

МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО СПЕЦИАЛЬНОГО  
ОБРАЗОВАНИЯ СССР

МОСКОВСКИЙ ордена ЛЕНИНА и ордена ОКТЯБРЬСКОЙ РЕВОЛЮЦИИ  
ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

---

И. В. НОВОЖИЛОВ



Утверждено  
Учебно-методическим управлением МЭИ  
в качестве учебного пособия  
для студентов

## КОНСПЕКТ ЛЕКЦИЙ

по курсу

ПРИБЛИЖЕННЫЕ МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ  
ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

МЕТОДЫ РАЗДЕЛЕНИЯ ДВИЖЕНИЙ

*Редактор Ю. Г. МАРТЫНЕНКО*

Под динамической системой здесь понимается объект, описываемый обыкновенными дифференциальными уравнениями. Эти уравнения обычно нелинейны, движение содержит составляющие, сильно разнесенные по своим «частотам», что затрудняет численное и аналитическое исследование динамической системы. В работе излагаются методы «разделения» движений, позволяющие составлять приближенные уравнения для «быстрых» и «медленных» составляющих движения по отдельности.

---

## ПРЕДИСЛОВИЕ

Под динамическими системами ниже понимаются системы, развивающиеся во времени и описываемые обыкновенными дифференциальными уравнениями.

Инженер-практик обычно обладает достаточной специальной подготовкой, чтобы на этапе проектирования составить уравнения движения конкретной динамической системы. Эти уравнения вначале, как правило, избыточно громоздки и не поддаются аналитическому или численному анализу. По мере накопления опыта работы с данной системой, появления экспериментального материала и т. п. исследователь переходит к более простым моделям динамической системы, которые описываются более простыми уравнениями. Этот процесс требует времени, натурального эксперимента и зачастую незаурядной интуиции исследователя. Ярким примером подобного «инженерного» упрощения могут служить прецессионные уравнения движения гироскопических систем. Формальные математические доказательства законности перехода к этим уравнениям от строгих уравнений гироскопии на несколько десятков лет запоздали от времени их плодотворного внедрения в практику расчета гироскопических систем.

Между тем имеется реальная возможность сократить и формализовать процесс упрощения уравнений движения динамических систем. Эта возможность связана с применением методов малого параметра. В ходе применения методов малого параметра строится приближенное решение исходной системы, т. е. упрощенные уравнения, которым удовлетворяют приближенные решения. При этом над исходной системой проводится, так сказать, серия математических экспериментов: проверяются условия, которым должны удовлетворять слагаемые уравнений, проводится анализ вспомогательных уравнений и т. п. Важно подчеркнуть, что применение строгих математических методов дает возмож-

ность оценить разницу решений исходных и упрощенных уравнений, т. е. оценить погрешность приближения.

Работа ставит своей целью дать сравнительный обзор ряда наиболее употребительных методов малого параметра. Предполагаемый читатель — активно работающий инженер, по роду деятельности имеющий дело с обыкновенными дифференциальными уравнениями, изрядно забывший втузовский курс высшей математики, знакомый с приближенными методами понаслышке. По опыту могу заключить, что круг таких читателей достаточно широк. Исходя из этого, изложение материала максимально упрощено, математические доказательства, как правило, опускаются, изложение практически построено на примерах. Одна из целей книги состоит в том, чтобы заинтересовать читателя и побудить его обратиться к изучению литературы, указанной по разделам.

Данная работа непосредственно примыкает к работе [1], где излагаются сведения из общей теории дифференциальных уравнений, необходимые для понимания материала; излагаются основы теории подобия и размерности, при помощи которой проводится нормализация уравнений и введение в них малого параметра. Приведены две основные для дальнейшего теоремы: теорема Пуанкаре о приближенном решении дифференциальных уравнений с малым параметром «справа», в правых частях уравнений, и теорема А. Н. Тихонова для дифференциальных уравнений с малым параметром «слева», т. е. при производных. Предполагается, что читатель знаком с [1].

Ниже излагаются методы «разделения» движений, позволяющие составлять приближенные уравнения для «быстрых» и «медленных» составляющих движения по отдельности.

---

## Глава I

### ВАРИАНТЫ ПОСТАНОВКИ ЗАДАЧИ О РАЗДЕЛЕНИИ ДВИЖЕНИЙ ПРИМЕНИТЕЛЬНО К УРАВНЕНИЯМ С МАЛЫМИ ПАРАМЕТРАМИ ПРИ ПРОИЗВОДНЫХ

§ 1.1. Разделение движений  
в случае нескольких малых параметров,  
различающихся по порядку величин.

**Пример:** следящая система с «жестким» управлением

Рассмотрим систему, которая имеет несколько сильно разнесенных по времени составляющих движения. Пусть после нормализации всех, кроме времени, переменных уравнения системы приведлись к виду [1]

$$\begin{aligned}T_1 \frac{dx_1}{dT} &= f_1(x_1, \dots, x_n); \\T_2 \frac{dx_2}{dT} &= f_2(x_1, \dots, x_n); \\&\dots \dots \dots \\T_n \frac{dx_n}{dT} &= f_n(x_1, \dots, x_n), T_1 \ll T_2 \ll \dots \ll T_n.\end{aligned}$$

Здесь  $T$  — время;  $T_1, \dots, T_n$  — постоянные времени системы; нормализованные величины  $x_1, \dots, x_n, f_1, \dots, f_n$  безразмерны и не превосходят значений порядка единицы. Изучая самые медленные составляющие движения, перейдем при нормализации времени к безразмерному времени  $t = T/T_n$ . Уравнения примут вид

$$\begin{aligned}\mu_1 \frac{dx_1}{dt} &= f_1(x_1, \dots, x_n); \\ \mu_2 \frac{dx_2}{dt} &= f_2(x_1, \dots, x_n); \\ &\dots \dots \dots \\ \frac{dx_n}{dt} &= f_n(x_1, \dots, x_n), \mu_1 \ll \mu_2 \ll \dots \ll 1.\end{aligned} \tag{1.1}$$

Законность перехода к вырожденной по всем малым параметрам системе доказывается здесь последовательным вырождением по  $\mu_1, \dots, \mu_{n-1}$  и проверкой на каждом этапе условий теоремы Тихонова [2, 16].

Проведем эту проверку на первом этапе вырождения по  $\mu_1$ , что позволит также напомнить вкратце теорему Тихонова. Более подробное изложение теоремы, иллюстрированное примерами, дается в [1].

На первом этапе вырождения за малый параметр задачи принимается параметр  $\mu_1$ , величины  $\mu_2, \dots, \mu_{n-1}$  считаются конечными.

Построим две вспомогательные системы уравнений. «Вырожденная» получается из (1.1) при  $\mu_1=0$  и описывает медленные составляющие движения с точки зрения этого параметра:

$$\begin{aligned} 0 &= f_1(x_1, \dots, x_n); \\ \mu_2 \frac{dx_2}{dt} &= f_2(x_1, \dots, x_n); \\ &\dots \dots \dots \\ \frac{dx_n}{dt} &= f_n(x_1, \dots, x_n). \end{aligned} \tag{1.2}$$

«Присоединенная» система получается из (1.1), если в ней перейти к быстрому времени  $\tau=t/\mu_1$  и положить затем  $\mu_1=0$ :

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{d\tau} &= f_1(x_1, \dots, x_n); \\ \frac{dx_2}{d\tau} &= 0, \dots, \frac{dx_n}{d\tau} = 0. \end{aligned} \tag{1.3}$$

Присоединенные уравнения описывают движение системы по быстрым составляющим движения.

Теорема Тихонова утверждает, что решение исходной системы (1.1) стремится при  $\mu_1 \rightarrow 0$  к решению вырожденной (1.2). Основным условием, обеспечивающим близость этих решений, является условие асимптотической устойчивости точек покоя присоединенной системы (1.3). Точки покоя, как видно из (1.3), определяются корнями уравнения  $f_1(x_1, \dots, x_n)=0$ , где  $x_2, \dots, x_n$  считаются параметрами. Требуется, чтобы корни по крайней мере существовали и были изолированными. Асимптотическая по  $\mu_1$  близость решений исходной и вырожденной систем гарантируется по медленному переменным  $x_2, \dots, x_n$  на произвольном конечном

интервале времени  $0 \leq t \leq t_1$ , а по быстрой переменной  $x_1$  — на интервале  $0 < t \leq t_1$ , не включающем малую окрестность начальной точки. В этой временной окрестности, так называемом пограничном слое по времени, происходит ликвидация начальных рассогласований системы (1.1) по быстрой переменной  $x_1$  относительно значения  $x_1$  в точке покоя.

Рассмотрим в качестве примера следящую систему по углу. Обозначим через  $F$  угол поворота входного, а через  $\Phi$  — выходного вала системы. Предположим, величина рассогласования  $\Phi - F$  измеряется при помощи позиционного датчика, а величина  $d\Phi/dT = \Omega$  — при помощи тахогенератора на выходном валу системы. Сформируем сигнал управления  $U = T_0\Omega + (\Phi - F)$  и подадим его с «большим» коэффициентом усиления  $K$  на управление двигателем, развивающим момент  $M$  на выходном валу.

Запишем уравнения движения, пренебрегая противоз. д. с. двигателя и инерционностью цепи управления:

$$I \frac{d\Omega}{dT} = M, \quad M = -KU;$$

$$\frac{d\Phi}{dT} = \Omega, \quad U = T_0\Omega + \Phi - F(t_b), \quad t_b = \frac{T}{T_b}. \quad (1.4)$$

Здесь  $I$  — приведенный к выходному валу момент инерции связанных с ним элементов;  $T_b$  — характерное время изменения входного сигнала, т. е. время, за которое угол  $F$  изменяется на характерную величину.

Проведем нормализацию уравнений (1.4). «Жесткое» с большим коэффициентом управление по переменной  $U$ , как известно, обеспечивает малость этой переменной во все время движения системы. При этом величина управляющего момента  $M$  остается ограниченной. Учитывая это, в состав фазовых переменных системы включим переменную  $U$ ; малость которой обеспечивается жестким управлением. Это соображение является основным при нормализации «жестких» систем: гироскопических систем [3], систем управления шагающими аппаратами [4] и т. д.

Запишем (1.4) в фазовых переменных  $\Phi, U$ :

$$\frac{dU}{dT} = \frac{1}{T_0} (U - \Phi + F) - \frac{1}{T_b} \cdot \frac{dF}{dt_b} + \frac{T_0}{I} M;$$

$$\frac{d\Phi}{dT} = \frac{1}{T_0} (U - \Phi + F), \quad M = -KU. \quad (1.5)$$

Проведем нормализацию системы (1.5):

$$t = \frac{T}{T_*}, \quad \varphi = \frac{\Phi}{\Phi_*}, \quad u = \frac{U}{U_*}, \quad m = \frac{M}{M_*}, \quad f = \frac{F}{F_*}.$$

Учитывая жесткость системы, свяжем характерные значения соотношениями:

$$\Phi_* = F_*, \quad U_* = \varepsilon F_*, \quad KU_* = M_*, \quad (\varepsilon \ll 1).$$

Будем рассматривать систему, для которой  $T_0 \ll T_b$ , и выберем  $T_* = T_b$ . Тогда (1.5) примет вид

$$\begin{aligned} \varepsilon \mu \frac{du}{dt} &= \varepsilon u - \varphi + f - \mu \frac{df}{dt} + km, \\ \mu \frac{d\varphi}{dt} &= \varepsilon u - \varphi + f, \quad m = -u, \end{aligned} \quad (1.6)$$

где  $\varepsilon \ll 1$ ;  $\mu = T_0/T_b \ll 1$ ;  $k = M_* T_0^2/I \sim 1$ . Система (1.6) имеет при производных множители, сильно разнесенные по порядку величин:  $\varepsilon \mu \ll \mu \ll 1$ . Построим вырожденную по этим параметрам систему, положив  $\varepsilon = 0$ ,  $\mu = 0$ . Получим

$$\varphi - f = 0, \quad m = 0, \quad u = 0. \quad (1.7)$$

Для обоснования законности перехода к (1.7) рассмотрим однократно вырожденную по параметру  $\varepsilon \mu$  систему:

$$\begin{aligned} 0 &= \varepsilon u - \varphi + f - \mu \frac{df}{dt} + km; \\ \mu \frac{d\varphi}{dt} &= \varepsilon u - \varphi + f, \quad m = -u. \end{aligned} \quad (1.8)$$

Исключив в (1.8) переменные  $m$ ,  $u$ , получим

$$\mu \frac{d\varphi}{dt} = -\frac{k}{k-\varepsilon} (\varphi - f); \quad m = \frac{1}{k-\varepsilon} \left( \varphi - f + \mu \frac{df}{dt} \right). \quad (1.9)$$

Первое уравнение (1.9) описывает переходный процесс выхода системы из произвольных начальных условий на режим отслеживания входного сигнала. Этот процесс совершается в исходном времени с постоянной времени  $T_0$ .

Второе уравнение (1.9) определяет величину момента управления в этом движении.

Запишем присоединенную для (1.6) систему при вырождении по параметру  $\varepsilon \mu$ :

$$\frac{du}{d\tau} = -k \left( 1 - \frac{\varepsilon}{k} \right) u - \varphi + f - \mu \frac{df}{dt}, \quad (1.10)$$

где  $\varphi$ ,  $f$ ,  $df/dt$  — параметры. Очевидно, точка покоя уравнения (1.10) асимптотически устойчива. Это доказывает законность однократного вырождения по  $\varepsilon \mu$ .



Произведем вырождение по второму малому параметру. Предварительно примем дополнительное предположение  $\varepsilon \sim \mu$ . Тогда из (1.8) при  $\varepsilon = \mu = 0$  придем к (1.7). Чтобы оправдать это вырождение, запишем присоединенную для (1.8) систему

$$\frac{d\varphi}{d\tau} = -\varphi + f.$$

Точка покоя этого уравнения также асимптотически устойчива.

Таким образом, нами доказаны, в соответствии с [16], условия законности двукратного вырождения исходных уравнений (1.6) следящей системы.

Примером движения с несколькими разнесенными составляющими является движение рельсового экипажа [5].

## § 1.2. Вырождение на бесконечном интервале времени

Условия теоремы Тихонова гарантируют близость решений исходной и вырожденной систем лишь на конечном интервале времени  $0 < t \leq t_1$ . При исследовании конкретной динамической системы, естественно, могут возникнуть опасения, что время движения системы окажется больше значений, соответствующих величине  $t_1$ . В этих условиях было бы интересно обсудить возможность применения вырожденных уравнений «с запасом» на всем бесконечном интервале времени.

Поведение решения дифференциальных уравнений с малым параметром при производных изучается на бесконечном интервале в [17, 18, 19]. По результатам этих работ для вырождения на бесконечном интервале времени дополнительно требуется равномерная асимптотическая устойчивость произвольного частного решения вырожденной системы в силу этой системы. Этот вывод, по существу, является расширением теоремы об устойчивости при постоянно действующих регулярных возмущениях на случай сингулярных возмущений. Соответствующие теоремы в общей форме даны в работе [18]. В [17] задача ставится для частного случая. При этом исследование приводится к линейным уравнениям с постоянными коэффициентами; следовательно, легко может быть доведено до конца.

Изложим выводы указанной работы И. С. Градштейна, пользуясь терминологией и обозначениями, принятыми выше.

Рассмотрим систему нелинейных дифференциальных уравнений с малым параметром  $\mu$  при части производных. Предположим, что правые части уравнений удовлетворяют требованиям, оговоренным в [2, 16].

В [17] проводится линеаризация этой исходной системы в окрестности некоторого частного решения вырожденной системы. Предполагается, что коэффициенты при линейной части разложения не зависят от времени, а, вообще говоря, только от  $\mu$ ; остаточные члены разложения обращаются в нуль при  $\mu=0$  на траектории частного решения, вблизи которого проводится линеаризация. Предполагается также, что коэффициенты при линейной части и остаточные члены непрерывны по  $\mu$  при  $0 \leq \mu \leq \mu'$ .

Рассмотрим две системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Первая получится, если в исходной системе провести линеаризацию только по быстрым переменным. Эта система совпадает с уравнениями, которые получаются при линеаризации присоединенной системы вблизи ее точек покоя [17]. Вторая система получается линеаризацией вырожденной системы уравнений.

Предположим, что вещественные части корней характеристических уравнений обеих систем меньше величины  $-3\lambda$ , где  $\lambda$  — произвольное положительное число. Тогда для любого  $\varepsilon > 0$  найдутся такие  $\delta(\varepsilon)$  и  $\mu'' > 0$ , при которых модуль рассогласования по каждой переменной решения исходной системы относительно частного решения вырожденной будет меньше величины  $\varepsilon \exp(-\lambda t)$  для любых  $t$ , если начальные значения этих рассогласований по модулю меньше  $\delta(\varepsilon)$ , а параметр  $\mu$  выбран в интервале  $0 \leq \mu \leq \mu'' \leq \mu'$ .

Легко указать обширный класс систем, удовлетворяющих условиям И. С. Градштейна.

Рассмотрим систему, вырожденные уравнения которой имеют частное решение типа точки покоя. Пусть эта точка покоя асимптотически устойчива по первому приближению в силу вырожденных уравнений, а область влияния точки покоя совпадает с областью  $D$ , где определено решение вырожденной системы.

Предположим, что исходные уравнения системы удовлетворяют условиям допустимости перехода к вырожденным уравнениям, оговоренным в [2, 16]. Тогда можно задать такое значение  $\mu$ , при котором решение исходной системы

за время погранслоя войдет в сколь угодно малую окрестность решения вырожденной системы и «вместе с ним» за конечное время  $t'$  войдет в окрестность точки покоя вырожденной системы. Легко убедиться, что при  $t > t'$  система удовлетворяет всем требованиям И. С. Градштейна.

На каждом этапе исследования (этапе входа решения в  $\delta$ -окрестность положения равновесия и этапе движения в этой окрестности на бесконечном времени) устанавливается существование такого значения малого параметра  $\mu$ , которое решает задачу на своем этапе. В качестве значения малого параметра, решающего задачу в целом, можно считать меньшее из этих двух значений.

Почти очевидным примером законности вырождения по И. С. Градштейну являются уравнения следящей системы из § 1.1 для случая  $f = \text{const}$ . Вырождение исходных уравнений (1.6) к уравнению (1.9) здесь оправдано на бесконечном интервале времени, поскольку (1.9) удовлетворяет дополнительному требованию об асимптотической устойчивости точки покоя этого уравнения.

Приведем пример, когда условия законности вырождения на бесконечном интервале зависят от выбора области, в которой определяется движение.

Рассмотрим плоский физический маятник с линейным трением, как в § 4.1, [1]. Пусть дополнительно в теле маятника задана сферическая полость. В ней помещено однородное сферическое тело, которое может вращаться относительно маятника вокруг оси, проходящей через центр масс дополнительного тела и совпадающей с осью маятника. Зазор образован концентрическими сферическими поверхностями и заполнен вязкой жидкостью.

Тогда уравнения движения будут иметь вид

$$I \frac{d\Omega}{dT} = -mgl \sin \Phi - N\Omega - N_1(\Omega - \Omega_1);$$

$$\frac{d\Phi}{dT} = \Omega, \quad I_1 \frac{d\Omega_1}{dT} = N_1(\Omega - \Omega_1). \quad (1.11)$$

Здесь, в дополнение к обозначениям § 4.1, [1], через  $I_1$ ,  $\Omega_1$ ,  $N_1$  обозначены момент инерции, угловая скорость и коэффициент трения в зазоре дополнительного тела.

Будем рассматривать систему, для которой коэффициенты  $N$ ,  $N_1$  являются величинами одного порядка, а  $N$  невелико, так что движение основного маятника вблизи нижнего положения равновесия имеет колебательный характер.

Проведем нормализацию (1.11):

$$\omega = \frac{\Omega}{\Omega_*}, \quad \omega_1 = \frac{\Omega_1}{\Omega_{1*}}, \quad \varphi = \frac{\Phi}{\Phi_*}, \quad t = \frac{T}{T_*}.$$

Будем изучать класс движения на большие углы ( $\Phi_* = 1$ ) системы с малоинерционным дополнительным телом ( $I_1 \ll I$ ). Тогда можно ожидать, что дополнительное тело движется примерно с такими же угловыми скоростями, как основной маятник ( $\Omega_{1*} = \Omega_*$ ), а характерное время движения будет величиной порядка периода малых колебаний основного маятника без трения ( $T_* = T_0$ ,  $T_0^2 = I/mgl$ ).

Тогда, приняв  $\Omega_* = \Phi_*/T_*$ , приведем (1.11) к виду

$$\begin{aligned} \frac{d\omega}{dt} &= -\sin \varphi - 2\xi\omega - 2\xi_1(\omega - \omega_1); \\ \frac{d\varphi}{dt} &= \omega; \quad \mu \frac{d\omega_1}{dt} = 2\xi_1(\omega - \omega_1). \end{aligned} \quad (1.12)$$

Здесь  $\mu = I_1/I \ll 1$ , а коэффициенты  $\xi < 1$ ,  $\xi_1 < 1$  определяются соотношениями  $N/I = 2T_0\xi$ ,  $N_1/I = 2T_0\xi_1$ .

Построим вырожденную для (1.12) систему:

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{\omega}}{dt} &= -\sin \bar{\varphi} - 2\xi\bar{\omega} - 2\xi_1(\bar{\omega} - \bar{\omega}_1); \\ \frac{d\bar{\varphi}}{dt} &= \bar{\omega}; \quad 0 = 2\xi_1(\bar{\omega} - \bar{\omega}_1). \end{aligned} \quad (1.13)$$

Из (1.13) видно, что вырожденные уравнения описывают движение основного маятника. Дополнительное тело движется вместе с маятником ( $\bar{\omega}_1 = \bar{\omega}$ ).

Легко проверяются условия теоремы Тихонова о вырождении на конечном интервале времени. Так, присоединенная для (1.12) система имеет вид

$$\frac{d\omega_1}{dt} = -2\xi_1\omega_1 + 2\xi_1\omega, \quad (\omega = \text{const}). \quad (1.14)$$

Очевидно, (1.14) имеет асимптотически устойчивую точку покоя, и область влияния этой точки — неограниченная.

Проверим законность вырождения на бесконечном интервале времени.

На рис. 1 представлены фазовые траектории системы (1.13) в пространстве  $(\bar{\varphi}, \bar{\omega})$ . Жирными линиями выделены сепаратриссы-траектории, разделяющие колебательные движения вблизи нижнего положения равновесия  $\bar{\varphi} = 0$  от

ротационных, когда маятник переворачивается через верхнее положение равновесия. Область, ограниченная на рис. 1 сепаратриссами, имеет точку влияния  $\varphi=0$ ,  $\omega=0$  и для траекторий системы (1.13), начинающихся в этой области, выполнено дополнительное условие для вырождения на бесконечном интервале.

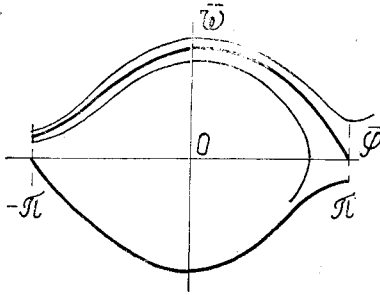


Рис. 1

Сепаратриссы не являются асимптотически устойчивыми траекториями для (1.13), так как малые отклонения от сепаратриссы приводят систему либо к ротационному, либо колебательному движению. Поэтому уравнениями (1.13) движение по сепаратриссе описывается лишь на конечном интервале времени. Малые сингулярные возмущения в (1.12) выводят систему в зависимости от начальных условий по  $\omega_1$  либо в область ротационных, либо колебательных движений, которые сильно различаются на бесконечном интервале времени.

Методы теории сингулярно возмущенных уравнений успешно применяются для обоснования законности так называемых прецессионных уравнений гироскопии [3, 6, 7]. В [7] рассматривается задача, когда вырожденные, прецессионные уравнения гироскопической системы справедливы на бесконечном интервале времени.

### § 1.3. Разделение движений в системах с разрывными характеристиками

Теорема существования и единственности не определяет решение системы дифференциальных уравнений в точках, где ее правые части терпят разрывы. Известен ряд способов

доопределения решения систем такого вида [8, 9, 20]. Изложим один из вариантов доопределения [10], когда применение методики нормализации приводит задачу к постановке по методу Тихонова, изложенной ранее.

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений:

$$\frac{dX_k}{dt} = f_k(X_1, \dots, X_n, t), \quad k=1, \dots, n, \quad (1.15)$$

где  $X_1, \dots, X_n, t$  могут считаться уже нормализованными переменными, т. е. их значения не превосходят величин около единицы.

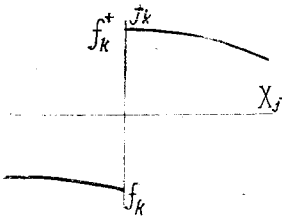


Рис. 2

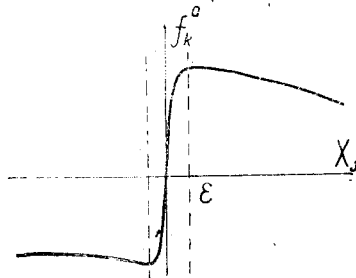


Рис. 3

Предположим, что функции  $f_k$  терпят разрыв на некоторой поверхности в фазовом пространстве системы (1.15). Для простоты в качестве поверхности разрыва выберем координатную плоскость  $X_j=0$ . При подходе с разных сторон к поверхности разрыва функции  $f_k$  принимают разные значения, как указано на рис. 2:

$$\lim_{X_j \rightarrow +0} f_k = f_k^+, \quad \lim_{X_j \rightarrow -0} f_k = f_k^-, \quad f_k^+ \neq f_k^-.$$

По остальным переменным функции остаются достаточно гладкими.

Определим вспомогательные функции  $f_k^0$ . Вне малой окрестности  $|X_j| \leq \epsilon$  функции  $f_k^0$  совпадают с  $f_k$ , внутри — соединяют значения  $f_k$  на границе окрестности произвольным достаточно гладким образом, как изображено на рис. 3.

Рассмотрим вместо исходной системы (1.15) систему

$$\frac{dX_k}{dt} = f_k^0(X_1, \dots, X_n, t), \quad k=1, \dots, n, \quad (1.16)$$

которая уже не имеет разрывов. Ее решение определено по теореме существования и единственности.

В качестве решения системы (1.15) будем в дальнейшем принимать решение системы (1.16) при  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

Вне  $\varepsilon$ -окрестности разрыва системы (1.15), (1.16) совпадают, поэтому представляет интерес исследование (1.16) внутри области  $|X_j| \leq \varepsilon$ .

Проведем внутри этой области нормализацию переменных системы (1.16):

$$x_i = \frac{X_i}{X_{i*}}, \quad x_j = \frac{X_j}{X_{j*}},$$

где  $X_{i*} = 1$ ,  $X_{j*} = \varepsilon$ , ( $i \neq j$ ).

График функции  $f_k^0$  от новой переменной  $x_j$  представлен на рис. 4.

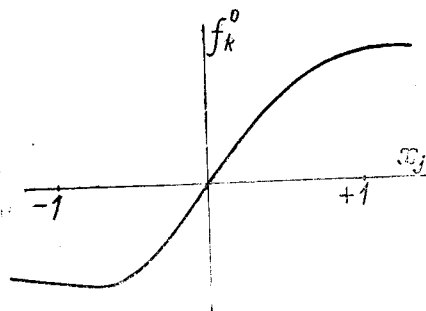


Рис. 4

Система (1.16) перейдет в систему

$$\begin{aligned} \frac{dx_i}{dt} &= f_i^0(x_1, \dots, \varepsilon x_j, \dots, x_n); \\ \varepsilon \frac{dx_j}{dt} &= f_j^0(x_1, \dots, \varepsilon x_j, \dots, x_n); \end{aligned} \quad (1.17)$$

$i = 1, \dots, j-1, j+1, \dots, n$ ,  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

Система (1.17) имеет малый множитель при производной. Применим для ее исследования уже привычную методику.

Запишем вырожденную для (1.17) систему

$$\begin{aligned} \frac{dx_i}{dt} &= f_i^0(x_1, \dots, 0, \dots, x_n); \\ 0 &= f_j^0(x_1, \dots, 0, \dots, x_n). \end{aligned} \quad (1.18)$$

В уравнениях (1.18) переменная  $x_j$  тождественно равна нулю. Это означает, что в силу уравнений (1.18) движение системы по остальным переменным происходит по поверхности разрыва  $x_j=0$ .

Остается проверить условия теоремы Тихонова, обеспечивающие реализацию этого движения. При этом возможны два варианта. Если условия теоремы выполнены, то движение в силу системы (1.18) существует, т. е. на поверхности разрыва реализуется так называемый скользящий режим исходной системы (1.15). Уравнениями (1.18) при этом определяется и движение по поверхности разрыва и осредненные медленные составляющие правых частей, соответствующих этому движению. Если условия теоремы Тихонова не выполняются, то система не удерживается на поверхности разрыва: изображающая точка «прошивает» ее.

Рассмотрим в качестве примера задачу об управлении угловым движением космического аппарата. Управляющий момент развивается двумя парами реактивных сопел, работающих в релейном режиме. Переключение знака момента осуществляется при изменении знака сигнала управления, который является линейной комбинацией позиционного и скоростного сигналов [11].

Пренебрегая запаздываниями цепи управления, зоной нечувствительности и гистерезисом реле, запишем уравнения плоского движения аппарата:

$$\frac{d\Omega}{dT} = -\gamma \operatorname{sign} U, \quad \frac{d\Phi}{dT} = \Omega, \quad U = \Phi + T_0\Omega, \quad (1.19)$$

где  $\Phi$  — угол отклонения аппарата от неподвижного направления;  $\Omega$  — угловая скорость;  $U$  — сигнал управления;  $\gamma = \text{const}$  — модуль углового ускорения, развиваемого парой сопел. Цель управления состоит в сведении к нулю  $\Phi$  и  $\Omega$  за счет выбора параметра  $T_0$ .

Проведем предварительную нормализацию уравнений (1.19):

$$t = \frac{T}{T_*}, \quad \varphi = \frac{\Phi}{\Phi_*}, \quad \omega = \frac{\Omega}{\Omega_*}, \quad u = \frac{U}{U_*}.$$

Характерное время  $T_*$  оценим временем, за которое система с ускорением  $\gamma$  отклоняется на величину характерного угла  $\Phi_*$ . Тогда  $\Phi_* = \gamma T_*^2$ . Примем  $\Omega_* = \Phi_*/T_*$ , а характерное значение сигнала управления примем равным характерному углу  $U_* = \Phi_*$ . Будем наконец рассматривать движение с



большими начальными отклонениями. Тогда  $\Phi_* = U_* = 1$ ,  $T_* = 1/\sqrt{\gamma}$ ,  $\Omega_* = 1/T_*$ , и уравнения (1.19) приведутся к виду:

$$\frac{d\omega}{dt} = -\operatorname{sign} u, \quad \frac{d\varphi}{dt} = \omega, \quad u = \varphi + \tau_0 \omega, \quad \tau_0 = \frac{T_0}{T_*}. \quad (1.20)$$

Исследуем поведение системы (1.20) на фазовой плоскости  $(\varphi, \omega)$ . Дифференциальное уравнение фазовых траекторий получим, поделив первое уравнение системы (1.20) на второе:

$$\frac{d\omega}{d\varphi} = -\frac{\operatorname{sign} u}{\omega}. \quad (1.21)$$

Проинтегрировав уравнение (1.21) по отдельности для  $u > 0$ ,  $\operatorname{sign} u = +1$  и  $u < 0$ ,  $\operatorname{sign} u = -1$ , получим уравнения фазовых траекторий в виде

$$\varphi - \varphi(0) = \mp \frac{\omega^2 - \omega(0)^2}{2}. \quad (1.22)$$

Знаки  $\mp$  соответствуют здесь случаям  $u > 0$  и  $u < 0$ .

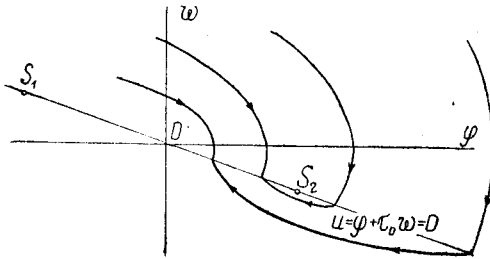


Рис. 5

Фазовая траектория системы (1.20) строится, таким образом, из отрезков двух семейств парабол (1.22), как изображено на рис. 5. На рисунке стрелками обозначено направление движения изображающей точки вдоль фазовой траектории. Разметка стрелок определяется тем, что в верхней полуплоскости ( $\omega > 0$ ) переменная  $\varphi$  растет со временем, в нижней — убывает. Переход с парабол одного семейства на другое происходит на прямой переключений  $u = \varphi + \tau_0 \omega = 0$ . Эта прямая разбивается на интервалы двух типов. На интервале первого типа вектор фазовой скорости по одну сторону прямой направлен к ней, по другую —

от нее. В этих точках фазовые траектории прошивают прямую переключений. На интервале другого типа фазовые скорости по обе стороны прямой переключений направлены к ней. Можно думать, что этому интервалу отвечает скользящий режим, при котором система остается на прямой переключений  $u=0$ .

Интервалы обоих типов разделяются точками  $S_1, S_2$ , в которых коэффициент наклона фазовой траектории, равный по (1.21) величине  $d\omega/d\varphi = \pm 1/\omega$ , совпадает с коэффициентом наклона прямой переключений  $d\omega/d\varphi = -1/\tau_0$ . Приравняв указанные величины, получим

$$\omega = \pm \tau_0. \quad (1.23)$$

На прямой переключений  $\varphi + \tau_0\omega = 0$ , поэтому условие (1.23) можно переписать в виде

$$\varphi = \pm \tau_0^2. \quad (1.24)$$

Получим условия возникновения скользящего режима при помощи теоремы Тихонова.

Прделаем в (1.20) переход от фазовых переменных  $\varphi, \omega$  к фазовым переменным  $\varphi, u$ , сделав замену  $\omega = (u - \varphi)/\tau_0$ . В состав нового набора переменных входит переменная  $u$ , по которой релейная функция терпит разрыв. Получим

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= \frac{1}{\tau_0}(u - \varphi) - \tau_0 \operatorname{sign} u; \\ \frac{d\varphi}{dt} &= \frac{1}{\tau_0}(u - \varphi). \end{aligned} \quad (1.25)$$

Заменим в (1.25) разрывную функцию  $\operatorname{sign} u$  гладкой  $f^0(u)$ , доопределив ее, как в (1.16), внутри окрестности  $|u| \leq \varepsilon$ . Для полученной системы перейдем внутри  $|u| \leq \varepsilon$  к нормализованной переменной  $v = u/\varepsilon$ . Тогда (1.25) перейдет в систему, аналогичную (1.17):

$$\begin{aligned} \varepsilon \frac{dv}{dt} &= \frac{1}{\tau_0}(\varepsilon v - \varphi) - \tau_0 f^0(v); \\ \frac{d\varphi}{dt} &= \frac{1}{\tau_0}(\varepsilon v - \varphi). \end{aligned} \quad (1.26)$$

График функции  $f^0(v)$  представлен на рис. 6. Уравнениями (1.26) описывается быстрое движение по переменной  $v$  в зоне разрыва, по  $\varphi$  движение медленное.

Построим вырожденную для (1.26) систему:

$$0 = -\frac{1}{\tau_0} \bar{\varphi} - \tau_0 f^0;$$

$$\frac{d\bar{\varphi}}{dt} = -\frac{1}{\tau_0} \bar{\varphi}. \quad (1.27)$$

Второе уравнение (1.27) описывает движение по прямой переключений, полученное ранее из анализа фазового портрета системы.

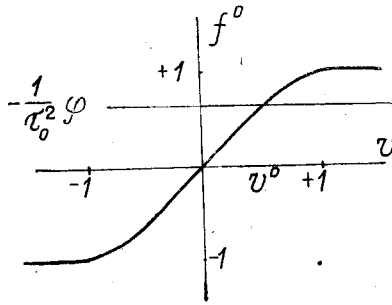


Рис. 6

Проверим условия законности перехода к вырожденным уравнениям.

Составим присоединенную систему, описывающую движение системы по быстрым переменным в быстром времени. Сделав в (1.26) замену  $\tau = t/\varepsilon$  и положив  $\varepsilon = 0$ , получим

$$\frac{dv}{d\tau} = -\frac{1}{\tau_0} \varphi - \tau_0 f^0(v), \quad \varphi = \text{const}. \quad (1.28)$$

Точки покоя уравнения (1.28) определяются соотношением

$$-\frac{1}{\tau_0} \varphi - \tau_0 f^0(v) = 0, \quad \varphi = \text{const}. \quad (1.29)$$

Поскольку функция  $f^0(v)$  не превосходит по модулю единицы, как это видно на рис. 6, корни по  $v$  уравнения (1.29) существуют при  $|\varphi| \leq \tau_0^2$ . Граничными значениями этого интервала будут  $\varphi = \pm \tau_0^2$ . Это условие существования скользящего режима совпадает с условием (1.24), полученным выше из геометрических соображений.

Исследуем устойчивость найденной точки покоя  $v^0$ . Для этого сделаем в (1.28) замену  $v = v^0 + \Delta v$  и исследуем

устойчивость по первому приближению. Линейное по  $\Delta v$  уравнение будет

$$\frac{d\Delta v}{d\tau} + k\Delta v = 0, \quad k = \left[ \frac{\partial f_0}{\partial v} \right]_{v=v^0}.$$

В соответствии с рис. 6 имеем  $k > 0$ . Точка покоя уравнения (1.28) асимптотически устойчива, что гарантирует существование скользящего режима на прямой переключений при  $|\varphi| \leq \tau_0^2$ .

---

## Глава 2

### АСИМПТОТИЧЕСКИЕ РАЗЛОЖЕНИЯ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ С МАЛЫМ ПАРАМЕТРОМ ПРИ ПРОИЗВОДНЫХ

#### § 2.1. Построение асимптотических разложений

Когда малый параметр входит в правые части уравнений, приближенное решение, как нам уже известно [1], отыскивается при помощи теоремы Пуанкаре. В соответствии с теоремой, решение отыскивается в виде рядов по степеням малого параметра. Эти ряды, как утверждает теорема, сходятся. Однако на практике обычно удается построить лишь конечное число членов ряда, что вынуждает ограничиться асимптотическими оценками точности полученного приближенного решения [1].

Попытаемся построить аналогичные разложения по малому параметру и для уравнений с малым параметром «слева», т. е. при производных.

Умение строить такие разложения позволит получить при необходимости более точное приближенное решение, чем решение в нулевом приближении, в соответствии с теоремой Тихонова. Знание порядка величины следующих членов дает также возможность оценить точность этого нулевого приближения. Теорема Тихонова утверждает, что разность решений исходной и вырожденной систем стремится к нулю при  $\mu \rightarrow 0$ . Однако порядок малости по  $\mu$  этой разности может быть, вообще говоря, различным, и он теоремой не оценивается.

Изложим процедуру построения асимптотического разложения по [2], изменив в ряде случаев обозначения этой работы.

Рассмотрим систему векторных уравнений:

$$\begin{aligned} \mu \frac{dz}{dt} &= F(z, y, t, \mu), \quad z(0) = z_0; \\ \frac{dy}{dt} &= f(z, y, t, \mu), \quad y(0) = y_0, \quad \mu \ll 1. \end{aligned} \quad (2.1)$$

В [1] при формулировке теоремы Тихонова были перечислены требования, налагаемые на вид функций  $F$  и  $f$ . Требование асимптотической устойчивости точек покоя присоединенной системы усилим здесь требованием асимптотической устойчивости по первому приближению.

Так же, как при построении нулевого приближения по теореме Тихонова, приближения более высокого порядка будем составлять из разложений вне пограничного слоя и внутри него. Решение вне пограничного слоя зависит от медленного времени  $t$ , внутри погранслоя — от быстрого времени  $\tau$ :

$$\begin{aligned} z(t, \mu) &= \bar{z}(t, \mu) + \Pi z(\tau, \mu); \\ y(t, \mu) &= \bar{y}(t, \mu) + \Pi y(\tau, \mu), \quad \tau = t/\mu. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Здесь и далее обозначение  $\Pi$  играет роль индекса для величин, определенных внутри погранслоя.

Правые части уравнений (2.1) также удобно тождественным преобразованием разделить на слагаемые, одно из которых зависит только от функций аргумента  $t$ , а другое — только от  $\tau$ :

$$\begin{aligned} F &\equiv \bar{F} + \Pi F, \quad f \equiv \bar{f} + \Pi f; \\ \bar{F} &\equiv F(\bar{z}(t, \mu), \bar{y}(t, \mu), t, \mu), \quad \bar{f} \equiv f(\bar{z}(t, \mu), \bar{y}(t, \mu), t, \mu); \\ \Pi F &\equiv F(\bar{z}(\mu\tau, \mu) + \Pi z(\tau, \mu), \bar{y}(\mu\tau, \mu) + \Pi y(\tau, \mu), \tau\mu, \mu) - \\ &\quad - F(\bar{z}(\mu\tau, \mu), \bar{y}(\mu\tau, \mu), \mu\tau, \mu); \\ \Pi f &\equiv f(\bar{z}(\mu\tau, \mu) + \Pi z(\tau, \mu), \bar{y}(\mu\tau, \mu) + \Pi y(\tau, \mu), \tau\mu, \mu) - \\ &\quad - f(\bar{z}(\mu\tau, \mu), \bar{y}(\mu\tau, \mu), \mu\tau, \mu). \end{aligned} \quad (2.3)$$

Будем отыскивать решение (2.2) в виде степенных разложений по параметру  $\mu$  отдельно по функциям, определенным вне и внутри погранслоя.

Вне погранслоя

$$\begin{aligned} \bar{z}(t, \mu) &= \bar{z}^{(0)}(t) + \mu \bar{z}^{(1)}(t) + \dots + \mu^k \bar{z}^{(k)}(t) + \dots; \\ \bar{y}(t, \mu) &= \bar{y}^{(0)}(t) + \mu \bar{y}^{(1)}(t) + \dots + \mu^k \bar{y}^{(k)}(t) + \dots. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Внутри погранслоя

$$Pz(\tau, \mu) = \Pi^{(0)}z(\tau) + \mu\Pi^{(1)}z(\tau) + \dots + \mu^k\Pi^{(k)}z(\tau) + \dots; \quad (2.5)$$

$$Py(\tau, \mu) = \Pi^{(0)}y(\tau) + \mu\Pi^{(1)}y(\tau) + \dots + \mu^k\Pi^{(k)}y(\tau) + \dots.$$

Неизвестные коэффициенты  $\bar{z}^{(0)}(t)$ ,  $\bar{y}^{(0)}(t)$ , ...,  $\Pi^{(0)}z(\tau)$ ,  $\Pi^{(0)}y(\tau)$ , ... разложений (2.4), (2.5) определяются, если подставить (2.2), (2.3), (2.4), (2.5) в уравнения (2.1) и приравнять слагаемые при одинаковых степенях  $\mu$  в левой и правой частях полученного соотношения. Слагаемые, зависящие от  $t$  и  $\tau$ , т. е. определенные вне и внутри погранслоя, при этом приравниваются порознь.

Заметим, что после дифференцирования по  $t$  слагаемого  $Py(\tau, \mu)$  во втором уравнении (2.1) должен был бы появиться множитель  $1/\mu$ . Поэтому это уравнение удобно предварительно умножить на  $\mu$ .

Тогда получим

$$\begin{aligned} \mu \frac{d\bar{z}}{dt} + \frac{d\Pi z}{d\tau} &= \bar{F} + \Pi F; \\ \mu \frac{d\bar{y}}{dt} + \frac{d\Pi y}{d\tau} &= \mu(\bar{f} + \Pi f). \end{aligned} \quad (2.6)$$

Дифференциальные уравнения, которые будут получены далее для неизвестных коэффициентов разложений (2.4), (2.5), потребуют задания начальных условий по этим переменным. Они определяются, если в (2.2), (2.4), (2.5) для начального момента времени подставить начальные условия  $z_0$ ,  $y_0$  исходной задачи (2.1):

$$z_0 = \bar{z}^{(0)}(0) + \mu\bar{z}^{(1)}(0) + \dots + \Pi^{(0)}z(0) + \mu\Pi^{(1)}z(0) + \dots; \quad (2.7)$$

$$y_0 = \bar{y}^{(0)}(0) + \mu\bar{y}^{(1)}(0) + \dots + \Pi^{(0)}y(0) + \mu\Pi^{(1)}y(0) + \dots.$$

Подставив (2.2), (2.3), (2.4), (2.5) в (2.6), составим уравнения нулевого по  $\mu$  приближения.

Вне погранслоя

$$\begin{aligned} 0 &= F(\bar{z}^{(0)}, \bar{y}^{(0)}, t, 0); \\ \frac{d\bar{y}^{(0)}}{dt} &= \bar{f}(\bar{z}^{(0)}, \bar{y}^{(0)}, t, 0). \end{aligned} \quad (2.8)$$

Внутри погранслоя

$$\begin{aligned} \frac{d\Pi^{(0)}z}{d\tau} &= F(\bar{z}^{(0)}(0) + \Pi^{(0)}z, \bar{y}^{(0)}(0) + \Pi^{(0)}y, 0, 0); \\ \frac{d\Pi^{(0)}y}{d\tau} &= 0. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Начальные условия систем (2.8), (2.9) получим из (2.7), приравняв члены нулевого по  $\mu$ :

$$z_0 = \bar{z}^{(0)}(0) + \Pi^{(0)}z(0); \quad (2.10)$$

$$y_0 = \bar{y}^{(0)}(0) + \Pi^{(0)}y(0).$$

Уравнения (2.8), (2.9) — это система дифференциальных уравнений третьего порядка. В (2.10) четыре начальных значения  $\bar{z}^{(0)}(0)$ ,  $\bar{y}^{(0)}(0)$ ,  $\Pi^{(0)}z(0)$ ,  $\Pi^{(0)}y(0)$  связаны одним конечным соотношением — первым уравнением из (2.8). Три остающихся независимых величины невозможно определить из двух уравнений (2.10). Доопределим задачу. Естественно потребовать, чтобы вне погранслоя решение определялось только слагаемыми  $\bar{z}$ ,  $\bar{y}$ . Применительно к нулевому приближению, это требование приводит к условию  $\Pi^{(0)}z(\tau)$ ,  $\Pi^{(0)}y(\tau) \rightarrow 0$  при  $\tau \rightarrow \infty$ . Условие  $\Pi^{(0)}z(\tau) \rightarrow 0$  выполняется за счет асимптотической устойчивости точек покоя присоединенной системы. Следовательно, условием, доопределяющим задачу, будет

$$\Pi^{(0)}y(\tau) \rightarrow 0 \text{ при } \tau \rightarrow \infty. \quad (2.11)$$

Тогда из второго уравнения (2.9) следует  $\Pi^{(0)}y(\tau) \equiv 0$ , т. е.  $\Pi^{(0)}y(0) = 0$ . Из второго уравнения (2.10) получим  $\bar{y}^{(0)}(0) = y_0$ . Из первого уравнения (2.8), тогда  $\bar{z}^{(0)}(0) = \varphi(y_0, 0, 0)$ , где  $\varphi(y, 0, 0)$  — корень уравнения  $F(\bar{z}^{(0)}, y_0, 0, 0) = 0$ . Наконец, из первого соотношения (2.10) получим

$$\Pi z^{(0)}(0) = z_0 - \bar{z}^{(0)}(0) = z_0 - \varphi(y_0, 0, 0).$$

Таким образом, уравнения нулевого приближения будут:

$$\frac{d\bar{y}^{(0)}}{dt} = f(\bar{z}^{(0)}, \bar{y}^{(0)}, t, 0), \quad \bar{y}(0) = y_0; \quad (2.12)$$

$$0 = F(\bar{z}^{(0)}, \bar{y}^{(0)}, t, 0);$$

$$\frac{d\Pi^{(0)}z}{d\tau} = F(\varphi(y_0) + \Pi^{(0)}z, y_0, 0, 0); \quad (2.13)$$

$$\Pi^{(0)}z(0) = z_0 - \varphi(y_0).$$

Уравнения (2.12) совпадают с уравнениями вырожденной по Тихонову системы. Уравнение (2.13) получается из присоединенной системы заменой  $z = \varphi(y_0) + \Pi^{(0)}z$ .

Подставив (2.2), (2.3), (2.4), (2.5) в (2.6) и собрав члены при  $\mu$ , получим уравнения первого приближения.

Вне погранслоя

$$\begin{aligned}\frac{d\bar{z}^{(0)}}{dt} &= \left(\frac{\partial F_i}{\partial z_j}\right)\bar{z}^{(1)} + \left(\frac{\partial F_i}{\partial y_j}\right)\bar{y}^{(1)} + \left(\frac{\partial F_i}{\partial \mu}\right); \\ \frac{d\bar{y}^{(1)}}{dt} &= \left(\frac{\partial f_i}{\partial z_j}\right)\bar{z}^{(1)} + \left(\frac{\partial f_i}{\partial y_j}\right)\bar{y}^{(1)} + \left(\frac{\partial f_i}{\partial \mu}\right).\end{aligned}\quad (2.14)$$

Элементы матриц  $(\partial F_i/\partial z_j)$ , ... здесь вычисляются в точке  $(\bar{z}_0(t), \bar{y}_0(t))$ .

Уравнения внутри погранслоя:

$$\frac{d\Pi^{(1)}z}{d\tau} = \left(\frac{\partial F_i}{\partial z_j}\right)\Pi^{(1)}z + \left(\frac{\partial F_i}{\partial y_j}\right)\Pi^{(1)}y + G_1(\tau); \quad (2.15)$$

$$\frac{d\Pi^{(1)}}{d\tau} = f(\bar{z}^{(0)}(0) + \Pi^{(0)}z, \bar{y}^{(0)}(0) + \Pi^{(0)}y, 0, 0) \equiv \Pi^{(0)}f(\tau).$$

Элементы матриц  $(\partial F_i/\partial z_j)$ , ... здесь вычисляются в точке  $(\bar{z}^{(0)}(0) + \Pi^{(0)}z(\tau), \bar{y}^{(0)} + \Pi^{(0)}y(\tau), 0, 0)$ , а вектор  $G_1$  — по (2.3) и зависит только от  $\tau$ .

Начальные условия для систем (2.14), (2.15) получим, приравняв в (2.7) слагаемые первого порядка по  $\mu$ :

$$0 = \bar{z}^{(1)}(0) + \Pi^{(1)}z(0); \quad (2.16)$$

$$0 = \bar{y}^{(1)}(0) + \Pi^{(1)}y(0).$$

Как и в (2.11), доопределим задачу условием

$$\Pi^{(1)}y(\tau) \rightarrow 0 \text{ при } \tau \rightarrow \infty. \quad (2.17)$$

Проинтегрируем второе уравнение (2.15):

$$\Pi^{(1)}y(\tau) - \Pi^{(1)}y(0) = \int_0^\tau \Pi^{(0)}f(\tau) d\tau. \quad (2.18)$$

Из (2.17) и (2.18) для  $\tau \rightarrow \infty$  получим

$$\Pi^{(1)}y(0) = - \int_0^\infty \Pi^{(0)}f(\tau) d\tau.$$

Тогда из (2.18)

$$\Pi^{(1)}y(\tau) = \int_\tau^\infty \Pi^{(0)}f(\tau) d\tau.$$

Из второго уравнения (2.16) получим

$$\bar{y}^{(1)}(0) = -\Pi^{(1)}y(0) = \int_0^\infty \Pi^{(0)}f(\tau) d\tau. \quad (2.19)$$



Выражение (2.19) можно трактовать как отклонение по медленной переменной  $y$ , накопившееся за счет переходного процесса в погранслое.

Из первого уравнения (2.14), взятого для  $t=0$ , теперь можно найти  $\bar{z}^{(1)}(0)$ , а затем из первого уравнения (2.16) — начальные условия  $\Pi^{(1)}z(0) = -\bar{z}^{(1)}(0)$ .

Этим построение уравнений первого приближения завершается.

Уравнения следующих приближений строятся совершенно таким же образом. Уравнения произвольного  $k$ -го приближения представляют собой линейную систему, однородная часть которой имеет такой же вид, как у (2.14), (2.15), а слагаемые, зависящие явно от времени, вычисляются из (2.3) по уже найденным предыдущим приближениям. Процедура определения начальных условий выглядит, как для первого приближения: задача доопределяется условием  $\Pi^{(k)}y(\tau) \rightarrow 0$  при  $\tau \rightarrow \infty$ , после чего

$$\bar{y}^{(k)}(0) = \int_0^{\infty} \Pi^{(k-1)}f(\tau) d\tau, \quad \Pi^{(k)}z(0) = -\bar{z}^{(k)}(0). \quad (2.20)$$

В (2.20) через  $\Pi^{(k-1)}f$  обозначен соответствующий член разложения функции  $\Pi f$  из (2.3).

Тем самым процедура построения членов разложения (2.2), (2.4), (2.5) полностью определена.

А. Б. Васильевой доказан ряд важных свойств этого разложения [2].

### 1. Оценка остаточного члена

Построим при помощи изложенного выше алгоритма  $n$  членов асимптотического разложения (2.2), (2.4), (2.5) по переменным  $z$  и  $y$ :

$$z_{(n)}(t, \mu) = \sum_{k=0}^n \mu^k [\bar{z}^{(k)}(t) + \Pi^{(k)}z(t)];$$

$$y_{(n)}(t, \mu) = \sum_{k=0}^n \mu^k [\bar{y}^{(k)}(t) + \Pi^{(k)}y(\tau)].$$

Тогда для остаточного члена разложения справедлива оценка

$$\|z(t, \mu) - z_{(n)}(t, \mu)\| < c\mu^{n+1}, \quad \|y(t, \mu) - y_{(n)}(t, \mu)\| < c\mu^{n+1}; \quad (2.21)$$

$$0 \leq t \leq t_1.$$

Здесь  $c$  — положительная константа;  $t_1$  — величина, оговоренная в формулировке теоремы Тихонова; через  $\|\dots\|$  обозначается норма вектора, определяемая как максимальное значение модуля его компонент. При этом из (2.21) следует, что по всем компонентам векторов  $z$  и  $y$  разность точного и приближенного решений будет величиной порядка  $\mu^{n+1}$ .

## 2. Оценка пограничных функций

Для слагаемых разложения (2.5) внутри пограничного слоя справедлива оценка

$$\|P^{(k)}z(\tau)\| \leq ae^{-\kappa\tau}, \quad \|P^{(k)}y(\tau)\| \leq ae^{-\kappa\tau} \quad (2.22)$$

при  $\tau \geq 0$  и для всех  $k=1, \dots, n$ .

Здесь  $a, \kappa$  — положительные константы.

Из оценок (2.21), (2.22) и условия  $P^{(0)}y \equiv 0$  вытекает следующее дополнение к теореме Тихонова: пусть условие асимптотической устойчивости точки покоя присоединенной системы выполняется в силу уравнений линейного приближения. Тогда разность решений исходной и вырожденной по Тихонову систем будет величиной порядка  $\mu$  по переменной  $y$  на интервале  $0 \leq t \leq t_1$  и по переменной  $z$  на  $0 < t \leq t_1$ .

### § 2.2. Примеры асимптотических разложений

Рассмотрим задачу о вертикальном падении шара в вязкой жидкости из гл. III [1]. Уравнения движения в обозначениях [1] имеют вид

$$m \frac{dV}{dT} = mg - kV, \quad \frac{dX}{dT} = V; \quad V(0) = V_0, \quad X(0) = X_0. \quad (2.23)$$

Проведем нормализацию уравнений (2.23):

$$t = \frac{T}{T_*}, \quad x = \frac{X}{X_*}, \quad v = \frac{V}{V_*},$$

где  $T_*, X_*, V_*$  — характерные значения соответствующих величин.

В движении системы (2.23) можно усмотреть три постоянных времени:  $T_1 = V/g$  — характерное время изменения скорости за счет силы тяжести,  $T_2 = m/k$  — характерное время изменения скорости за счет силы трения,  $T_3 = X_*/V_*$  — характерное время всего процесса падения.

Рассмотрим класс движения «в большом», когда характерная скорость  $V_*$  равна установившейся скорости падения

$mg/k$ , а характерное время  $T$ , равно  $T_3$ . Проведя нормализацию (2.24) для этого класса, приведем (2.23) к виду

$$\mu \frac{dv}{dt} = 1 - v, \quad \frac{dx}{dt} = v; \quad v(0) = v_0, \quad x(0) = x_0; \quad (2.25)$$

$$\mu = T_1/T_3 \ll 1.$$

Запишем по (2.12), (2.13) уравнения нулевого приближения.

Вне погранслоя

$$\frac{d\bar{x}^{(0)}}{dt} = \bar{v}^{(0)}, \quad 0 = 1 - \bar{v}^{(0)}; \quad \bar{x}^{(0)} = x_0.$$

Внутри погранслоя

$$\frac{d\Pi^{(0)}v}{d\tau} = -\Pi^{(0)}v; \quad \Pi^{(0)}v = v_0 - 1.$$

Из этих уравнений следует:

$$\bar{x}^{(0)} = x_0 + t, \quad \bar{v}^{(0)} = 1; \quad \Pi^{(0)}v = (v_0 - 1)e^{-\tau}. \quad (2.26)$$

По (2.14), (2.15) уравнения первого приближения вне погранслоя

$$\frac{d\bar{x}^{(1)}}{dt} = \bar{v}^{(1)}, \quad 0 = -\bar{v}^{(1)}; \quad \bar{x}^{(1)}(0) = v_0 - 1. \quad (2.27)$$

Начальное условие в (2.27) вычислено по (2.19), (2.26):

$$\bar{x}^{(1)}(0) = \int_0^\infty \Pi^{(0)}f(\tau) d\tau = \int_0^\infty \Pi^{(0)}v d\tau = \int_0^\infty (v_0 - 1)e^{-\tau} d\tau = v_0 - 1.$$

Из (2.27) имеем  $\bar{x}^{(1)} = v_0 - 1$ . Отсюда и из (2.26) получим частичную сумму двух членов разложения  $x$  вне погранслоя

$$\bar{x}_{(1)} = x_0 + t + \mu(v_0 - 1). \quad (2.28)$$

Сравним полученное приближение с точным решением по  $x$  исходной системы (2.25):

$$x = x_0 + t + \mu(v_0 - 1) + [(1 - v_0)\mu e^{-t/\mu}]. \quad (2.29)$$

Слагаемое в (2.29), заключенное в квадратные скобки, — это функция погранслоя. Сравнение (2.28) и (2.29) показывает, что медленные составляющие движения обоих выражений совпадают. Малый добавок  $\mu(v_0 - 1)$  по координате  $x$  к закону равномерного движения  $x_0 + t$  накопился в погранслое из-за того, что в погранслое скорость не совпадает с установившейся скоростью падения.

Рассмотрим задачу о движении маятника в сильно вязкой среде из гл. IV [1]. Уравнения движения в обозначениях [1] имеют вид

$$T_1 \frac{d\Omega}{dT} = -\frac{1}{T_2} \sin \Phi - \Omega; \quad \Omega(0) = \Omega_0; \quad (2.30)$$

$$\frac{d\Phi}{dT} = \Omega; \quad \Phi(0) = \Phi_0.$$

Здесь  $T_1 = I/N$ ,  $T_2 = N/mgl$  — постоянные времени задачи. После нормализации для класса движения в сильно вязкой среде ( $T_1 \ll T_2$ ) на большие углы ( $\Phi_0 = 1$ ), за большое время  $T_2 = T$ , со скоростью  $\Omega_0 = \Phi_0/T_2$  уравнения (2.30) приводятся к виду

$$\mu \frac{d\omega}{dt} = -\sin \varphi - \omega; \quad \omega(0) = T_2 \Omega_0; \quad (2.31)$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = \omega; \quad \varphi(0) = \Phi_0; \quad \mu = T_1/T_2 \ll 1.$$

По (2.12) уравнения нулевого приближения вне погранслоя имеют вид

$$0 = -\sin \bar{\varphi}^{(0)} - \bar{\omega}^{(0)}, \quad \frac{d\bar{\varphi}^{(0)}}{dt} = \bar{\omega}^{(0)}; \quad \bar{\varphi}^{(0)}(0) = \varphi_0. \quad (2.32)$$

Уравнения (2.32), естественно, совпадают с вырожденными по Тихонову уравнениями. Исключив в (2.32) переменную  $\bar{\omega}^{(0)}$ , получим

$$\frac{d\bar{\varphi}^{(0)}}{dt} = -\sin \bar{\varphi}^{(0)}; \quad \bar{\varphi}^{(0)}(0) = \varphi_0. \quad (2.33)$$

Уравнения нулевого приближения внутри погранслоя по (2.13)

$$\frac{d\Pi^{(0)}\omega}{d\tau} = -\Pi^{(0)}\omega; \quad \Pi^{(0)}\omega(0) = \omega_0 + \sin \varphi_0. \quad (2.34)$$

Из (2.34) имеем

$$\Pi^{(0)}\omega = (\omega_0 + \sin \varphi_0) e^{-\tau}. \quad (2.35)$$

По (2.14) уравнениями первого приближения вне погранслоя будут

$$\frac{d\bar{\omega}^{(0)}}{dt} = -\bar{\omega}^{(1)} - \cos \bar{\varphi}^{(0)} \cdot \bar{\varphi}^{(1)}, \quad \frac{d\bar{\varphi}^{(1)}}{dt} = \bar{\omega}^{(1)}. \quad (2.36)$$

Подставив в первое уравнение (2.36) значение  $\bar{\omega}^{(0)}$  из (2.32) и исключив в (2.36) переменную  $\bar{\omega}^{(1)}$ , получим

$$\frac{d\bar{\varphi}^{(1)}}{dt} = -\cos \bar{\varphi}^{(0)} \cdot \bar{\varphi}^{(1)} - \sin \bar{\varphi}^{(0)} \cdot \cos \bar{\varphi}^{(0)}. \quad (2.37)$$

Определим по (2.19) и (2.35) начальное значение:

$$\bar{\varphi}^{(1)}(0) = \int_0^{\infty} \Pi^{(0)} \omega d\tau = \omega_0 + \sin \varphi_0. \quad (2.38)$$

Ограничимся построением частичной суммы

$$\bar{\varphi}_{(1)}(t) = \bar{\varphi}^{(0)}(t) + \mu \bar{\varphi}^{(1)}(t) \quad (2.39)$$

и проведем оценку точности приближения для конкретных числовых значений малого параметра.

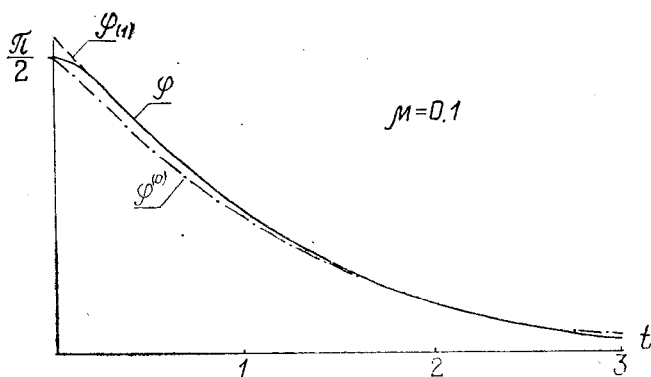


Рис. 7

На рис. 7 для  $\mu=0.1$ ,  $\varphi(0)=\pi/2$ ,  $\omega(0)=0$  приведены графики зависимости от времени точного решения по ф системы (2.31), приближенного решения  $\bar{\varphi}^{(0)}$  системы (2.33) и приближенного решения  $\varphi_{(1)}$ , определяемого по (2.39), (2.33), (2.37), (2.38). На рис. 8 аналогичное построение сделано для  $\mu=0.25$  и тех же начальных условий. Интегрирование рассматриваемых уравнений проводилось на ЦВМ.

Из сравнения графиков можно сделать вывод, что в данной задаче асимптотические разложения обеспечивают

удовлетворительную точность приближения при весьма значительных величинах малого параметра. Видно далее, что вторым членом разложения  $\mu\varphi^{(1)}$  эффективно улавливается отклонение за счет переходного процесса в погран-

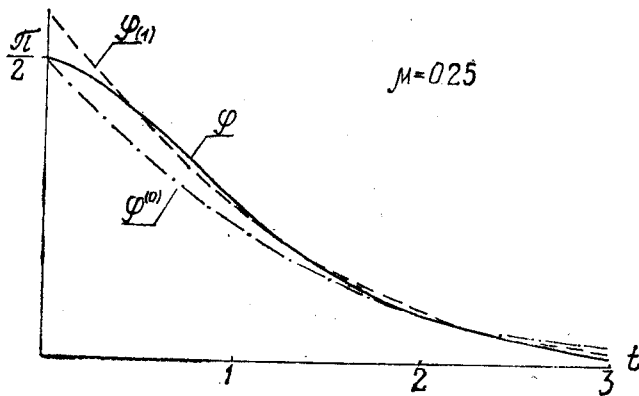


Рис. 8

слое. Эти явления становятся особо ощутимыми при «больших» значениях малого параметра.

### Глава 3

## МЕТОД ОСРЕДНЕНИЯ

### § 3.1. Схема осреднения В. М. Волосова

Рассмотрим систему с сильно разнесенными постоянными времени. В отличие от постановок предыдущей главы будем считать, что быстрые составляющие движения имеют незатухающий характер. Это может быть либо за счет незатухающих собственных высокочастотных колебаний, либо за счет высокочастотных незатухающих возмущений. В такой ситуации, как указывается в § 2, гл. IV [1], для разделения движений воспользоваться теоремой Тихонова нельзя. В этих случаях разделение движений осуществляется за счет тех или иных разновидностей метода осреднения [12, 13].

Пусть система уравнений движения имеет вид

$$\begin{aligned} T_1 \frac{dz}{dT} &= F\left(z, y, \frac{T}{T_B}\right), \quad z(0) = z_0; \\ T_2 \frac{dy}{dT} &= f\left(z, y, \frac{T}{T_B}\right), \quad y(0) = y_0. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Здесь  $T_1 \ll T_2$ , а характерное время возмущения является величиной порядка, меньшей постоянной времени  $T_1 = T_B \nu$ , ( $\nu \sim 1$ ).

Как и в [1], попытаемся прежде всего построить приближенную систему, описывающую в нулевом по  $\mu = T_1/T_2$  приближении движение системы по медленным составляющим движения на большом интервале времени  $T_2$ .

Напомним, что попытка взять при нормализации системы (3.1) характерное время  $T_2 = T_2$  приводит в правых частях (3.1) к особенностям вида  $1/\mu$ .

Поэтому остается выбрать  $T_2 = T_1$ . Система (3.1) примет вид

$$\begin{aligned} \frac{dz}{d\tau} &= F(z, y, \nu\tau), \quad z(0) = z_0; \\ \frac{dy}{d\tau} &= \mu f(z, y, \nu\tau), \quad y(0) = y_0, \quad \left(\tau = \frac{T}{T_1}\right). \end{aligned} \quad (3.2)$$

Система (3.2), на первый взгляд, регулярно зависит от малого параметра. Однако попытка построить приближенное решение при помощи теоремы Пуанкаре [1, гл. III] встречает препятствие. Дело в том, что разложения типа Пуанкаре строились для конечного интервала времени  $\tau$  системы (3.2), т. е. для интервала  $T_1$  исходного времени  $T$ . Нами же поставлена задача построения приближенного решения на интервале  $T_2$  исходного времени, т. е. на интервале  $1/\mu$  во времени  $\tau$ .

Видно, что здесь, как и в гл. IV, [1], одна и та же задача может рассматриваться в двух эквивалентных постановках: либо в медленном времени, когда интервал изменения времени ограничен, а в правых частях уравнений возникают особенности вида  $1/\mu$ , либо в быстром времени, когда особенности исчезают, зато интервал времени становится величиной порядка  $1/\mu$ .

Изложим схему осреднения в форме, предложенной В. М. Волосовым [12]. Рассмотрим систему несколько более

общего, чем (3.2), вида, записанную в быстром времени  $\tau$ :

$$\begin{aligned}\frac{dz}{d\tau} &= F(z, y, \tau, \mu), \quad z(0) = z_0; \\ \frac{dy}{d\tau} &= \mu f(z, y, \tau, \mu), \quad y(0) = y_0.\end{aligned}\tag{3.3}$$

Здесь  $z, y$  — векторы произвольной размерности;  $\mu \ll 1$  — малый параметр.

Перечислим операции, которые нужно провести, чтобы построить уравнения нулевого приближения для медленной переменной  $y$ .

Получим систему уравнений нулевого приближения по быстрым переменным, полагая в первой группе уравнений  $\mu=0$  и  $y=\text{const}$ :

$$\frac{dz}{d\tau} = F(z, y, \tau, 0), \quad z(0) = z_0.\tag{3.4}$$

Систему (3.4) по [17] назовем порождающей системой уравнений. Обозначим через  $z=\varphi(y, \tau)$  ее решение. Оно зависит от  $y$  как от параметра.

Подставим в правую часть второй группы уравнений (3.3) решение, порождающей системы  $z=\varphi(y, \tau)$  и примем  $\mu=0$ .

Проведем осреднение построенной функции  $f(\varphi(y, \tau), y, \tau, 0)$  по явно входящему времени  $\tau$ , считая  $y$  параметром:

$$\bar{f}(y) = \lim_{\tau_1 \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau_1} \int_0^{\tau_1} f(\varphi(y, \tau), y, \tau, 0) d\tau.\tag{3.5}$$

Поскольку  $\tau$  в выражение  $f(\varphi(y, \tau), y, \tau, 0)$  входит через решение  $z=\varphi(y, \tau)$ , то осреднение (3.5) часто называют осреднением по траекториям порождающей системы.

Уравнения для нулевого приближения  $y^{(0)}$  медленной переменной  $y$  записываются теперь в виде

$$\frac{dy^{(0)}}{d\tau} = \mu \bar{f}(y^{(0)}), \quad y^{(0)}(0) = y_0.\tag{3.6}$$

В [12] доказывается теорема о том, что решение осредненной системы (3.6) с погрешностью  $\mu$  асимптотически приближает решение исходной системы (3.3) по переменной  $y$  на интервале изменения  $\tau$  порядка  $1/\mu$ . Таким образом, задача, поставленная выше, решается.



В [12] приведен перечень требований, при выполнении которых указанная теорема выполняется. Среди наиболее существенных упомянем требование непрерывности функций  $F, f$  из (3.3) и требование независимости результата осреднения (3.5) от начальных условий порождающей системы (3.4).

В [12] приведен алгоритм, позволяющий построить приближенные решения с заданным порядком погрешности по  $\mu$ . Эти решения имеют вид асимптотических разложений по степеням  $\mu$ . Рассматриваются случаи, когда уравнения динамической системы допускают применение метода осреднения после дополнительных преобразований, расширяющих состав медленных переменных: случай, когда результат осреднения (3.5) зависит от начальных условий порождающей системы, резонансные случаи, ситуации, когда правые части уравнений зависят и от быстрого, и от медленного времени.

### § 3.2. Пример: ламповый генератор в «мягком» режиме возбуждения

В гл. IV, [1] известные уравнения лампового генератора [14, 21] записывались в форме

$$T_1^2 \frac{dV}{dT} = [T_2 V - AV^3] - I; \quad (3.7)$$

$$\frac{dI}{dT} = V; \quad T_1^2 = LC; \quad T_2 = f'(0)M - RC.$$

Здесь приняты обозначения [1], для работы устройства в режиме генератора следует считать  $T_2 > 0$ . При работе генератора в «мягком» режиме его параметры должны удовлетворять условию  $T_2 \ll T_1$ . В этом случае нормализацию уравнений (3.7) надо проводить иначе, чем в [1], где рассматривался релаксационный режим работы.

Проведем необходимую для нормализации оценку величин, входящих в (3.7). Приведем (3.7) к виду

$$T_1^2 \frac{d^2 I}{dT^2} - \left[ T_2 - A \left( \frac{dI}{dT} \right)^2 \right] \frac{dI}{dT} + I = 0. \quad (3.8)$$

Система (3.7), (3.8) имеет положение равновесия  $I=0$ ,  $dI/dT=V=0$ . Устойчивость этого равновесия оценим из уравнения первого приближения

$$T_1^2 \frac{d^2 I}{dT^2} - T_2 \frac{dI}{dT} + I = 0. \quad (3.9)$$

Из (3.9) видно, что при  $T_2 \ll T_1$  движение по  $I$  имеет колебательный, слабо расходящийся характер с частотой, близкой к  $1/T_1$ . Из (3.8) можно заключить, что при «больших» значениях  $dI/dT$  определяющим в характере диссипации является член  $A(dI/dT)^2$ . Поэтому можно ожидать, что «большие» колебания имеют затухающий характер. Можно ожидать, что при некоторых «средних» амплитудах колебаний наступит баланс факторов, возбуждающих колебания и демпфирующих их:  $T_2 - A(dI/dT)^2 \approx 0$ . Тогда в системе установятся колебания с частотой  $1/T_1$  и некоторой характерной амплитудой  $I_*$ . Для них

$$I \approx I_* \sin \frac{T}{T_1}, \quad \frac{dI}{dT} = V \approx \frac{I_*}{T_1} \cos \frac{T}{T_1}.$$

Поэтому при нормализации уравнений (3.7) примем  $\tau = T/T_1$ ,  $i = I/I_*$ ,  $v = VT_1/I_*$ .

Получим

$$\frac{dv}{d\tau} = \frac{T_2}{T_1} \left[ 1 - A \left( \frac{I_*}{T_1} \right)^2 \frac{1}{T_2} v^2 \right] v - i; \quad (3.10)$$

$$\frac{di}{d\tau} = v.$$

При установившихся колебаниях слагаемые в квадратной скобке имеют одинаковый порядок. Поэтому величину  $I_*$  выберем так, чтобы

$$A \left( \frac{I_*}{T_1} \right)^2 \frac{1}{T_2} = 1. \quad (3.11)$$

Тогда уравнения (3.10) примут вид

$$\frac{dv}{d\tau} = \mu(1-v^2)v - i; \quad (3.12)$$

$$\frac{di}{d\tau} = v, \quad \mu = \frac{T_2}{T_1} \ll 1.$$

Уравнения (3.12) не позволяют применить метод осреднения, так как в (3.12) переменные не разделены на быстрые и медленные. Систему можно привести к требуемому виду, проделав в ней замену переменных.

Проведем рассуждения, помогающие определить вид замены. Рассмотрим (3.12) при  $\mu=0$ :

$$\frac{dv}{d\tau} = -i, \quad \frac{di}{d\tau} = v. \quad (3.13)$$

Решением системы (3.13) будет

$$i = a \sin \theta, \quad v = a \cos \theta, \quad (3.14)$$

где  $a, \theta$  — амплитуда и фаза колебаний:  $a = \text{const}$ ,  $\theta = 1 \cdot \tau$ . Величины  $a, \theta$  удовлетворяют дифференциальным уравнениям

$$\frac{da}{d\tau} = 0, \quad \frac{d\theta}{d\tau} = 1. \quad (3.15)$$

Следовательно, соотношения (3.14) можно трактовать как замену переменных от  $i, v$  к  $a, \theta$ , переводящую систему (3.13) в (3.15).

Можно ожидать, что замена (3.14) переведет систему (3.12) в уравнения, которые будут отличаться от (3.15) на слагаемые  $\mu$ :

$$\frac{da}{d\tau} = \mu(\dots), \quad \frac{d\theta}{d\tau} = 1 + \mu(\dots). \quad (3.16)$$

Переменные в (3.16) уже разделяются на быстрые и медленные.

Подставим (3.14) в (3.12), считая  $a, \theta$  новыми переменными, изменяющимися во времени. Прделав выкладки, получим

$$\begin{aligned} \frac{da}{d\tau} &= \mu g(a \cos \theta) \cos \theta; \\ \frac{d\theta}{d\tau} &= 1 - \mu \frac{1}{a} g(a \sin \theta) \sin \theta. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Здесь  $g(v) = v - v^3$ ;  $a$  — медленная,  $\theta$  — быстрая переменные.

Составим по (3.5), (3.6) уравнение для нулевого приближения медленной переменной  $a$ .

Порождающая для (3.17) система имеет вид

$$\frac{d\theta}{d\tau} = 1, \quad \theta(0) = \theta_0,$$

где  $\theta_0$  — начальное значение фазы. Решение порождающей системы  $\theta = \tau + \theta_0$  подставим в правую часть первого уравнения из (3.17):

$$g(a \cos \theta) \cos \theta \equiv (a \cos \theta - a^3 \cos^3 \theta) \cos \theta = \\ = \frac{a}{2} \left( 1 - \frac{3}{4} a^2 \right) + \frac{a}{2} (1 - a^2) \cos 2\theta - \frac{a^3}{8} \cos 4\theta.$$

Осредним полученное выражение по  $\tau$ , считая  $a = \text{const}$ . Учитывая, что среднее от константы равно самой константе, а среднее от гармонической функции равно нулю, получим

$$\lim_{\tau_1 \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau_1} \int_0^{\tau_1} g(a \cos(\tau + \theta_0)) \cos(\tau + \theta_0) d\tau = \frac{a}{2} \left( 1 - \frac{3}{4} a^2 \right).$$

Уравнение для нулевого приближения  $a^{(0)}$  медленной переменной  $a$  будет иметь вид

$$\frac{da^{(0)}}{d\tau} = \mu \frac{a^{(0)}}{2} \left[ 1 - \frac{3}{4} (a^{(0)})^2 \right], \quad a^{(0)}(0) = a_0. \quad (3.18)$$

Исследуем уравнение (3.18). Найдем стационарные решения  $a^{(0)} = \text{const}$ . Приравняв нулю правую часть (3.18), получим два стационарных решения  $a_1^{(0)} = 0$ ,  $a_2^{(0)} = 2/\sqrt{3}$ .

Исследуем их устойчивость. На интервале  $(a_1^{(0)}, a_2^{(0)})$  из (3.18) имеем  $da^{(0)}/d\tau > 0$ , на интервале  $(a_2^{(0)}, \infty)$  будет  $da^{(0)}/d\tau < 0$ . Отсюда следует, что  $a_1^{(0)} = 0$  — неустойчивое стационарное решение, ему отвечает неустойчивое положение равновесия исходной системы (3.12). Решение  $a_2^{(0)} = 2/\sqrt{3}$  — устойчивое, ему соответствуют устойчивые гармонические колебания исходной системы, так называемый автоколебательный режим.

Амплитуду автоколебаний  $I_{max}$  в исходных размерных обозначениях найдем при помощи (3.11)

$$I_{max} = I_* a_2^{(0)} = 2T_1 \sqrt{\frac{T_2}{3A}}.$$

Безразмерная частота автоколебаний с точностью нулевого порядка по  $\mu$  определяется из (3.17):

$$\frac{d\theta^{(0)}}{d\tau} = 1. \quad (3.19)$$

Частота колебаний в размерном времени  $T$  равна  $d\theta^{(0)}/dT = 1/T_1$ .

Заметим, что саму быструю переменную  $\theta^{(0)}$  нельзя определить из уравнения (3.19) с точностью нулевого по  $\mu$  порядка. Отброшенные в (3.19) члены первого по  $\mu$  при интегрировании на большом интервале времени  $1/\mu$  могут привести к накоплению погрешности и дать ошибку по фазе порядка единицы. Эта ситуация качественно иллюстрируется рис. 9, где сплошной линией представлено решение по  $i$  для

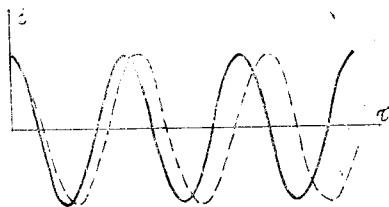


Рис. 9

точной системы (3.17), а пунктирной — решение системы (3.18), (3.19).

Чтобы получить решение нулевого приближения по быстрой переменной  $\theta$ , нужно построить более точные, чем (3.18), (3.19), приближенные уравнения, из которых медленная переменная  $a$  будет отыскиваться уже с точностью порядка  $\mu$ . Такое соотношение между точностью определения быстрых и медленных переменных на каждом шаге приближений является общим свойством изучаемых систем [17].

## Глава 4

### МЕТОД ГАРМОНИЧЕСКОЙ ЛИНЕАРИЗАЦИИ

#### § 4.1. Основные положения метода

Решение задачи об автоколебаниях лампового генератора в § 3.2 наглядно выявляет одну из значительных трудностей в использовании метода осреднения. Она состоит в том, что система уравнений должна быть предварительно записана в форме (3.2), разделяющей переменные на быстрые и медленные. Иногда это разделение переменных получается в ходе нормализации исходных уравнений, как в гл. II [1]. Зачастую для этого приходится проделывать вспомога-

ные замены переменных типа (3.14) из § 3.2. Такие замены находятся далеко не тривиально. Авторство наиболее удачных из них указывается в научной литературе самым тщательным образом. Вид замены зачастую поддается структуре решения каким-либо образом упрощенной системы, как это, например, сделано в § 3.2. Тем самым, решение строится на классе функций, так или иначе его приближающих.

Аналогичные рассуждения лежат в основе метода гармонической линеаризации [15]. При помощи этого метода отыскиваются периодические решения нелинейных систем. В качестве функций, на которых строятся решения, берутся гармонические функции, априори достаточно близко приближающие искомое периодическое решение. Простота гармонических функций обусловила простоту метода, который является одним из наиболее употребительных в практике инженерных расчетов.

При использовании метода дифференциальные уравнения системы можно не приводить к форме Коши, нормализация уравнений и введение малого параметра могут не проводиться. Поясним идею метода для частного вида системы, когда все уравнения линейны, кроме одного. В это уравнение входит одна нелинейная функция, которая зависит от одной из переменных системы и может быть ее производной. Система стационарна. Ряд других случаев рассматривается в [15].

Запишем уравнения системы:

$$\begin{aligned} A_{11}(D)x_1 + \dots + A_{1m}(D)x_m &= 0; \\ A_{k1}(D)x_1 + \dots + A_{km}(D)x_m + f(x_i, Dx_i) &= 0; \\ A_{m1}(D)x_1 + \dots + A_{mm}(D)x_m &= 0. \end{aligned} \quad (4.1)$$

Здесь  $x_1, \dots, x_i, \dots, x_m$  — переменные системы;  $A_{11}(D), \dots$  — полиномы от оператора дифференцирования  $D = d/dt$  по времени  $t$ ;  $f(x_i, Dx_i)$  — нелинейная функция.

Обозначив в (4.1) для простоты  $x_i = x$  и исключив все остальные переменные, приведем (4.1) к виду

$$Q(D)x = -R(D)f(x, Dx), \quad (4.2)$$

где  $Q(D), R(D)$  — полиномы от  $D$ .

Изобразим на рис. 10 блок-схему, соответствующую (4.2). Первое допущение метода состоит в том, что входом

нелинейного звена на рис. 10 принимается гармоническая функция времени

$$x = a \sin \Omega t, \quad (4.3)$$

где  $a$  и  $\Omega$  — неизвестные амплитуда и частота искомого периодического решения.

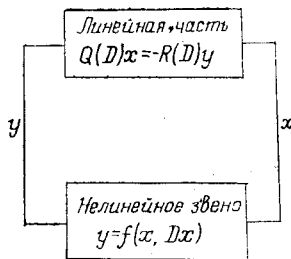


Рис. 10

При этом  $Dx = a\Omega \cos \Omega t$ , а нелинейная функция

$$f(x, Dx) = f(a \sin \Omega t, a\Omega \cos \Omega t) = f(\theta) \quad (4.4)$$

становится периодической функцией времени  $t$  или фазы  $\theta = \Omega t$ .

Периодическую функцию (4.4), как известно, можно разложить в ряд Фурье

$$f(\theta) = A_0 + A_1 \sin \theta + B_1 \cos \theta + A_2 \sin 2\theta + \dots \quad (4.5)$$

Ограничимся далее нелинейностями, для которых  $A_0 = 0$ , и запишем выражения для  $A_1, B_1$ :

$$A_1(a, \Omega) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) \sin \theta d\theta; \quad (4.6)$$

$$B_1(a, \Omega) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) \cos \theta d\theta.$$

Второе допущение метода состоит в том, что в разложении (4.5) отбрасываются гармоники второй и более высокой кратности по  $\theta$ . Тогда

$$f(x, Dx) = f(\theta) = A_1 \sin \theta + B_1 \cos \theta. \quad (4.7)$$

Учитывая, что на периодическом движении

$$x = a \sin \Omega t = a \sin \theta, \quad Dx = a\Omega \cos \Omega t = a\Omega \cos \theta,$$

соотношение (4.7) можно переписать в виде

$$f(x, Dx) = qx + q_1 \frac{1}{\Omega} Dx; \quad (4.8)$$

$$q(a, \Omega) = A_1/a, \quad q_1(a, \Omega) = B_1/a.$$

Таким образом, на искомом периодическом движении нелинейная функция  $f(x, Dx)$  приближается линейным выражением (4.8). Эта операция называется гармонической линеаризацией.

Уравнение (4.2) с учетом (4.8) на искомом периодическом движении принимает вид

$$Q(D)x = -R(D) \left( qx + q_1 \frac{1}{\Omega} Dx \right). \quad (4.9)$$

Это уравнение — линейное, с постоянными коэффициентами, зависящими от неизвестных  $a, \Omega$ .

Для того чтобы оправдалось первое допущение метода, уравнение (4.9) должно иметь гармоническое решение. При этом характеристический полином для (4.9)

$$L(p) = Q(p) + R(p) \left( q + q_1 \frac{p}{\Omega} \right). \quad (4.10)$$

должен иметь мнимый корень  $p = i\omega$ , у которого величина  $\omega$  совпадает со значением искомой частоты  $\Omega$ .

Подставим  $p = i\omega$  в (4.10) и разнесем вещественную и мнимую части полученного выражения:

$$L(i\omega) = X(\omega, \Omega, a) + iY(\omega, \Omega, a). \quad (4.11)$$

Приравняем нулю вещественную и мнимую часть в (4.11) и примем  $\omega = \Omega$ :

$$X(\omega, \Omega, a) |_{\omega=\Omega} = 0, \quad Y(\omega, \Omega, a) |_{\omega=\Omega} = 0. \quad (4.12)$$

Корни  $a = a_0, \Omega = \Omega_0$  системы (4.12) дают значения амплитуды и частоты искомого решения.

Оценим условие, при котором оправдывается второе допущение метода о пренебрежении высшими гармониками разложения (4.5). Как видно из блок-схемы на рис. 10, для этого требуется, чтобы при прохождении сигнала  $y = f(\theta) = f(\Omega_0 t)$  через линейную часть системы высшие гармоники частоты  $2\Omega_0, 3\Omega_0, \dots$  существенно ослаблялись по сравнению с гармоникой основной частоты  $\Omega_0$ . Это условие называется условием фильтра [15].

После того как периодическое решение найдено, необходимо провести исследование его устойчивости. Если малые



отклонения от периодического решения со временем убывают, то оно асимптотически устойчиво. Такие периодические движения называются автоколебаниями. Если малые отклонения возрастают, то неустойчивое периодическое решение определяет так называемую границу начальных условий, разделяющую фазовое пространство на области, в которых фазовые траектории расходятся от периодического решения.

Один из возможных способов оценки устойчивости связан с использованием известного критерия Михайлова. Построим годограф функции  $L(i\omega) = X(\omega, \Omega_0, a_0) + iY(\omega, \Omega_0, a_0)$ , определяемой уравнением (4.11) при  $a = a_0$ ,  $\Omega = \Omega_0$ . Годографом называется кривая, которая вычерчивается точкой  $(X, Y)$  в комплексной плоскости этих переменных при изменении параметра  $\omega$  в пределах от нуля до бесконечности. Как видно из (4.12), годограф проходит через начало координат при значении параметра  $\omega = \Omega_0$ . По критерию Михайлова, такой вид годографа отвечает границе асимптотической устойчивости линеаризованной системы (4.9).

Дадим малое приращение амплитуде найденного периодического решения  $a = a_0 + \Delta a$  и построим годограф, соответствующий этому значению величины  $a$ . Естественно, годограф уже не будет проходить через начало отсчета. Начало либо окажется «внутри» годографа, будет охватываться им, либо «снаружи» от него. (Более аккуратные определения этих геометрических ситуаций можно вспомнить, обратившись к [15].) Первый случай по критерию Михайлова соответствует асимптотической устойчивости системы (4.9), второй — неустойчивости.

Обе ситуации можно различить по относительному расположению вектора касательной к годографу в точке  $\omega = \Omega_0$ ,  $a = a_0$  и вектора приращения  $\overline{\Delta L}$  за счет приращения  $\Delta a$ . Несложный геометрический анализ приводит к следующей аналитической записи условия асимптотической устойчивости периодического решения:

$$\left(\frac{\partial Y}{\partial \omega}\right)_0 \left(\frac{\partial X}{\partial a}\right)_0 - \left(\frac{\partial Y}{\partial a}\right)_0 \left(\frac{\partial X}{\partial \omega}\right)_0 > 0, \quad (4.13)$$

где нижний индекс при скобках означает, что значения производных берутся в точке  $\omega = \Omega_0$ ,  $a = a_0$ . Если выражение в левой части (4.13) отрицательно, то периодическое решение неустойчиво.

## § 4.2. Примеры

Рассмотрим задачу о ламповом генераторе в «мягком» режиме возбуждения из § 3.2. В уравнениях (3.12) исключим переменную  $v$

$$\frac{d^2 i}{d\tau^2} - \mu \left[ 1 - \left( \frac{di}{d\tau} \right)^2 \right] \frac{di}{d\tau} + i = 0. \quad (4.14)$$

Проведем гармоническую линеаризацию уравнения (4.14) по (4.8):

$$\frac{d^2 i}{d\tau^2} - \mu q_1 \frac{1}{\Omega} \frac{di}{d\tau} + i = 0, \quad (4.15)$$

где  $q_1 \equiv 0$ , так как нелинейная функция  $[1 - (di/d\tau)^2] di/d\tau$  не зависит от переменной  $i$ .

По (4.8), (4.6)

$$q_1 = \frac{1}{a} B_1, \quad B_1 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} (1 - a^2 \cos^2 \theta) a \cos^2 \theta d\theta.$$

Осреднение периодической функции по периоду дает здесь такой же результат, как осреднение точно такой же функции в § 3.2 по бесконечному интервалу. Поэтому

$$q_1 = \frac{1}{\pi a} \cdot \frac{a}{2} \left( 1 - \frac{3}{4} a^2 \right) = \frac{1}{2\pi} \left( 1 - \frac{3}{4} a^2 \right).$$

Уравнение (4.15) примет вид

$$\frac{d^2 i}{d\tau^2} - \mu \frac{1}{2\pi\Omega} \left( 1 - \frac{3}{4} a^2 \right) \frac{di}{d\tau} + i = 0.$$

Соответствующее характеристическое уравнение будет

$$L(p) = p^2 - \mu \frac{1}{2\pi\Omega} \left( 1 - \frac{3}{4} a^2 \right) p + 1 = 0.$$

Условие существования периодического решения по (4.12)

$$X = (1 - \omega^2) \Big|_{\omega=a} = 1 - \Omega^2 = 0;$$

$$Y = \mu \frac{\omega}{2\pi\Omega} \left( 1 - \frac{3}{4} a^2 \right) \Big|_{\omega=\Omega} = \frac{\mu}{2\pi} \left( 1 - \frac{3}{4} a^2 \right) = 0.$$

Отсюда  $\Omega_0 = 1$ ,  $a_0 = 2/\sqrt{3}$ . Исследуем по (4.13) устойчивость этого решения:

$$\left( \frac{\partial X}{\partial a} \right)_0 \left( \frac{\partial Y}{\partial \omega} \right)_0 - \left( \frac{\partial Y}{\partial a} \right)_0 \left( \frac{\partial X}{\partial \omega} \right)_0 = \frac{3\mu a_0}{\pi} > 0.$$

Следовательно, найденному периодическому движению отвечает точно такой же устойчивый автоколебательный режим, как в § 3.2.

Исследуем движение следящей системы по углу с учетом вязкого и сухого трения по оси вала и с учетом запаздывания в цепи усиления. Аналогично (1.4) запишем уравнения:

$$\begin{aligned} I \frac{d^2\varphi}{dt^2} &= -N \frac{d\varphi}{dt} - F \left( \frac{d\varphi}{dt} \right) + cu; \\ \tau \frac{du}{dt} + u &= -k\varphi, \quad F \left( \frac{d\varphi}{dt} \right) = F_0 \operatorname{sign} \left( \frac{d\varphi}{dt} \right), \end{aligned} \quad (4.16)$$

где угол поворота входного вала принят равным нулю, управление производится по угловому рассогласованию  $\varphi$ ;  $I$  — момент инерции;  $N$  — коэффициент вязкого трения;  $F(d\varphi/dt)$  — релейная характеристика сухого трения;  $c$  — коэффициент двигателя по управляющему напряжению  $u$ ;  $k$ ,  $\tau$  — коэффициент усиления и постоянная времени усилителя.

Проведем линеаризацию системы (4.16). Коэффициент линеаризации релейной функции  $F$  возьмем из таблицы коэффициентов линеаризации для типовых нелинейностей [15]. Система (4.16) примет вид

$$\begin{aligned} I \frac{d^2\varphi}{dt^2} + N \frac{d\varphi}{dt} + \frac{4F_0}{\pi a \Omega} \cdot \frac{d\varphi}{dt} - cu &= 0; \\ \tau \frac{du}{dt} + u + k\varphi &= 0. \end{aligned} \quad (4.17)$$

Характеристический полином системы (4.17)

$$L(p) = I \tau p^3 + \left( N \tau + \frac{4F_0}{\pi a \Omega} \tau + I \right) p^2 + \left( N + \frac{4F_0}{\pi a \Omega} \right) p + K;$$

$$K = ck.$$

Отсюда

$$X = - \left( N \tau + \frac{4F_0}{\pi a \Omega} \tau + I \right) \omega^2 + K; \quad (4.18)$$

$$Y = - I \tau \omega^3 + \left( N + \frac{4F_0}{\pi a \Omega} \right) \omega.$$

Из уравнения  $Y|_{\omega=0} = 0$  по (4.18) найдем

$$\Omega^2 = \frac{N + 4E_0/\pi a \Omega}{I \tau}. \quad (4.19)$$

Исключив  $\Omega^2$  из уравнения  $X|_{\omega=\Omega}=0$ , получим

$$-\left(N\tau + \frac{4F_0}{\pi a \Omega} \tau + I\right) \frac{(N + 4F_0/\pi a \Omega)}{I\tau} + K = 0, \quad (4.20)$$

На рис. 11 представлен график зависимости  $a_0$  от  $K$ , построенный по (4.20). В (4.20) величина  $\Omega$  берется равной корню  $\Omega_0$  уравнения (4.19). Из (4.20) видно, что при  $a \rightarrow 0$   $K \rightarrow \infty$ . При  $a \rightarrow \infty$  система совпадает с линейной системой,

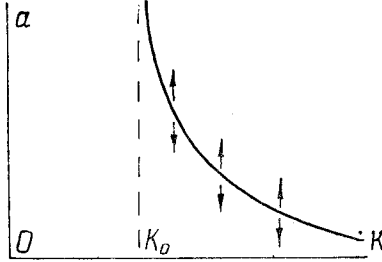


Рис. 11

получающейся из (4.17) при  $F_0=0$ . Обозначим через  $K_0$  значение коэффициента  $K$ , соответствующее границе устойчивости линейной системы. Таким образом, при  $a \rightarrow \infty$  будет  $K \rightarrow K_0$ .

Исследуем устойчивость. По (4.13), (4.18) имеем

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial X}{\partial a}\right)_0 \left(\frac{\partial Y}{\partial \omega}\right)_0 - \left(\frac{\partial X}{\partial \omega}\right)_0 \left(\frac{\partial Y}{\partial a}\right)_0 = - \\ & - \frac{4F_0}{\pi a_0^2} \Omega_0^2 \left( 3I\tau \Omega_0 + \frac{4F_0\tau}{\pi a_0 \Omega_0} + 2I \right) < 0. \end{aligned}$$

Периодическое решение неустойчиво, это — граница для начальных условий. На рис. 11 стрелками обозначено для наглядности изменение переменной  $a$ .

Таким образом, метод гармонической линеаризации позволяет определить амплитуду периодического решения системы и поведение малых отклонений от нее, т. е. определяет поведение системы по медленной переменной  $a$ . В этом смысле метод гармонической линеаризации является одной из разновидностей метода разделения движения.

## ЛИТЕРАТУРА

### Рекомендуемая

1. Новожилов И. В. Приближенные методы исследования динамических систем: Конспект лекций.— М.: МЭИ, 1980.—60 с.
2. Васильева А. Б., Бугузов В. Ф. Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений.— М.: Наука, 1973.—272 с.
3. Новожилов И. В. Прецессионные уравнения гироскопических систем с «жестким» управлением по части переменных.— Изв. АН СССР. МТТ, 1971, № 1.
4. Болотин Ю. В., Новожилов И. В. Управление походкой двуногого шагающего аппарата.— Изв. АН СССР. МТТ, 1977, № 3.
5. Новожилов И. В. Разделение движений рельсового экипажа.— Изв. АН СССР. МТТ, 1980, № 1.
6. Кобрин А. И., Мартыненко Ю. Г., Новожилов И. В. О прецессионных уравнениях гироскопических систем.— ПММ, 1976, т. 40, № 2.
7. Новожилов И. В. О переходе к прецессионным уравнениям гироскопии на бесконечном интервале времени.— Изв. АН СССР. МТТ, 1971, № 5.
8. Уткин В. И. Скользящие режимы и их применения в системах с переменной структурой.— М.: Наука, 1974.—272 с.
9. Геращенко Е. И., Геращенко С. М. Метод разделения движений и оптимизация нелинейных систем.— М.: Наука, 1975.—295 с.
10. Новожилов И. В. Условия застоя в системах с кулоновым трением.— Изв. АН СССР. МТТ, 1973, № 1.
11. Алексеев К. Б., Бебенин Г. Г. Управление космическими летательными аппаратами.— М.: Машиностроение, 1974.—342 с.
12. Волосов В. М., Моргунов Б. И. Метод осреднения в теории нелинейных колебательных систем.— М.: МГУ, 1971.—506 с.
13. Митропольский Ю. А. Метод осреднения в нелинейной механике.— Киев: Наукова думка, 1971.—439 с.
14. Мищенко Е. Ф., Розов Н. Х. Дифференциальные уравнения с малым параметром и релаксационные колебания.— М.: Наука, 1975.—247 с.
15. Попов Е. П. Прикладная теория процессов управления в нелинейных системах.— М.: Наука, 1973.—584 с.

## ЛИТЕРАТУРА

### Использованная

16. Тихонов А. Н. Системы дифференциальных уравнений, содержащих малые параметры при производных.— Матем. сборник 31(73), № 3 (1952), с. 575—586.

17. Градштейн И. С. О решениях на временной полупрямой дифференциальных уравнений с малыми множителями при производных.— Матем. сборник, 1953, т. 32, № 3.
18. Красовский Н. Н., Климушев А. И. Равномерная асимптотическая устойчивость систем дифференциальных уравнений с малым параметром при старших производных.— Успехи матем. наук, 1963, т. 18, вып. 3.
19. Разумихин Б. С. Об устойчивости систем с малым множителем.— ПММ, 1957, т. 21, вып. 4.
20. Филиппов А. Ф. Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью.— Матем. сборник, т. 51, 1960, № 1.
21. Андронов А. А., Витт А. А., Хайкин С. Э. Теория колебаний.— М.: Физматгиз, 1959.—915 с.
-

## ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие.	
ГЛАВА 1. Варианты постановки задачи о разделении движений применительно к уравнениям с малыми параметрами при производных . . . . .	5
§ 1.1. Разделение движений в случае нескольких малых параметров, различающихся по порядку величин. Пример: следящая система с «жестким» управлением . . . . .	5
§ 1.2. Вырождение на бесконечном интервале времени . . . . .	9
§ 1.3. Разделение движений в системах с разрывными характеристиками . . . . .	13
ГЛАВА 2. Асимптотические разложения решений уравнений с малым параметром при производных . . . . .	20
§ 2.1. Построение асимптотических разложений . . . . .	20
§ 2.2. Примеры асимптотических разложений . . . . .	26
ГЛАВА 3. Метод осреднения . . . . .	30
§ 3.1. Схема осреднения В. М. Волосова . . . . .	30
§ 3.2. Пример: ламповый генератор в «мягком» режиме возбуждения . . . . .	33
ГЛАВА 4. Метод гармонической линеаризации . . . . .	37
§ 4.1. Основные положения метода . . . . .	37
§ 4.2. Примеры . . . . .	42

---

*Игорь Васильевич Новожилов*

Конспект лекций по курсу

«Приближенные методы исследования динамических систем»

МЕТОДЫ РАЗДЕЛЕНИЯ ДВИЖЕНИИ

(Кафедра теоретической механики)

Технический редактор *Н. Н. ТолчENOва.*

Корректор *Л. К. Улыбина.*

---

Л-88192	Подписано к печати 4.09.81.	
Формат бумаги 60×84/16.	Печ. л. 3.	Уч.-изд. л. 2,4.
Тираж 500.	Заказ 1459.	Цена 9 к.

---

Типография МЭИ, Красноказарменная, 13