

Пример решения

Задача. Механизм состоит из цилиндра, катающегося без проскальзывания по горизонтальной поверхности, уголка ABC и стержня OA (рис. 12). В указанном положении механизма задана угловая скорость $\omega_{OA_z} = 2 \text{ с}^{-1}$. Сторона CB уголка ABC в данный момент горизонтальная, AB — вертикальная. Радиус цилиндра $R = 2 \text{ м}$. Даны размеры: $CB = 2 \text{ м}$, $AB = 1 \text{ м}$, $OA = 5 \text{ м}$ и угол $\cos \alpha = 4/5$. Найти угловые скорости звеньев и скорости точек A и C .

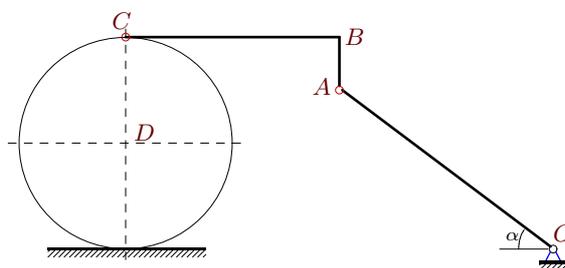


Рис. 12

Решение

Задачу решаем тремя методами.

1. *Метод мгновенных центров скоростей.* Находим значение скорости точки A , лежащей на стержне, совершающем вращательное движение вокруг шарнира O . По формуле Эйлера в ее скалярной форме имеем

$$v_A = \omega_{OA} OA = 2 \cdot 5 = 10 \text{ м/с.} \quad (2.6)$$

Вектор \vec{v}_A откладываем от точки A перпендикулярно OA по направлению вращения. По условию $\omega_{OA_z} = 2 > 0$, следовательно, вращение происходит против часовой стрелки (рис. 13).

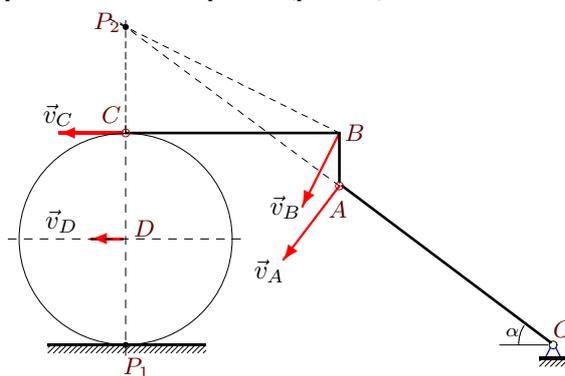


Рис. 13

Скорость точки C сразу найти нельзя — угловая скорость цилиндра неизвестна. Но известно направление вектора скорости \vec{v}_C — он перпендикулярен радиусу, проведенному к МЦС цилиндра. Качение происходит без проскальзывания, следовательно, мгновенный центр скоростей лежит в точке касания P_1 . Итак, известны направления векторов скоростей двух точек уголка ABC . Восстанавливаем перпендикуляры к направлениям векторов \vec{v}_A и \vec{v}_C и на их пересечении находим МЦС тела ABC . Вычисляем расстояния от точек A, B, C до P_2 :

$$\begin{aligned} AP_2 &= BC / \cos \alpha = 4 \cdot 5/4 = 5 \text{ м}, \\ CP_2 &= AP_2 \sin \alpha - AB = 5 \cdot 3/5 - 1 = 2 \text{ м}, \\ BP_2 &= \sqrt{BC^2 + CP_2^2} = 2\sqrt{5} \text{ м}. \end{aligned}$$

Для скоростей точек, совершающих мгновенное вращательное движение вокруг полюса P_2 , справедливы формулы

$$\begin{aligned} v_A &= AP_2 \omega_{ABC}, \\ v_B &= BP_2 \omega_{ABC}, \\ v_C &= CP_2 \omega_{ABC}. \end{aligned}$$

Так как значение v_A уже известно, находим из первого уравнения угловую скорость $\omega_{ABC} = v_A / AP_2 = 10/5 = 2 \text{ с}^{-1}$. Из второго и третьего уравнения находим скорости

$$\begin{aligned} v_B &= BP_2 \omega_{ABC} = 2\sqrt{5} \cdot 2 = 4\sqrt{5} \text{ м/с}, \\ v_C &= CP_2 \omega_{ABC} = 2 \cdot 2 = 4 \text{ м/с}. \end{aligned}$$

Теперь по известной скорости точки C можно вычислить угловую скорость цилиндра: $\omega_{\text{ц}} = v_C / (2R) = 4/4 = 1 \text{ с}^{-1}$.

2. *План скоростей.* Вычисляем значение скорости точки A (2.6). Выбираем на плоскости произвольную точку, от которой будем откладывать скорости механизма. В этой же точке будут находиться образы неподвижных точек механизма, в данном примере это точка P_1 . Построение начинаем с вектора \vec{v}_A , направление и величина которого известны (рис. 14).

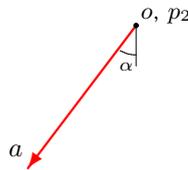


Рис. 14

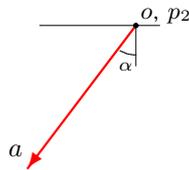


Рис. 15

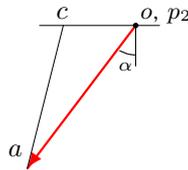


Рис. 16

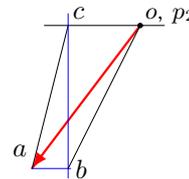


Рис. 17

Для того, чтобы найти на плане положение точки c , воспользуемся правилом построения плана скоростей, согласно которому $CP_2 \perp cp_2$. Следовательно, вектор скорости точки C горизонтален. Проводим через начало плана скоростей (точка p_2) горизонтальную прямую, на которой будем искать точку c (рис. 15). Еще раз воспользуемся правилом плана скоростей: $ac \perp AC$. Тангенс угла наклона отрезка AC известен и равен $1/4$. Под таким же углом, но к вертикали, проводим на плане скоростей через точку a прямую до пересечения с проведенной уже горизонтальной прямой. На пересечении прямых отмечаем точку c (рис. 16). Значение скорости точки C найдено. Это величина отрезка oc на плане скоростей. Легко вычислить значение скорости: $oc = oa \sin \alpha - oa \cos \alpha / 4 = 6 - 8/4 = 4$ м/с.

Для определения скорости точки B^1 , лежащей на стороне CB и на стороне AB уголка, проведем через точку c на плане скоростей перпендикуляр к CB , а через a — перпендикуляр к AB . Точка их пересечения дает скорость v_B (рис. 17). Модуль скорости точки B равен длине отрезка $ob = \sqrt{oc^2 + cb^2} = \sqrt{4^2 + 8^2} = 4\sqrt{5}$ м/с. Модули угловых скоростей вычисляются по простым формулам

$$\omega_{AB} = ab/AB = 2/1 = 2 \text{ с}^{-1},$$

$$\omega_{ц} = cp_2/CP_2 = 4/4 = 1 \text{ с}^{-1}.$$

3. Уравнение трех угловых скоростей. Для решения потребуются мгновенные координаты шарниров механизма. Введем систему координат, выбрав за начало произвольную точку (рис. 18).

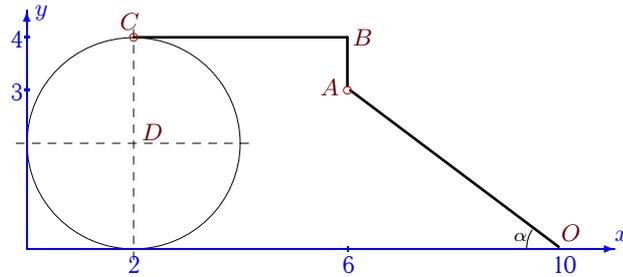


Рис. 18

Записываем уравнения трех угловых скоростей

$$\omega_{цz}(x_C - x_{P_1}) + \omega_{ABCz}(x_A - x_C) + \omega_{AOz}(x_O - x_A),$$

$$\omega_{цz}(y_C - y_{P_1}) + \omega_{ABCz}(y_A - y_C) + \omega_{AOz}(y_O - y_A),$$

¹Заметим, что в условии заданий определение скорости B не входит. Значение скорости точки B не во всех вариантах получается целым.

подставляем координаты шарниров и значение $\omega_{AOz} = 2 \text{ с}^{-1}$:

$$\begin{aligned} 4\omega_{ABCz} + 8 &= 0, \\ 4\omega_{\text{цз}} - \omega_{ABCz} - 6 &= 0. \end{aligned}$$

Решаем систему уравнений: $\omega_{ABCz} = -2 \text{ с}^{-1}$, $\omega_{\text{цз}} = 1 \text{ с}^{-1}$.

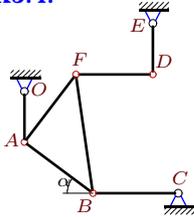
Заметим, что этот способ позволяет найти не просто модули угловых скоростей, а их проекции на ось z . В задачах аналитической механики нужны именно эти величины.

К5. Кинематический анализ механизма (5 звеньев)

Условия задач

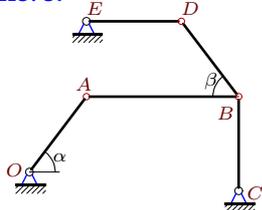
В указанном положении механизма задана угловая скорость (с^{-1}) одного из его звеньев. Длины звеньев даны в сантиметрах. Стержни, направление которых не указано, считать вертикальными или горизонтальными. Найти угловые скорости звеньев механизма.

К5.1.



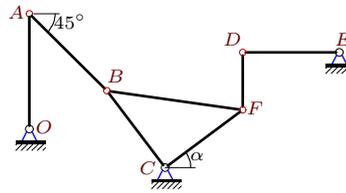
$\omega_{OA} = 15$, $OA = DE = 6$, $AB = AF = BC = 10$, $DF = 9$, $\cos \alpha = 0,8$, $AB \perp AF$.

К5.3.



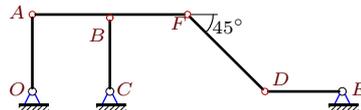
$OA = BC = DE = BD = 5$, $\omega_{OA} = 40$, $AB = 8$, $\cos \alpha = \cos \beta = 0,6$.

К5.2.



$\omega_{OA} = 10$, $OA = 6$, $DF = 3$, $DE = BC = CF = 5$, $AB = 4\sqrt{2}$, $\cos \alpha = 0,8$, $CB \perp CF$.

К5.4.



$\omega_{OA} = 1$, $OA = AB = BF = BC = DE = 1$, $DF = \sqrt{2}$.