятся переменные t , ω_{1z} , ω_{2z} , ω_{3z} , φ_1 , φ_2 , φ_3 , M_{Bz} , M_{Dz} и скорость точки C . Для упрощения программы линейные размеры звеньев вводятся как числовые константы.

Один из возможных вариантов программы, в котором уравнения (4), (5) интегрируются по конечно-разностной схеме Эйлера, приведен в рассмотренном ниже примере.

Студентам, имеющим практические навыки программирования, рекомендуется усовершенствовать программу. Например, интегрировать систему (4), (5) методом Рунге — Кутты, используя стандартные подпрограммы; организовать печать текстовой «шапки» таблицы результатов; вывести результаты не только в виде таблиц, но и в виде графиков и т. д.

Указания к вычислению мощности управляющих двигателей. Мощность, которую развивают двигатели, вычисляется по формулам вида

$$N_B = M_{Bz}\omega_{iz} + (-M_{Bz})\omega_{jz}. \quad (6)$$

Здесь $i, j = i+1$ — номера звеньев, соединяемых шарниром B . Если шарнир прикреплен к неподвижному основанию, формула (6) перейдет в

$$N_B = M_{Bz}\omega_{iz}. \quad (7)$$

Контроль решения. Построенные по результатам счета графики не должны иметь разрывов. При $t=0$ и при $t=\tau$ скорость груза A равна нулю, поэтому в правильно решенной задаче угловые скорости звеньев в начальный момент должны быть равны нулю, а при $t=\tau$ отличие за счет погрешностей счета от нуля должно быть малым. Результаты вычисления на ЭВМ угловых скоростей звеньев должны близко совпадать с результатами графоаналитического решения для момента времени $t = (N+1)\Delta t$, выполненного, как в расчете К-1.

Защита расчета. Типовые вопросы:

1. Можно ли решить задачи 4, 9, 15, 22, 25, если допустить проскальзывание звена 2?
2. Как изменятся уравнения движения и уравнения для определения управляющих моментов, если груз движется горизонтально со скоростью $v_{Ax} = v \sin pt$?
3. Как изменятся уравнения движения и уравнения для определения управляющих моментов, если груз движется с постоянной скоростью $v_{Ay} = v$, $v_{Ax} = 0$ или $v_{Ax} = v$, $v_{Ay} = 0$?
4. Можно ли задавать произвольным образом начальные значения углов $\varphi_1(0)$, $\varphi_2(0)$, $\varphi_3(0)$?
5. Составить уравнения движения и уравнения для определения управляющих моментов, если движение груза задано уравнениями $x_A = x_A(t)$, $y_A = y_A(t)$.
6. Изобразить на рисунке графоаналитического решения векторы скоростей тех или иных точек.
7. Найти м. ц. с. звеньев в произвольном положении механизма.
8. По графику $\omega_{1z}(t)$ оценить приращение величины φ_1 за время τ .
9. Объяснить по виду функции $\omega_{1z}(t)$ характер изменения функции $\varphi_1(t)$.
10. Объяснить значение каждого оператора в программе.
11. Изменить программу таким образом, чтобы мощность каждого двигателя управления вычислялась на ЭВМ как функция времени.
12. Чему равна мощность двигателей при $t=0$, $t=\tau$?
13. Как изменились бы уравнения задачи в случае инерционных звеньев манипулятора?

ПРИМЕР ВЫПОЛНЕНИЯ ЗАДАНИЯ

(Вариант 31, $n=3$, $N=7$)

Постановка задачи. Манипулятор, кинематическая схема которого приведена на рис. 55, перемещает точечный груз массы m за время τ из точки a в точку b с заданной скоростью $v_{Ax}=0$, $v_{Ay}=v \sin pt$. Управляющие двигатели расположены в шарнирах B и D .

Дано: $BC=r_1=0,53$ м; $AC=2r_1$, $OB=r_2=0,47$ м; $OD=r_3=0,47$ м; $\varphi_1(0)=0,57$ рад, $\varphi_2(0)=5,77$ рад; $\varphi_3(0)=5,17$ рад; $\tau=1,68$ с; $v=0,45$ м/с; $p=1,87$ рад/с, $m=17$ кг.

Массой элементов конструкции можно пренебречь.

Требуется: 1. Составить уравнения кинестатики для определения управляющих моментов, реализующих заданное программное движение груза. 2. Составить кинематические уравнения, определяющие изменение во времени угловых скоростей, углов поворота звеньев и скорости точки C . 3. Решить полученные уравнения на ЭВМ на интервале времени τ . 4. Построить графики $M_{Bz}(t)$, $M_{Dz}(t)$, $\varphi_1(t)$, $\omega_{1z}(t)$, $\omega_{3z}(t)$. 5. Для момента времени $t=(N+1)\Delta t=$

$=0,56$ с определить с помощью графоаналитического метода угловые скорости звеньев, скорость точки C и сравнить с результатами счета на ЭВМ. 6. По данным счета найти мощность каждого двигателя при $t=0,56$ с.

Составление уравнений кинестатики для управляющих моментов. Освободим систему от связей, как показано на рис. 56. Изобразим реакции связей, активные: силу \vec{G} точки A и внутренние мо-

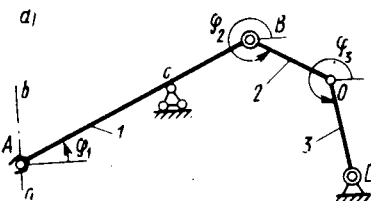


Рис. 55

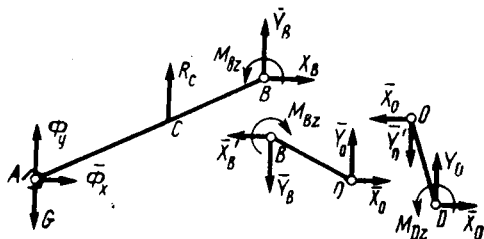


Рис. 56

менты управления M_{Bz} , M_{Dz} . По принципу Даламбера условно приложим к точке A силу инерции $\vec{\Phi} = -m\vec{w}_A$. Для заданного движения точки A вычислим

$$\Phi_x = 0;$$

$$\Phi_y = -m\omega_{Ay} = -m\dot{v}_{Ay} = -mvp \cos pt. \quad (8)$$

Составим уравнения равновесия систем сил, указанных на рис. 56.

Из уравнений проекций сил на ось x для звеньев 1, 2 и 3 с учетом (8) получим

$$X_D = X_O = X_B = 0. \quad (9)$$

Из уравнений проекций сил на ось y для звеньев 2 и 3 получим

$$Y_D = Y_O = Y_B. \quad (10)$$

Составим с учетом (8), (9), (10) уравнение моментов для звена 1 относительно точки C , для звена 2 относительно точки B , для звена 3 относительно точки O . Вычисление моментов производится с помощью формул вида

$$\vec{M}_O(\vec{R}_D) = \vec{OD} \times \vec{R}_D = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ r_3 \cos \varphi_3 & r_3 \sin \varphi_3 & 0 \\ 0 & Y_D & 0 \end{vmatrix} = \vec{k}(Y_D r_3 \cos \varphi_3).$$

Проделав выкладки, получим

$$M_{Bz} + [Y_O + 2(G - \Phi_y)] r_1 \cos \varphi_1 = 0;$$

$$-M_{Bz} + Y_O r_2 \cos \varphi_2 = 0; \quad M_{Dz} + Y_O r_3 \cos \varphi_3 = 0. \quad (11)$$

Отсюда

$$M_{Bz} = -\frac{2(G + mvp \cos pt) r_1 r_2 \cos \varphi_1 \cos \varphi_2}{r_2 \cos \varphi_2 + r_1 \cos \varphi_1};$$

$$M_{Dz} = -\frac{r_3 \cos \varphi_3}{r_2 \cos \varphi_2} M_{Bz}. \quad (12)$$

Составление кинематических уравнений. Уравнения для определения трех неизвестных скоростей ω_{1z} , ω_{2z} , ω_{3z} даются тремя уравнениями внешних связей, налагаемых на механизм (см. рис. 55):

$$v_{Cy} = 0; \quad v_{Dx} = 0; \quad v_{Dy} = 0. \quad (13)$$

Запишем выражение для скорости точки C :

$$\bar{v}_C = \bar{v}_A + \bar{\omega}_1 \times \bar{AC}.$$

Проецируя обе части этого равенства на оси координат, получим

$$v_{Cx} = v_{Ax} - \omega_{1z} \cdot 2r_1 \sin \varphi_1; \quad (14)$$

$$v_{Cy} = v_{Ay} + \omega_{1z} \cdot 2r_1 \cos \varphi_1. \quad (15)$$

При вычислении скорости точки D рекомендуется последовательно находить скорости точек в соответствии с графом

$$C \xrightarrow{1} B \xrightarrow{2} O \xrightarrow{3} D:$$

$$\bar{v}_D = \bar{v}_C + \bar{\omega}_1 \times \bar{CB} + \bar{\omega}_2 \times \bar{BO} + \bar{\omega}_3 \times \bar{OD}.$$

Отсюда

$$v_{Dx} = v_{Cx} - \omega_{1z} r_1 \sin \varphi_1 - \omega_{2z} r_2 \sin \varphi_2 - \omega_{3z} r_3 \sin \varphi_3; \quad (16)$$

$$v_{Dy} = v_{Cy} + \omega_{1z} r_1 \cos \varphi_1 + \omega_{2z} r_2 \cos \varphi_2 + \omega_{3z} r_3 \cos \varphi_3. \quad (17)$$

Приравняв правые части (15)–(17) нулю, получим систему уравнений для определения ω_{1z} , ω_{2z} , ω_{3z} . Разрешая эту систему, получим

$$\omega_{1z} = -0,45 \sin pt / (2r_1 \cos \varphi_1);$$

$$\omega_{2z} = -\omega_{1z} r_1 [\sin(\varphi_1 - \varphi_3) + 2 \sin \varphi_1 \cos \varphi_3] / [r_2 \sin(\varphi_2 - \varphi_3)];$$

$$\omega_{3z} = -(\omega_{1z} r_1 \cos \varphi_1 + \omega_{2z} r_2 \cos \varphi_2) / (r_3 \cos \varphi_3). \quad (18)$$

Скорость v_{Cx} определена уравнением (14). Дополним (18) уравнениями

$$\dot{\varphi}_1 = \omega_{1z}; \quad \dot{\varphi}_2 = \omega_{2z}; \quad \dot{\varphi}_3 = \omega_{3z}. \quad (19)$$

Вычисление мощности двигателей управления:

$$N_B = M_{Bz} (\omega_{1z} - \omega_{2z}); \quad (20)$$

$$N_D = M_{Dz} \omega_{3z}. \quad (21)$$

Решение задачи на ЭВМ и обработка результатов. Вычисления в силу уравнений (12), (14), (18), (19) будем проводить на ЭВМ.

Для интегрирования уравнений (18), (19) применим конечно-разностную схему Эйлера с шагом интегрирования, равным шагу печати $\Delta t=0,07$ с. Программа счета представлена на рис. 57.

```

DATA DT,T,F1,F2,F3,P/
*0.07,0.,0.57,5.77,5.17,1.87/
DO 12 K=1,25
C1=COS(F1)
C2=COS(F2)
C3=COS(F3)
OM1=-0.425*SIN(P*T)/C1
OM2=-1.13*OM1*(SIN(F1-F3)+2*SIN(F1)*C3)/
/SIN(F2-F3)
OM3=-(OM1+1.13*C1+OM2*C2)/C3
VC=-1.06*OM1*SIN(F1)
UMB=-16*(9.8+0.842*COS(P*T))*C1*C2/
/(C1+C2/1.13)
UMD=-UMB*C3/C2
PRINT 30731,T
*,F1,F2,F3,OM1,OM2,OM3,VC,UMB,UMD
30731 FORMAT(10F10.3)
F1=F1+OM1*DT
F2=F2+OM2*DT
F3=F3+OM3*DT
12 T=T+DT
STOP
END

```

0.0	0.570	5.77	5.17	0.0	0.0	0.0	0.0	-77.4	39.3
0.070	0.570	5.77	5.17	-0.066	0.194	-0.240	0.038	-77.4	39.2
0.140	0.565	5.78	5.15	-0.130	0.362	-0.453	0.074	-77.6	37.7
0.210	0.556	5.81	5.12	-0.192	0.481	-0.613	0.107	-78.1	34.9
0.280	0.543	5.84	5.08	-0.248	0.549	-0.716	0.136	-78.8	31.2
0.350	0.525	5.88	5.03	-0.299	0.579	-0.774	0.159	-79.4	26.8
0.420	0.505	5.92	4.97	-0.343	0.583	-0.796	0.176	-80.0	22.1
0.490	0.481	5.96	4.92	-0.380	0.573	-0.793	0.186	-80.4	17.3
0.560	0.454	6.00	4.86	-0.410	0.553	-0.771	0.190	-80.7	12.6
.
1.61	0.088	6.39	4.48	-0.856	0.061	-0.010	0.005	-75.7	-17.9
1.68	0.084	6.48	4.47	0.0	0.0	0.0	0.0	-75.7	-17.9

Рис. 57

Обозначение переменных в программе:

Переменные . . . t Δt φ_1 φ_2 φ_3 ω_{1z} ω_{2z} ω_{3z} v_{cx} ρ M_{Bz} M_{Dz}

Обозначения . . . T DT F1 F2 F3 OM1 OM2 OM3 VC P UMB UMD

Начальные значения t , φ_1 , φ_2 , φ_3 , числовые значения Δt и ρ вводятся с помощью оператора DATA. Длины звеньев r_1 , r_2 , r_3 вводятся как числовые константы. Арифметические выражения этих кон-

стант предварительно вычисляются с точностью до трех значащих цифр.

По результатам решения задачи на ЭВМ (см. рис. 57) на рис. 58 построены графики $\varphi_1(t)$, $\omega_{1z}(t)$, $\omega_{3z}(t)$, $M_{Bz}(t)$, $M_{Dz}(t)$.

Для вычисления мощности двигателей извлечем из таблицы счета значения угловых скоростей и моментов управления в момент времени $t=0,56$ с. Подставляя эти значения в (20), (21), получим $N_B=80,6(0,409+0,553)=77,5$ Вт; $N_D=-12,6 \cdot 0,77=-9,7$ Вт.

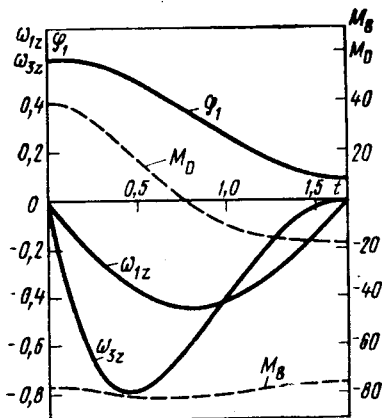


Рис. 58

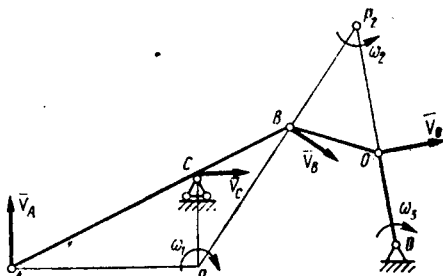


Рис. 59

Контроль решения. Графики на рис. 58 не имеют разрывов. При $t=0$ и $t=\tau$ угловые скорости звеньев близки нулю, что отвечает нулевой скорости груза A в эти моменты времени. Проведем графоаналитическую проверку. Извлечем из таблицы счета значения φ_1 , φ_2 , φ_3 , соответствующие моменту времени $t=0,56$, и вычислим для этого момента времени скорость точки A :

$$\varphi_1 = 0,454 \text{ рад} = 26^\circ; \quad \varphi_2 = 6,0 \text{ рад} = 344^\circ;$$

$$\varphi_3 = 4,86 \text{ рад} = 278^\circ; \quad v_{Ay} = 0,45 \sin pt = 0,39 \text{ м/с.}$$

Это положение механизма изобразим на рис. 59 в масштабе $1:10$. Построим мгновенные центры скоростей P_1 , P_2 первого и второго звеньев. Построим векторы скоростей точек A , C , B , O , дужками укажем направление вращения звеньев, вычислим их угловые скорости и скорость точки C . По результатам построения звено 1 вращается по часовой стрелке со скоростью $\omega_1 = v_A/AP_1 = 0,39/0,95 = 0,41$ рад/с. Ползун C движется вправо со скоростью $v_C = \omega_1 CP_1 = 0,41 \times 0,46 = 0,189$ м/с. Звено 2 вращается против часовой стрелки, а звено 3 — по часовой со скоростями

$$\omega_2 = v_B BP_2 = \omega_1 BP_1/BP_2 = 0,41 \cdot 0,84/0,62 = 0,556 \text{ рад/с};$$

$$\omega_3 = v_O OD = \omega_2 P_2 O/OD = 0,556 \cdot 0,66/0,47 = 0,78 \text{ рад/с.}$$

Эти выводы соответствуют результатам счета, приведенным в девятой строке таблицы счета.

Динамика машины с шатунно-кривошипным приводом

РАСЧЕТ Д-4

Описание задания. Цель расчета — приобретение опыта математического моделирования динамики машины путем составления и исследования на ЭВМ дифференциальных уравнений движения, приобретение опыта приближенных энергетических оценок.

Рассматривается машина с шатунно-кривошипным приводом. Определяются движение машины и динамические усилия в звеньях. Силы (моменты) нагрузки и сопротивления заданы. Вращающий момент (движущая сила) определяется до счета на ЭВМ приближенно из уравнения энергетического баланса для требуемого периодического движения машины.

Варианты схем машин представлены на рис. 60—63. Элементы конструкции машин считаются абсолютно жесткими, тросы, ремни, ленты транспортеров — нерастяжимыми безынерционными. Взаимное проскальзывание тросов, блоков, колес и т. п. отсутствует. Масса шатуна AB считается пренебрежимо малой.

Все варианты можно разделить на два типа: к первому (варианты 3—11, 14—22, 25—28, 30) относятся подъемники различного вида, транспортеры, пилы, электрогенераторы и т. п. с приводом от одноцилиндрового двухтактного двигателя внутреннего сгорания с движущей силой $\bar{F}_д$, приложенной к поршню. Ко второму типу (варианты 1, 2, 12, 13, 23, 24, 29) относятся прессы, поршневые насосы и компрессоры с приводом от электродвигателя с вращающим моментом $\bar{M}_д$. Через $\bar{F}_н$ обозначена сила нагрузки, приложенная к исполнительному звену машины, поршню насоса, полотну пилы и т. п., через $\bar{M}_н$ — момент нагрузки.

Во всех вариантах исходные данные подобраны так, что маховик I вращается против часовой стрелки. На рисунках указаны направления сил и моментов для такого движения машины. Сила $\bar{F}_д$, приложенная к поршню $З$, отлична от нуля только во время рабочего хода поршня. Рабочему ходу отвечают движения поршня сверху вниз или справа налево. При этом модуль силы дается выражением

$$F_x = \begin{cases} F_0 = \text{const} & \text{при } v_{Bx} \leq 0 (v_{By} \leq 0); \\ 0 & \text{при } v_{Bx} > 0 (v_{By} > 0). \end{cases} \quad (1)$$

Аналогично записывается выражение для модуля F_n , если сила нагрузки приложена к поршню (пуансону). Если сила нагрузки приложена к звену, скорость которого не меняет направления, то $F_n = \text{const}$ (варианты 3, 6, 9, 14, 15, 17, 19, 21, 20). Моменты $\bar{M}_д$ и $\bar{M}_н$ постоянны. Силы сопротивления приведены к моменту сопротивления $\bar{M}_с$, приложенному к маховику.

Исходные данные для расчета задаются формулами (2) и табл. 9:

$$\begin{aligned} r &= 0,08 + 0,01N; \quad M_{Cz} = -\mu\omega_{1z}; \\ \tau &= 0,24(1 + 0,01N); \quad \mu = 1 + 0,1N; \\ I_1 &= I_{1r} + 0,1n; \quad r/l = 0,12 + 0,001n. \end{aligned} \quad (2)$$

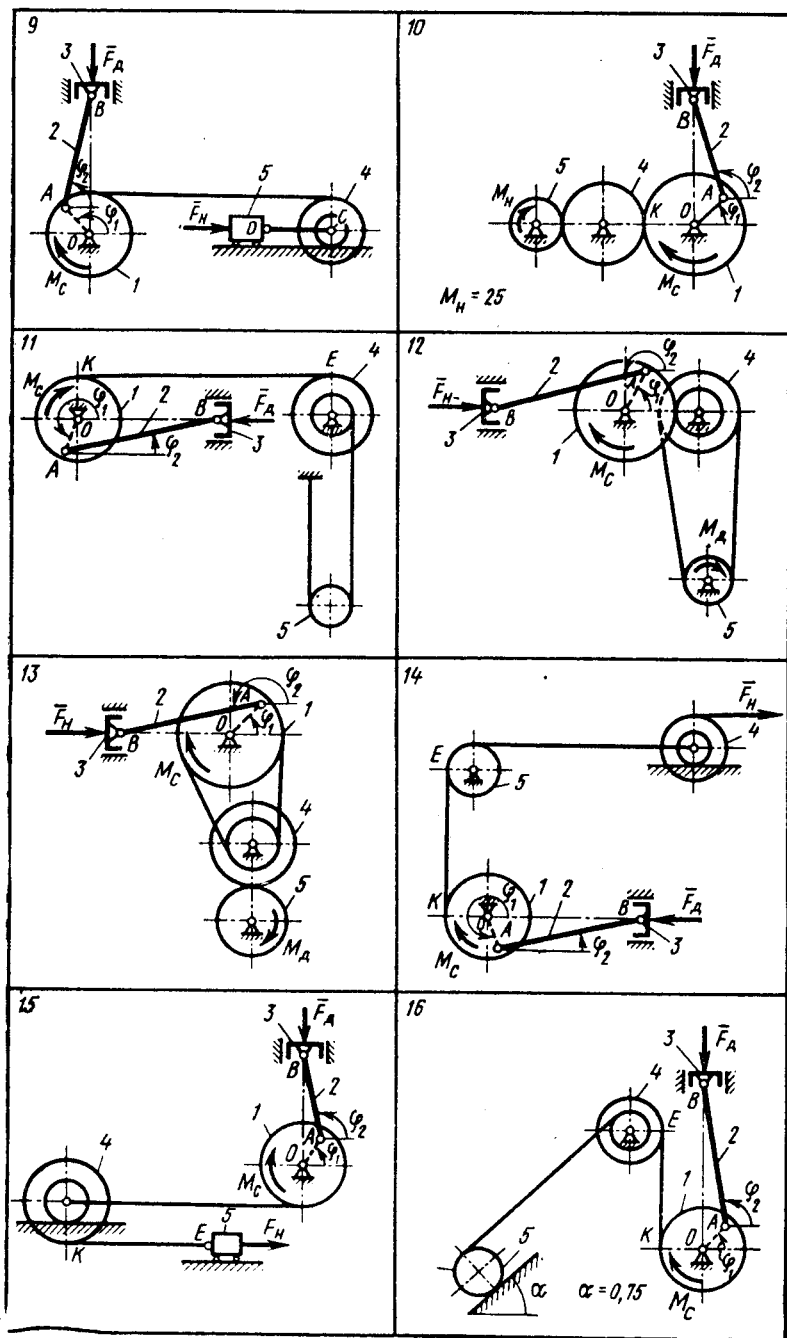


Рис. 61

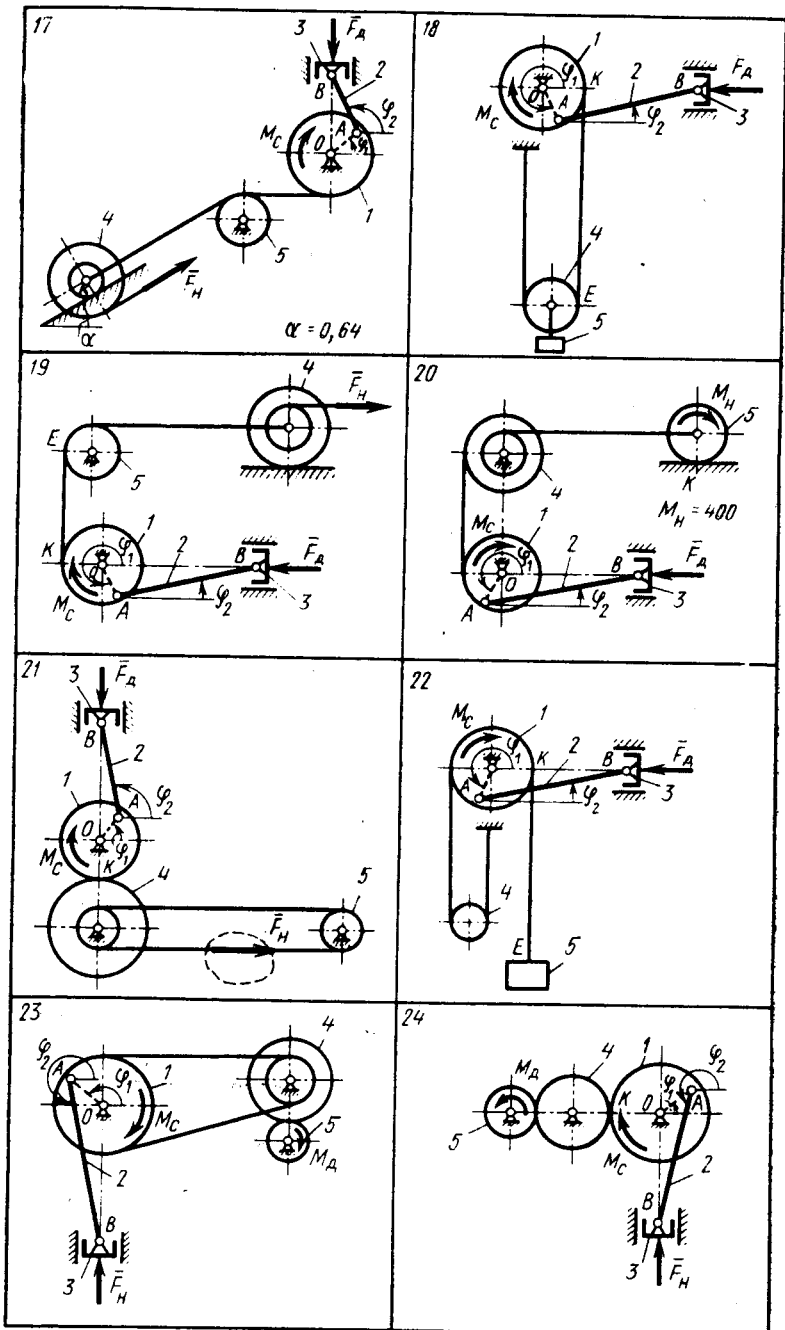


Рис. 62

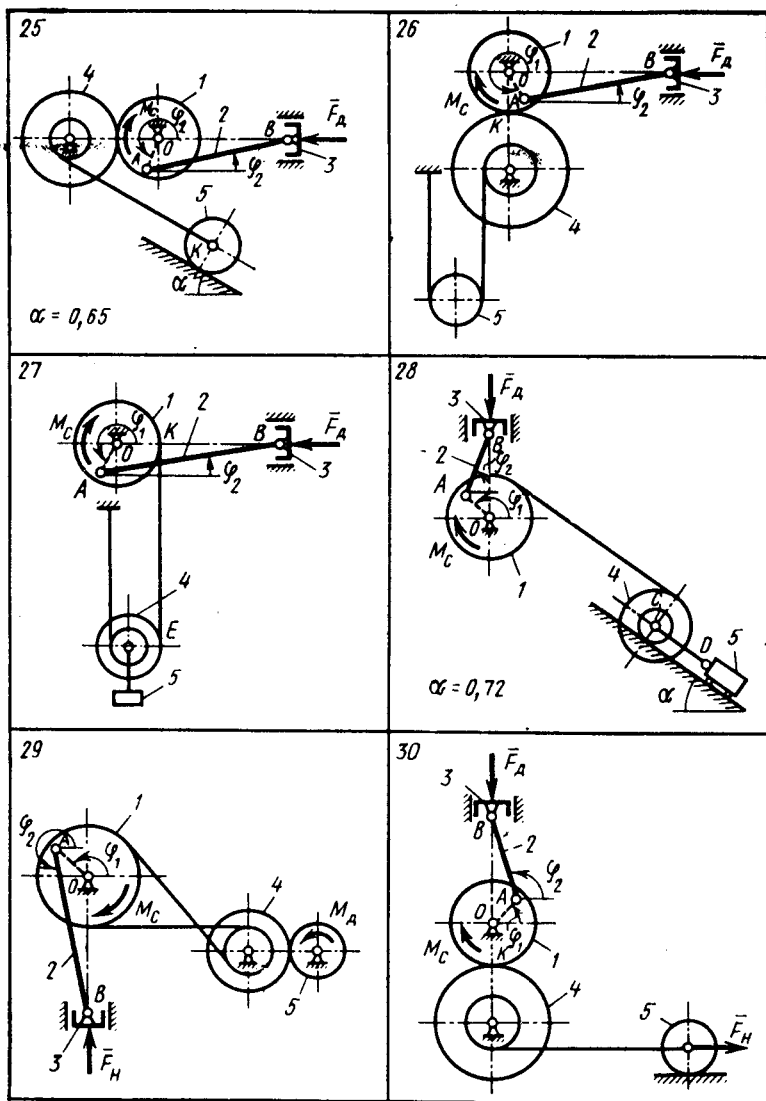


Рис. 63

Здесь r — длина кривошипа OA ; l — длина шатуна AB . Колеса, блоки, катки, для которых значения радиусов инерции в табл. 9 не указаны, считаются сплошными однородными дисками.

Требуется: 1. С помощью теоремы об изменении кинетической энергии определить в вариантах первого типа величину F_0 , а в вариантах второго типа — величину M_d , при которых машина работает в циклическом режиме с заданным периодом τ . 2. Исследовать с помощью ЭВМ дифференциальные уравнения движения ма-

Вариант	l_{11}	m_2	m_4	m_5	R_1	R_4	r_4	ρ_4	R_5	F_H	$\varphi_1(0)$	$\varphi_2(0)$
1	5,0	30	20	10	0,36	0,30	0,12	0,21	0,10	5500	0	3,14
2	6,0	40	15	12	0,36	0,27	0,12	0,18	0,09	6200	1,57	4,71
3	3,0	25	240	10	0,13	0,16	0,09	0,11	—	1100	1,57	1,57
4	4,0	18	110	215	0,14	0,14	0,08	0,09	—	—	3,14	0
5	3,0	20	0	625	0,12	—	—	—	—	—	0	0
6	2,0	15	20	200	0,11	0,16	0,08	0,11	—	1800	4,71	1,57
7	3,0	12	0	220	0,12	0,14	0,07	—	—	—	3,14	0
8	2,0	14	10	370	0,10	—	—	—	—	—	1,57	1,57
9	3,0	12	0	150	0,11	0,20	0,10	—	—	5800	4,71	1,57
10	4,0	24	30	15	0,36	—	—	—	0,06	—	1,57	1,57
11	3,0	16	0	700	0,12	0,16	0,08	—	—	—	0	0
12	6,0	42	35	20	0,39	0,28	0,13	0,15	0,14	6100	0	3,14
13	5,0	45	28	16	0,40	0,32	0,10	0,20	0,16	6400	3,14	3,14
14	2,0	12	250	18	0,10	0,15	0,10	0,12	—	1000	3,14	0
15	2,0	14	300	100	0,11	0,16	0,08	0,13	—	1500	1,57	1,57
16	3,0	16	0	890	0,12	0,14	0,07	—	—	—	4,71	1,57
17	2,0	10	150	12	0,10	0,12	0,06	0,10	—	1100	1,57	1,57
18	3,0	11	20	380	0,12	—	—	—	—	—	0	0
19	3,0	13	200	10	0,12	0,15	0,05	0,12	—	1500	0	0
20	2,0	12	30	200	0,11	0,16	0,08	0,13	0,10	—	3,14	0
21	1,0	10	25	10	0,12	0,18	0,09	0,14	—	3900	1,57	1,57
22	1,0	12	200	300	0,10	—	—	—	—	—	3,14	0
23	3,0	25	32	12	0,36	0,24	0,12	0,17	0,12	6300	4,71	4,71
24	4,0	30	28	11	0,40	—	—	—	0,08	5900	1,57	4,71
25	2,0	15	20	720	0,10	0,15	0,05	0,12	—	—	3,14	0
26	2,0	12	0	900	0,12	0,24	0,10	—	—	—	0	0
27	1,0	12	0	580	0,11	0,12	0,06	—	—	—	3,14	0
28	1,0	10	0	710	0,10	0,12	0,08	—	—	—	1,57	1,57
29	5,0	28	20	10	0,36	0,20	0,09	0,14	0,10	6300	1,57	4,71
30	2,0	12	18	400	0,12	0,18	0,06	0,11	—	5500	1,57	1,57

шины. Перечень пунктов исследования приведен ниже в примере 3. Для момента времени, когда угловое ускорение ε_{1z} принимает максимальное по модулю значение, определить одну из следующих динамических реакций: а) окружное усилие в точке K (в вариантах 1, 6, 10, 17, 20, 21, 24, 25, 26, 30); б) разность сил натяжения ведущей и ведомой ветвей ременной передачи (в вариантах 2, 8, 12, 13, 23, 29); в) натяжение троса KE (в вариантах 3, 4, 7, 11, 14, 15, 16, 18, 19, 22, 27); г) усилие в стержне CD (в вариантах 5, 9, 28).

Указания к составлению уравнений движения. Уравнения движения составляются с помощью общих теорем динамики или уравнения Даламбера — Лагранжа и приводятся к следующему виду по избыточному набору переменных:

$$\dot{\varphi}_1 = \omega_{1z}; \quad \dot{\varphi}_2 = \omega_{2z}; \quad \dot{\omega}_{1z} = \varepsilon_{1z};$$

$$\varepsilon_{1z} = \varepsilon_{1z}(\omega_{1z}, \omega_{2z}, \varphi_1, \varphi_2);$$

$$\omega_{2z} = \omega_{2z}(\omega_{1z}, \varphi_1, \varphi_2).$$

(3)

Так как механическая система имеет одну степень свободы, то начальные условия по переменной φ_2 не произвольны, а выражаются через начальные условия по φ_1 .

Указания к определению реакций связей. Если уравнения движения составлялись с помощью общих теорем динамики, то полученную систему динамических уравнений нужно разрешить относительно искомого реакции. Если уравнения составлялись в форме уравнения Даламбера — Лагранжа, то для определения реакций связей рекомендуется освободить соответствующее звено от связей и с помощью общих теорем динамики составить такие уравнения, куда вошла бы искомая реакция.

Указания к определению F_d и M_d . Во всех вариантах заданы числовые значения полезной нагрузки и коэффициент μ момента сопротивления. Силовые факторы F_d , M_d , приводящие машину в движение, определяются из условия периодичности движения с заданным периодом τ . Для этого используется теорема об изменении кинетической энергии

$$\Delta T = A_d + A_n + A_c. \quad (4)$$

Для периодического движения машины изменение кинетической энергии ΔT за время цикла равно нулю.

В (4) через A_d обозначена работа, затраченная на приведение машины в движение. В вариантах первого типа это работа движущей силы (1), в вариантах второго типа — работа вращающего момента. Через A_n обозначена работа, затраченная на преодоление сил полезной нагрузки, через A_c — работа сил сопротивления, которые в расчете моделируются моментом \bar{M}_c .

При оценке величины A_c принимается упрощающее предположение, что маховик вращается равномерно со скоростью $\omega_{12}^* = 2\pi/\tau$. Тогда $M_{c2} = -\mu\omega_{12}^*$ и

$$A_c = \int_0^{2\pi} M_{c2} d\varphi_1 = -\mu 4\pi^2/\tau. \quad (5)$$

Указания к решению задачи на ЭВМ. Дифференциальные уравнения движения машины (3) и уравнение для определения усилия S в шатуне AB решаются на ЭВМ. Необходимые для интегрирования начальные условия по переменным φ_1 , φ_2 указаны в табл. 9, начальная угловая скорость берется равной ω_{12}^* . Шаг печати Δt выбирается равным $\Delta t = \tau/24 = 0,01 + 10^{-4}$ N. На печать выводятся переменные t , φ_1 , φ_2 , ω_{12} , ω_{22} , ε_{12} , S . Для упрощения программы и для ее индивидуализации значения длин и масс звеньев, момента M_n , тригонометрических функций угла и т. п. вводятся как числовые константы. Значения этих констант предварительно вычисляются с точностью до трех значащих цифр.

Один из возможных вариантов программы решения задачи с использованием конечно-разностной схемы Эйлера приведен в рассмотренном ниже примере.

Студентам, имеющим практические навыки программирования, рекомендуется усовершенствовать программу. Например, для интегрирования дифференциальных уравнений движения использовать стандартную подпрограмму, реализующую метод Рунге — Кутты; дополнить программу операторами, определяющими относительное рассогласование за время τ величин ω_{1z} , ε_{1z} , S ; организовать печать текстовой «шапки» таблицы результатов и т. д.

Контроль решения. Заданные начальные условия и вычисленные значения величин F_0 и M_d определяют движение, близкое к установившемуся с периодом τ . В правильно решенной задаче относительные рассогласования между начальными и конечными значениями переменных φ_2 , ω_{1z} , ω_{2z} , ε_{1z} за время одного оборота маховика должны быть малы.

Защита расчета. Типовые вопросы:

1. Для заданного момента времени по результатам счета определить какую-либо из динамических реакций помимо найденных.

2. Объяснить, почему на установившемся режиме движения машины изменение кинетической энергии за один цикл равно нулю.

3. Как изменится уравнение энергетического баланса, если на поршень действует кулонова сила трения скольжения?

4. Объяснить, почему при вычислении величин F_d и M_d сила G_3 не учитывается.

5. Гарантирует ли задание начальных условий $\varphi_1(0)$, $\varphi_2(0)$, $\omega_{1z}(0) = \omega_{1z}^*$ движение в установившемся режиме с первого же оборота маховика?

6. С помощью уравнения (4) оценить характер изменения величины ΔT , а следовательно, и характер движения машины при $\omega_{1z}(0) \gg \omega_{1z}^*$, при $\omega_{1z}(0) \ll \omega_{1z}^*$.

7. По виду полученных графиков приблизительно оценить момент времени начала и конца рабочего хода поршня.

8. По графику функции $\varphi_1(t)$ найти числовое значение ω_{1z} при $t = 0,5\tau$; $t = \tau$.

9. Объяснить смысл тех или иных операторов программы.

10. Как изменится программа для случая, когда оба хода машины рабочие?

ПРИМЕР ВЫПОЛНЕНИЯ ЗАДАНИЯ

(Вариант 31, $n=3$, $N=7$)

Постановка задачи. Подъемник (рис. 64) приводится в движение поршневым одноцилиндровым двухтактным двигателем внутреннего сгорания. Сила F_d , действующая на поршень, постоянна при рабочем ходе поршня, равна нулю — при холостом. Момент сопротивления $M_{Cz} = -\mu\omega_{1z}$.

Дано: $OA=r=0,087$ м; $r_1=0,09$ м; $r_4=0,12$ м; $R_4=0,27$ м; $R_5=0,15$ м; $r/l=0,123$; $\mu=1,7$ кг·м/с; $I_1=5,7$ кг·м²; $m_3=12$ кг; $m_5=1080$ кг; $\varphi_1(0)=0$; $\tau=0,257$ с; $\varphi_2(0)=1,69$; $\alpha=0,512$. Массы шатуна AB , ремня, тросов и шкива 4 не учитываются. Ремень и трос

предполагаются нерастяжимыми. Ремень относительно шкивов и каток относительно опорной поверхности не проскальзывают.

Требуется: 1. Составить дифференциальные уравнения движения машины и уравнение для определения усилия S в шатуне AB . 2. С помощью теоремы об изменении кинетической энергии определить движущую силу, при которой машина работает в циклическом режиме с заданным периодом τ . 3. Решить полученные уравнения на ЭВМ для заданных начальных условий на интервале времени τ . 4. Построить графики $\varphi_1(t)$, $\omega_{1z}(t)$, $\varepsilon_{1z}(t)$, $S(t)$. 5. Определить относительную неравномерность хода маховика по $\omega_{1z}(t)$. 6. Для момента времени, когда ε_{1z} принимает максимальное по модулю значение, определить разность S_1 сил натяжения ведущей \bar{P} и ведомой \bar{Q} ветвей ременной передачи ($S_1 = \bar{P} - \bar{Q}$).

Вывод дифференциальных уравнений движения машины и уравнений для определения динамических усилий. Уравнения движения составим с помощью общих теорем динамики. Освободим систему от внешних связей и обозначим реакции (рис. 65). Запишем динамические уравнения освобожденных от связей тел. Системы координат xuz , $x_1y_1z_1$ выберем так, чтобы скорость точки B была направлена по оси y , скорости точек D и E — по оси x , скорости точек K и C — по оси x_1 .

Уравнение движения маховика I , вращающегося вокруг неподвижной оси Oz , имеет вид

$$I_1 \dot{\omega}_{1z} = -S_1 r_1 - \mu \omega_{1z} + Sr \sin(\varphi_2 - \varphi_1). \quad (6)$$

Уравнение поршня 3 , движущегося поступательно вдоль оси y :

$$m_3 \dot{v}_{By} = -F_x - G_3 - S \sin \varphi_2; \quad F_x = \begin{cases} F_0 & \text{при } v_{By} \leq 0; \\ 0 & \text{при } v_{By} > 0. \end{cases} \quad (7)$$

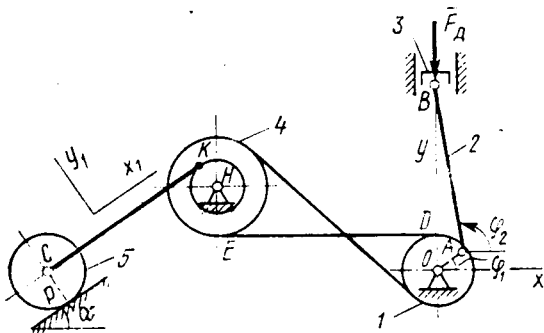


Рис. 64

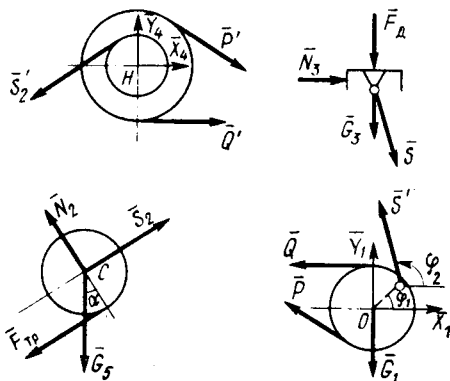


Рис. 65

Для безынерционного шкива 4 запишем уравнение моментов относительно точки H :

$$0 = -S_1 R_4 + S_2 r_4. \quad (8)$$

Для катка 5 запишем уравнение движения центра масс в проекции на ось x_1 и уравнение изменения кинетического момента относительно оси Cz :

$$m_5 \dot{v}_{Cx_1} = -F_{\text{тр}} + S_2 - G_5 \sin \alpha; \quad (9)$$

$$I_5 \dot{\omega}_{5z} = -F_{\text{тр}} R_5; \quad I_5 = m_5 R_5^2 / 2. \quad (10)$$

Переменные φ_1, φ_2 , входящие в правые части уравнений (6), (7), определяются кинематическими уравнениями

$$\dot{\varphi}_1 = \omega_{1z}; \quad \dot{\varphi}_2 = \omega_{2z}. \quad (11)$$

Дополним (6)–(11) уравнениями связей, налагаемых на систему¹.

Уравнение $v_{Bx} = 0$ составим в соответствии с графом $O \xrightarrow{1} A \xrightarrow{2} B$:

$$v_{Bx} = -\omega_{1z} r \sin \varphi_1 - \omega_{2z} l \sin \varphi_2 = 0. \quad (12)$$

Найдем

$$v_{By} = \omega_{1z} r \cos \varphi_1 + \omega_{2z} l \cos \varphi_2. \quad (13)$$

Уравнения связей $v_{Dx} = v_{Ex}$, $v_{Cx1} = v_{Kx1}$, $v_{Px1} = 0$ составим в соответствии с графами $O \xrightarrow{1} D$, $H \xrightarrow{4} E$, $H \xrightarrow{4} K$, $C \xrightarrow{5} D$:

$$-\omega_{1z} r_1 \sin \frac{\pi}{2} = -\omega_{4z} R_4 \sin \frac{3}{2} \pi; \quad (14)$$

$$v_{Cx_1} = -\omega_{4z} r_4 \sin \frac{\pi}{2}; \quad (15)$$

$$0 = v_{Cx_1} - \omega_{5z} R_5 \sin \frac{3}{2} \pi. \quad (16)$$

Система уравнений (6)–(16) — замкнутая (двенадцать уравнений с двенадцатью неизвестными $\varphi_1, \varphi_2, \omega_{1z}, \omega_{2z}, v_{By}, v_{Cx1}, \omega_{4z}, \omega_{5z}, S, S_1, S_2, F_{\text{тр}}$).

Приведем (6)–(16) к форме (2). Выражение для ω_{2z} получим из (12). Для определения $\omega_{1z} = \varepsilon_{1z}$ исключим в (6)–(10) все переменные, кроме $\varphi_1, \omega_{1z}, \varphi_2, \omega_{2z}$. При этом v_{By} и \dot{v}_{By} удобно представить в виде

$$v_{By} = \omega_{1z} u(\varphi_1, \varphi_2); \quad u = r \sin(\varphi_2 - \varphi_1) / \sin \varphi_2;$$

$$\dot{v}_{By} = \varepsilon_{1z} u + \omega_{1z} \dot{u};$$

$$u_1 = \dot{u} = r(\omega_{2z}^2 \sin \varphi_1 - \omega_{1z} \cos(\varphi_2 - \varphi_1) \sin \varphi_2) / \sin^2 \varphi_2. \quad (17)$$

¹ Кинематические соотношения составляются, как в расчете К-1.

Проделав выкладки и подставив числовые значения параметров, получим:

$$\dot{\varphi}_1 = \omega_{1z}; \quad \dot{\varphi}_2 = \omega_{2z}; \quad \omega_{1z} = \varepsilon_{1z};$$

$$\omega_{2z} = -0,123\omega_{1z} \sin \varphi_1 / \sin \varphi_2;$$

$$\varepsilon_{1z} = [-208 - 1,7\omega_{1z} - (F_x + 118 + 12\omega_{1z}u_1)u] / (8,3 + 12u^2). \quad (18)$$

Усилие S в шатуне AB определим из уравнения (7), а разность сил натяжения S_1 — из (6):

$$S = [12(\varepsilon_{1z}u + \omega_{1z}u_1) + F_x + 118] / \sin \varphi_2; \quad (19)$$

$$S_1 = [Sr \sin(\varphi_2 - \varphi_1) - I_1\varepsilon_{1z} - \mu\omega_{1z}] / r_1. \quad (20)$$

Определение движущей силы. Запишем теорему об изменении кинетической энергии:

$$\Delta T = A_x + A_n + A_r \quad (21)$$

За время цикла τ на периодическом движении $\Delta T = 0$. Работа движущей силы отлична от нуля только при рабочем ходе поршня, поэтому $A_d = F_0 2r$. Работа силы тяжести G_3 за цикл равна нулю. Работа полезной нагрузки

$$A_n = \int_0^\tau G_{5x_1} v_{Cx_1} dt = \frac{G_{5x_1} r_1 r_4}{R_4} \int_0^{2\pi} d\varphi_1 = \frac{-m_5 g r_1 r_4 2\pi \sin \alpha}{R_4}.$$

При вычислении работы сил сопротивления примем упрощающее предположение, что маховик вращается равномерно со скоростью $\omega_{1z}^* = 2\pi/\tau$. Тогда

$$A_c = \int_0^{2\pi} M_{Cz} d\varphi_1 = -4\mu\pi^2/\tau.$$

Подставим найденные выражения для A_d , A_n , A_c в (21):

$$F_0 2r - m_5 g 2\pi r_1 r_4 \sin \alpha / R_4 - 4\mu\pi^2/\tau = 0. \quad (22)$$

Отсюда для заданных числовых значений величин получим

$$F_0 = (1080 \cdot 9,81 \cdot 0,49 \cdot 6,28 \cdot 0,09 \cdot 0,12 / 0,27 + 4 \cdot 1,7 \cdot 9,87 / 0,257) / 0,174 = 9000 \text{ Н.}$$

Решение задачи на ЭВМ и обработка результатов. Систему уравнений (18), (19) будем решать на ЭВМ с программированием на ФОРТРАНе.

Для интегрирования дифференциальных уравнений (18) применим метод Эйлера с шагом, равным шагу печати $\Delta t = \tau/24 = 0,0107$ с. Программа счета представлена на рис. 66.

```

DATA DT,T,F1,F2,F3,R/
*0.0107,0.,0.,1.69,24.5,0.007/
DO 12 K=1,25
S2=SIN(F2)
U=R*SIN(F2-F1)/S2
F=9000
IF(U.GT.0.)F=0.0
OM2=-0.123*OM1+SIN(F1)/S2
U1=R*(OM2*SIN(F1)-
-OM1*COS(F2-F1)*S2)/S2**2
E1=-(200+1.7*OM1+
+(F+118+12*OM1*U1)*U)/(0.3+12*U**2)
S=-(12*(E1+U+OM1*U1)+F+118)/S2
PRINT 30731,T
*,F1,F2,OM1,OM2,E1,S
30731 FORMAT(10G10.3)
F1=F1+OM1*DT
F2=F2+OM2*DT
12 T=T+DT
STOP
END

```

0.0	0.0	1.69	24.5	0.0	-31.8	-161.
0.011	0.262	1.69	24.2	-.776	-29.9	5.79
0.021	0.521	1.68	23.8	-1.47	-28.3	167.
0.032	0.776	1.67	23.5	-2.04	-27.4	307.
0.043	1.03	1.64	23.2	-2.45	-27.3	412.
0.054	1.28	1.62	23.0	-2.70	-28.1	473.
0.064	1.52	1.59	22.7	-2.78	-29.4	484.
0.075	1.76	1.56	22.3	-2.70	-11.4	-.855E+04
0.086	2.00	1.53	22.2	-2.48	11.5	-.861E+04
0.096	2.24	1.50	22.3	-2.16	31.6	-.869E+04
0.107	2.48	1.48	22.7	-1.72	47.8	-.879E+04
0.118	2.72	1.46	23.2	-1.17	59.3	-.893E+04
0.128	2.97	1.45	23.8	-.502	65.2	-.908E+04
0.139	3.23	1.44	24.5	0.255	64.8	-.926E+04
0.150	3.49	1.45	25.2	1.0	57.9	-.943E+04
0.160	3.76	1.46	25.8	1.85	44.6	-.958E+04
0.171	4.03	1.48	26.3	2.53	25.7	-.969E+04
0.182	4.32	1.51	26.6	3.02	2.78	-.976E+04
0.193	4.60	1.54	26.6	3.25	22.4	-.977E+04
0.203	4.88	1.57	26.4	3.28	-31.8	-741.
0.214	5.17	1.61	26.0	2.88	-33.3	-681.
0.225	5.45	1.64	25.7	2.35	-34.2	-592.
0.235	5.72	1.66	25.3	1.67	-34.2	-477.
0.246	5.99	1.68	24.9	0.889	-33.4	-337.
0.257	6.26	1.69	24.6	0.077	-31.9	-177.

Рис. 66

Обозначение переменных в программе:

Переменные	t	Δt	φ_1	φ_2	ω_{1z}	ω_{2z}	ε_{1z}	u	u_1	F_d	S
Обозначения	T	DT	F1	F2	OM1	OM2	E1	U	U1	F	S

Так как $\omega_{1z} > 0$, то по (17) знаки величин v_{By} и u совпадают. Поэтому выражение для F_d записывается в виде

$$F_d = \begin{cases} 900, & \text{если } u \leq 0; \\ 0, & \text{если } u > 0. \end{cases}$$

Это выражение реализуется в программе следующими операторами:

$$F = 9000$$

$$IF (U.GT.0.) F = 0.$$

Результаты решения задачи на ЭВМ (см. рис. 66) представлены графиками $\varphi_1(t)$, $\omega_{1z}(t)$, $\varepsilon_{1z}(t)$, $S(t)$ на рис. 67.

Из графика для $\omega_{1z}(t)$ определим относительно неравномерность хода машины:

$$\begin{aligned} \delta\omega &= \frac{(\omega_{1z})_{\max} - (\omega_{1z})_{\min}}{(\omega_{1z})_{\max}} \\ &= \frac{26,6 - 22,2}{26,6} = 0,17. \end{aligned}$$

Вычислим разность сил натяжения ведущей и ведомой ветвей ременной передачи. Из графика $\varepsilon_{1z}(t)$ находим, что угловое ускорение маховика принимает максимальное по модулю значение при t , равном

0,139 с. В этот момент времени $\varphi_1 = 3,22$; $\varphi_2 = 1,44$; $\omega_{1z} = 24,5 \text{ с}^{-1}$; $\varepsilon_{1z} = 64,8 \text{ с}^{-2}$; $S = -9250 \text{ Н}$.

Подставляя числовые значения величин в (20), получим

$$\begin{aligned} S_1 &= [-9250 \cdot 0,087 \sin(1,44 - 3,22) - 5,7 \cdot 64,8 - \\ &- 1,7 \cdot 24,5] / 0,09 = 4180 \text{ Н}. \end{aligned}$$

Контроль решения. Из таблицы счета и графиков на рис. 67 видно, что движение машины близко к периодическому, оговоренному в условиях задачи.

РАСЧЕТ Д-4а

Выполнить расчет Д-4 для случая, когда оба хода поршня (пуансона) являются рабочими. При этом силы F_d , F_n , приложенные к поршню (пуансону), задаются формулами вида

$$F_{dx} = F_0 \operatorname{sign} v_{Bx}; \quad F_{nx} = -F_0 \operatorname{sign} v_{Bx}.$$

Здесь F_0 — положительная константа, а

$$\operatorname{sign} v_{Bx} = \begin{cases} 1 & \text{при } v_{Bx} > 0; \\ -1 & \text{при } v_{Bx} \leq 0. \end{cases}$$

Динамика машины с кулисным приводом

РАСЧЕТ Д-5

Описание задания. Цель расчета — приобретение опыта математического моделирования динамики машины путем составления дифференциальных уравнений движения и их исследования с помощью ЭВМ.

Рассматриваются машины с кулисным приводом. Определяются движение под действием заданных сил и моментов и динамические усилия в звеньях. Числовые значения параметров и начальные условия задаются так, что движение близко к периодическому.

Варианты схем машин представлены на рис. 68, 69. Элементы конструкции машин считаются абсолютно жесткими, ремни — нерастяжимыми и безынерционными. Проскальзывание колес, ремней и т. д. отсутствует. Трением между пальцем А кривошипа и прорезью кулисы пренебрегаем.

Машины приводятся в движение электродвигателем, развивающим момент M_d . Полезная нагрузка моделируется для разных вариантов либо силой \bar{F}_n , либо моментом \bar{M}_n .

Исходные данные задаются формулами (1) и табл. 10:

$$M_{xz} = M_0 - k\omega_{iz}; \quad k = k_r(1 + 0,01N);$$

$$F_{nx} = -\mu_1 v_{4x}, \quad (F_{ny} = -\mu_1 v_{4y});$$

$$M_{nz} = -\mu_2 \omega_{4z};$$

$$\mu_1 = \mu_{1r}(1 + 0,01N); \quad \mu_2 = \mu_{2r}(1 + 0,01N);$$

$$I_1 = I_{1r} + 0,1n; \quad \tau = 0,24(1 + 0,01N). \quad (1)$$

Интервал времени интегрирования τ задается близким ко времени полного оборота маховика в периодическом движении. Радиус маховика R_1 равен 0,36 м, $OA = r_1 = 0,06$ м. В вариантах 7, 9, 11, 24 радиус инерции $\rho_4 = 0,1$ м.

Требуется: 1. Исследовать с помощью ЭВМ дифференциальные уравнения движения машин λ . Перечень пунктов исследования приведен ниже в примере. 2. Для момента времени, когда угловое

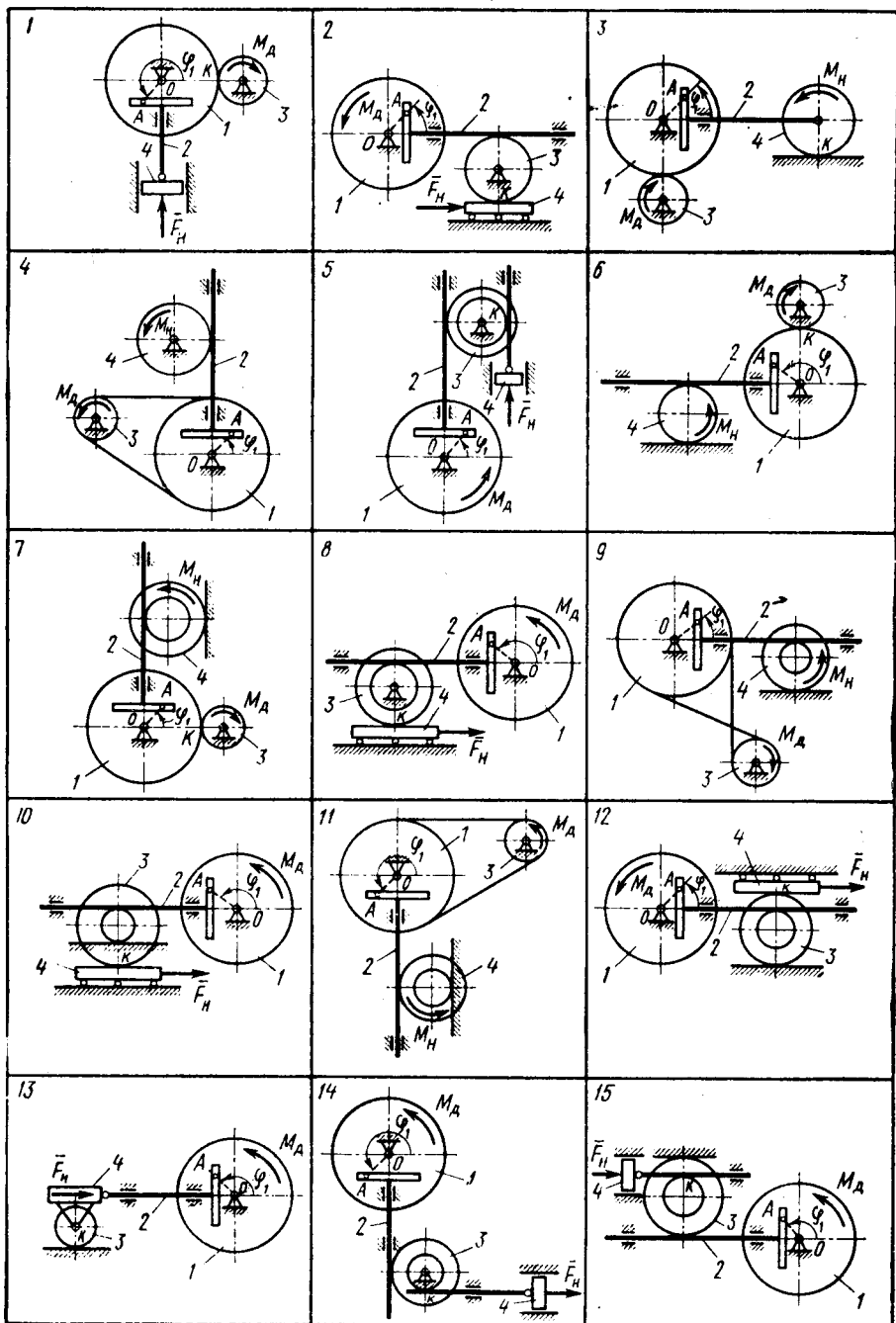


Рис. 63

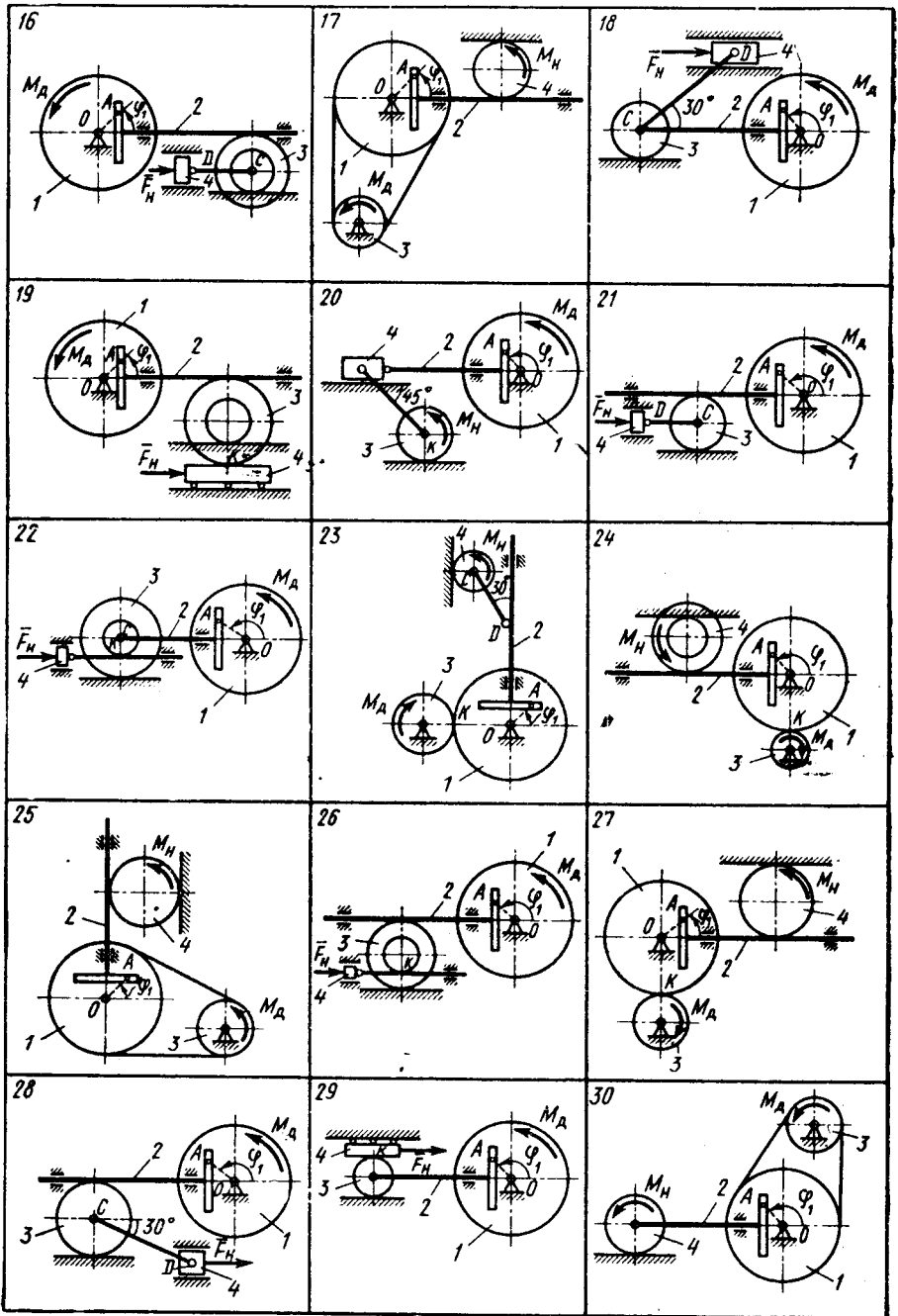


Рис. 69

ускорение ε_{1z} принимает максимальное по модулю значение, определить динамические реакции: а) окружное усилие в точке К (варианты 1, 2, 3, 5, 6, 7, 8, 10, 12, 13, 14, 15, 19, 20, 22, 23, 24, 26, 27, 29); б) разность сил натяжения ведущей и ведомой ветвей ремня

Таблица 10

Ва- риант	M_0	k_r	μ_{1r}	μ_{2r}	f_{1r}	m_1	m_2	m_3	R_1	r_1	ρ_1	R_2	r_2	$\varphi_1(0)$
1	-50	0,8	344	—	1,4	21	9,26	24	0,18	—	—	—	—	1,6
2	102	3,3	331	—	2,0	15	10	20	0,13	—	—	—	—	0
3	-34	0,3	—	9,56	1,5	20	7,72	24	0,12	—	—	0,12	—	3,1
4	26	0,2	—	3,48	1,7	26	4,63	20	0,09	—	—	0,09	—	1,6
5	105	3,5	639	—	2,0	10	15	20	0,12	0,08	0,09	—	—	1,5
6	-53	0,8	—	4,72	1,4	24	9,26	24	0,18	—	—	0,10	—	3,2
7	-27	0,2	—	20,6	1,5	20	7,72	20	0,09	—	—	0,12	0,08	1,6
8	108	3,5	222	—	2,0	10	20	15	0,10	0,08	0,08	—	—	3,1
9	-27	0,2	—	20,6	1,4	15	9,26	30	0,09	—	—	0,15	0,05	0
10	110	3,8	571	—	2,0	12	20	20	0,18	0,08	0,12	—	—	3,1
11	37	0,4	—	11,5	1,7	22	4,63	32	0,12	—	—	0,12	0,06	4,7
12	112	3,7	246	—	2,0	14	24	12	0,16	0,12	0,14	—	—	0
13	113	3,7	342	—	2,0	12	25	10	0,12	—	—	—	—	3,1
14	114	3,8	856	—	2,0	15	20	28	0,10	0,06	0,08	—	—	4,7
15	115	3,9	2234	—	2,0	16	18	30	0,20	0,06	0,14	—	—	3,2
16	116	3,9	2654	—	2,0	18	20	16	0,10	0,05	0,08	—	—	0
17	39	0,4	—	6,95	1,4	23	9,26	32	0,12	—	—	0,12	—	0
18	118	3,9	337	—	2,0	12	16	10	0,08	—	—	—	—	3,1
19	119	3,9	3231	—	2,0	20	30	40	0,14	0,07	0,08	—	—	0
20	120	4,0	—	3,24	2,0	10	16	12	0,10	—	—	—	—	3,1
21	121	4,0	1380	—	2,0	24	32	16	0,07	—	—	—	—	3,2
22	122	4,1	700	—	2,0	12	22	18	0,18	0,06	0,12	—	—	0
23	-41	0,4	—	6,10	1,5	15	7,72	20	0,12	—	—	0,10	—	1,5
24	-31	0,2	—	49,2	1,7	25	4,63	36	0,09	—	—	0,16	0,08	3,1
25	63	1,0	—	35,4	1,4	24	9,26	32	0,18	—	—	0,14	—	1,6
26	126	4,2	5440	—	2,0	18	40	26	0,18	0,09	0,10	—	—	0
27	-36	0,4	—	29,9	1,5	26	7,72	24	0,12	—	—	0,16	—	0
28	128	4,3	1308	—	2,0	22	24	16	0,15	—	—	—	—	3,1
29	129	4,2	101	—	2,0	12	10	10	0,05	—	—	—	—	3,2
30	65	1,0	—	5,36	1,4	17	9,26	16	0,18	—	—	0,10	—	0

ной передачи (варианты 4, 9, 11, 17, 25, 30); в) усилии в стержне CD (варианты 16, 18, 21, 28).

Указания к составлению уравнений движения. Уравнения движения составляются в форме уравнений Лагранжа 2-го рода.

Рассматриваемые механические системы имеют одну степень свободы. Принимая в качестве обобщенной координаты угол φ_1 , приведем уравнения движения к виду

$$\omega_{1z} = \varepsilon_{1z}(\omega_{1z}, \varphi_1); \quad \dot{\varphi}_1 = \omega_{1z}. \quad (2)$$

Указания к решению задачи на ЭВМ. Нелинейная система дифференциальных уравнений (2) интегрируется численным методом на интервале времени τ . Необходимые для интегрирования начальные условия по переменной φ_1 указаны в табл. 10. Начальная уг-

ловая скорость берется близкой к своему среднему значению в периодическом движении. Шаг печати результатов выбирается равным $\Delta t = \tau/24 = 0,01 + 10^{-4} N$. На печать выводятся переменные t , φ_1 , ω_{1z} , ε_{1z} . Для упрощения программы и для ее индивидуализации значения радиусов и масс звеньев, величины M_0 , k , μ_1 , μ_2 и т. п. вводятся как числовые константы.

Один из возможных вариантов программы с использованием конечно-разностной схемы Эйлера приведен в рассмотренном ниже примере. Студентам, имеющим практические навыки программирования, рекомендуется интегрировать уравнения (2) методом Рунге — Кутты, используя стандартные подпрограммы.

Указания к определению динамических усилий. Для определения реакции в заданном звене рекомендуется освободить звено от связей, далее с помощью общих теорем динамики составить такое уравнение движения звена, куда вошла бы искомая реакция. Значения переменных φ_1 , ω_{1z} и ε_{1z} берутся из таблицы результатов интегрирования для момента времени, когда ε_{1z} принимает максимальное по модулю значение. Желающие могут вычислить искомую динамическую реакцию на ЭВМ как функцию времени, дополнив соответствующим образом программу.

Контроль решения. Графики φ_1 , ω_{1z} и ε_{1z} не должны иметь разрывов. Начальные и конечные значения переменных ω_{1z} и ε_{1z} должны достаточно близко совпадать, а угол φ_1 — увеличиваться от начального значения на величину, близкую к 2π .

Защита расчета. Типовые вопросы:

1. Составить уравнения для определения реакции между пальцем A кривошипа OA и прорезью кулисы или реакции какой-либо другой связи.

2. Определить из уравнений движения зависимость $M_{dz}(t)$, при которой маховик вращался бы равномерно.

3. Как будет изменяться неравномерность вращения маховика если его момент инерции I_1 увеличивать (например, $I_1 \rightarrow \infty$)?

4. По графику $\omega_{1z}(t)$ найти числовые значения ε_{1z} в фиксированные моменты времени и сравнить с результатом счета на ЭВМ.

5. По виду графика $\omega_{1z}(t)$ оценить приращение величины φ_1 за время интегрирования.

6. Объяснить значение каждого оператора в программе.

7. Изменить программу таким образом, чтобы искомая реакция вычислялась на ЭВМ как функция времени.

ПРИМЕР ВЫПОЛНЕНИЯ ЗАДАНИЯ

(Вариант 31, $n=3$, $N=7$)

Постановка задачи. Кинематическая схема машины с кривошипно-кулисным механизмом изображена на рис. 70, а. Вращающий момент $M_{dz} = M_0 - k\omega_{3z}$ приложен к шкиву 3. Шкив связан с маховиком ременной передачей. Полезная нагрузка моделируется силой $F_{Hy} = -\mu_1 v_{5y}$, приложенной к штоку 5.

Дано: $OA=r_1=0,06$ м; $R_1=0,36$ м; $R_3=0,09$ м; $R_4=0,24$ м; $r_4=0,08$ м; $\rho_4=0,12$ м; $M_0=-27$ Н·м; $k=0,214$ Н·м·с; $\mu_1=309$ Н·с/м; $I_1=1,8$ кг·м²; $m_2=15$ кг; $m_3=7,71$ кг; $m_4=16$ кг; $\tau=-0,257$ с; $\omega_{1z}(0)=24,5$ с⁻¹; $\varphi_1(0)=1,57$.

Предполагается, что ремень невесомый, нерастяжимый, не проскальзывающий относительно шкива и маховика. Каток 4 относительно рейки штока 5 и неподвижной рейки не проскальзывает (зубчатая реечная передача). Масса штока не учитывается.

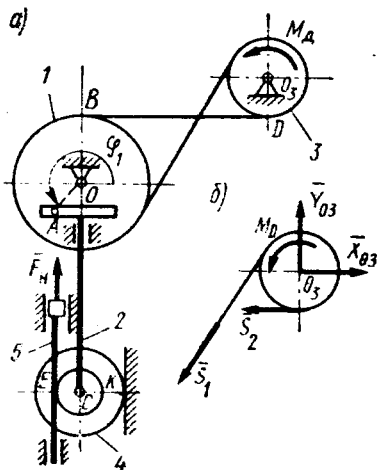


Рис. 70

Требуется: 1. Составить дифференциальные уравнения движения машины. 2. Проинтегрировать уравнения на ЭВМ на интервале времени τ . 3. Построить графики $\varphi_1(t)$, $\omega_{1z}(t)$, $\epsilon_{1z}(t)$. 4. Для момента времени, когда ϵ_{1z} принимает максимальное по модулю значение, вычислить разность сил натяжения ведущей и ведомой ветвей ременной передачи.

Составление уравнений движения. Уравнения движения составим в форме уравнений Лагранжа 2-го рода, выбрав в качестве обобщенной координаты угол φ_1 , отсчитываемый от горизонтальной оси x системы координат $Oxuz$:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_1} - \frac{\partial T}{\partial \varphi_1} = Q. \quad (3)$$

Найдем выражение кинетической энергии как функции φ_1 и $\dot{\varphi}_1$:

$$T = T_1 + T_2 + T_3 + T_4 + T_5.$$

Кинетическая энергия маховика 1, вращающегося вокруг неподвижной оси, $T_1 = I_1 \omega_{1z}^2 / 2$.

Кинетическая энергия поступательно движущейся кулисы 2 $T_2 = m_2 v_{Cy}^2 / 2$.

Кинетическая энергия шкива 3, вращающегося вокруг неподвижной оси, $T = I_3 \omega_{3z}^2 / 2$, где $I_3 = m_3 R_3^2 / 2$.

Кинетическая энергия катка 4, совершающего плоское движение, $T_4 = m_4 v_{Cy}^2 / 2 + I_4 \omega_{4z}^2 / 2$, $I_4 = m_4 \rho_4^2$. Так как шток 5 считается безынерционным, то $T_5 = 0$.

Таким образом, кинетическая энергия системы

$$T = I_1 \omega_{1z}^2 / 2 + m_2 v_{Cy}^2 / 2 + m_3 R_3^2 \omega_{3z}^2 / 4 + m_4 v_{Cy}^2 / 2 + m_4 \rho_4^2 \omega_{4z}^2 / 2. \quad (4)$$

Выразим v_{Cy} , ω_{1z} , ω_{3z} , ω_{4z} через φ_1 и $\dot{\varphi}_1$. Очевидно,

$$\omega_{1z} = \dot{\varphi}_1. \quad (5)$$

Так как кулиса движется поступательно, то

$$v_{Cy} = v_{Ay} = \omega_{1z} r_1 \cos \varphi_1. \quad (6)$$

Угловую скорость ω_{3z} найдем из уравнения связи для точек B и D :

$$v_{Bx} = v_{Dx}.$$

Скорости v_{Bx} и v_{Dx} вычисляются в соответствии с графами $O_1 \xrightarrow{1} B$ и $O_3 \xrightarrow{3} D$:

$$-\omega_{1z} R_1 \sin \pi/2 = -\omega_{3z} R_3 \sin 3\pi/2.$$

Отсюда

$$\omega_{3z} = -\omega_{1z} R_1 / R_3. \quad (7)$$

Угловую скорость ω_{4z} найдем, используя уравнения связи $v_{Ky} = 0$ для точки K . В соответствии с графом $K \xrightarrow{4} C$:

$$v_{Cy} = \omega_{4z} R_4 \cos \pi.$$

С учетом (6) получим

$$\omega_{4z} = -\omega_{1z} r_1 \cos \varphi_1 / R_4. \quad (8)$$

Подставим (5), (6), (7), (8) в (4):

$$T = \dot{\varphi}_1^2 [I_1 + m_3 R_1^2 / 2 + (m_2 + m_4 + m_4 \rho_4^2 / R_4^2) r_1^2 \cos^2 \varphi_1] / 2.$$

Для заданных числовых значений параметров кинетическая энергия примет вид

$$T = \dot{\varphi}_1^2 (2,3 + 0,126 \cos^2 \varphi_1) / 2. \quad (9)$$

Найдем обобщенную силу Q . Для этого вычислим сумму мощностей активных сил на возможных скоростях и приравняем ее мощности обобщенной силы:

$$M_{xz} \omega_{3z}^B + F_{ny} v_{5y}^B + G_{2y} v_{Cy}^B + G_{4y} v_{Cy}^B = Q \omega_{1z}^B. \quad (10)$$

Возможные скорости ω_{1z}^B , ω_{3z}^B , v_{Cy}^B удовлетворяют уравнениям (6), (7), так как связи стационарные. Уравнение для возможной скорости штока найдем в соответствии с графом $K \xrightarrow{4} E$:

$$v_{Ey}^B = v_{5y}^B = \omega_{4z}^B (R_4 + r_4) \cos \pi. \quad (11)$$

Следовательно, $-M_{xz} \omega_{1z}^B R_1 / R_3 + F_{ny} \omega_{1z}^B r_1 \cos \varphi_1 (R_4 + r_4) / R_4 + (G_{2y} + G_{4y}) \omega_{1z}^B r_1 \cos \varphi_1 = Q \omega_{1z}^B$. Отсюда с учетом числовых значений параметров получим

$$Q = 108 - 3,42 \dot{\varphi}_1 - 1,98 \dot{\varphi}_1 \cos^2 \varphi_1 - 20,6 \cos \varphi_1. \quad (12)$$

¹ Кинематические соотношения составляются, как в расчете К-1.

Проведем дифференцирование (9) в соответствии с (3):

$$\frac{\partial T}{\partial \varphi_1} = -\frac{\dot{\varphi}_1^2}{2} 0,126 \sin 2\varphi_1; \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_1} = \dot{\varphi}_1 (2,3 + 0,126 \cos^2 \varphi_1);$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_1} = \ddot{\varphi}_1 (2,3 + 0,126 \cos^2 \varphi_1) - 0,126 \dot{\varphi}_1^2 \sin 2\varphi_1. \quad (13)$$

Подставим (13) в (3):

$$\ddot{\varphi}_1 (2,3 + 0,126 \cos^2 \varphi_1) - 0,063 \dot{\varphi}_1^2 \sin 2\varphi_1 = Q.$$

```

DATA DT,T,F1,OM1/
*0.0107,0.0,1.57,24.5/
DO 12 K=1,25
C1=COS(F1)
Q=100-3.42*OM1-1.98*OM1*C1+C1-20.6*C1
E1=(Q+0.063*OM1**2*SIN(F1*2))/
/(2.3+0.126*C1*C1)
PRINT 30731,T
*,F1,OM1,E1,
30731 FORMAT(10E10.3)
F1=F1+OM1*DT
OM1=OM1+E1*DT
!2 T=T+DT
STOP
END

```

0.0	1.57	24.5	10.5
0.107E-01	1.83	24.6	2.96
0.214E-01	2.10	24.6	-4.88
0.321E-01	2.36	24.6	-10.2
0.428E-01	2.62	24.5	-11.2
0.535E-01	2.88	24.4	-7.82
0.642E-01	3.14	24.3	-9.929
0.749E-01	3.40	24.3	7.75
0.856E-01	3.66	24.4	16.2
0.963E-01	3.93	24.5	22.1
0.107	4.19	24.8	23.5
0.118	4.45	25.0	19.1
0.128	4.72	25.2	9.12
0.139	4.99	25.3	-4.01
0.150	5.26	25.3	-16.5
0.160	5.53	25.1	-24.9
0.171	5.80	24.8	-27.4
0.182	6.07	24.5	-24.1
0.193	6.33	24.3	-16.6
0.203	6.59	24.1	-6.87
0.214	6.85	24.0	2.99
0.225	7.10	24.1	11.0
0.235	7.36	24.2	15.3
0.246	7.62	24.3	14.9
0.257	7.88	24.5	9.91

Отсюда

$$\dot{\omega}_{1z} = (Q + 0,063\dot{\varphi}_1^2 \sin 2\varphi_1) / (2,3 + 0,126 \cos^2 \varphi_1); \quad \dot{\varphi}_1 = \omega_{1z}. \quad (14)$$

Вывод уравнений для определения динамических реакций. Освободим шкив от связей и обозначим силу натяжения ведущей ветви ременной передачи через S_1 , а ведомой — через S_2 (рис. 70, б). Запишем для шкива 3 уравнение изменения кинетического момента относительно точки O_3 :

$$I_3 \dot{\omega}_{3z} = M_{xz} + S_1 R_3 - S_2 R_3.$$

Отсюда с учетом (7) получим

$$\begin{aligned} S_1 - S_2 = S &= (-M_0 - \\ &- kR_1 \omega_{1z} / R_3) / R_3 - \\ &- m_3 R_1 \dot{\omega}_{1z} / 2. \end{aligned} \quad (15)$$

Решение задачи на ЭВМ и обработка результатов. Систему уравнений (14) решаем на ЭВМ с программированием на ФОРТРАНе. Применим метод Эйлера с шагом, равным шагу печати $\Delta t = \tau / 24 = 0,0107$ с. На печать выводятся переменные $t, \varphi_1, \omega_{1z}, \varepsilon_{1z}$.

Обозначение переменных в программе:

Переменные	t	Δt	φ_1	ω_{1z}	ε_{1z}	Q
Обозначения	T	DT	F1	OM1	E1	Q

Программа и результаты счета приведены на рис. 71.

По результатам счета на рис. 72 построены графики $\varphi_1(t)$, $\omega_{1z}(t)$ и $\varepsilon_{1z}(t)$.

Вычислим разность сил натяжения ведущей и ведомой ветви ременной передачи. Угловое ускорение маховика принимает максимальное по модулю значение при $t = 0,171$ с (семнадцатая строка таблицы счета). В этот момент времени угловая скорость $\omega_{1z} = 24,8$ с⁻¹, угловое ускорение $\varepsilon_{1z} = -27,4$ с⁻². Подставляя числовые значения величин в (15), получим $S = (27 - 0,214 \cdot 0,36 \times 24,8 / 0,09) / 0,09 - 7,71 \cdot 0,36 \cdot (-27,4) / 2 = 102$ Н.

Контроль решения. Из таблицы счета и графиков на рис. 72 видно, что движение машины близко к периодическому, оговоренному в условиях задачи.

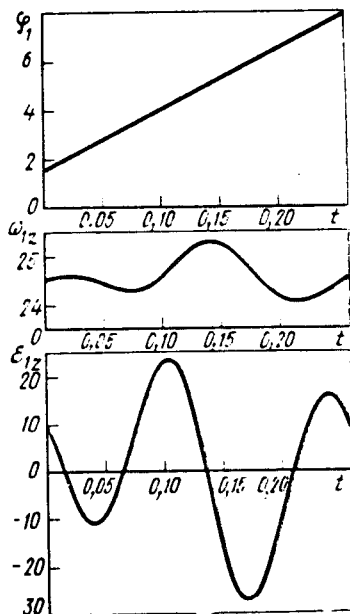


Рис. 72

РАСЧЕТ Д-5а

Выполнить расчет Д-5 для случая, когда полезная нагрузка определяется кулоновым трением и задается формулами

$$F_{nx} = -F_0 \operatorname{sign} v_{4x}, (F_{ny} = -F_0 \operatorname{sign} v_{4y});$$

$$M_{nz} = -M_0 \operatorname{sign} \omega_{4z}.$$

Значения F_0 (или M_0) постоянны по модулю и берутся из табл. 11, остальные значения исходных данных — из табл. 10.

Таблица 11

Вариант	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
F_0	425	409	—	—	525	—	—	343	—	440
M_0	—	—	98,4	47,6	—	58,2	127	—	127	—
Вариант	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
F_0	—	347	422	633	965	1092	—	416	1327	—
M_0	78,9	—	—	—	—	—	71,5	—	—	40
Вариант	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
F_0	853	576	—	—	—	1680	—	808	249	—
M_0	—	—	75,3	253	156	—	115	—	—	66,2

РАСЧЕТ Д-5б

Выполнить расчет Д-5 для случая, когда один ход машины рабочий, а другой — холостой. В этом случае выражения для сил (или момента) нагрузки имеют вид

$$F_{nx} = \begin{cases} F_0, & \text{если } v_{4x} \leq 0; \\ 0, & \text{если } v_{4x} > 0; \end{cases} \quad F_{ny} = \begin{cases} F_0, & \text{если } v_{4y} \leq 0; \\ 0, & \text{если } v_{4y} > 0; \end{cases}$$

$$M_{nz} = \begin{cases} M_0, & \text{если } \omega_{4z} \leq 0; \\ 0, & \text{если } \omega_{4z} > 0. \end{cases}$$

Значения F_0 или M_0 постоянны по величине и берутся из табл. 12, остальные исходные данные — из табл. 10.

Вариант	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
F_0	850	818	—	—	1050	—	—	686	—	880
M_0	—	—	197	95,2	—	116	254	—	254	—
Вариант	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
F_0	—	694	844	1266	1930	2184	—	832	2654	—
M_0	158	—	—	—	—	—	143	—	—	80
Вариант	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
F_0	1706	1152	—	—	—	3360	—	1616	498	—
M_0	—	—	151	506	312	—	230	—	—	132

Динамические реакции в подшипниках ротора

РАСЧЕТ Д-6

Описание задания. Цель расчета — приобретение опыта исследования роторных машин: вычисление масс-инерционных характеристик ротора, составление дифференциальных уравнений его вращения и уравнений для динамических реакций в подшипниках, исследование уравнений на ЭВМ.

Рассматриваются роторные машины типа турбины, компрессора и т. п. в неустановившемся режиме разгона или выбега.

Варианты схем машин представлены на рис. 73—75. Элементы конструкции считаются абсолютно жесткими, подшипники A , B — точечными, ось ротора бесконечно тонкая, совпадающая с осью вращения. Рабочие колеса принимаются однородными дисками. Через C_1 , C_2 , C_3 на рисунках обозначены центры масс колес, через O_1 , O_2 , O_3 — точки пересечения оси с ортогональными ей плоскостями, проходящими через центры масс колес. Колеса на оси насажены с технологическими несовершенствами: перекосом второго колеса на угол α , указанным на рисунках, и смещением $O_i C_i$ ($i=1,3$) центров масс первого и третьего. Во всех вариантах для простоты принято, что центр масс второго колеса совпадает с осью вращения, а первое и третье колеса насажены без перекоса.

На рисунках введены вращающиеся с ротором ортогональные системы координат: $Axuz$, ось z которой совпадает с осью вращения; $C_i x_i y_i z_i$, полученная из $Axuz$ параллельным переносом в

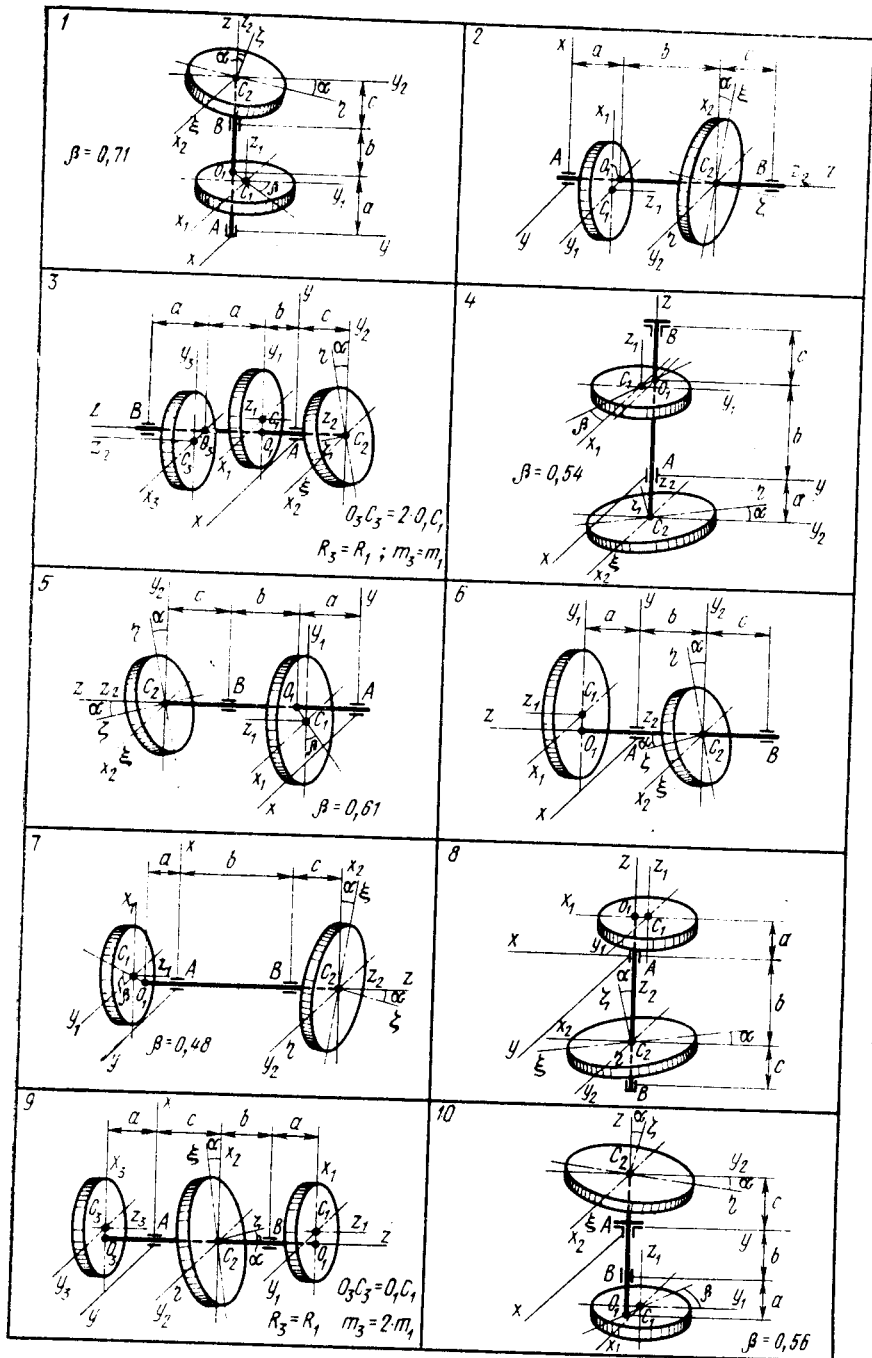


Рис. 73

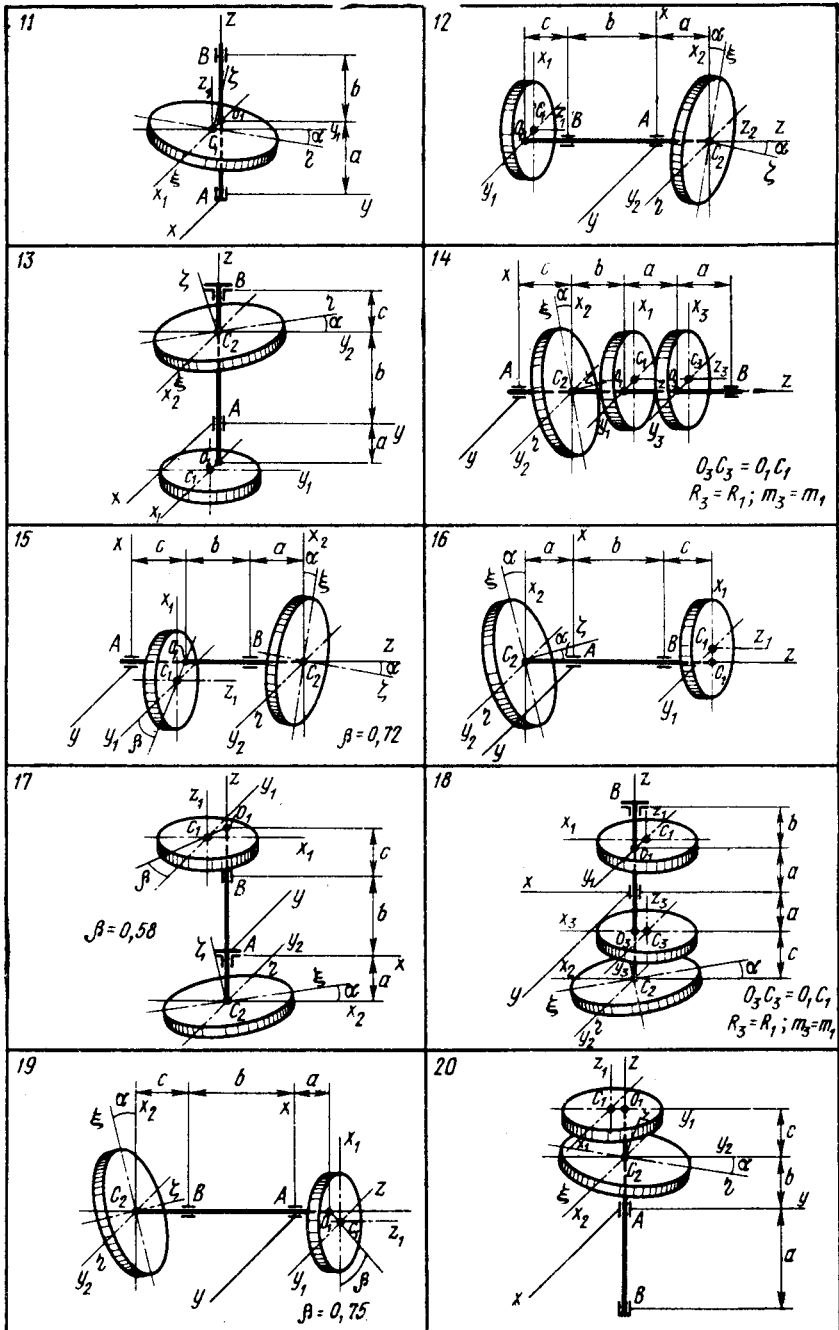


Рис. 74.

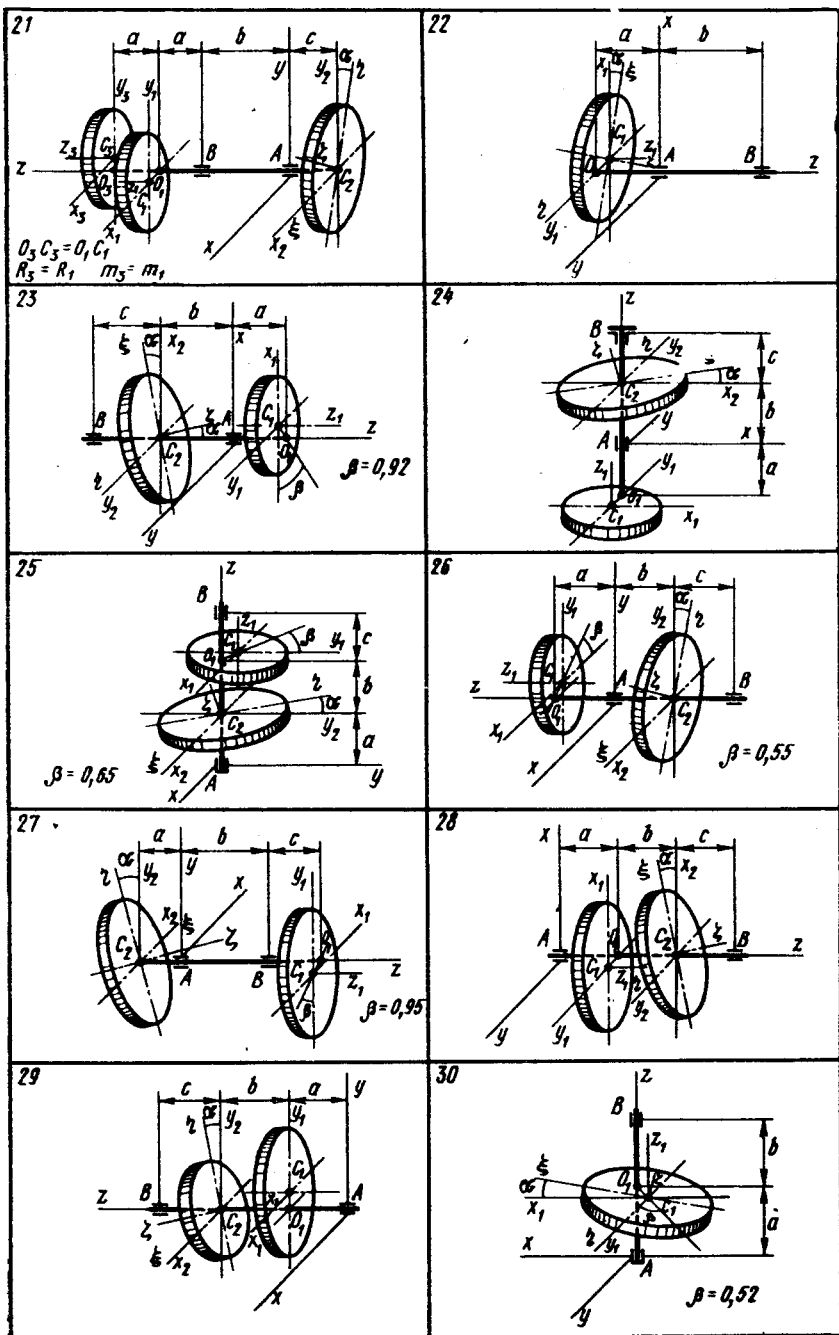


Рис. 75

центры масс соответствующих колес; $C_2\xi\eta\zeta$, оси которой совпадают с главными осями инерции второго колеса. Ротор вращается под действием момента M_d и сопротивления M_c .

Таблица 13

Варк-ант	m_{1r}	m_{2r}	R_1	R_2	$O_1C_1^I$	a	a_r	b_r	c_r	M_{Or}	k_{1r}	k_{2r}	ω_0	τ
1	100	90	0,23	0,21	0,2	0,022	0,20	0,20	0,15	12	1,1	0,3	0	5,76
2	80	90	0,27	0,29	0,3	0,018	0,10	0,15	0,10	10	1,2	0,7	990	3,36
3	60	70	0,25	0,30	0,2	0,021	0,12	0,11	0,14	13	1,2	0,2	400	6,72
4	70	80	0,12	0,18	0,1	0,024	0,15	0,20	0,15	8	1,3	0,8	590	1,20
5	80	90	0,21	0,28	0,1	0,028	0,18	0,18	0,14	12	1,6	0,3	0	5,52
6	40	60	0,20	0,18	0,2	0,015	0,11	0,12	0,12	13	1,1	0,9	600	0,96
7	100	120	0,25	0,30	0,5	0,023	0,12	0,45	0,14	12	1,7	0,1	300	9,84
8	80	100	0,21	0,23	0,2	0,026	0,12	0,25	0,12	6	1,1	0,9	500	2,88
9	100	110	0,29	0,30	0,4	0,024	0,14	0,18	0,18	14	1,2	0,2	200	9,84
10	70	90	0,23	0,28	0,2	0,016	0,11	0,22	0,14	10	1,3	0,7	0	4,80
11	160	—	0,31	—	0,3	0,026	0,30	0,28	—	6	1,2	1,2	600	3,60
12	60	80	0,24	0,28	0,2	0,018	0,10	0,25	0,10	15	1,4	0,1	400	5,76
13	40	50	0,15	0,18	0,1	0,015	0,08	0,15	0,09	9	1,5	0,5	0	1,44
14	80	90	0,26	0,30	0,2	0,022	0,10	0,10	0,10	8	1,3	0,9	500	6,24
15	90	70	0,16	0,28	0,1	0,019	0,11	0,16	0,15	7	1,2	0,4	0	5,04
16	30	40	0,21	0,25	0,2	0,020	0,08	0,22	0,09	13	1,1	0,5	800	1,44
17	70	80	0,20	0,28	0,4	0,026	0,11	0,30	0,08	11	1,3	0,2	0	6,00
18	30	50	0,18	0,21	0,3	0,021	0,10	0,10	0,09	9	1,6	0,5	0	2,16
19	60	70	0,17	0,19	0,2	0,023	0,08	0,25	0,08	30	1,5	0,2	0	1,92
20	50	70	0,14	0,17	0,3	0,024	0,28	0,08	0,08	12	1,7	0,9	800	0,72
21	40	60	0,23	0,26	0,3	0,018	0,07	0,27	0,09	10	1,2	0,8	500	2,88
22	90	—	0,31	—	0,4	0,025	0,10	0,25	—	10	1,6	1,5	580	1,68
23	60	70	0,25	0,30	0,2	0,022	0,12	0,15	0,15	18	1,1	0,2	0	6,00
24	30	50	0,28	0,31	0,3	0,027	0,10	0,16	0,16	10	1,2	0,2	0	5,04
25	40	50	0,23	0,24	0,1	0,019	0,12	0,12	0,12	5	1,4	0,8	400	2,16
26	30	40	0,18	0,19	0,1	0,015	0,11	0,16	0,15	26	1,3	0,1	600	1,20
27	40	30	0,20	0,17	0,1	0,018	0,08	0,25	0,07	19	1,5	1,6	600	0,48
28	50	50	0,22	0,22	0,3	0,024	0,12	0,10	0,12	5	1,2	1,3	490	1,20
29	50	40	0,18	0,15	0,2	0,017	0,11	0,12	0,12	6	1,3	0,8	500	0,96
30	100	—	0,35	—	0,3	0,023	0,18	0,18	—	3	1,1	1,6	400	3,36

Исходные данные определяются по формулам (1) и табл. 13:

$$M_{xz} = M_0 - k_1 \omega_z; \quad k_1 = k_{1r} + 0,01N; \quad M_{cz} = -k_2 \omega_z^2;$$

$$M_0 = M_{Or} (1 + 0,01n) 10^2; \quad m_i = m_{ir} (1 + 0,01N);$$

$$O_1C_1 = O_1C_1^I (1 + 0,01N) 10^{-3}; \quad k_2 = k_{2r} (1 + 0,01N) 10^{-2};$$

$$a = a_r + 0,001n; \quad b = b_r + 0,001N;$$

$$c = c_r + 0,001n. \quad (1)$$

Требуется исследовать движение ротора и динамические реакции в подшипниках. Перечень пунктов исследования приведен ниже в примере.

Указания к вычислению масс-инерционных характеристик ротора. Масса ротора m определяется как сумма масс всех его колес.

Координаты x_{C_i} , y_{C_i} центров масс C_i колес в системе координат $Axyz$ определяются в соответствии с рисунком. Координаты x_C , y_C центра масс ротора находятся по формулам

$$x_C = \frac{\sum_i m_i x_{C_i}}{m}; \quad y_C = \frac{\sum_i m_i y_{C_i}}{m}. \quad (2)$$

(Для ряда вариантов часть величин m_i в (2) равна нулю.)

В осях симметрии $C_i x_i y_i z_i$ для колес 1, 3 и осях $C_2 \xi \eta \zeta$ для колеса 2 вычисляются числовые значения инерционных моментов и полярного момента инерции. Тензоры инерции $I_1^{(1)}$, $I_0^{(2)}$, $I_3^{(3)}$ колес в этих осях будут диагональными. Тензор инерции колеса 2 в осях $C_2 x_2 y_2 z_2$ вычисляется с помощью матричного преобразования:

$$I_2^{(2)} = \gamma I_0^{(2)} \gamma^T. \quad (3)$$

В (3) через γ обозначена матрица направляющих косинусов между осями трехгранников $C_2 \xi \eta \zeta$ и $C_2 x_2 y_2 z_2$, а через γ^T — транспонированная матрица. Компоненты тензоров $I^{(1)}$, $I^{(2)}$, $I^{(3)}$ колес в осях $Axyz$ вычисляются затем с помощью формул пересчета при параллельном переносе [16]. Тензор инерции ротора I в осях $Axyz$ получается, если сложить тензоры колес: $I = I^{(1)} + I^{(2)} + I^{(3)}$.

Указания к составлению уравнений. Уравнения вращательного движения и уравнения для динамических реакций составляются по [3]. В качестве координатного трехгранника, в осях которого записываются теорема о движении центра масс и теорема об изменении кинетического момента, выбирается система $Axyz$.

После исключения статических составляющих находим:

$$X_B = X_B(\dot{\varphi}, \ddot{\varphi}); \quad Y_B = Y_B(\dot{\varphi}, \ddot{\varphi}), \quad (4)$$

$$X_A = f_1(\dot{\varphi}, \ddot{\varphi}) - X_B; \quad Y_A = f_2(\dot{\varphi}, \ddot{\varphi}) - Y_B, \quad (5)$$

где X_A , Y_A , X_B , Y_B — соответствующие проекции динамических составляющих реакции; φ — угол поворота ротора. Уравнение кинетического момента по оси z дает

$$I_{zz} \ddot{\varphi} = M_{xz} + M_{cz}. \quad (6)$$

Указания к решению задачи на ЭВМ. Уравнение (6) приводится к форме Коши по переменной $\omega_z = \dot{\varphi}$:

$$\dot{\omega}_z = \varepsilon_z; \quad \varepsilon_z = (M_{xz} + M_{cz}) / I_{zz}. \quad (7)$$

Уравнение (7) интегрируется при заданном начальном условии $\omega_z(0)$ на интервале времени τ . Шаг печати выбирается равным $\Delta t = \tau/24$. Одновременно с интегрированием вычисляются динамические реакции по уравнениям (4), (5).

Один из возможных вариантов программы, в котором уравнение (7) интегрируется по конечно-разностной схеме Эйлера, приведен ниже в примере. Студентам, имеющим навыки программи-

рования, рекомендуется интегрировать уравнение (7), используя стандартную программу метода Рунге — Кутты.

Контроль решения. График функции $\omega_z(t)$ должен стремиться с ростом времени к установившемуся значению ω_z^* . Последнее находится аналитически из уравнений (7) при $\varepsilon_z=0$.

Защита расчета. Типовые вопросы:

1. Назвать размерность величин I_{xx}, I_{xy}, \dots
2. Вычислить тензор инерции тела, состоящего из двух материальных точек, связанных невесомыми стержнями. Массы и координаты точек заданы.
3. Какие дополнительные вычисления следовало бы провести, если бы центр масс колеса 2 не лежал на оси z ?
4. Как изменятся уравнения системы в осях координатного трехгранника, начало которого не совпадает с точкой A ?
5. Проинтегрировать уравнение (7) аналитически.
6. Проинтегрировать аналитически уравнение (7) для случая $k_2=0$.
7. Как изменится график $\omega_z(t)$, если изменить начальные условия?
8. По графику $\omega_z(t)$ качественно построить график $\dot{\omega}_z(t)$.
9. Оценить непосредственно из уравнений значения R_A, R_B при $t \rightarrow \infty$.
10. Объяснить поведение векторов реакций \bar{R}_A, \bar{R}_B в неподвижном пространстве.

ПРИМЕР ВЫПОЛНЕНИЯ ЗАДАНИЯ

(Вариант 31, $n=3, N=7$)

Постановка задачи. Рассматривается переходный режим вращения ротора турбины после увеличения нагрузки. Значение враща-

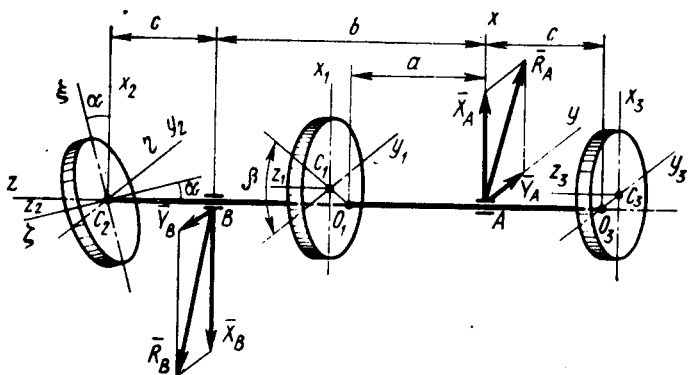


Рис. 76

ющего момента $M_{Dz} = M_0 - k_1\omega_z$. Момент сопротивления $M_{Cz} = -k_2\omega_z^2$. Схема ротора приведена на рис. 76.

Дано: $M_0 = 1950 \text{ Н}\cdot\text{м}$; $k_1 = 1,57 \text{ Н}\cdot\text{м}\cdot\text{с}$; $k_2 = 0,039 \text{ Н}\cdot\text{м}\cdot\text{с}^2$;

$m_1=47$ кг; $m_2=57$ кг; $m_3=37$ кг; $R_1=0,17$ м; $R_2=0,2$ м; $R_3=0,15$ м; $O_1C_1=4 \cdot 10^{-4}$ м; $O_3C_3=3 \cdot 10^{-4}$ м; $\alpha=0,019$ рад; $\beta=0,68$ рад; $a=0,133$ м; $b=0,267$ м; $c=0,093$ м; $\omega_z(0)=600$ рад/с; $\tau=0,48$ с; $\Delta t=0,02$ с.

Требуется: 1. Определить в осях $Axyz$ координаты центра масс C ротора и его тензор инерции. 2. Составить уравнение вращательного движения ротора и уравнения для определения динамических реакций в подшипниках. 3. С помощью ЭВМ проинтегрировать уравнение движения для заданных начальных условий на интервале времени τ и определить изменение во времени динамических реакций. 4. Построить графики $\omega_z(t)$, $\varepsilon_z(t)$, $R_A(t)$. 5. Для момента времени $t=\Delta t(N+1)=0,16$ с изобразить векторы динамических реакций на рисунке.

Вычисление масс-инерционных характеристик ротора. Масса ротора определяется как сумма масс колес: $m=m_1+m_2+m_3=47+57+37=141$ кг. Координаты центров масс C_i в системе координат $Axyz$ в соответствии с рис. 96

$$C_1(2,52 \cdot 10^{-4}; -3,12 \cdot 10^{-4}; 0,133);$$

$$C_2(0; 0; 0,36); C_3(0; 3 \cdot 10^{-4}; -0,093).$$

Координаты x_C, y_C центра масс ротора находят по формулам:

$$x_C = \sum_i m_i x_{C_i} / m; \quad y_C = \sum_i m_i y_{C_i} / m.$$

Отсюда $x_C=0,837 \cdot 10^{-4}$ м; $y_C=-0,255 \cdot 10^{-4}$ м.

Тензор инерции i -го диска в осях $C_i x_i y_i z_i$ ($i=1,3$)

$$I_i^{(i)} = \frac{m_i R_i^2}{4} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Аналогичный вид имеет тензор $I_0^{(2)}$ диска 2 в осях $C_2 \xi \eta \zeta$. В осях $C_2 x_2 y_2 z_2$ его тензор инерции $I_2^{(2)}$ определяется с помощью матричного преобразования:

$$I_2^{(2)} = \gamma I_0^{(2)} \gamma^T.$$

Здесь γ — матрица направляющих косинусов между осями трехгранников $C_2 \xi \eta \zeta$ и $C_2 x_2 y_2 z_2$; γ^T — транспонированная матрица.

Трехгранник $C_2 x_2 y_2 z_2$ повернут на угол α против часовой стрелки относительно трехгранника $C_2 \xi \eta \zeta$ вокруг оси η , совпадающей с осью y_2 . В этом случае матрица γ такова:

$$\gamma = \begin{bmatrix} \cos \alpha & 0 & -\sin \alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \alpha & 0 & \cos \alpha \end{bmatrix}.$$

Так как угол α мал, то будем далее пренебрегать величинами вто-

рого и более высокого порядка малости по α . Тогда $\cos \alpha = 1$,
 $\sin \alpha = \alpha$,

$$I_2^{(2)} = \frac{m_2 R_2^2}{4} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ \alpha & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ -\alpha & 0 & 1 \end{bmatrix} = \\ = \frac{m_2 R_2^2}{4} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ -\alpha & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Компоненты тензоров инерции колес в осях трехгранника $Axyz$ находят по формулам пересчета при параллельном переносе осей. Тензор инерции системы

$$I = I^{(1)} + I^{(2)} + I^{(3)}.$$

Выпишем необходимые для решения задачи компоненты тензора инерции системы в осях $Axyz$:

$$I_{xz} = m_1 x_{C_1} z_{C_1} + m_3 x_{C_3} z_{C_3} + \alpha m_2 R_2^2 / 4 = \\ = 47 \cdot 2,52 \cdot 10^{-4} \cdot 0,133 + 0,019 \cdot 57 \cdot 0,2^2 / 4 = 0,0124 \text{ кг} \cdot \text{м}^2;$$

$$I_{yz} = m_1 y_{C_1} z_{C_1} + m_3 y_{C_3} z_{C_3} = 47(-3,12 \cdot 10^{-4}) 0,133 + \\ + 37 \cdot 3 \cdot 10^{-4} (-0,093) = -0,003 \text{ кг} \cdot \text{м}^2.$$

При вычислении I_{zz} слагаемыми с сомножителем $(O_i C_i)^2$ пренебрегаем:

$$I_{zz} = m_1 R_1^2 / 2 + m_2 R_2^2 / 2 + m_3 R_3^2 / 2 = \\ = (47 \cdot 0,17^2 + 57 \cdot 0,2^2 + 37 \cdot 0,15^2) / 2 = 2,24 \text{ кг} \cdot \text{м}^2.$$

Составление уравнений. Дифференциальное уравнение вращения ротора и уравнения для определения динамических реакций подшипников в осях трехгранника $Axyz$ имеют такой вид:

$$I_{zz} \ddot{\varphi} = M_{Dz} + M_{Cz}; \quad (8)$$

$$-m y_C \ddot{\varphi} - m x_C \dot{\varphi}^2 = X_A + X_B;$$

$$m x_C \ddot{\varphi} - m y_C \dot{\varphi}^2 = Y_A + Y_B;$$

$$-I_{xz} \ddot{\varphi} + I_{yz} \dot{\varphi}^2 = -z_B Y_B;$$

$$-I_{yz} \ddot{\varphi} - I_{xz} \dot{\varphi}^2 = z_B X_B. \quad (9)$$

Запишем (8) в форме Коши, введя переменную $\omega_z = \dot{\varphi}$:

$$\dot{\omega}_z = \varepsilon_z; \quad \varepsilon_z = (M_0 - k_1 \omega_z - k_2 \omega_z^2) / I_{zz}. \quad (10)$$

Подставим в уравнения (9) числовые значения параметров и решим эти уравнения относительно искомых реакций:

$$\begin{aligned} X_B &= (0,003\varepsilon_z - 0,0124\omega_z^2)/0,267; \\ Y_B &= -(0,0124\varepsilon_z + 0,003\omega_z^2)/0,267; \\ X_A &= 0,0036\varepsilon_z - 0,0118\omega_z^2 - X_B; \\ Y_A &= 0,0118\varepsilon_z + 0,0036\omega_z^2 - Y_B. \end{aligned} \quad (11)$$

Значения реакций находят по формулам

$$R_A = \sqrt{X_A^2 + Y_A^2}; \quad R_B = \sqrt{X_B^2 + Y_B^2}. \quad (12)$$

```

DATA DT,T,OM1/0.002,0.,600./
DO 12 K=1,241
E1=(1950-1.57*OM1-0.039*OM1**2)/2.24
IF((K/10)*10.NE.K-1) GO TO 2
XB=(0.003*E1-0.0124*OM1**2)/0.267
YB=-(.0124*E1+0.003*OM1**2)/0.267
XA=0.0036*E1-0.0118*OM1**2-XB
YA=0.0118*E1+0.0036*OM1**2-YB
RA=SQRT(XA**2+YA**2)
RB=SQRT(XB**2+YB**2)
PRINT 30731,T
:      ,OM1,E1,XA,YA,XB,YB,RA,RB
30731 FORMAT(F8.3,8F8.0)
2 OM1=OM1+E1*DT
12 T=T+DT
STOP
END

```

0.0	600.	-5818.	12516.	5002.	-16784.	-3775.	13478.	17204.
0.02	503.	-3885.	8790.	3526.	-11708.	-2661.	9471.	12085.
0.04	436.	-2750.	6615.	2664.	-8872.	-2011.	7132.	9097.
0.06	380.	-2027.	5239.	2119.	-7026.	-1600.	5651.	7205.
0.08	352.	-1539.	4315.	1753.	-5787.	-1324.	4658.	5936.
0.10	325.	-1196.	3667.	1497.	-4917.	-1131.	3961.	5046.
0.12	303.	-945.	3196.	1311.	-4286.	-990.	3455.	4399.
0.14	286.	-757.	2845.	1172.	-3815.	-886.	3077.	3916.
0.16	273.	-613.	2577.	1066.	-3456.	-806.	2789.	3548.
0.16	273.	-613.	2577.	1066.	-3456.	-806.	2789.	3548.
.
0.46	210.	-44.	1528.	652.	-2049.	-493.	1661.	2107.
0.48	209.	-38.	1516.	647.	-2032.	-490.	1648.	2091.

Рис. 77

Решение задачи на ЭВМ и обработка результатов. Вычисления в силу уравнений (10), (11), (12) выполним на ЭВМ. Для интегрирования дифференциального уравнения (10) применим метод Эйлера с шагом $\delta t = \tau/240 = 0,002$ с. Один из возможных вариантов программы приведен на рис. 77.

Обозначение переменных в программе:

Переменные	. .	t	δt	ϵ_z	ω_z	X_A	Y_A	X_B	Y_B	R_A	R_B
Обозначения	. .	T	DT	E1	OM1	XA	YA	XB	YB	RA	RB

На печать выводятся переменные $t, \omega_z, \epsilon_z, X_A, Y_A, X_B, Y_B, R_A, R_B$ с шагом, равным Δt .

Результаты счета (см. рис. 77) представлены графиками $\omega_z(t), \epsilon_z(t), R_A(t)$ на рис. 78. Для момента времени $t=0,16$ с на рис. 76 построены векторы \bar{R}_A и \bar{R}_B .

Контроль решения. Найдем скорость установившегося вращения. Приравнявая правую часть (10) нулю, получим $M_0 - k_1\omega_z - k_2\omega_z^2 = 0$. Отсюда

$$\begin{aligned}
 (\omega_z)_{1,2} &= \\
 &= \frac{-1,57 \pm \sqrt{1,57^2 + 4 \cdot 0,039 \cdot 1950}}{2 \cdot 0,039} = \\
 &= -20,1 \pm 224.
 \end{aligned}$$

Так как по условию задачи ротор не изменяет направления вращения, то в качестве установившегося значения угловой скорости возьмем положительное значение корня $\omega_z^* = 204$ рад/с. Приближение с ростом t кривой $\omega_z(t)$ к ω_z^* (рис. 78) указывает на правильность решения задачи.

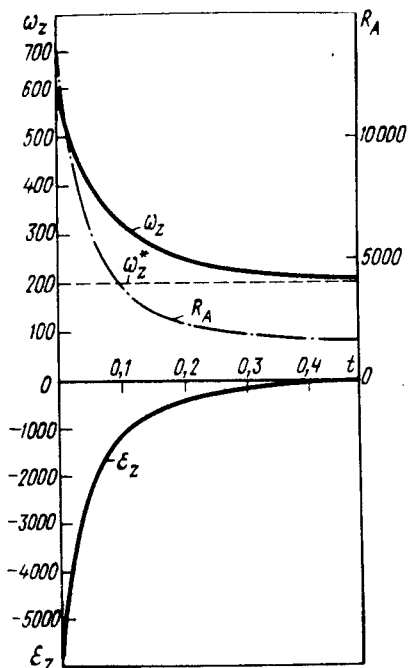


Рис. 78

Движение системы с двумя степенями свободы относительно положения равновесия

РАСЧЕТ Д-7

Описание задания. Цель расчета — приобретение опыта составления и исследования уравнений движения голономных механических систем в форме уравнений Лагранжа 2-го рода. Аналитически определяют положение равновесия системы, с помощью ЭВМ находят ее движение относительно этого положения, определяют динамические реакции.

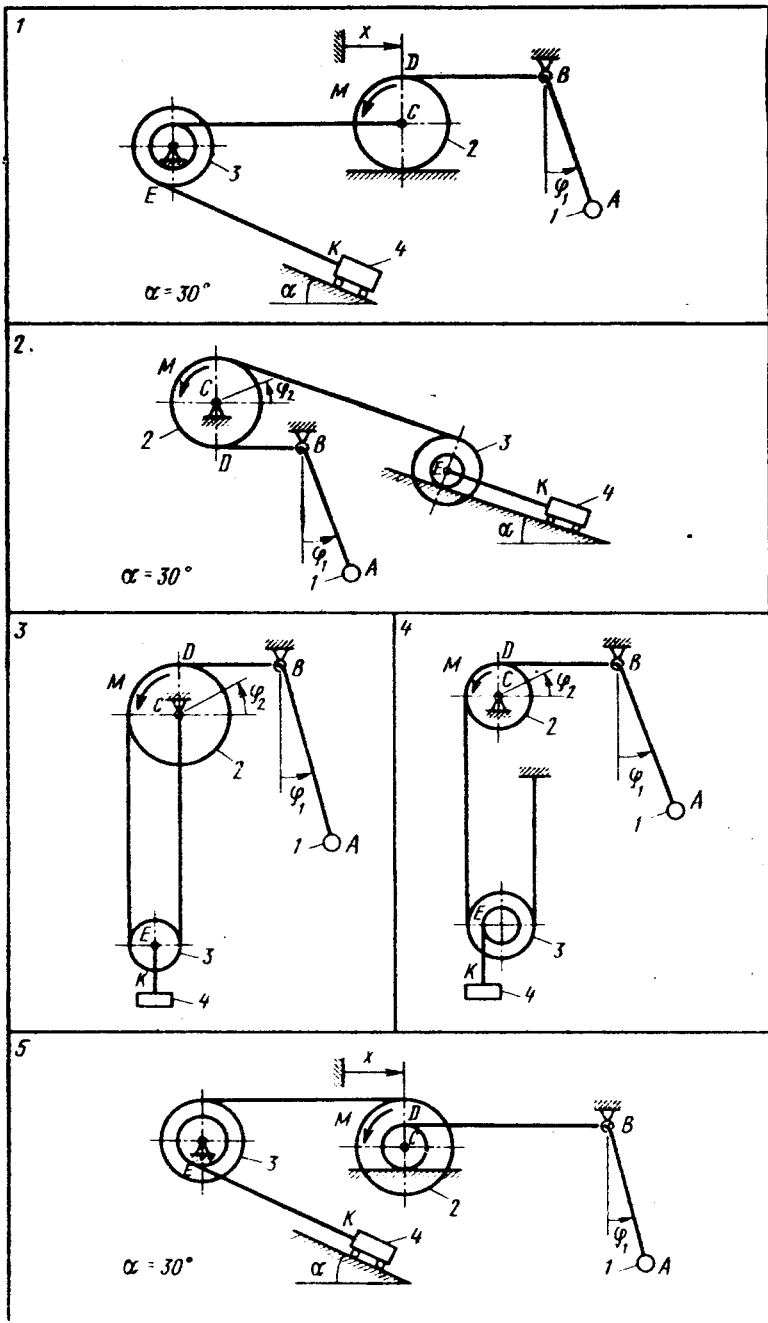


Рис. 79

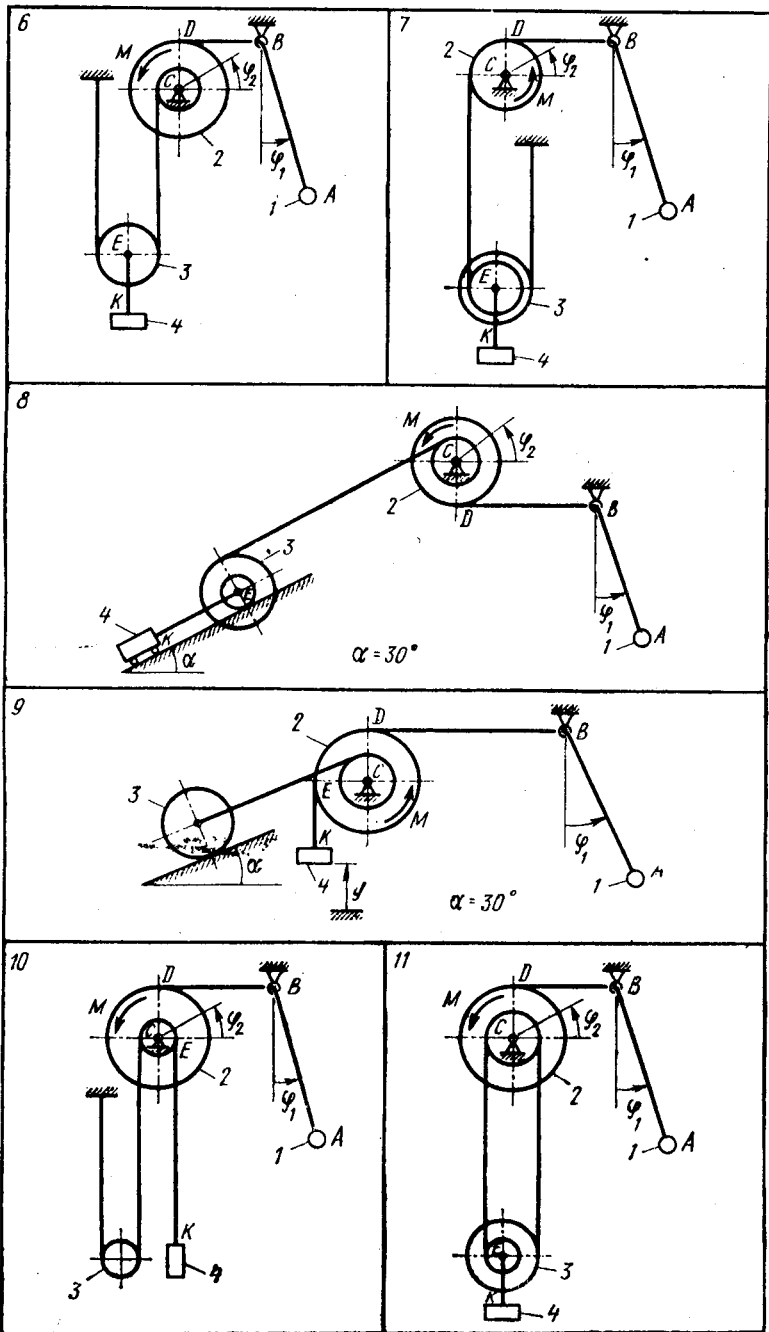


Рис. 80

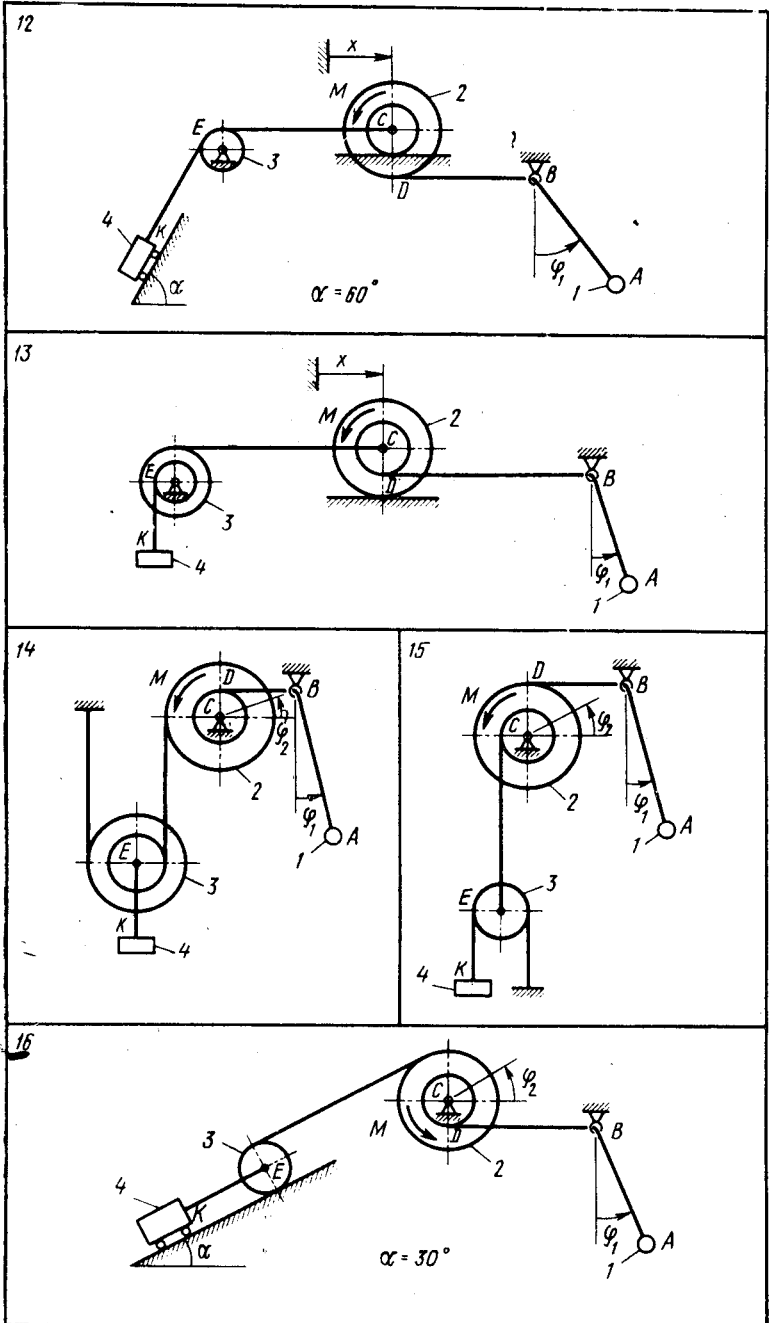


Рис. 81

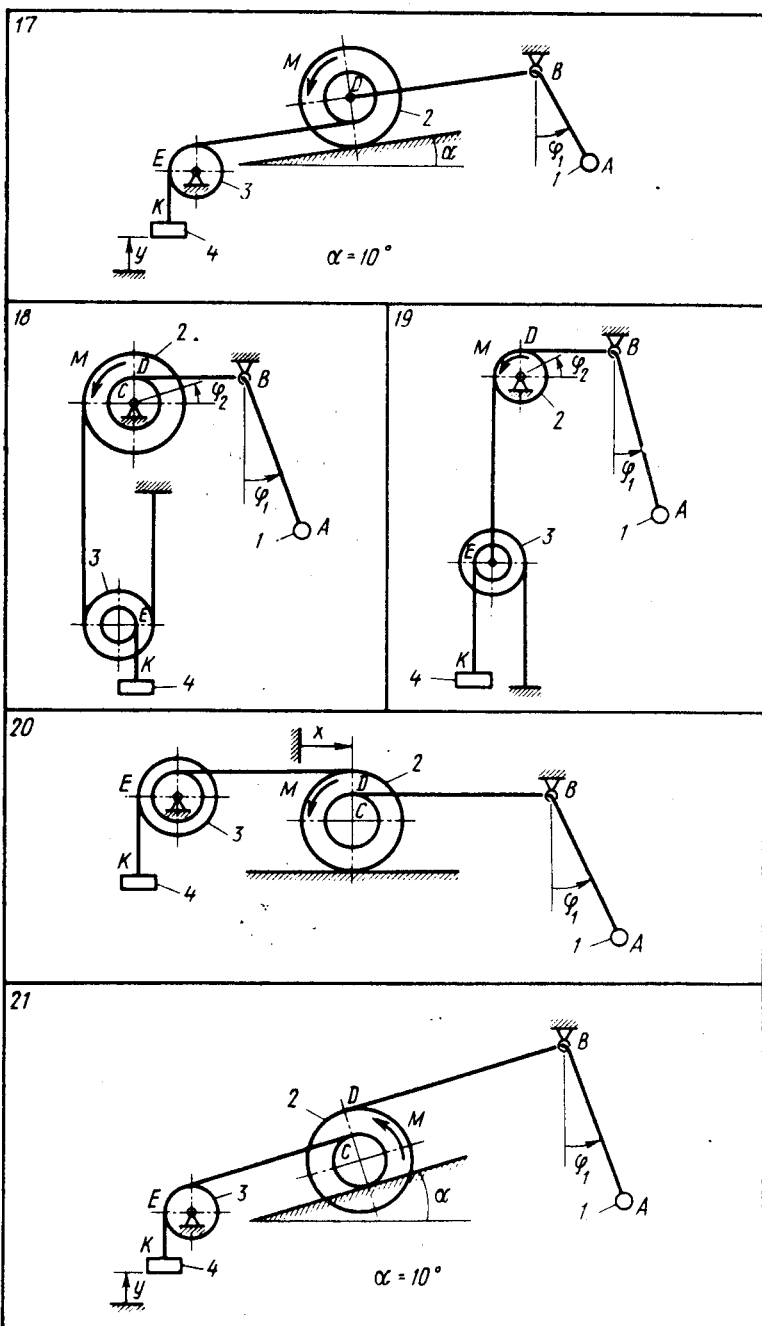


Рис. 82

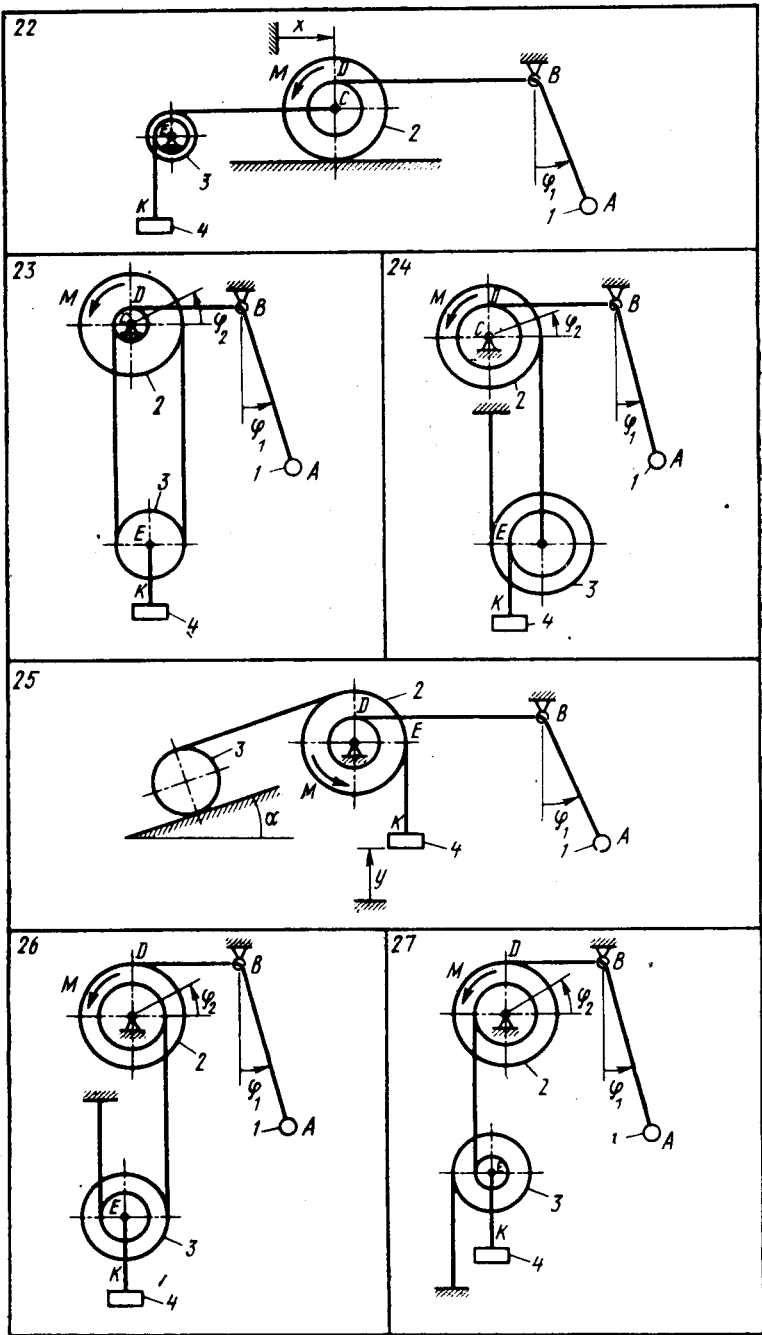


Рис. 83

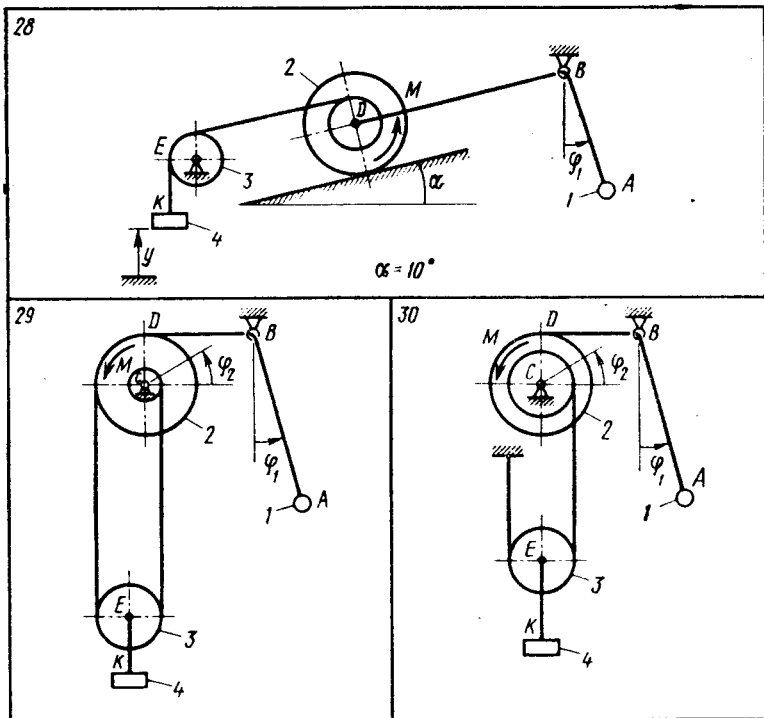


Рис. 84

Варианты механических систем представлены на рис. 79—84. Шкивы и катки считаем абсолютно жесткими, нити — нерастяжимыми. Проскальзывание катков в точках опоры отсутствует. Нить в точке B пропущена через кольцо пренебрежимо малых размеров. Трение в кольце и осях шкивов не учитываем. Груз 1 точечный, груз 4 движется поступательно. Активными силами являются заданные вес и момент M , определяемый из условия равновесия системы.

Исходные данные определяют по формулам (1) и табл. 14:

$$m_1 = 100 + n; \quad m_2 = m_{2r} + n;$$

$$m_3 = m_{3r} + N; \quad m_4 = 100 + N;$$

$$R_2 = R_{2r} + 0,01N; \quad \tau = 2,4(1 + 0,01N). \quad (1)$$

Через l_0 обозначена начальная длина нити AB . Катки, шкивы, блоки, для которых радиус инерции не указан, считаются однородными дисками.

Требуется: 1. Найти из условий равновесия момент M . 2. Исследовать с помощью ЭВМ дифференциальные уравнения движе-

ния системы. Перечень пунктов исследования приведен ниже в примере.

Указания к составлению уравнений движения и уравнений для определения динамических реакций. Уравнения движения составляются в форме уравнений Лагранжа 2-го рода. Рассматриваемые механические системы имеют две степени свободы. В качестве

Таблица 14

Вариант	m_{2r}	m_{3r}	R_{2r}	r_2	ρ_2	R_3	r_3	ρ_3	l_0	$q_1(0)$	$\dot{q}_1(0)$	$\dot{q}_2(0)$
1	80	30	0,3	—	—	0,24	0,12	0,10	1,01	0,3	0	0,02
2	70	90	0,2	—	—	0,27	0,09	0,12	1,02	-0,2	0,4	0,09
3	50	20	0,2	—	—	—	—	—	1,03	0	0,7	-0,08
4	30	40	0,1	—	—	0,15	0,05	0,10	1,04	0,2	-0,5	-0,16
5	60	30	0,2	0,12	0,12	0,20	0,10	0,11	1,05	0,1	0,7	0,02
6	50	20	0,3	0,15	0,16	—	—	—	1,06	0	0,8	-0,08
7	30	30	0,1	—	—	0,12	0,10	0,09	1,07	0,3	0	-0,14
8	40	60	0,2	0,12	0,11	0,22	0,12	0,13	1,08	0	-0,8	0,09
9	60	70	0,3	0,15	0,14	—	—	—	1,09	-0,2	0,3	0
10	70	50	0,3	0,12	0,13	—	—	—	1,10	0,2	-0,5	-0,09
11	60	30	0,2	0,11	0,12	0,14	0,08	0,09	1,11	-0,3	0	-0,12
12	80	10	0,3	0,14	0,16	—	—	—	1,12	-0,2	-0,4	-0,03
13	50	20	0,2	0,12	0,11	0,12	0,08	0,08	1,13	0,1	-0,7	0,05
14	40	40	0,2	0,10	0,12	0,18	0,10	0,11	1,14	0,2	0,5	0,10
15	50	20	0,3	0,12	0,14	—	—	—	1,15	0,3	0,1	0,12
16	60	40	0,2	0,10	0,12	—	—	—	1,16	-0,1	0,6	-0,09
17	80	10	0,3	0,12	0,15	—	—	—	1,17	-0,2	0,4	0,03
18	70	20	0,3	0,15	0,18	0,16	0,08	0,09	1,18	0	-0,8	0,12
19	20	30	0,1	—	—	0,18	0,08	0,10	1,19	0,1	0,7	0,16
20	50	20	0,3	0,14	0,16	0,16	0,12	0,10	1,20	0,2	0,5	-0,04
21	70	10	0,3	0,16	0,21	—	—	—	1,21	0,2	-0,5	-0,05
22	70	20	0,3	0,18	0,22	0,12	0,08	0,09	1,22	0,1	-0,6	-0,06
23	60	20	0,3	0,12	0,20	—	—	—	1,23	-0,2	-0,4	0,18
24	50	30	0,3	0,20	0,22	0,22	0,18	0,12	1,24	-0,2	0,5	0,16
25	40	80	0,2	0,15	0,14	—	—	—	1,25	0,3	-0,1	0,08
26	50	30	0,2	0,14	0,13	0,18	0,06	0,08	1,26	-0,3	0	0,12
27	60	20	0,2	0,16	0,14	0,16	0,12	0,10	1,27	0,1	0,6	0,16
28	60	10	0,3	0,10	0,16	—	—	—	1,28	0	0,7	-0,06
29	40	20	0,3	0,12	0,18	—	—	—	1,29	0,2	-0,5	0,18
30	50	20	0,2	0,16	0,12	—	—	—	1,30	0,3	-0,1	0,15

обобщенной координаты q_1 во всех вариантах выбирается угол φ_1 отклонения нити AB от вертикали. В качестве координаты q_2 в вариантах 2, 3, 4, 6, 7, 8, 10, 11, 14, 15, 16, 18, 19, 23, 24, 26, 27, 29, 30 выбирается угол φ_2 поворота шкива 2, в вариантах 1, 5, 12, 13, 20, 22 — координата x центра C катка 2, в вариантах 9, 17, 21, 25, 28 — координата y груза 4. Координаты φ_2 , x , y отсчитываются от их начального положения.

Уравнения движения приводятся к виду Коши:

$$\frac{dp_j}{dt} = f_j(p_1, p_2, q_1, q_2); \quad \frac{dq_j}{dt} = p_j \quad (j=1,2). \quad (2)$$

Для определения динамических реакций рекомендуется освободить систему от связей и с помощью общих теорем динамики составить такие уравнения движения, куда вошли бы искомые реакции.

Указания к решению задачи на ЭВМ. Система дифференциальных уравнений (2) и уравнения для определения динамических реакций решаются на ЭВМ. Необходимые для интегрирования начальные условия по переменным q_1, p_1, p_2 указаны в табл. 14. Начальное значение по переменной q_2 принимается равным нулю. Шаг печати Δt принимается равным $\Delta t = \tau/24 = 0,1 + 0,001 N$. На печать выводятся переменные $t, q_1, q_2, p_1, p_2, \dot{p}_1, \dot{p}_2$ и искомая реакция. Для упрощения программы и для ее индивидуализации значения масс и размеров звеньев тригонометрических функций угла и т. п. вводятся как числовые константы.

Один из возможных вариантов программы, в котором интегрирование дифференциальных уравнений производится методом Эйлера с шагом $\delta t = \Delta t/10$, рассмотрен ниже в примере.

Студентам, имеющим практические навыки программирования, рекомендуется усовершенствовать программу. Например, интегрировать дифференциальные уравнения методом Рунге — Кутты, используя библиотечные подпрограммы, организовать печать текстовой «шапки» таблицы результатов и т. д.

Контроль решения. Построенные по результатам счета графики не должны иметь разрывов. Начальные условия и числовые значения параметров задаются таким образом, что движение по координате φ_1 имеет колебательный характер с периодом, близким к τ .

Защита расчета. Типовые вопросы:

1. Как изменяются уравнения, если на окружности тела 2 дополнительно прикрепить материальную точку массы m ?

2. Как изменятся уравнения, если к телу 3 будет дополнительно приложен момент \bar{M}_3 ; если к заданной точке системы будет дополнительно приложена сила \bar{F} ?

3. Почему решение $\varphi_1 = \pi$ уравнений $Q_1 = 0, Q_2 = 0$ не определяет положения равновесия?

4. Найти натяжение указанного участка нити, реакцию указанной связи.

5. Какой вид примут уравнения движения системы, если дополнительными связями остановить движение тела 2?

6. Какой вид примут уравнения движения системы, если точка 1 будет скользить без трения по наклонной плоскости, проходящей через точку B под углом $\varphi_1 = \text{const}$ к вертикали?

7. По виду графика $q_2(t)$ построить график $p_2(t) = \dot{q}_2$.

8. Объяснить операторы программы.

ПРИМЕР ВЫПОЛНЕНИЯ ЗАДАНИЯ

(Вариант 31, $n=3, N=7$)

Постановка задачи. В механической системе (рис. 85) точечный груз 1 прикреплен к нити, пропущенной через кольцо B . Каток 2

движется без скольжения. Нити нерастяжимые, невесомые. Трение в кольце, в оси шкива 3 и между наклонной плоскостью и грузом 4 не учитывается.

В качестве обобщенных координат выбираем угол φ_1 отклонения нити AB от вертикали и координату x центра C катка 2, отсчитываемую от его начального положения.

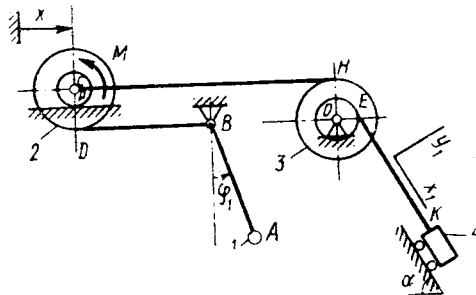


Рис. 85

Дано: $m_1=103$ кг; $m_2=63$ кг; $m_3=27$ кг; $m_4=107$ кг; $l_0=1,31$ м; $R_2=0,27$ м; $r_2=0,114$ м; $\rho_2=0,12$ м; $R_3=0,15$ м; $r_3=0,1$ м; $\rho_3=0,1$ м; $\tau=2,57$ с; $\Delta t=0,107$ с; $\varphi_1(0)=0$; $x(0)=0$; $\dot{\varphi}_1(0)=0,75$ с $^{-1}$; $\dot{x}(0)=0$.

Требуется: 1. Составить дифференциальные уравнения движения системы в форме уравнений Лагранжа 2-го рода

и уравнение для определения натяжения S_4 нити KE . 2. Найти из условий равновесия системы в обобщенных координатах момент \bar{M} . 3. Для найденного значения \bar{M} и заданных начальных условий решить полученные уравнения на ЭВМ на интервале времени τ . 4. Построить графики $\varphi_1(t)$, $x(t)$, $\dot{\varphi}_1(t)$, $S_4(t)$. 5. Для момента времени, когда нить AB в первый раз проходит через вертикальное положение $\varphi_1=0$, определить ее натяжение S_1 .

Составление уравнений движения и уравнения для определения натяжения нити. Уравнения движения составляются в форме уравнений Лагранжа 2-го рода:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_1} - \frac{\partial T}{\partial \varphi_1} = Q_{\varphi_1}; \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial T}{\partial x} = Q_x. \quad (3)$$

Найдем выражение кинетической энергии системы как функции обобщенных координат и скоростей:

$$T = T_1 + T_2 + T_3 + T_4. \quad (4)$$

Здесь кинетическая энергия точечного груза 1

$$T_1 = m_1 v_A^2 / 2.$$

Кинетическая энергия катка 2

$$T_2 = m_2 v_{Cx}^2 / 2 + I_2 \omega_{2z}^2 / 2; \quad I_2 = m_2 \rho_2^2.$$

Кинетическая энергия шкива 3

$$T_3 = I_3 \omega_{3z}^2 / 2; \quad I_3 = m_3 \rho_3^2.$$

Кинетическая энергия груза 4

$$T_4 = m_4 v_{Kx1}^2 / 2.$$

Выразим v_A , ω_{2z} , v_{Cx} , ω_{3z} , v_{Kx_1} через φ_1 , $\dot{\varphi}_1$, x , \dot{x} :

$$v_{Cx} = \dot{x}. \quad (5)$$

Используя уравнения связей¹ $v_{Px} = 0$, $v_{Hx} = v_{Cx}$, $v_{Kx_1} = v_{Ex_1}$ и проводя вычисления в соответствии с графами $C \xrightarrow{2} P$, $O \xrightarrow{3} H$, $O \xrightarrow{3} E$, получим

$$v_{Cx} - \omega_{2z} r_2 \sin 3\pi/2 = 0; \quad v_{Cx} = -\omega_{2z} R_2 \sin \pi/2;$$

$$v_{Kx_1} = -\omega_{3z} r_3 \sin \pi/2.$$

Отсюда с учетом (5)

$$\omega_{2z} = -\dot{x}/r_2; \quad \omega_{3z} = -\dot{x}/R_2; \quad v_{Kx_1} = \dot{x}r_3/R_2. \quad (6)$$

Чтобы найти скорость точки A , запишем выражения для ее декартовых координат:

$$x_A = l \sin \varphi_1; \quad y_A = -l \cos \varphi_1. \quad (7)$$

Здесь l — переменная длина нити AB . Продифференцируем (7) по времени:

$$v_{Ax} = \dot{x}_A = \dot{l} \sin \varphi_1 + l \dot{\varphi}_1 \cos \varphi_1;$$

$$v_{Ay} = \dot{y}_A = -\dot{l} \cos \varphi_1 + l \dot{\varphi}_1 \sin \varphi_1. \quad (8)$$

Выразим l , \dot{l} через x и \dot{x} . Из условия нерастяжимости участка нити ABD следует

$$\dot{l} = v_{Dx}. \quad (9)$$

В соответствии с графом $P \xrightarrow{2} D$ запишем $v_{Dx} = -(R_2 - r_2)\omega_{2z} \sin 3\pi/2$. После подстановки значения ω_{2z} из (6)

$$v_{Dx} = -\lambda \dot{x}; \quad \lambda = (R_2 - r_2)/r_2. \quad (10)$$

Из (9), (10) получим

$$\dot{l} = -\lambda \dot{x}. \quad (11)$$

Проинтегрируем (11) от $t=0$ до произвольного момента времени:

$$l - l_0 = \lambda(x - x(0)).$$

Так как, по условию, $x(0) = 0$, то

$$l = l_0 - \lambda x. \quad (12)$$

Подставив (11), (12) в (8), получим

$$v_{Ax} = -\lambda \dot{x} \sin \varphi_1 + (l_0 - \lambda x) \dot{\varphi}_1 \cos \varphi_1;$$

$$v_{Ay} = \lambda \dot{x} \cos \varphi_1 + (l_0 - \lambda x) \dot{\varphi}_1 \sin \varphi_1. \quad (13)$$

¹ Кинематические соотношения составляются, как в расчете К-1.

Отсюда

$$v_A^2 = v_{Ax}^2 + v_{Ay}^2 = \lambda^2 \dot{x}^2 + (l_0 - \lambda x)^2 \dot{\varphi}^2. \quad (14)$$

После подстановки (6), (14) в (4) получим

$$T = \frac{m_x}{2} \dot{x}^2 + \frac{m_1}{2} (l_0 - \lambda x)^2 \dot{\varphi}_1^2. \quad (15)$$

Через m_x здесь обозначена приведенная к координате x масса системы

$$\begin{aligned} m_x &= m_1 \lambda^2 + m_2 (1 + \rho_2^2/R_2^2) + m_3 \rho_3^2/R_3^2 + m_4 r_3^2/R_3^2 = \\ &= 103 \cdot 1,37^2 + 63(1 + 0,12^2/0,27^2) + (37 + 107)0,1^2/0,15^2 = 333 \text{ кг.} \end{aligned}$$

Проведем дифференцирование (15) в соответствии с (3):

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial \varphi_1} &= 0; \quad \frac{\partial T}{\partial x} = -m_1 (l_0 - \lambda x) \lambda \dot{\varphi}_1^2; \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = m_x \dot{x}; \\ \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_1} &= m_1 \dot{\varphi}_1 (l_0 - \lambda x)^2; \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = m_x \ddot{x}; \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_1} &= m_1 \ddot{\varphi}_1 (l_0 - \lambda x)^2 - 2m_1 \lambda \dot{x} (l_0 - \lambda x) \dot{\varphi}_1. \end{aligned} \quad (16)$$

Для определения обобщенных сил Q_{φ_1} , Q_x вычислим сумму мощностей всех активных сил на возможных скоростях и приравняем ее к мощности обобщенных сил:

$$G_{1y} v_{Ay}^B + M_z \omega_{2z}^B + G_{4x} v_{Kx1}^B = Q_{\varphi_1} \dot{\varphi}_1^B + Q_x \dot{x}^B. \quad (17)$$

Возможные скорости v_{Ay}^B , ω_{2z}^B , v_{Kx1}^B удовлетворяют уравнениям (6), (13), так как связи стационарные. Пределах преобразования, приведем (17) к виду

$$\begin{aligned} G_{1y} [\lambda \dot{x}^B \cos \varphi_1 + (l_0 - \lambda x) \dot{\varphi}_1^B \sin \varphi_1] - \\ - M_z \dot{x}^B/r_2 + G_{4x} \dot{x}^B r_3/R_3 = Q_{\varphi_1} \dot{\varphi}_1^B + Q_x \dot{x}^B. \end{aligned}$$

Отсюда

$$Q_{\varphi_1} = G_{1y} (l_0 - \lambda x) \sin \varphi_1 = -m_1 g (l_0 - \lambda x) \sin \varphi_1; \quad (18)$$

$$Q_x = G_{1y} \lambda \cos \varphi_1 - M_z/r_2 + G_{4x} r_3/R_3. \quad (19)$$

Запишем условия равновесия системы в обобщенных координатах:

$$Q_{\varphi_1} = 0; \quad Q_x = 0. \quad (20)$$

Из (20) и (18); (19) получим, что система находится в равновесии при

$$\varphi_1 = 0; \quad M_z = (G_{4x} r_3/R_3 + G_{1y} \lambda) r_2. \quad (21)$$

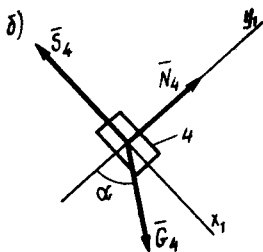


Рис. 86

Для заданных числовых значений параметров $M_2 = (107 \cdot 0,867 \times \times 0,1/0,15 - 103 \cdot 1,37) 9,81 \cdot 0,114 = -88,7$ Н·м. Выражение обобщенной силы, соответствующее движению системы относительно равновесного положения:

$$Q_x = -G_{1y}\lambda(1 - \cos \varphi_1) = m_1 g \lambda (1 - \cos \varphi_1). \quad (22)$$

```

DATA DT,T,F1,X,OM1,V/ 0.0107,3*0.,0.75,0.0.
DO 12 K=1,241
AB=1.31=1.37*X
E1=(2.74*OM1*V-9.8*SIN(F1))/AB
W=0.424*(9.8*(1-COS(F1))-AB*OM1**2)
IF((K/10)*10.NE.K-1) GO TO 2
S4=107*(0.5-W/1.5)
PRINT 30731,T,F1,X,OM1,V,E1,W,S4
30731 FORMAT(10G10.3)
2 F1=F1+OM1*DT
X=X+V*DT
OM1=OM1+E1*DT
V=V+W*DT
12 T=T+DT
STOP
END
0.0 0.0 0.0 0.750 0.0 0.0 -0.312 930.
0.107 0.000 -0.002 0.719 -0.032 -0.641 -0.274 929.
0.214 0.152 -0.006 0.622 -0.057 -1.200 -0.169 922.
0.321 0.212 -0.013 0.472 -0.069 -1.620 -0.033 912.
0.428 0.254 -0.020 0.285 -0.066 -1.880 0.087 903.
0.535 0.274 -0.027 0.070 -0.053 -1.980 0.152 899.
0.642 0.273 -0.032 -0.133 -0.036 -1.940 0.143 899.
0.749 0.248 -0.035 -0.333 -0.024 -1.760 0.064 905.
0.856 0.204 -0.030 -0.507 -0.023 -1.440 -0.062 914.
0.963 0.143 -0.041 -0.640 -0.037 -0.977 -0.194 923.
1.07 0.070 -0.046 -0.718 -0.062 -0.413 -0.289 930.
1.18 -0.008 -0.054 -0.733 -0.095 0.192 -0.315 932.
1.28 -0.042 -0.056 -0.684 -0.127 0.759 -0.263 928.
1.39 -0.153 -0.080 -0.580 -0.150 1.220 -0.154 920.
1.50 -0.208 -0.097 -0.433 -0.161 1.530 -0.025 911.
1.60 -0.246 -0.114 -0.259 -0.158 1.700 0.084 904.
1.71 -0.265 -0.131 -0.074 -0.145 1.740 0.142 899.
1.82 -0.264 -0.145 0.110 -0.130 1.670 0.136 900.
1.93 -0.244 -0.159 0.281 -0.118 1.490 0.072 904.
2.03 -0.206 -0.171 0.428 -0.115 1.210 -0.032 912.
2.14 -0.155 -0.184 0.541 -0.124 0.850 -0.144 920.
2.25 -0.093 -0.198 0.612 -0.144 0.424 -0.233 926.
2.35 -0.026 -0.215 0.635 -0.171 -0.027 -0.273 929.
2.46 0.041 -0.234 0.612 -0.200 -0.453 -0.255 928.
2.57 0.104 -0.257 0.545 -0.225 -0.812 -0.187 923.

```

Рис. 87

Подставим (16), (18), (22) в (3) и запишем полученную систему дифференциальных уравнений в форме Коши:

$$\dot{\varphi}_1 = \omega_{1z}; \quad \dot{\omega}_{1z} = \varepsilon_{1z}; \quad \dot{x} = v_{Cx}; \quad \dot{v}_{Cx} = w_{Cx}; \quad (23)$$

$$\varepsilon_{1z} = (2\lambda\omega_{1z}v_{Cx} - g \sin \varphi_1) / (l_0 - \lambda x); \quad (24)$$

$$w_{Cx} = \frac{m_1}{m_x} \lambda [g(1 - \cos \varphi_1) - (l_0 - \lambda x)\omega_{1z}^2]. \quad (25)$$

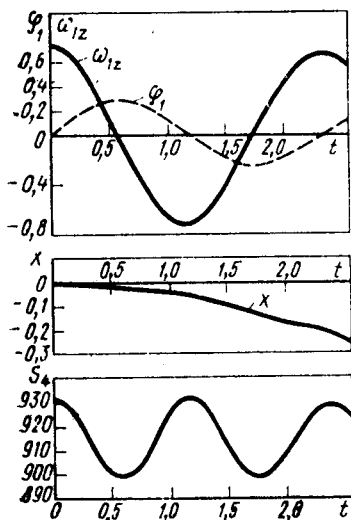


Рис. 88

Эйлера с шагом $\delta t = 0,0107$ с. Программа счета приведена на рис. 87.

Обозначение переменных в программе:

Переменные	.	.	t	δt	φ_1	x	ω_{1z}	v_{Cx}	ε_{1z}	w_{Cx}	S_4	l
Обозначения	.	.	T	DT	F1	X	OM1	V	E1	W	S4	AB

Печать результатов с шагом $\Delta t = 0,107$ с организована при помощи логического оператора IF. Сила S_4 вычисляется на каждом шаге печати результатов. На печать выводятся переменные t , φ_1 , x , ω_{1z} , ε_{1z} , w_{Cx} , S_4 .

Результаты решения (см. рис. 87) представлены графиками на рис. 88.

Для определения натяжения нити AB по графику $\varphi_1(t)$ найдем момент времени $t = 1,18$ с, когда нить AB в первый раз проходит вертикальное положение ($\varphi_1 = 0$). Для этого момента времени уравнение движения точечного груза A, освобожденного от связей, в проекции на ось y будет таким: $m_1 \dot{v}_{Ay} = S_1 - m_1 g$.

Продифференцировав по времени (13), получим для этого момента времени $\dot{v}_{Ay} = w_{Cx} \lambda + (l_0 - \lambda x) \varphi_1^2 = -0,313 \cdot 1,37 + (1,31 +$

Для определения натяжения нити KE освободим груз 4 от связей и обозначим реакции, как показано на рис. 86.

Запишем уравнения изменения количества движения в проекции на ось x_1 :

$$m_4 \dot{v}_{Kx_1} = m_4 g \sin \alpha - S_4.$$

Отсюда после подстановки выражения v_{Kx_1} из (6) найдем

$$\begin{aligned} S_4 &= m_4 (g \sin \alpha - w_{Cx} r_3 / R_3) = \\ &= 107 (8,5 - w_{Cx} / 1,5). \end{aligned} \quad (26)$$

Решение задачи на ЭВМ и обработка результатов. Уравнения (23)–(25) интегрируются на ЭВМ методом

$+1,37 \cdot 0,084) \cdot 0,733^2 = 0,337 \text{ м/с}^2$. Тогда $S_1 = m_1(g + \dot{v}_{Ay}) = 103(9,81 + 0,337) = 1040 \text{ Н}$.

Контроль решения. Графики на рис. 88 не имеют разрывов. Из графиков также видно, что движение системы близко к колебательному, оговоренному в условиях задачи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бать М. И., Джанелидзе Г. Б., Кельзон А. С. Теоретическая механика в примерах и задачах. Ч. I и II. М., 1973.
2. Бетелин В. Б. Мониторная система АСФОР. Командный язык. Командная система: Препринт. — ИПМ АН СССР, 1978, № 49.
3. Бутенин Н. В., Луцц Я. Л., Меркин Д. Р. Курс теоретической механики. Ч. I и II. М., 1979.
4. Васильева А. В., Бутузов В. Ф. Асимптотические разложения решений сингулярно-возмущенных уравнений. М., 1973.
5. Вычислительная техника в инженерных и экономических расчетах/А. В. Петров, Б. Е. Алексеев, М. А. Титов и др.; Под ред. А. В. Петрова. М., 1984.
6. Галиуллин А. С. Обратные задачи динамики. М., 1981.
7. Добронравов В. В., Никитин Н. Н., Дворников А. А. Курс теоретической механики. М., 1968.
8. Мак-Кракен Д., Дорм У. Численные методы и программирование на ФОРТРАНе. М., 1977.
9. Математическое обеспечение ЕС ЭВМ. Вып. 2. Минск, 1973.
10. Методические указания к расчету по курсу «Теоретическая механика»/И. В. Новожилов, М. Ф. Зацепин. — М.: МЭИ, 1980—1984 (Динамика твердого тела — 1980; Статика — 1980; Кинематика плоского движения — 1981; Динамика машин — 1983; Динамика — 1984).
11. Методические указания к лабораторным работам по курсу «Теория и практика применения ЭВМ». Отладка программ с помощью диалоговой системы «Примус»/Н. А. Мотина, Т. К. Рыбакова. — М.: МЭИ, 1981.
12. Мецкерский И. В. Сборник задач по теоретической механике. М., 1981.
13. Применение диалоговых форм при использовании ЭВМ в учебном процессе/В. Б. Бетелин, С. Е. Богомолов, Г. И. Мосалов и др. — М.: Моск. ин-т стали и сплавов, 1982.
14. Сборник научных программ на ФОРТРАНе. Вып. 2. Матричная алгебра и линейная алгебра. М., 1974.
15. Сборник заданий для курсовых работ по теоретической механике/А. А. Яблонский, С. С. Норейко и др. М., 1978.
16. Халфман Р. Динамика. М., 1972.
17. Яблонский А. А., Никифорова В. М. Курс теоретической механики. Ч. I. М., 1984.
18. Яблонский А. А. Курс теоретической механики. Ч. II. М., 1984.

ОГЛАВЛЕНИЕ

	<i>Стр.</i>
Предисловие	3
Принятые обозначения	5
Статика	
Определение реакций связей составной конструкции	6
Расчет С-1	6
Расчет С-1а	14
Определение реакций опор и усилий в стержнях плоской стержневой конструкции	15
Расчет С-2	15
Кинематика	
Кинематика плоского механизма с одной степенью свободы	22
Расчет К-1	22
Кинематика плоского механизма с двумя степенями свободы	35
Расчет К-2	35
Кинематика управления манипулятором	42
Расчет К-3	42
Динамика	
Динамика материальной точки	54
Расчет Д-1	54
Относительное движение материальной частицы по лопатке турбомашинны	67
Расчет Д-2	67
Динамика манипулятора	76
Расчет Д-3	76
Динамика машины с шатунно-кривошипным приводом	88
Расчет Д-4	88
Расчет Д-4а	101
Динамика машины с кулисным приводом	101
Расчет Д-5	101
Расчет Д-5а	110
Расчет Д-5б	110
Динамические реакции в подшипниках ротора	111
Расчет Д-6	111
Движение системы с двумя степенями свободы относительно положения равновесия	121
Расчет Д-7	121
Список литературы	135