

МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО СПЕЦИАЛЬНОГО
ОБРАЗОВАНИЯ СССР

МОСКОВСКИЙ ордена ЛЕНИНА и ордена ОКТЯБРЬСКОЙ РЕВОЛЮЦИИ
ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ



И. В. НОВОЖИЛОВ

Утверждено
Учебно-методическим управлением МЭИ
в качестве учебного пособия
для студентов

КОНСПЕКТ ЛЕКЦИЙ

по курсу

ПРИБЛИЖЕННЫЕ МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ
ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

ФРАКЦИОННЫЙ АНАЛИЗ

Редактор Ю. Г. МАРТЫНЕНКО



Москва

1980

Под динамической системой в работе понимается объект, изменение которого во времени описывается обыкновенными дифференциальными уравнениями. Эти уравнения обычно нелинейны. Их решение практически всегда приходится строить приближенно, при помощи тех или иных разновидностей методов малого параметра. В работе излагаются наиболее употребительные разновидности методов.

Уравнения реальных динамических систем обычно не содержат малого параметра. В работе излагаются методы теории подобия и размерности, позволяющие приводить исходные уравнения к виду, содержащему малый параметр.

Обычной трудностью, возникающей при аналитическом и численном (при помощи ЭВМ) исследовании дифференциальных уравнений, является сильное разнесение «частот» движения динамической системы. В работе излагаются методы «разделения» движений, позволяющие составлять приближенные уравнения для быстрых и медленных составляющих движения по отдельности.

ВВЕДЕНИЕ

Под динамическими системами нами будут пониматься системы, процессы в которых развиваются во времени и описываются обыкновенными дифференциальными уравнениями.

Уравнения движения конкретной динамической системы с точки зрения исследователя обычно обладают следующими особенностями: они описывают явление с излишней подробностью и излишне сложны. Будучи убежден в излишней сложности и трудоемкости уравнений, исследователь начинает их «упрощать». При этом с большей или меньшей строгостью производится отбрасывание слагаемых, понижение порядка уравнений и т. п.

Возникают два вопроса:

1. Можно ли определить формальный алгоритм этих упрощений.

2. Как оценить разницу решений исходной и упрощенной систем.

Прикладной математикой накоплен мощный арсенал методов приближенного исследования дифференциальных уравнений. Применение этих методов в ходе упрощения задачи, как правило, дает ответ на оба поставленных вопроса.

Широкое внедрение такого рода методов в практику инженерных расчетов, однако же, затрудняется следующими причинами:

1. Различные варианты приближенных методов разрознены в обширной математической литературе. Они излагаются профессиональными математиками на языке, трудно доступном для инженера-практика. Методов много. Исследователю, не обладающему опытом, трудно разобраться, каким методом удобно воспользоваться в каждом конкретном случае.

2. Указанные методы являются в большей своей части разновидностями метода малого параметра. Математик начинает работу фразой: «Рассмотрим систему уравнений, содержащую малый параметр...». Инженер, исследующий конкретную систему, видит перед собой уравнения, которые чаще

всего никаких малых параметров не содержат. Встает задача приведения исходных уравнений к такому виду, когда они содержат малые параметры и когда к ним может быть применен математический формализм. Задача решается при помощи методов теории подобия и размерности. При этом очень важным оказывается привлечение дополнительной информации о порядке величин, фигурирующих в задаче. Эта информация, так сказать инженерного уровня, выделяет для дальнейшего формального изучения так называемые классы движения системы.

Оба этапа приближенного решения — этап введения малого параметра и этап применения математического аппарата — образуют единую процедуру. Эта область на стыке прикладной математики и инженерии часто называется фракционным анализом [1].

При помощи фракционного анализа, как будет показано далее, выделяются главные составляющие движения и малые добавки к ним, выделяются медленные или быстрые составляющие — короче, производится разделение движения на крупные и мелкие «фракции».

В данной работе излагаются основы фракционного анализа.

Полагаем, что ее содержание может заинтересовать тех, кому приходится иметь дело с приближенным аналитическим исследованием обыкновенных дифференциальных уравнений. Численный анализ уравнений на ЭВМ при всей его эффективности не умаляет значимости общих, хотя бы и приближенных, результатов, получаемых аналитическим путем. Возможности численного анализа, кроме того, часто ограничиваются большим разнесением собственных частот системы, когда с малым шагом интегрирования приходится прорисовывать высокочастотные составляющие движения на больших временных интервалах. Растрачивается машинное время, накапливаются ошибки счета. Встает задача разделения движений: требуется составить уравнения, описывающие быстрые и медленные составляющие по отдельности. Эти уравнения уже можно считать на ЭВМ, каждое в своем масштабе времени.

Принятый нами уровень строгости при изложении материала определяется обзорным характером книги. Нами опускаются доказательства математических утверждений и теорем, математические формулировки резко упрощены и огрублены.

Нам неоднократно приходилось встречаться с незаурядными инженерами-практиками, обходящимися в своей деятельности весьма скромными воспоминаниями из вузовского курса высшей математики. Хотелось бы, чтобы книга была понятна этому читателю и дала ему начальную ориентировку в многообразии методов малого параметра, способах их использования и областях применимости различных методов. Этой же цели служит вводная глава, в которой дана сводка необходимых сведений из теории дифференциальных уравнений.

Изложение во многом построено на примерах. Читатель, разобравшийся в них, может считать, что основное содержание книги им понято.

Читатель, которого заинтересует содержание книги, должен, как мы полагаем, подняться на более высокий уровень и обратиться к прилагаемому списку литературы. В этом случае мы будем считать свою задачу выполненной.

Глава 1

НЕОБХОДИМЫЕ СВЕДЕНИЯ ПО ТЕОРИИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

§ 1.1. Теорема существования и единственности решения системы дифференциальных уравнений. Точки покоя. Устойчивость по Ляпунову

а) Решения системы дифференциальных уравнений

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений, приведенную к форме Коши:

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= f_1(x_1, \dots, x_n, t); \\ & \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ \frac{dx_n}{dt} &= f_n(x_1, \dots, x_n, t).\end{aligned}\tag{1.1}$$

При записи в форме Коши уравнения приводятся к системе уравнений первого порядка, разрешенных относительно производной. В (1.1) через d/dt обозначено дифференцирование по независимой переменной — времени t ; переменные x_1, \dots, x_n системы, записанной в форме Коши, называются фазовыми переменными системы. Пространство переменных x_1, \dots, x_n называют фазовым пространством системы. Размерность этого пространства совпадает с порядком системы (1.1).

Решением системы (1.1) называют набор явных функций времени

$$x_1 = \xi_1(t), \dots, x_n = \xi_n(t),\tag{1.2}$$

подстановка которых в уравнения (1.1) обращает их в тождества.

Соотношения (1.2) в фиксированный момент времени определяют в фазовом пространстве точку P — изображающую точку системы. С изменением времени изображающая точка

вычерчивает в фазовом пространстве так называемую фазовую траекторию системы. Решение (1.2), или, что то же, фазовая траектория, должны удовлетворять некоторым дополнительным условиям. Далее в качестве такого условия мы будем требовать, чтобы изображающая точка P в начальный момент времени $t=0$ совпадала с произвольно заданной точкой P_0 фазового пространства, т. е. чтобы фазовая траектория начиналась из точки P_0 . При этом решение (1.2) должно удовлетворять условиям

$$x_1(0) = \xi_1(0) = x_{10}, \dots, x_n(0) = \xi_n(0) = x_{n0},$$

где x_{10}, \dots, x_{n0} — заранее, до решения системы (1.1), заданные числа — так называемые начальные условия системы. Число начальных условий совпадает с порядком системы (1.1).

Применительно к системе (1.1) существование и единственность решения гарантируются соответствующей теоремой [2, 3], условия которой выполняются, если правые части уравнений аналитичны по своим аргументам. Последнее означает, что функции f_k ($k=1, \dots, n$) разлагаются в сходящиеся ряды типа рядов Тейлора по всем своим аргументам.

Заметим, что существование и единственность решения обеспечиваются также и менее жесткими условиями, оговоренными в [3].

Рассмотрим частный случай системы (1.1) — автономную систему дифференциальных уравнений (автономной называется система, в правые части которой не входит явно независимая переменная t)

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= f_1(x_1, \dots, x_n); \\ \frac{dx_n}{dt} &= f_n(x_1, \dots, x_n). \end{aligned} \quad (1.3)$$

Положениями равновесия, или точками покоя системы (1.3), называются точки фазового пространства $P^0(x_1^0, \dots, x_n^0)$, в которых скорости изменения фазовых переменных равны нулю:

$$\frac{dx_1}{dt} = \dots = \frac{dx_n}{dt} = 0. \quad (1.4)$$

Из (1.3), (1.4) следует, что точки покоя определяются системой конечных уравнений

$$\begin{aligned} f_1(x_1, \dots, x_n) &= 0; \\ f_n(x_1, \dots, x_n) &= 0. \end{aligned} \quad (1.5)$$

Из (1.4) вытекает, что $x_1^0 = \text{const}, \dots, x_n^0 = \text{const}$.

б) Устойчивость по Ляпунову

Рассмотрим динамическую систему (1.1). Возьмем одно из ее частных решений $\xi_1(t), \dots, \xi_n(t)$. В качестве частного решения может быть, например, взято решение $\xi_1 = x_1^0, \dots, \xi_n = x_n^0$, определяющее точку покоя системы.

Изучим движение системы (1.1) по отклонениям $\Delta x_1, \dots, \Delta x_n$ от частного решения. Тогда

$$x_1 = \xi_1 + \Delta x_1, \dots, x_n = \xi_n + \Delta x_n. \quad (1.6)$$

Зададим начальные условия системы (1.1) близкими к $\xi_1(0), \dots, \xi_n(0)$. Этим начальным условиям отвечает так называемое возмущенное движение системы. Решение возмущенной системы по отношению к решению ξ_1, \dots, ξ_n невозмущенной может вести себя по-разному:

1. Если для сколь угодно малого числа ε можно задать начальные возмущения $|\Delta x_k(0)| \leq \delta(\varepsilon)$ такими, что во все время движения $|\Delta x_k(t)| < \varepsilon$ ($k=1, \dots, n$), то невозмущенное движение называется устойчивым по Ляпунову.

2. Если частное решение системы устойчиво по Ляпунову и дополнительно выполняются условия $|\Delta x_k(t)| \rightarrow 0$ ($k=1, \dots, n$) при $t \rightarrow \infty$, то частное решение называется асимптотически устойчивым.

3. Если условия п. 1 не выполняются, т. е. возмущенные движения со временем выходят из заданной ε -окрестности невозмущенного движения, то невозмущенное движение называется неустойчивым.

в) Устойчивость по первому приближению,
влияние нелинейных слагаемых

Для исследования устойчивости частного решения ξ_1, \dots, ξ_n сделаем в (1.1) подстановку (1.6) и разложим правые части по малым Δx_k :

$$\begin{aligned} \frac{d\xi_1}{dt} + \frac{d\Delta x_1}{dt} = f_1(\xi_1, \dots, \xi_n) + \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \Delta x_1 + \dots + \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \Delta x_n + \\ + \frac{\partial^2 f_1}{\partial x_1^2} \Delta x_1^2 + \dots \end{aligned} \quad (1.7)$$

В (1.7) значения частных производных берутся в точке $x_1 = \xi_1(t), \dots, x_n = \xi_n(t)$. Так как $\xi_1(t), \dots, \xi_n(t)$ является частным решением (1.1), то в (1.7) выпадают слагаемые $d\xi_1/dt = f_1(\xi_1, \dots, \xi_n, t), \dots$. Опустим в (1.7) слагаемые второго и

более высокого порядка малости по Δx_h . Тогда (1.7) перейдет в линейную систему — так называемую систему уравнений первого приближения:

$$\begin{aligned} \frac{d\Delta x_1}{dt} &= \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \Delta x_1 + \dots + \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \Delta x_n; \\ &\dots \dots \dots \\ \frac{d\Delta x_n}{dt} &= \frac{\partial f_n}{\partial x_1} \Delta x_1 + \dots + \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \Delta x_n. \end{aligned} \quad (1.8)$$

Систему (1.8) удобно записать в матричном виде, введя матрицы:

$$\Delta x = \begin{pmatrix} \Delta x_1 \\ \vdots \\ \Delta x_n \end{pmatrix}, \quad \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$\frac{d\Delta x}{dt} = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right) \Delta x. \quad (1.9)$$

Далее нами часто будет исследоваться устойчивость точек покоя автономных систем. При этом (1.8) — линейная система дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.

Система (1.8), или (1.9), проще исходной системы (1.1). Исследование устойчивости тривиального решения $\Delta x_1 = \dots = \Delta x_n = 0$ системы (1.8) позволяет высказать ряд утверждений об устойчивости решения ξ_1, \dots, ξ_n исходной системы [4]:

1. Если тривиальное решение системы (1.8) асимптотически устойчиво, то решение ξ_1, \dots, ξ_n системы (1.1) также асимптотически устойчиво.
2. Если тривиальное решение системы (1.8) неустойчиво, то решение ξ_1, \dots, ξ_n системы (1.1) неустойчиво.
3. Если тривиальное решение для (1.8) устойчиво неасимптотически, то учет членов высшего порядка малости в (1.7) может существенно изменить характер движения системы (1.1) вблизи частного решения ξ_1, \dots, ξ_n . Оно может стать асимптотически устойчивым, неустойчивым и остаться устойчивым неасимптотически.

Оценивая поведение системы при больших отклонениях от точки покоя, удобно ввести определение области влияния. Областью влияния, или областью притяжения точки покоя,

называется множество точек в фазовом пространстве, из которых, если их брать за начальные, система приходит в точку покоя.

§ 1.2. Два типа степенных разложений по малому параметру

Далее нами будут рассматриваться системы дифференциальных уравнений, в которые входит малый параметр. Малый параметр чаще всего будет обозначаться буквой μ .

Решение системы, содержащей малый параметр, зависит, вообще говоря, от времени t и параметра μ , т. е. $x = x(t, \mu)$. (Здесь через x , аналогично Δx из (1.9), обозначена матрица-столбец переменных x_1, \dots, x_n .)

Из-за сложности уравнений само это решение обычно отыскать не удастся, и оно строится приближенно в виде рядов по степеням параметра μ

$$x^{(0)}(t) + \mu x^{(1)}(t) + \mu^2 x^{(2)}(t) + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \mu^k x^{(k)}(t). \quad (1.10)$$

Через $x^{(k)}(t)$ здесь и далее обозначается коэффициент степенного разложения при μ^k .

Возьмем частичную сумму ряда

$$x_{(n)}(t, \mu) = \sum_{k=0}^n \mu^k x^{(k)}(t). \quad (1.11)$$

Оценим погрешность $\|x(t, \mu) - x_{(n)}\|$ приближения (1.11) функции $x(t, \mu)$. Здесь через $\|\dots\|$ обозначена норма вектора, определяемая, например, как максимальное значение модуля его компонент.

При оценке возможны два случая [5, 6]:

1. Если $\|x - x_{(n)}\| \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, $\mu = \text{const}$, то говорят, что ряд (1.10) сходится к функции $x(t, \mu)$. Это означает, что для любого $\varepsilon > 0$ можно подобрать такое N , что при $n > N$ будет $\|x - x_{(n)}\| < \varepsilon$. Если можно найти N , не зависящее от t для некоторого интервала $0 \leq t \leq t_1$, то ряд сходится равномерно на этом интервале. Ряд может сходиться лишь для $\mu \leq \mu_0$, тогда величина μ_0 называется радиусом сходимости ряда.

2. Если $\|x - x_{(n)}\| \rightarrow 0$ при $\mu \rightarrow 0$ и $n = \text{const}$, то говорят, что функция x разлагается в асимптотический ряд. Если оценка снизу скорости убывания $\|x - x_{(n)}\|$ при $\mu \rightarrow 0$ не зависит от t , то асимптотический ряд приближает функцию равномерно.

Оценка погрешности асимптотического приближения функции такова: $\|x - x_{(n)}\| \sim \mu^{n+1}$ при $\mu \rightarrow 0$.

Если формально построить весь асимптотический ряд, т. е. бесконечное число его членов, то он может оказаться расходящимся при малых конечных значениях μ .

При этом, естественно, встает вопрос, можно ли пользоваться асимптотическими разложениями для решения конкретных задач, в которых малые параметры имеют вполне конкретные числовые значения.

Несмотря на эти сомнения, асимптотическими разложениями широко пользуются в практике приближенных вычислений. Это определяется следующими обстоятельствами:

1. Использование асимптотического разложения для конечного значения μ чаще всего дает приемлемую точность приближения при решении конкретных задач. Оценка точности может производиться по сравнению с точным решением модельных задач или результатами численного счета [6].

2. В ряде важных приближенных методов удается доказать лишь асимптотические свойства построенных рядов.

3. Известны методы, для которых сходимость рядов вида (1.10) доказана. Тогда, чтобы приблизить искомую функцию с заданной погрешностью ϵ , нужно построить $n > N$ членов ряда. Однако при решении конкретных задач чаще всего не удается построить более одного или двух членов ряда. Дальше вычисления становятся слишком громоздкими. Поэтому для оценки погрешности такого фактически построенного приближения приходится пользоваться асимптотическими оценками. Ряд, сходящийся при $\mu \leq \mu_0$, заведомо обладает асимптотическими свойствами при $\mu \rightarrow 0$.

4. Зачастую для сходящегося ряда не удается оценить величину радиуса сходимости μ_0 . Поэтому приходится сходящимся рядом пользоваться как асимптотическим, т. е. при $\mu \rightarrow 0$.

Глава 2

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДОВ ТЕОРИИ РАЗМЕРНОСТИ ДЛЯ НОРМАЛИЗАЦИИ УРАВНЕНИЙ И ВВЕДЕНИЯ В НИХ МАЛОГО ПАРАМЕТРА

§ 2.1. Основные понятия теории размерности

Точные науки имеют дело с величинами, которые, во-первых, качественно, по своей природе, отличаются друг от друга и, во-вторых, измеряются числовой мерой.

При аналитическом описании явлений первая особенность отражается в том, что величинам присваиваются различные наименования, этикетки, так называемые размерности. Так, например, существуют величины с размерностью «длина», «масса», «энергия» и т. п. При определении числовой меры для рассматриваемой величины должна быть выбрана единица измерения и оговорена процедура измерения. Так, при измерении длины задается единица длины — метр, поделенный на более мелкие доли. При измерении длины, например бруса, надо смотреть, сколько раз целиком и сколько долей метра укладывается по его длине.

Обозначим через L длину бруса, через L_* — единицу длины. Тогда $L=L_*l$, где L, L_* — размерные величины размерности «длина»; l — относительное число, числовая мера, определяющая длину бруса при заданном L_* . Совершенно аналогично могут быть определены площадь S , скорость V , время T и любые другие размерные величины. Таким образом,

$$L=L_*l, S=S_*s, V=V_*v, T=T_*t, \dots, \quad (2.1)$$

где $L_*, S_*, V_*, T_*, \dots$ — единицы измерения соответствующих величин, а l, s, v, t, \dots — их числовые меры.

Пусть нами рассматривается конкретная задача, в описании которой участвует набор некоторых величин, переменных и констант. Вопрос о выборе этих величин притмыкает к проб-

леме выбора математической модели рассматриваемой задачи. Во всяком случае, если модель уже определена, т. е. составлены все уравнения, начальные и граничные условия, то набор величин, описывающих задачу, получается сразу же. Мы будем пока считать эти величины заранее перечисленными. Далее обнаружится, что теория размерности может оказаться полезной и на этапе выбора математической модели.

Перечисленные величины удовлетворяют ряду фундаментальных соотношений, сформулированных для задач с таким набором переменных и констант. Обычно эти соотношения выглядят как определения одних величин через другие.

В задачах механики в качестве описывающих величин фигурируют $L, T, S, V, W, M, F, \dots$ (Здесь через W, M, F дополнительно обозначены ускорение, масса и сила.) В качестве фундаментальных определений в механике обычно принимаются определение площади прямоугольника S через длины его сторон L_a и L_b , определение скорости V как предела отношения приращения длины ΔL к приращению времени ΔT , определение ускорения W как предела отношения приращения скорости к ΔT и второго закона Ньютона, который рассматривается как определение силы F .

Запишем эти соотношения:

$$S = L_a L_b, \quad V = \frac{dL}{dT}, \quad W = \frac{dV}{dT}, \quad F = MW. \quad (2.2)$$

Рассматриваемые величины L_a, L_b, V, \dots и соотношения (2.2) удовлетворяют с точки зрения теории размерности двум почти тривиальным постулатам:

1. Сами величины L_a, L_b, V, \dots не зависят от выбора единицы измерения и от способа измерения.

2. Участвовать в отношениях типа равенство и неравенство могут только величины одинаковой размерности.

Перейдем в (2.2) от записи в размерных величинах к уравнениям в относительных числах — числовых мерах l_a, l_b, s, \dots . В соответствии с (2.1), получим

$$S_* s = L_*^2 l_a l_b, \quad V_* v = \frac{L_*}{T_*} \frac{dl}{dt}, \quad W_* w = \frac{V_*}{T_*} \frac{dv}{dt}, \quad F_* f = M_* W_* m w$$

или

$$s = \frac{L_*^2}{S_*} l_a l_b, \quad v = \frac{L_*}{T_* V_*} \frac{dl}{dt}, \quad w = \frac{V_*}{T_* W_*} \frac{dv}{dt}, \quad f = \frac{M_* W_*}{F_*} m w. \quad (2.3)$$

В (2.3) величины s, l_a, l_b, \dots являются относительными числами. Поэтому 2-й постулат теории размерности выполняется только в том случае, если величины $L_*^2/S_*, L_*/T_*V_*, \dots$ в (2.3) будут также относительными числами. Обычно эти относительные числа выбирают равными единице

$$\frac{L_*^2}{S_*} = 1, \quad \frac{L_*}{T_*V_*} = 1, \quad \frac{V_*}{T_*W_*} = 1, \quad \frac{M_*W_*}{F_*} = 1, \quad (2.4)$$

откуда

$$S_* = L_*^2, \quad V_* = \frac{L_*}{T_*}, \quad W_* = \frac{V_*}{T_*}, \quad F_* = M_*W_*. \quad (2.5)$$

Из (2.5) следуют общепринятые определения: единица площади S_* равна площади квадрата со сторонами, равными единице длины L_* , и т. д.

Пусть при описании задачи нами было введено, вообще говоря, n единиц размерности. Пусть эти единицы удовлетворяют k условиям типа (2.4). Тогда $n-k$ единиц могут быть приняты за независимые при условии, что через них однозначно выражаются остальные k зависимых единиц.

В механике в качестве независимых единиц размерности могут быть взяты тройки единиц V_*, T_*, M_* ; W_*, L_*, F_* и т. д. Чаще всего в механике в качестве тройки независимых единиц выбираются L_*, T_*, M_* — так называемая основная система единиц. Значения единиц независимых по размерности величин могут выбираться какими угодно. Так, в тройке L_*, T_*, M_* за L_* могут быть взяты сантиметр, метр, километр, за T_* — секунда, минута, час. Значения зависимых по размерности единиц определяются по формулам (2.5).

Выражение единицы, зависимой по размерности через основные единицы, называется формулой размерности соответствующей единицы. Так, из (2.5)

$$S_* = L_*^2, \quad V_* = L_*T_*^{-1}, \quad W_* = L_*T_*^{-2}; \quad F_* = M_*L_*T_*^{-2}. \quad (2.6)$$

Несложно доказывается [7], что произвольная по размерности зависимая единица является степенной функцией независимых единиц.

Если показатели степеней в формуле размерностей некоторой величины все равны нулю, то эта величина называется безразмерной. Примером безразмерной величины является угол при радианном способе его измерения. Безразмерная величина задается относительным числом, не изменяющимся при изменении значений единиц основной системы единиц.

Таким образом, перечисление набора описывающих задачу величин и набора фундаментальных соотношений определяет структуру размерностей задачи: распределение числа зависимых и независимых единиц и формулы размерностей.

При заданном наборе описывающих задачу величин число независимых единиц может изменяться при изменении числа соотношений вида (2.4). Так, в механике можно дополнить тройку основных единиц L_* , T_* , M_* четвертой независимой единицей F_* , опустив в (2.4) уравнение $M_*W_*/F_*=1$. Чтобы удовлетворить 2-му постулату теории размерности, уравнение Ньютона должно быть записано в виде

$$F = kMW, \quad (2.7)$$

где $k = F_*/M_*W_*$ — размерный множитель, согласующий размерности левой и правой частей уравнения Ньютона.

Число независимых единиц уменьшается при увеличении числа уравнений вида (2.4). Так, в астрономии или радиолокации бывает удобно выбрать в качестве единицы скорости $V_* = C$, где C — скорость света. При этом число независимых в механике единиц становится равным двум, а длина измеряется в световых годах или миллисекундах. Если фиксировать две оставшиеся единицы, взяв, например, раз навсегда для всех задач $M_* = 1$ кг, $T_* = 1$ с, то независимых единиц не будет вообще и теория размерности потеряет смысл.

Эффективные методы теории размерности связаны с возможностью преобразования системы единиц.

§ 2.2. Преобразования теории размерности

Посмотрим, как изменится числовая мера основной по размерности величины, например длины, если единицу измерения длины L_{1*} изменить на L_{2*} .

Обозначим через L_1 и L_2 длину какого-либо отрезка при его измерении единицами L_{1*} , L_{2*} . Из 1-го постулата теории размерности $L_2 = L_1$. Подставив сюда выражения L_1 и L_2 по (2.1), имеем $L_{2*}l_2 = L_{1*}l_1$. Отсюда измененная числовая мера $l_2 = \lambda l_1$, где $\lambda = L_{1*}/L_{2*}$ — отношение длины исходной единицы к длине измеренной единицы. Совершенно аналогично можно получить $t_2 = \tau t_1$, $m_2 = \mu m_1$, где $\tau = T_{1*}/T_{2*}$, $\mu = M_{1*}/M_{2*}$.

Как изменяются числовые меры зависимых по размерности величин при изменении значений основных единиц? Пусть, например, площадь, ускорение и т. д. измеряются при двух значениях тройки основных единиц: L_{1*} , T_{1*} , M_{1*} и L_{2*} , T_{2*} , M_{2*} . Обозначим, как и ранее, через S_1 и S_2 площадь при

измерении в первой и второй тройках единиц. Из $S_2 = S_1$ после подстановки (2.5) имеем $s_2 = (L_{1*}/L_{2*})^2 s_1$. Аналогично $\omega_2 = (L_{1*}/L_{2*})(T_{1*}/T_{2*})^2 \omega_1$ и т. д. Отсюда

$$s_2 = \lambda^2 s_1, \quad \omega_2 = \lambda \tau^{-2} \omega_1, \quad \dots \quad (2.8)$$

Из сравнения (2.8) с (2.6) видно, что числовая мера размерно зависимой величины изменяется в соответствии с ее формулой размерности.

Левые и правые части фундаментальных соотношений (2.2), определяющих структуру размерностей в задаче, по определению, имеют одинаковую размерность. Поэтому при переходе к записи в числовых мерах по (2.1), (2.4) в левой и правой частях соотношений появляется один и тот же множитель. Следовательно, уравнения для числовых мер, соответствующие (2.2), получаются из них простым переобозначением физических величин L, T, S, \dots на их числовые меры. Из одинаковой размерности слагаемых этих уравнений следует также, что уравнения в числовых мерах инварианты относительно изменения значений системы независимых единиц. Эти утверждения верны также для любых уравнений, базирующихся на фундаментальных определениях вида (2.2).

Дополнительная возможность преобразования уравнений в числовых мерах связана с возможностью произвольного задания единиц размерно зависимых величин. Последнее определяется тем, что в уравнениях (2.4), связывающих размерные единицы, отношения L_*^2/S_* , L_*/T_*V_* , V_*/T_*W_* , M_*W_*/F_* , ... могут приравняться, вообще говоря, произвольному относительному числу. При этом постулаты теории размерности не нарушаются.

Так, например, можно представить задачи, в которых длины удобно измерять в километрах, а площади в квадратных метрах. При этом удобно взять $L_* = 1$ км, а $S_* = 1$ м². Из первого уравнения (2.2) при переходе к числовым мерам получим $s = \sigma l_a l_b$, где $\sigma = L_*^2/S_* = 1$ км²/1 м² = 10⁶.

При использовании уравнения Ньютона в конкретных задачах зачастую бывает удобно выбирать $M_* = 1$ кг, $W_* = 1$ м/с², а $F_* = 1$ кг = 9,81 Н. Тогда при записи уравнения Ньютона $F = MW$ в числовых мерах будем иметь $f = \Theta m w$, где

$$\Theta = M_* W_* / F_* = 1 \text{ Н} / 1 \text{ кг} = 1/9,81.$$

В этих задачах часть соотношений в (2.4) заменяется соотношениями

$$\frac{L_*^2}{S_*} = 10^6, \quad \frac{M_* W_*}{F_*} = \frac{1}{9,81}. \quad (2.9)$$

Соответствующие изменения произойдут и в уравнениях, базирующихся на фундаментальном определении площади и законе Ньютона.

§ 2.3. Нормализация уравнений движения динамических систем

Мы установили, что единицы размерности всех участвующих в описании задачи величин могут выбираться произвольным образом. Единицы размерно независимых величин произвольны по определению, а зависимых—изменяются за счет задания разных значений правых частей в (2.4). Установленный факт позволяет приводить уравнения задачи к так называемой нормализованной форме. При этом уравнения записываются в числовых мерах, которые не превосходят единицы.

Далее изложим процедуру нормализации уравнений динамических систем, описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями. Не вдаваясь в излишнюю общность, изложим процедуру на примере системы конкретного вида

$$\frac{dX_1}{dT} = A_1 X_1 + B_1 X_2 + \dots + C_1 X_1 X_2 + \dots \quad (2.10)$$

Система (2.10) развивается в многомерном фазовом пространстве (X_1, X_2, \dots) , правые части уравнений содержат как линейные, так и нелинейные слагаемые. Будем считать X_1, X_2, \dots величинами, вообще говоря, разной размерности; через T в (2.10), как и ранее, обозначено время, группы коэффициентов, A_1, A_2, \dots и B_1, B_2, \dots имеют разную размерность. Индекс при коэффициенте указывает номер уравнения, в которое он входит.

Запишем систему (2.10) в числовых мерах, проделав замену

$$T = T_* t, \quad X_1 = X_{1*} x_1, \dots, \quad A_1 = A_* a_1, \dots, \quad B_1 = B_* b_1, \dots \quad (2.11)$$

Здесь $T_*, X_{1*}, \dots, A_*, \dots, B_*, \dots$ — единицы величин разной размерности, а $t, x_1, \dots, a_1, \dots, b_1, \dots$ — их числовые меры. Подставив (2.11) в (2.10), получим

$$\frac{X_{1*}}{T_*} \frac{dx_1}{dt} = A_* X_{1*} a_1 x_1 + B_* X_{2*} b_1 x_2 + \dots + C_* X_{1*} X_{2*} c_1 x_1 x_2 + \dots$$

Поделим каждое уравнение на множитель размерности этого уравнения:

$$\frac{1}{T_* A_*} \frac{dx_1}{dt} = a_1 x_1 + \frac{X_{2*} B_*}{X_{1*} A_*} b_1 x_2 + \dots + \frac{C_* X_{2*}}{A_*} c_1 x_1 x_2 + \dots \quad (2.12)$$

Пусть единицы зависимых по размерности величин выражаются через единицы независимых так же, как в (2.4). При этом безразмерные комбинации единиц в уравнениях (2.12) удовлетворяют соотношениям

$$\frac{1}{T_* A_*} = 1, \quad \frac{X_{2*} B_*}{X_{1*} A_*} = 1, \quad \frac{C_* X_{2*}}{A_*} = 1, \quad \dots, \quad (2.13)$$

а уравнения (2.12) примут вид

$$\frac{dx_1}{dt} = a_1 x_1 + b_1 x_2 + \dots + c_1 x_1 x_2 + \dots \quad (2.14)$$

Система (2.14) отличается от (2.10) лишь обозначениями величин. Это лишний раз подтверждает известный тезис о том, что теория размерности при фиксированной системе единиц малосодержательна.

Используем возможность произвольного выбора единиц T_* , X_{1*} , A_* , ... для нормализации системы (2.10).

Предположим, что заранее, до решения системы (2.10), у нас есть информация о порядке величин, описывающих эту систему. Прежде всего, естественно считать известными коэффициенты системы. Тогда каждую группу коэффициентов одинаковой размерности можно оценить характерным для этих коэффициентов значением, например, $A_* = \max \{A_i\}$, $B_* = \max \{B_i\}$, ... (Обозначения для характерных величин предопределяются тем, что далее они будут взяты за единицы размерности в (2.11).) Считаем далее, что нам известно характерное время T_* движения системы, известны порядки величин X_1 , ... во время движения — так называемые характерные значения X_{1*} , ... этих величин. Могут быть известны те или иные соотношения между характерными значениями переменных.

Перечисленные сведения могут быть получены из эксперимента, по аналогии, путем грубых оценок решения системы (2.10) и т. п.

Этот этап наименее формализован во всей процедуре приближенного анализа системы (2.10) и в наибольшей степени зависит от искусства исследователя.

Задание набора величин T_* , X_{1*} , ..., A_* , ... определяет так называемый класс движения динамической системы (2.10), изменение набора этих величин выделяет для дальнейшего исследования тот или иной класс движения.

Зададим теперь единицы размерности в (2.11) равными характерным значениям, которые мы выбрали. При этом си-

стема (2.10) записывается в системе единиц, соответствующей рассматриваемому классу движения.

Важно проследить, чтобы эта система единиц не противоречила исходной системе размерностей, в которой записаны уравнения (2.10). Для этого нужно, чтобы после задания соотношений, определяющих класс движения, набор независимых единиц в (2.11) был размерно независим с точки зрения исходной системы единиц. Невыполнение этого требования привело бы, аналогично (2.7), к необходимости вводить в исходные уравнения дополнительные множители, согласующие размерность.

Система (2.10) после указанных преобразований примет вид

$$\lambda_1 \frac{dx_1}{dt} = a_1 x_1 + \lambda_2 b_1 x_2 + \dots + \lambda_3 c_1 x_1 x_2 + \dots, \quad (2.14a)$$

где

$$\frac{1}{T_* A_*} = \lambda_1, \quad \frac{X_{2*} B_*}{X_{1*} A_*} = \lambda_2, \quad \frac{C_* X_{2*}}{X_{1*}} = \lambda_3, \dots \quad (2.15)$$

Безразмерные комбинации характерных значений (2.15) теперь не будут, в отличие от (2.13), равны единицам. С аналогичной ситуацией мы встречались в (2.9).

В уравнениях (2.14a) значения безразмерных переменных t, x_1, x_2, \dots изменяются в интервале порядка единицы, значения безразмерных коэффициентов не превосходят значений порядка единицы в силу выбора $T_*, X_{1*}, \dots, A_*, \dots$. Тем самым нормализация уравнений (2.10) завершена.

Числовые значения безразмерных коэффициентов $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ определяются значениями $T_*, X_{1*}, \dots, A_*, \dots$, т. е. выбором класса движения. Следовательно, набор $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ также соответствует этому классу движения и определяет его.

В частных случаях величины некоторых из коэффициентов $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ могут принимать значения, много меньшие единицы. Для таких классов движения уравнения (2.14a) можно изучать приближенно при помощи тех или иных разновидностей метода малого параметра.

§ 2.4. Варианты введения малого параметра при нормализации уравнений

Рассмотрим произвольную систему уравнений в форме Коши. Будем здесь для простоты считать, что система автономна, т. е. правые части не зависят от времени. Проведем ее

нормализацию. Нормализованную систему запишем в следующем общем виде:

$$\frac{T_1}{T_*} \frac{dx_1}{dt} = f_1(x_1, x_2, \dots), \quad x_1(0) = x_{10};$$

$$\frac{T_2}{T_*} \frac{dx_2}{dt} = f_2(x_1, x_2, \dots), \quad x_2(0) = x_{20}.$$

.

Здесь x_{10}, x_{20}, \dots — начальные условия системы по нормализованным переменным, множитель $1/T_*$ в выражениях $T_1/T_*, T_2/T_*, \dots$ появился при нормализации $dT = T_* dt$, множители T_1, T_2, \dots имеют размерность времени, поскольку каждое слагаемое нормализованных уравнений должно быть безразмерным. Будем называть величины T_1, T_2, \dots , по аналогии с теорией управления, постоянными времени системы. Их величины в определенной степени характеризуют скорость протекания процессов по переменным x_1, x_2, \dots .

Рассмотрим систему, у которой постоянные времени сильно различаются по величинам:

$$T_1 \ll T_2. \tag{2.17}$$

Покажем, что за счет выбора величины T_* могут быть получены разные варианты зависимости системы (2.16) от малого параметра [8, 9].

1. Выберем сначала $T_* \ll T_1, T_2$. Система (2.16) приводится к виду

$$\frac{dx_1}{dt} = \mu_1 f_1, \quad x_1(0) = x_{10}, \quad \mu_1 = \frac{T_*}{T_1} \ll 1;$$

$$\frac{dx_2}{dt} = \mu_2 f_2, \quad x_2(0) = x_{20}, \quad \mu_2 = \frac{T_*}{T_2} \ll 1.$$

.

Основной в дальнейшем вычислительной процедурой является отыскание решения в виде рядов по малому параметру. Чтобы оценить возможности, которые появляются при изменении T_* , будем и в этом параграфе строить решение в виде таких рядов. Обоснование методов малого параметра и ссылки на необходимую литературу пока отложим на дальнейшее.

Будем искать решение системы (2.18) в виде рядов

$$x_1 = x_1^{(0)} + \mu x_1^{(1)} + \mu^2 x_1^{(2)} + \dots, \tag{2.19}$$

.

где $x_1^{(0)}, x_1^{(1)}, \dots$ — неизвестные функции времени; в качестве малого параметра взят, например, $\mu = \mu_1$. Для определенности считаем T_* столь малым, что μ_1 и μ_2 можно считать величинами одного порядка малости.

Решим вопрос с начальными условиями по неизвестным $x_1^{(0)}, x_1^{(1)}, \dots$. Для этого рассмотрим (2.19) в начальный момент времени и приравняем члены одинакового порядка малости в левых и правых частях полученных соотношений. Принимая, что начальные условия x_{10}, \dots от малого параметра не зависят, получим

$$x_1^{(0)}(0) = x_{10}; \quad x_1^{(1)}(0) = x_1^{(2)}(0) = \dots = 0. \quad (2.20)$$

.....

Подставим (2.19) в (2.18) и приравняем в левых и правых частях члены одного порядка по μ . Члены нулевого порядка дают систему

$$\frac{dx_1^{(0)}}{dt} = 0, \quad x_1^{(0)}(0) = x_{10}.$$

.....

Отсюда $x_1^{(0)} = x_{10}, \dots$

Слагаемые первого порядка дают

$$\frac{dx_1^{(1)}}{dt} = f_1(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots), \quad x_1^{(1)}(0) = 0.$$

.....

Отсюда $x_1^{(1)} = f_1(x_{10}, x_{20}, \dots) t, \dots$

Аналогично строятся все члены ряда. Сложив их, получим

$$x_1 = x_{10} + \mu f_1(x_{10}, x_{20}, \dots) t = x_1(0) + \frac{dx_1}{dt}(0) \cdot t + \dots$$

.....

Полученные ряды — это разложение функций $x_1(t), \dots$ в ряд Тейлора вблизи начальной точки. Приближенное решение естественно отыскивается в таком виде при малых значениях аргумента T , т. е. при малых значениях характерного времени T_* .

2. Возьмем $T_* = T_1$. Система (2.16) с учетом (2.17) приводится к виду

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= f_1, \quad x_1(0) = x_{10}; \\ \frac{dx_2}{dt} &= \mu f_2, \quad x_2(0) = x_{20}, \quad \mu = \frac{T_1}{T_2} \ll 1. \end{aligned} \quad (2.21)$$

При построении решения в нулевом по μ приближении получим систему

$$\begin{aligned} \frac{dx_1^{(0)}}{dt} &= f_1(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots), \quad x_1^{(0)}(0) = x_{10}; \\ \frac{dx_2^{(0)}}{dt} &= 0, \quad x_2^{(0)}(0) = x_{20}. \end{aligned} \quad (2.22)$$

Уравнениями нулевого приближения здесь выделяются быстрые составляющие движения с малой постоянной времени T_1 . За характерное время $T_* = T_1$ медленные переменные x_2, \dots не успевают измениться и в нулевом приближении считаются постоянными.

3. Возьмем $T_* = T_2$. Система (2.16) с учетом (2.17) примет вид

$$\begin{aligned} \mu \frac{dx_1}{dt} &= f_1, \quad x_1(0) = x_{10}, \quad \mu = \frac{T_1}{T_2} \ll 1; \\ \frac{dx_2}{dt} &= f_2, \quad x_2(0) = x_{20}. \end{aligned} \quad (2.23)$$

Решение в нулевом по μ приближении определяется уравнениями

$$\begin{aligned} 0 &= f_1(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots); \\ \frac{dx_2^{(0)}}{dt} &= f_2(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots), \quad x_2(0) = x_{20}. \end{aligned} \quad (2.24)$$

Здесь уравнениями нулевого приближения выделяются медленные составляющие движения с большой постоянной времени T_2 . Уравнения для быстрых переменных x_1 перешли в статические соотношения. В (2.24) опущены «лишние»

начальные условия по x_1 . Детальнее этот вопрос будет обсуждаться в гл. 4.

Переходом от уравнений (2.23) к (2.24) здесь выявляется качественно новая ситуация по сравнению с переходом от (2.21) к (2.22).

В обоих случаях исходные уравнения (2.21), (2.23) содержат малый параметр μ . Будем называть [10] эти уравнения возмущенными по отношению к уравнениям (2.22), (2.24), которые получаются при $\mu=0$.

Если невозмущенные и возмущенные уравнения определяются одинаковым набором дополнительных, начальных условий, то система с малым параметром называется регулярно возмущенной. Такая задача ставится уравнениями (2.21), (2.22).

Если невозмущенная система определяется меньшим числом дополнительных условий, то исходная система с малым параметром называется сингулярно возмущенной. Такая задача ставится здесь уравнениями (2.23), (2.24).

Мы убедились, что в зависимости от выбора величины T_* для приближенного исследования выделяются по отдельности быстрые и медленные составляющие движения. Образно говоря, при этом исследователь наблюдает динамическую систему то «в микроскоп», то «в телескоп». Применение разных масштабов измерения события выделяет либо мелкие, либо крупные детали явления. Можно также сказать, что применение такой процедуры позволяет формальными методами строить упрощенные математические модели явления, улавливающие нужные для исследователя особенности.

Аналогичные масштабные преобразования, производящие разделение крупных и мелких деталей, фракций явления, очевидно, можно проводить не только со временем, но и с другими переменными задачи.

Процесс приближенного исследования динамической системы следует рассматривать как единую приближенную процедуру, включающую методы теории размерности и методы малого параметра. Такая единая приближенная методика выделяется в последнее время в самостоятельный раздел прикладной математики под собственными, не вполне, правда, установившимися наименованиями (структурный анализ, фракционный анализ), [1, 7].

Глава 3

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, ПРАВЫЕ ЧАСТИ КОТОРЫХ РЕГУЛЯРНО ЗАВИСЯТ ОТ МАЛОГО ПАРАМЕТРА

§ 3.1. Теорема Пуанкаре

В § 2.4 показано, что при исследовании задачи на малых характерных временах в уравнениях движения появляется малый параметр «справа», уравнения приобретают регулярно возмущенную форму.

Запишем регулярно возмущенную систему общего вида

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= f_1(x_1, \dots, x_n, t, \mu), & x_1(0) &= x_{10}; \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & & \\ \frac{dx_n}{dt} &= f_n(x_1, \dots, x_n, t, \mu), & x_n(0) &= x_{n0}, \mu \ll 1, \end{aligned} \quad (3.1)$$

или в матричной записи

$$\frac{dx}{dt} = f(x, t, \mu), \quad x(0) = x_0, \quad \mu \ll 1. \quad (3.2)$$

Решение системы (3.2) отыскивается в виде ряда по μ при помощи теоремы Пуанкаре [2, 3, 11].

Предположим, что функции f_k ($k=1, \dots, n$) — аналитические по своим аргументам x_1, \dots, x_n, t, μ .

Рассмотрим невозмущенную, так называемую порождающую систему, которая получается из (3.2) при $\mu=0$:

$$\frac{dx^{(0)}}{dt} = f(x^{(0)}, t, 0), \quad x^{(0)}(0) = x_0. \quad (3.3)$$

Ее решение $x^{(0)} = x^{(0)}(t)$ существует и единственно, так как правые части системы (3.3) удовлетворяют требованиям теоремы существования и единственности (см. § 1.1).

Будем искать решение исходной системы (3.2) в виде

$$x = x^{(0)} + \mu x^{(1)} + \mu^2 x^{(2)} + \dots = x^{(0)} + \sum_{k=1}^{\infty} \mu^k x^{(k)}. \quad (3.4)$$

Тогда верны следующие утверждения:

1. При известном решении $x^{(0)} = x^{(0)}(t)$ системы (3.3) ряд (3.4) можно построить, производя последовательное интегрирование систем линейных дифференциальных уравнений.

2. Существует такое конечное положительное $\mu_0 \neq 0$, что при $\mu \leq \mu_0$ ряд равномерно сходится к функции $x(t, \mu)$, которая является решением системы (3.2). Равномерная сходимость осуществляется для конечного интервала времени $0 \leq t \leq t'$, на котором определено решение системы (3.3).

Процедура отыскания коэффициентов ряда (3.4) состоит в том, что ряд (3.4) подставляется в (3.2), левая и правая части полученного соотношения разлагаются в ряды по μ и коэффициенты при одинаковых степенях приравниваются.

Начальные значения для $x^{(0)}$, $x^{(1)}$, ... получаются, если, как в гл. 2, в (3.4) положить $t=0$. Аналогично (2.20) получим

$$x^{(0)}(0) = x_0, \quad x^{(1)}(0) = x^{(2)}(0) = \dots = 0. \quad (3.5)$$

Искомый ряд (3.4) удобно записать в виде

$$\begin{aligned} x_1 &= x_1^{(0)} + \Delta x_1, & \Delta x_1 &= \mu x_1^{(1)} + \mu^2 x_1^{(2)} + \dots, \\ & \dots & & \dots \\ x_n &= x_n^{(0)} + \Delta x_n, & \Delta x_n &= \mu x_n^{(1)} + \mu^2 x_n^{(2)} + \dots \end{aligned} \quad (3.6)$$

Подставив (3.6) в (3.1) и разлагая по μ , Δx_1 , ..., Δx_n , получим

$$\begin{aligned} \frac{dx_1^{(0)}}{dt} + \frac{d\Delta x_1}{dt} &= f_1(x_1^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}, t, 0) + \\ &+ \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \Delta x_1 + \dots + \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \Delta x_n + \\ &+ \frac{\partial f_1}{\partial \mu} \mu + \frac{\partial^2 f_1}{\partial x_1^2} \Delta x_1^2 + \frac{\partial^2 f_1^2}{\partial x_1 \partial x_2} \Delta x_1 \Delta x_2 + \dots; \end{aligned} \quad (3.7)$$

Здесь значения частных производных $\partial f_1 / \partial x_1$, ..., $\partial f_1 / \partial \mu$, $\partial^2 f_1 / \partial x_1^2$, ... вычисляются в точке $x_1 = x_1^{(0)}$, ..., $x_n = x_n^{(0)}$, $\mu = 0$. Подставим в (3.7) выражения Δx_1 , ..., Δx_n из (3.6) и прирав-

няем слагаемые одинакового порядка по μ в левой и правой частях полученного соотношения.

Слагаемые при нулевой степени μ дают

$$\frac{dx_1^{(0)}}{dt} = f_1(x_1^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}, t, 0), \quad x_1^{(0)}(0) = x_{10}.$$

Эти уравнения совпадают с порождающей системой (3.3).

Слагаемые при первой степени μ

$$\frac{dx_1^{(1)}}{dt} = \frac{\partial f_1}{\partial x_1} x_1^{(1)} + \dots + \frac{\partial f_1}{\partial x_n} x_n^{(1)} + F_1^{(0)}, \quad x_1^{(1)}(0) = 0, \quad (3.8)$$

Здесь $F_1^{(0)} = \frac{\partial f_1}{\partial \mu}$, ... зависят от $x_1^{(0)}$, ..., $x_n^{(0)}$ — решения предыдущего приближения. Запишем так же, как (1.9), систему (3.8) в матричной форме

$$\frac{dx^{(1)}}{dt} = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right) x^{(1)} + F^{(0)}, \quad x^{(1)}(0) = 0. \quad (3.9)$$

Приравнявая коэффициенты при μ^2 , получим

$$\frac{dx_1^{(2)}}{dt} = \frac{\partial f_1}{\partial x_1} x_1^{(2)} + \dots + \frac{\partial f_1}{\partial x_n} x_n^{(2)} + F_1^{(1)}, \quad x_1^{(2)}(0) = 0. \quad (3.10)$$

Здесь

$$F_1^{(1)} = \frac{\partial^2 f_1}{\partial \mu^2} + \frac{\partial^2 f_1}{\partial x_1^2} (x_1^{(1)})^2 + \frac{\partial^2 f_1}{\partial x_1 \partial x_2} x_1^{(1)} x_2^{(1)} + \dots, \dots$$

зависят от $x_1^{(0)}$, ..., $x_n^{(0)}$; $x_1^{(1)}$, ..., $x_n^{(1)}$ — предыдущих приближений. Запишем (3.10) в матричном виде

$$\frac{dx^{(2)}}{dt} = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right) x^{(2)} + F^{(1)}. \quad (3.11)$$

Аналогично записываются уравнения произвольного k -го приближения

$$\frac{dx^{(k)}}{dt} = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right) x^{(k)} + F^{(k-1)}. \quad (3.12)$$

Однородные части линейных уравнений (3.9), (3.11), (3.12) имеют совершенно одинаковую структуру, слагаемые $F^{(0)}$, $F^{(1)}$, $F^{(k-1)}$ зависят от предыдущих приближений, а следовательно, могут считаться известными функциями времени.

Формулировка теоремы Пуанкаре содержит существенную оговорку о том, что решение (3.4) строится на конечном интервале времени. Поясним это обстоятельство примером.

Рассмотрим уравнение гармонического осциллятора с малым трением

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \mu \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0, \quad \mu \ll 1. \quad (3.13)$$

Решение может быть получено разложением типа (3.4) и является поэтому аналитической функцией параметра μ . Рассмотрим решение вблизи $\mu=0$. На любом конечном интервале времени решение системы (3.13) сколь угодно близко при достаточно малой величине μ к решению для $\mu=0$. При $t \rightarrow \infty$ решения систем для $\mu=0$ и $\mu \neq 0$ качественно различаются.

§ 3.2. Примеры применения теоремы Пуанкаре

Рассмотрим задачу о вертикальном падении шара в вязкой жидкости. Зададим ось x вертикально вниз и запишем уравнения движения

$$m \frac{dV}{dT} = mg - kV, \quad \frac{dX}{dT} = V, \quad (3.14)$$

где m — масса шара; k — коэффициент вязкого трения; X — координата центра шара.

Проведем нормализацию:

$$t = \frac{T}{T_*}, \quad x = \frac{X}{X_*}, \quad v = \frac{V}{V_*}.$$

Получим

$$\frac{T_1}{T_*} \frac{dv}{dt} = 1 - \frac{T_1}{T_2} v, \quad \frac{T_3}{T_*} \frac{dx}{dt} = v. \quad (3.15)$$

Здесь $T_1 = V_*/g$ — характерное время изменения скорости за счет силы тяжести; $T_2 = m/k$ — характерное время изменения скорости за счет силы трения; $T_3 = X_*/V_*$ — характерное время падения.

Будем рассматривать случай малого трения, когда процесс изменения скорости определяется в основном силой тяжести. Изучим быстрые составляющие движения, проис-

ходящие во временном масштабе T_1 . Для этого выберем $T_* = T_1$. Первое уравнение (3.15) примет вид

$$\frac{dv}{dt} = 1 - \mu v, \quad \mu = \frac{T_1}{T_2} \ll 1. \quad (3.16)$$

Уравнение (3.16) регулярно зависит от малого параметра μ . Найдем коэффициенты ряда

$$v = v^{(0)} + \mu v^{(1)} + \mu^2 v^{(2)} + \dots \quad (3.17)$$

Подставим (3.17) в (3.16). Приравняв члены нулевого порядка, получим

$$\frac{dv^{(0)}}{dt} = 1, \quad v^{(0)}(0) = v_0.$$

Отсюда $v^{(0)} = v_0 + t$. Члены первого порядка по μ дают

$$\frac{dv^{(1)}}{dt} = -v^{(0)}, \quad v^{(1)}(0) = 0.$$

Тогда

$$v^{(1)} = -v_0 t - \frac{t^2}{2}.$$

Очевидно,

$$v^{(k)} = (-1)^k \left[v_0 \frac{t^k}{k!} + \frac{t^{k+1}}{(k+1)!} \right].$$

Запишем полученный ряд

$$v = v_0 \left(1 - \mu t + \frac{\mu^2 t^2}{2!} - \dots \right) + \left[-\frac{1}{\mu} + \left(t - \frac{\mu t^2}{2!} + \frac{\mu^2 t^3}{3!} - \dots \right) \frac{\mu}{\mu} + \frac{1}{\mu} \right].$$

Ряд сходится к функции

$$v = v_0 e^{-\mu t} + [1 - e^{-\mu t}] \frac{1}{\mu},$$

которая является решением исходного уравнения (3.16).

Чтобы получить это решение, необходимо построить весь ряд. Если оборвать построение одним или двумя членами ряда, то в качестве приближенного решения надо взять $v_{(0)} = v_0 + t$ и соответственно $v_{(1)} = v_0 + t - \mu \left(v_0 t + \frac{t^2}{2} \right)$. На рис. 1 представлены графики функций $v(t)$, $v_{(0)}(t)$, $v_{(1)}(t)$. Из ри-

сунка видно, что приближенное решение, состоящее из конечного числа членов ряда, близко к точному лишь при $\mu t \ll 1$, т. е. при $t \ll 1/\mu$. Для большого времени $t \sim 1/\mu$ будет $\mu t \sim 1$ и расхождение между точным и приближенным решениями станет большой величиной. Таким образом, при построении конечного числа членов ряда приходится, как указывалось в § 1.2, пользоваться асимптотическими свойствами ряда.

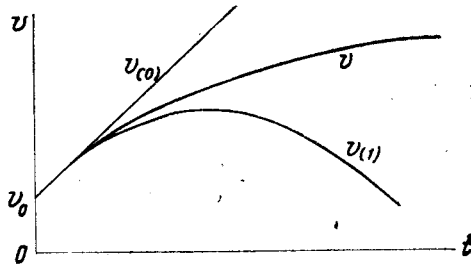


Рис. 1

В данном примере удастся построить весь ряд, чего не бывает практически никогда. Рассмотрим более сложный пример — малые колебания физического маятника.

Уравнение маятника

$$\frac{d^2\Phi}{dT^2} + \omega_0^2 \sin \Phi = 0, \quad \Phi(0) = \Phi_0, \quad \frac{d\Phi}{dT}(0) = 0, \quad \omega_0^2 = \frac{mgl}{I}, \quad (3.18)$$

где Φ — угол отклонения от вертикали; m, I, l — соответственно масса, момент инерции, расстояние от точки подвеса до центра масс маятника. Начальные условия по скорости для простоты взяты нулевыми.

Приведем уравнение (3.18) к форме Коши

$$\frac{d\Omega}{dT} = -\omega_0^2 \sin \Phi, \quad \frac{d\Phi}{dT} = \Omega. \quad (3.19)$$

Проведем нормализацию (3.19):

$$\varphi = \frac{\Phi}{\Phi_*}, \quad \omega = \frac{\Omega}{\Omega_*}, \quad t = \frac{T}{T_*}. \quad (3.20)$$

Будем изучать класс малых колебаний маятника. Тогда $\Phi_* = \Phi_0 = \epsilon \ll 1$. Оценку Ω_*, T_* получим из упрощенной системы, которая получится, если в (3.19) заменить $\sin \Phi$ на Φ . Движение упрощенной системы — гармоническое, с периодом ко-

лебаний $T_0 = 2\pi/\omega_0$. За характерное время процесса T_* , в течение которого угол Φ изменяется на характерную величину, примем $T_* = 1/\omega_0 \approx T_0/6$. За характерную скорость примем $\Omega_* = \Phi_*/T_* = \varepsilon\omega_0$, скорость изменения угла на характерную величину — за характерное время. Аналогичную оценку можно получить непосредственно из решения упрощенной системы по скорости

$$\Omega = d\Phi/dT = -\Phi_*\omega_0 \sin \omega_0 T = -\varepsilon\omega_0 \sin \omega_0 T.$$

Оценивая характерную скорость амплитудой колебаний по скорости, имеем $\Omega_* = \varepsilon\omega_0$.

Подставив (3.20) в (3.19), получим для выбранного класса движения

$$\frac{d\omega}{dt} = -\frac{1}{\varepsilon} \sin \varepsilon\varphi, \quad \frac{d\varphi}{dt} = \omega; \quad \varphi(0) = 1, \quad \omega(0) = 0.$$

Разлагая функцию $\sin \varepsilon\varphi$ в ряд по ε , окончательно получим

$$\frac{d\omega}{dt} = -\varphi + \mu \frac{\varphi^3}{3!} - \mu^2 \frac{\varphi^5}{5!} + \dots; \quad \omega(0) = 0; \quad (3.21)$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = \omega; \quad \varphi(0) = 1, \quad \mu = \varepsilon^2 \ll 1.$$

Решение системы (3.21) отыскивается в виде

$$\omega = \omega^{(0)} + \mu\omega^{(1)} + \dots, \quad \varphi = \varphi^{(0)} + \mu\varphi^{(1)} + \dots \quad (3.22)$$

Подставив (3.22) в (3.21), запишем уравнения для членов нулевого по μ порядка

$$\frac{d\omega^{(0)}}{dt} = -\varphi^{(0)}, \quad \frac{d\varphi^{(0)}}{dt} = \omega^{(0)}; \quad \omega^{(0)}(0) = 0, \quad \varphi^{(0)}(0) = 1,$$

откуда $\varphi^{(0)} = \cos t$, $\omega^{(0)} = -\sin t$.

Уравнения для членов первого порядка имеет вид

$$\frac{d\omega^{(1)}}{dt} = -\varphi^{(1)} + \frac{(\varphi^{(0)})^3}{3!}, \quad \frac{d\varphi^{(1)}}{dt} = \omega^{(1)}; \quad \omega^{(1)}(0) = 0, \quad \varphi^{(1)}(0) = 0. \quad (3.23)$$

Исключив в (3.23) переменную $\omega^{(1)}$ и подставив явное выражение $\varphi^{(0)}$, получим

$$\frac{d^2\varphi^{(1)}}{dt^2} + \varphi^{(1)} = \frac{1}{6} \left(\frac{3}{4} \cos t + \frac{1}{4} \cos 3t \right). \quad (3.24)$$

Уравнение (3.24) — линейное, неоднородное. По принципу суперпозиции находим решение от каждого слагаемого в пра-

вой части по отдельности. Частота первого слагаемого совпадает с собственной частотой системы (3.24). Следовательно, частное решение по $\varphi^{(1)}$, соответствующее этому слагаемому, будет иметь резонансный, растущий по времени член $t \sin t$. В приближенном решении $\varphi_{(1)} = \varphi^{(0)} + \mu \varphi^{(1)}$ появится член $\mu t \sin t$. Слагаемые такого вида в теории приближенных вычислений называются секулярными слагаемыми.

Таким образом, приближенное решение φ_1 , даваемое двумя членами ряда (3.22), за счет секулярных членов качественно отличается от точного решения исходной системы (3.19). Колебания маятника без трения, как известно, имеют периодический характер и никаких растущих со временем составляющих не содержат.

Это противоречие разрешается так же, как и в первом примере: приближенным выражением $\varphi_{(1)} = \varphi^{(0)} + \mu \varphi^{(1)}$ можно пользоваться лишь как асимптотическим приближением решения при $\mu \rightarrow 0$ и конечных значениях переменной $t \sim 1$.

Приведенные примеры достаточно наглядно демонстрируют особенности приближенной методики, основанной на теореме Пуанкаре:

1. Вычислительная схема метода проста и наглядна.
 2. Приближения строятся при помощи исходной системы уравнений. Ее не надо преобразовывать к какому-либо специальному виду.
 3. В условиях, когда удастся построить конечное число членов разложения, точность приближения гарантируется лишь в асимптотическом смысле: при $\mu \rightarrow 0$ и конечном времени $t \sim 1$.
-

Глава 4

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ С МАЛЫМ ПАРАМЕТРОМ ПРИ ПРОИЗВОДНЫХ

§ 4.1. Теорема Тихонова

а) Поясняющий пример

В § 4.2 рассматриваются динамические системы, у которых постоянные времени сильно отличаются по величинам. Было показано, что уравнения динамической системы принимают форму (2.23), если при нормализации в качестве характерного времени выбрать большую постоянную времени системы. Уравнения (2.23) при части производных содержат малый множитель μ , равный отношению меньшей и большей постоянных времени.

Прежде чем излагать общие результаты теории дифференциальных уравнений такого вида, поясним специфику задачи на примере.

Рассмотрим систему

$$T_1 \frac{dz}{dT} = -z - ay, \quad z(0) = z_0, \quad T_1 \ll T_2; \quad (4.1)$$

$$T_2 \frac{dy}{dT} = -y - bz, \quad y(0) = y_0, \quad a, b = \text{const.}$$

Взяв, как в (2.23), за характерное время большую постоянную времени $T_* = T_2$, получим

$$\mu \frac{dz}{dt} = -z - ay, \quad z(0) = z_0; \quad (4.2)$$

$$\frac{dy}{dt} = -y - bz, \quad y(0) = y_0, \quad \mu = \frac{T_1}{T_2} \ll 1.$$

Скорость переменной y является на порядок по μ меньшей величиной по сравнению со скоростью переменной z . Поэтому далее y будем называть медленной, а z — быстрой переменными.

Построим систему уравнений нулевого по μ приближения \bar{y} для медленной переменной y . Эта так называемая вырожденная система получится, если в (4.2) положить $\mu=0$ и опустить, пока без обсуждения, «лишние» начальные условия по быстрой переменной z :

$$0 = -\bar{z} - a\bar{y}; \quad (4.3)$$

$$\frac{d\bar{y}}{dt} = -\bar{y} - b\bar{z}, \quad \bar{y}(0) = y_0.$$

В силу (4.3) движение системы развивается в плоскости $-z - ay = 0$. Чтобы составить уравнение по переменной \bar{y} , надо найти корень по переменной \bar{z} первого конечного уравнения (4.3)

$$\bar{z} = -a\bar{y} \quad (4.4)$$

и исключить при помощи (4.4) переменную \bar{z} из второго уравнения

$$\frac{d\bar{y}}{dt} = -\bar{y}(1 - ab), \quad \bar{y}(0) = y_0. \quad (4.5)$$

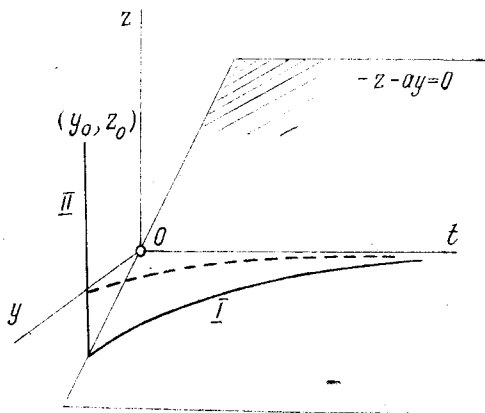


Рис. 2

На рис. 2 кривой I представлено развитие процесса по системе (4.3) в пространстве переменных t, z, y , штриховой линией — проекция этой кривой на плоскость t, y , представляющая решение уравнения (4.5).

Изучим поведение системы по быстрым движениям вблизи начальной точки. Для этого рассмотрим, как в гл. 2, 3, движение системы в быстром времени, взяв в (4.1) за характерное время $T_* = T_1$. Здесь удобно обозначить через $\tau = T/T_1$ быстрое безразмерное время, чтобы отличать его от медленного безразмерного времени $t = T/T_2$, в котором записана система (4.2). Величины t и τ связаны соотношением $t = \mu\tau$, и перейти в уравнениях (4.2) к быстрому времени можно этой заменой.

Получим

$$\begin{aligned} \frac{dz}{d\tau} &= -z - ay, & z(0) &= z_0; \\ \frac{dy}{d\tau} &= \mu(-y - bz), & y(0) &= y_0. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Так же, как при построении вырожденной системы, оставим в (4.6) только члены нулевого порядка малости по μ , положив $\mu = 0$:

$$\begin{aligned} \frac{dz}{d\tau} &= -z - ay, & z(0) &= z_0; \\ \frac{dy}{d\tau} &= 0, & y(0) &= y_0. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Отсюда

$$\frac{dz}{d\tau} = -z - ay_0, \quad z(0) = z_0. \quad (4.8)$$

Из сравнения (4.3) и (4.8) видно, что положение равновесия уравнения (4.8) лежит на плоскости $-z - ay = 0$, в которой развертывается решение вырожденной системы (4.3).

Условие, при котором решение системы (4.8) стремится к решению вырожденной, есть условие устойчивости положения равновесия системы (4.8).

Найдем из (4.8) время Δt , в течение которого ликвидируется рассогласование между начальной точкой и решением вырожденной системы. Этот временной интервал называется пограничным слоем и оценивается временем, за которое рассогласование становится величиной порядка μ . (Величины как раз такого порядка отброшены в (4.3).)

Решение уравнения (4.8) имеет вид $z + ay_0 = (z_0 + + ay_0) \exp(-\tau)$. Рассогласование $z + ay_0$ от положения равновесия становится величиной порядка μ за время Δt , оцениваемое

мое соотношением $\exp(-\Delta\tau) \sim \mu$. Отсюда $\Delta\tau \sim -\ln \mu$. Величина соответствующего интервала в медленном времени $\Delta t = \mu \Delta\tau \sim -\mu \ln \mu$. При $\mu \rightarrow 0$ имеем $\Delta t \rightarrow 0$, следовательно, погранслои при $\mu \rightarrow 0$ стягиваются в точку. Траектория, изображающая на рис. 2 переход из начальной точки на вырожденную траекторию J , будет вертикальной линией II .

Таким образом, мы получили приближенное решение исходной системы (4.6), склеив решения систем нулевого приближения: системы (4.3) для медленных составляющих движения и системы (4.8) для быстрых.

Сформулируем теперь общую теорему.

б) Теорема Тихонова о вырождении системы уравнений с малым параметром при производных

Рассмотрим систему общего вида

$$\mu \frac{dz}{dt} = F(z, y, t, \mu), \quad z(0) = z_0; \quad (4.9)$$

$$\frac{dy}{dt} = f(z, y, t, \mu), \quad y(0) = y_0.$$

Здесь z , F и y , f — соответственно n - и m -мерные векторы; z_0 , y_0 — векторы начальных условий.

Положив $\mu=0$ и опустив z_0 , получим из (4.9) вырожденную систему уравнений

$$\begin{aligned} 0 &= F(\bar{z}, \bar{y}, t, 0); \\ \frac{d\bar{y}}{dt} &= f(\bar{z}, \bar{y}, t, 0), \quad \bar{y}(0) = y_0. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Ставится вопрос о близости решений систем (4.9) и (4.10).

Сформулируем предварительно несколько определений.

Определение 1. Корень $z = \varphi(y, t)$ системы уравнений

$$F(z, y, t, 0) = 0 \quad (4.11)$$

называется изолированным в некоторой ограниченной области изменения переменных y, t , если для каждого фиксированного значения y, t в произвольно малой окрестности корня $z = \varphi(y, t)$ не существует других корней уравнения (4.11). Для примера из п.а корень (4.4) является изолированным.

Введем систему уравнений нулевого приближения для быстрых движений; аналог в п. а — уравнение (4.8). Эта система называется присоединенной или системой погранич-

ного слоя [12, 10]. Она получается, если в (4.9) перейти к быстрому времени $\tau = t/\mu$ и положить затем $\mu = 0$:

$$\frac{dz}{d\tau} = F(z, y, t, 0), \quad (4.12)$$

где, как в § 4.1, *a*, медленные y, t считаются параметрами. Переход к τ в правой части не производится, так как для любого конечного t при $\mu \rightarrow 0$ имеем $\tau \rightarrow \infty$, а $\mu\tau = t$.

Очевидно, корень $z = \varphi(y, t)$ уравнения (4.11) определяет точку покоя системы (4.12).

Определение 2. Областью влияния точки покоя $z = \varphi(y, t)$ называется множество точек z^+ , таких, что решения присоединенной системы, имеющие в качестве начальных точек z^+ , при $\tau \rightarrow \infty$ будут стремиться к $\varphi(y, t)$.

Теорема Тихонова

Пусть:

1. Функции $F(z, y, t, \mu)$ и $f(z, y, t, \mu)$ аналитичны по z, y, t, μ в некоторой области пространства переменных.

2. Уравнение (4.11) имеет корень $z = \varphi(y, t)$ в некоторой ограниченной области D изменения переменных y, t и этот корень — изолированный.

3. Функция $f(\varphi(\bar{y}, t), \bar{y}, t, 0)$ аналитична по \bar{y}, t .

4. Начальные условия z_0 лежат в области влияния корня $z = \varphi(y, t)$ системы (4.12).

5. Точка покоя $z = \varphi(y, t)$ системы (4.12) является асимптотически устойчивой по Ляпунову для всех y, t , для которых определен корень уравнения (4.11).

Тогда найдется такое $\mu_0 > 0$, что при $0 \leq \mu \leq \mu_0$ решение системы (4.9) существует и единственно и оно удовлетворяет предельным равенствам:

$$\lim_{\mu \rightarrow 0} y(t, \mu) = \bar{y}(t) \quad \text{при } 0 \leq t \leq t_1;$$

$$\lim_{\mu \rightarrow 0} z(t, \mu) = \bar{z}(t) = \varphi(\bar{y}(t), t) \quad \text{при } 0 < t \leq t_1.$$

Здесь $0 \leq t \leq t_1$ — ограниченный, лежащий внутри области D интервал времени, на котором существует единственное решение системы (4.3).

Обсудим смысл условий 1—5 теоремы Тихонова. Условие 1 гарантирует существование и единственность решения исходной системы (4.6) при любом конечном μ . (При $\mu \rightarrow 0$ вопрос остается открытым из-за появления особенности $1/\mu$ в

уравнении $dz/dt = F/\mu$. Теорема утверждает, что решение (4.6) существует и при $\mu \rightarrow 0$.)

Условие 2 гарантирует возможность исключения переменной z в вырожденной системе (4.10), следовательно, возможность записи (4.10) только в медленных переменных \bar{y} :

$$\frac{d\bar{y}}{dt} = f(\Phi(\bar{y}, t), \bar{y}, t, 0), \quad y(0) = y_0. \quad (4.13)$$

(Аналог этого уравнения в § 4.1,а — уравнение (4.5).)

Условие 3 гарантирует существование и единственность решения вырожденной системы (4.13). При выполнении условия 4 траектория исходных уравнений (4.9) в пространстве z, y, t за время пограничного слоя выходит на поверхность $F(z, y, t, 0) = 0$, на которой развивается решение вырожденной системы. (Аналогом этого движения в § 4.1,а является движение по прямой II рис. 2.) При выполнении условия 5 траектория исходной системы удерживается на поверхности $F(z, y, t, 0) = 0$, в то время как на ней развивается движение в силу вырожденной системы. Очевидно, что условие 5 гарантирует существование хотя бы малой области влияния по условию 4. Если условие 5 не выполняется, то траектория исходной системы уходит от поверхности $F(z, y, t, 0) = 0$ и говорить о близости решений исходной и вырожденной систем уже не приходится. Ситуации, возникающие при выполнении и нарушении условий 4, 5, иллюстрирует рис. 3.

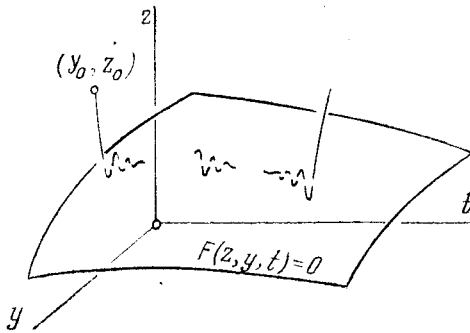


Рис. 3

Таким образом, наиболее существенным условием теоремы Тихонова является требование «притяжения» поверхностью $F(z, y, t, 0) = 0$ траекторий исходной системы. Для его

проверки естественно воспользоваться теоремой об устойчивости по первому приближению для присоединенной системы (4.12). Сделаем в ней замену $z = \varphi(y, t) + \Delta z$, где Δz — малое отклонение от точки покоя. Линейное по Δz уравнение будет

$$\frac{d\Delta z}{d\tau} = \left(\frac{\partial F_i}{\partial z_j} \right) \Delta z, \quad (4.14)$$

где Δz — матрица-столбец размерностью n ; $(\partial F_i / \partial z_j)$ — квадратная матрица размерностью $n \times n$. Элементы i -й строки матрицы образованы частными производными i -й составляющей вектора F по всем $j=1, \dots, n$ переменным z_j . Значения частных производных берутся в точке $z = \varphi(y, t)$, т. е. элементы матрицы зависят от y, t , которые считаются здесь постоянными параметрами. Поэтому (4.14) — линейная система с постоянными коэффициентами.

З а м е ч а н и е. Теорема Тихонова сформулирована для уравнений вида (4.9), правые части которых явно зависят от медленного времени t . При этом аргумент $t = T/T_2$ изменяется на величину порядка единицы, когда исходное размерное время T изменяется на величину порядка большей постоянной времени T_2 . Пусть правые части уравнений (4.9) зависят явно от быстрого времени. При этом аргумент T/T_1 изменяется на величину порядка единицы при изменении T на величину порядка малой постоянной времени T_1 . Тогда, например, первое уравнение (4.9) при записи во времени T будет иметь вид

$$T_1 \frac{dz}{dt} = F\left(z, y, \frac{T}{T_1}, \mu\right).$$

При переходе $t = T/T_2$ получим

$$\frac{T_1}{T_2} \frac{dz}{dt} = F\left(z, y, \frac{T_2}{T_1} t, \mu\right) \text{ или } \mu \frac{dz}{dt} = F\left(z, y, \frac{t}{\mu}, \mu\right).$$

В последнем уравнении функция $F(z, y, t/\mu, \mu)$ не удовлетворяет требованию теоремы Тихонова о непрерывности по аргументу μ .

Объединив это замечание с условиями 4, 5 теоремы, можно заключить, что теорему Тихонова можно использовать для исследования динамических систем, у которых быстрые собственные составляющие движения имеют затухающий характер, а воздействия на систему, зависящие явно от времени, — медленные.

Рассмотрим в качестве примера физический маятник, движущийся в вязкой среде. Уравнение движения будет

$$I \frac{d^2\Phi}{dT^2} + N \frac{d\Phi}{dT} + mgl \sin \Phi = 0; \quad \Phi(0) = \Phi_0, \quad \frac{d\Phi}{dT}(0) = \Omega_0, \quad (4.15)$$

где дополнительно к обозначениям § 3.2 N — коэффициент вязкого трения. Поделим уравнение (4.15) на множитель N и приведем к форме Коши:

$$T_1 \frac{d\Phi}{dT} = -\frac{1}{T_2} \sin \Phi - \Omega, \quad \Omega(0) = \Omega_0; \\ \frac{d\Omega}{dT} = \Omega; \quad \Phi(0) = \Phi_0. \quad (4.16)$$

Здесь $T_2 = N/mgl$, $T_1 = I/N$ — множители размерности времени. Приведем нормализацию уравнений:

$$t = \frac{T}{T_*}, \quad \varphi = \frac{\Phi}{\Phi_*}, \quad \omega = \frac{\Omega}{\Omega_*}.$$

Рассмотрим класс движения на большие углы ($\Phi_* = 1$) в сильно вязкой среде ($T_2 \gg T_1$). Будем считать $\Omega_* = \Phi_*/T_2$. Выделяя медленные составляющие движения, возьмем $T_* = T_2$. Тогда (4.16) примет вид

$$\mu \frac{d\omega}{dt} = -\sin \varphi - \omega, \quad \omega(0) = T_2 \Omega_0, \quad \mu = \frac{T_1}{T_2} \ll 1; \\ \frac{d\varphi}{dt} = \omega, \quad \varphi(0) = \Phi_0. \quad (4.17)$$

Построим вырожденную для (4.17) систему

$$0 = -\sin \bar{\varphi} - \bar{\omega}, \quad \frac{d\bar{\varphi}}{dt} = \bar{\omega}; \quad \bar{\varphi}(0) = \varphi(0). \quad (4.18)$$

Система (4.18) приводится к уравнению

$$\frac{d\bar{\varphi}}{dt} = -\sin \bar{\varphi}, \quad \bar{\varphi}(0) = \varphi(0), \quad (4.19)$$

которое легко интегрируется:

$$\bar{\varphi} = 2 \operatorname{arctg} \left(e^{-t} \cdot \operatorname{tg} \frac{\varphi(0)}{2} \right). \quad (4.20)$$

Заметим, что исходная система (4.17) в элементарных функциях не интегрируется.

Проверим условия теоремы Тихонова.

Правые части уравнений (4.17), (4.19) непрерывны вместе со своими производными по φ , ω , что обеспечивает выполнение условий 1, 3. Условие 2 выполнено, так как уравнение $-\sin \varphi - \omega = 0$ имеет изолированный корень по ω .

Построим присоединенную для (4.17) систему

$$\frac{d\omega}{d\tau} = -\omega - \sin \varphi; \quad \varphi = \text{const.} \quad (4.21)$$

Уравнение (4.21) — линейное по ω , с устойчивой точкой покоя. При этом условия 4, 5 также выполняются, область влияния точки покоя — неограниченная.

Таким образом, движение маятника при $\mu \ll 1$ развивается по закону, близкому к (4.20). Степень близости точного и приближенного решений может быть оценена, если воспользоваться результатами [10]. В случае, когда точка покоя присоединенной системы устойчива, как в данном примере, по первому приближению, погрешность приближенного решения будет величиной порядка μ .

§ 4.2. Пример применения теоремы Тихонова — релаксационные колебания лампового генератора

Рассмотрим схему лампового генератора, представленную на рис. 4. Обозначим через I_R ток, текущий через сопротивление. Уравнение для I_R (см., например, [2, 11]) имеет вид

$$L \frac{d^2 I_R}{dT^2} + R \frac{dI_R}{dT} + \frac{1}{C} I_R = \frac{1}{C} f(u), \quad u = M \frac{dI_R}{dT}, \quad (4.22)$$

где R , C , L — сопротивление, емкость, индуктивность контура; M — коэффициент взаимной индукции; u — напряжение на сетке лампы; $f(u)$ — характеристика лампы, изображенная на рис. 5. Сделаем в (4.22) замену $I = I_R - f(0)$ и исключим переменную u . Тогда

$$LC \frac{d^2 I}{dT^2} = G \left(\frac{dI}{dT} \right) - I. \quad (4.23)$$

Здесь

$$G \left(\frac{dI}{dT} \right) = -RC \frac{dI}{dT} + f \left(M \frac{dI}{dT} \right) - f(0)$$

— функция, определяющая «трение» системы. Ее график изображен на рис. 6. Уравнение (4.23) имеет положением равно-

веса $l=0$, $dl/dT=0$. Устойчивость этого положения равновесия определяется значением производной функции $G(dl/dT)$ в нуле: $G'(0) = -RC + f'(0)M$. Здесь $f'(0)$ — крутизна ламповой характеристики. При $-RC + f'(0)M < 0$ колебания лампы

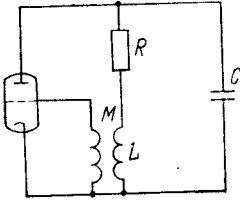


Рис. 4

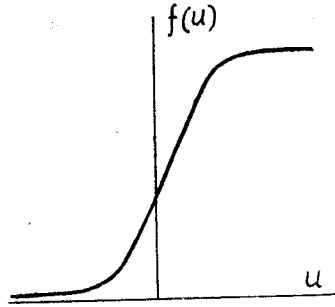


Рис. 5

вого генератора затухают, при $-RC + f'(0)M > 0$ положение равновесия неустойчиво. На рис. 6 представлен второй случай.

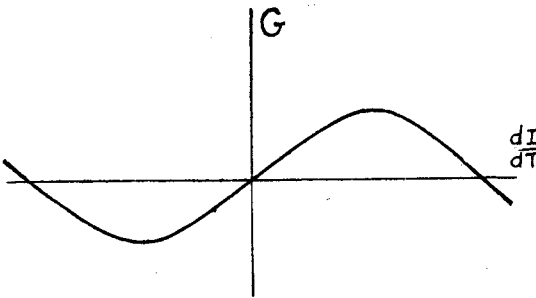


Рис. 6

Для дальнейшего удобно аппроксимировать функцию $G(dl/dT)$ уравнением кубической параболы

$$G\left(\frac{dl}{dT}\right) = [-RC + f'(0)M] \frac{dl}{dT} - A\left(\frac{dl}{dT}\right)^3.$$

Тогда (4.23) примет вид

$$LC \frac{d^2 l}{dT^2} = (-RC + f'(0)M) \frac{dl}{dT} - A\left(\frac{dl}{dT}\right)^3 - I. \quad (4.24)$$

Обозначим $LC = T_1^2$, $-RC + f'(0)M = T_2$ и приведем (4.24) к форме Коши

$$T_1^2 \frac{dV}{dT} = T_2 V - AV^3 - I, \quad \frac{dI}{dT} = V. \quad (4.25)$$

Проведем в (4.25) нормализацию:

$$i = \frac{I}{I_*}, \quad v = \frac{V}{V_*}, \quad t = \frac{T}{T_*};$$

$$\frac{T_1^2 V_*}{T_*} \cdot \frac{dv}{dt} = T_2 V_* v - A V_*^3 v^3 - I_* i;$$

$$\frac{I_*}{T_*} \cdot \frac{di}{dt} = V_* v. \quad (4.26)$$

Свяжем характерные значения соотношением $V_* = I_*/T_*$. Уравнения (4.26) перейдут в следующие:

$$\frac{T_1^2}{T_*^2} \cdot \frac{dv}{dt} = \frac{T_2}{T_*} v - A \frac{I_*^2}{T_*^3} v^3 - i, \quad \frac{di}{dt} = v.$$

Будем далее рассматривать систему, параметры которой удовлетворяют условию $T_2 \gg T_1$. Зададим две независимые единицы размерности T_* , I_* следующими соотношениями:

$$T_* = T_2, \quad \frac{AI_*^2}{T_*^3} = 1. \quad (4.27)$$

Уравнения движения запишутся в следующей окончательной форме:

$$\mu \frac{dv}{dt} = v - v^3 - i, \quad \mu = \frac{T_1^2}{T_*^2} \ll 1; \quad (4.28)$$

$$\frac{di}{dt} = v.$$

Построим вырожденную для (4.28) систему уравнений

$$0 = v - v^3 - i, \quad \frac{di}{dt} = v. \quad (4.29)$$

Из (4.29) видно, что решение вырожденной системы развивается в пространстве переменных i, v по кривой $i = v - v^3$ (аналог поверхности $F(z, y, t) = 0$ в § 4.1).

Из (4.29) следует, что знак di/dt совпадает со знаком v . Обозначим на рис. 7 стрелками направление движения по ветвям кривой $i(v)$. Видно, что система непременно приходит в одно из положений, которым соответствуют минимум S_1 и максимум S_2 на кривой.

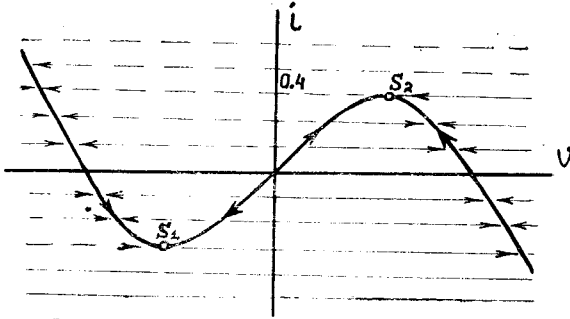


Рис. 7

Вырожденная система не может ответить на вопрос, как будет процесс развиваться дальше. Остаться в S_1 , S_2 система не может, так как в этих точках $di/dt \neq 0$.

Рассмотрим поведение системы по быстрым движениям. Запишем присоединенную систему

$$\frac{dv}{d\tau} = v - v^3 - i, \quad i = \text{const.} \quad (4.30)$$

Точки покоя системы (4.30) определяются корнями уравнения

$$v - v^3 - i = 0. \quad (4.31)$$

В зависимости от величины i уравнение (4.31) имеет либо один, либо три корня по v . На рис. 7 они определяются пересечениями графика с прямой $i = \text{const}$. Все корни — изолированные, кроме точек S_1 и S_2 , где два корня сливаются.

Исследуем устойчивость изолированных точек покоя v^0 . Сделаем в (4.30) замену $v = v^0 + \Delta v$:

$$\frac{d(v^0 + \Delta v)}{d\tau} = g(v^0 + \Delta v) - i, \quad \text{где } g(v) = v - v^3.$$

Уравнение первого приближения

$$\frac{d\Delta v}{d\tau} = g(v^0) + \frac{dg}{dv}(v^0) \cdot \Delta v - i.$$

Поскольку $g(v^0) - i = 0$, то

$$\frac{d\Delta v}{d\tau} = \frac{dg}{dv}(v^0) \cdot \Delta v. \quad (4.32)$$

Из (4.32) следует, что при $dg/dv > 0$, т. е. для участка кривой рис. 7, лежащего между точками S_1 и S_2 , точки покоя неустойчивы. При $dg/dv < 0$, т. е. для участков слева от S_1 и справа от S_2 , точки покоя устойчивы.

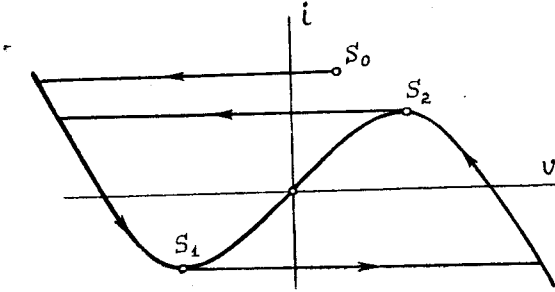


Рис. 8

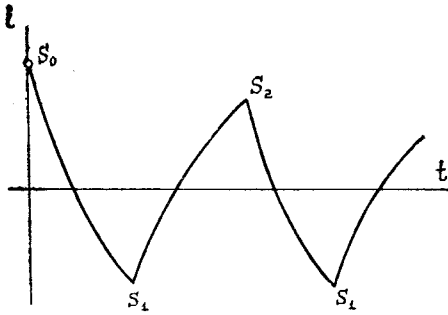


Рис. 9

Найдем область влияния точек покоя. Для этого исследуем знак $dv/d\tau$ при пересечении плоскости переменных i, v по прямой $i = \text{const}$. Знак $dv/d\tau$ определяется из (4.30) знаком выражения $v - v^3 - i$. При $v \rightarrow +\infty$ имеем $v - v^3 - i < 0$, при $v \rightarrow -\infty$ имеем $v - v^3 - i > 0$, при каждом пересечении кривой $v - v^3 - i = 0$ знак исследуемого выражения меняется. Этот анализ позволяет построить области влияния кривой $v - v^3 -$

— $i=0$, как указано на рис. 7. Сплошными линиями здесь заштрихована область влияния правой ветви кривой, штриховыми — левой.

Построим теперь фазовую траекторию движения системы на плоскости переменных i, v из произвольной начальной точки S_0 (см. рис. 8). На рис. 8 точка S_0 задана в области влияния левой ветви кривой. Из S_0 система «быстро» со скоростью $dv/dt \sim 1/\mu$ приходит на левую ветвь. По ней система «медленно» идет до точки S_1 , из которой совершает «быстрый» скачок на правую ветвь. По ней система движется до S_2 , в которой происходит срыв на левую ветвь. Далее процесс совершается по предельному циклу. На рис. 9 представлено развитие процесса по переменной i во времени t . Обратим внимание на изломы графика со скачками производной, соответствующие точкам S_1 и S_2 .

Амплитуда колебаний i_{max} по переменной i , как видно из рис. 8, равна величине 0,4. Совершив при помощи (4.27) переход к исходным размерным переменным, найдем, что амплитуда колебаний I_{max} по переменной I равна

$$I_{max} = I_* i_{max} = 0,4 \sqrt{T_2^3/A}.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Клайн С. Дж. Подобие и приближенные методы.— М.: Мир, 1968.— 302 с.
 2. Андронов А. А., Витт А. А., Хайкин С. Э. Теория колебаний.— М.: Физматгиз, 1959.— 915 с.
 3. Степанов В. В. Курс дифференциальных уравнений.— М.: Физматгиз, 1959.— 468 с.
 4. Малкин И. Г. Теория устойчивости движения.— М.: Наука, 1966.— 431 с.
 5. Найфэ А. Методы возмущений.— М.: Мир, 1976.— 455 с.
 6. Олвер Ф. Введение в асимптотические методы и специальные функции.— М.: Наука, 1978.— 375 с.
 7. Седов Л. И. Методы подобия и размерности в механике.— М.: Наука, 1967.— 428 с.
 8. Новожилов И. В. Введение малого параметра в уравнения движения. Научные труды ин-та механики.— М.: МГУ, 1973, № 29, с. 126—132.
 9. Новожилов И. В. Приближенные методы исследования гироскопических систем.— В кн.: Развитие механики гироскопических и инерциальных систем.— М.: Наука, 1973, с. 368—378.
 10. Васильева А. Б., Бугусов В. Ф. Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений.— М.: Наука, 1973.— 272 с.
 11. Мищенко Е. Ф., Розов Н. Х. Дифференциальные уравнения с малым параметром и релаксационные колебания.— М.: Наука, 1975.— 247 с.
 12. Тихонов А. Н. Системы дифференциальных уравнений, содержащих малые параметры при производных.— Математический сборник, 31 (73), 1952, № 3, с. 575—586.
-

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение.

Глава 1. Необходимые сведения по теории дифференциальных уравнений

- § 1.1. Теорема существования и единственности решения системы дифференциальных уравнений. Точки покоя. Устойчивость по Ляпунову 6
- § 1.2. Два типа степенных разложений по малому параметру 10

Глава 2. Применение методов теории размерности для нормализации уравнений и введения в них малого параметра

- § 2.1. Основные понятия теории размерности 12
- § 2.2. Преобразования теории размерности 15
- § 2.3. Нормализация уравнений движения динамических систем 17
- § 2.4. Варианты введения малого параметра при нормализации уравнений 19

Глава 3. Дифференциальные уравнения, правые части которых регулярно зависят от малого параметра

- § 3.1. Теорема Пуанкаре 24
- § 3.2. Примеры применения теоремы Пуанкаре 27

Глава 4. Дифференциальные уравнения с малым параметром при производных

- § 4.1. Теорема Тихонова 32
- § 4.2. Пример применения теоремы Тихонова — релаксационные колебания лампового генератора 40

Литература.
