

$$\frac{d\tilde{\rho}}{d\xi} = \frac{\tilde{\alpha}v^3}{v^2-1} (\tilde{\rho}-1)^n (\tilde{u}_0^2v^2 - \tilde{\rho})^n.$$

При $n=1$ решение этого уравнения имеет вид

$$\tilde{\rho} = \frac{1}{2} \{ (\tilde{u}_0^2v^2 + 1) + (\tilde{u}_0^2v^2 - 1) \operatorname{th} C\xi \},$$

где $C = \tilde{\alpha}v^3 (\tilde{u}_0^2v^2 - 1) / (v^2 - 1)$. Это решение хорошо известно из задач нелинейной акустики [10]. При $n > 1$ профиль волны остается симметричным, но зависимость крутизны фронта от скорости волны становится более резкой: $d\rho/d\xi|_{\max} \sim (\tilde{u}_0^2v^2 - 1)^n$. Отметим, что для слабой волны учет изменения плотности подвижных дислокаций дает поправки следующего порядка малости по $(\tilde{u}_0^2v^2 - 1)$.

Авторы выражают благодарность Р. И. Нигматулину и Н. Н. Холину за обсуждение результатов работы и полезные советы.

Поступила 17 II 1978

ЛИТЕРАТУРА

1. Нигматулин Р. И., Холин Н. Н. К модели упругопластической среды с дислокационной кинетикой деформирования. — «Изв. АН СССР. МТТ», 1974, № 4.
2. Гулидов А. И., Фомин В. М., Яценко Н. Н. Структура волн сжатия в неупругих средах. — «Изв. АН СССР. МТТ», 1975, № 5.
3. Johnson J. N., Barker L. M. Dislocation dynamics and steady wave profiles in 6061-T6 Aluminum. — «J. Appl. Phys.», 1969, vol. 40, N 11.
4. Jonston W. G., Gilman J. J. Dislocation velocities dislocations and plast flow in crystals. — «J. Appl. Phys.», 1959, vol. 30, N 129.
5. Гилман Дж. Динамика дислокаций и поведение материалов при ударном воздействии. — Сб. пер. Механика, 1970, № 2.
6. Kelly J. M., Gillis P. P. Continuum descriptions of dislocations under stress reversals. — «J. Appl. Phys.», 1974, vol. 45, N 3.
7. Годунов С. К., Козин Н. С. Структура ударных волн в упруговязкой среде с нелинейной зависимостью максвелловской вязкости от параметров вещества. — ПМТФ, 1974, № 5.
8. Зельдович Я. Б., Райзер Ю. П. Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений. М., «Наука», 1966.
9. Альшиц В. П., Инденбом В. Л. Динамическое торможение дислокаций. — УФН, 1975, т. 115, вып. 1.
10. Руденко О. В., Солуян С. П. Теоретические основы нелинейной акустики. М., «Наука», 1975.

УДК 539.374

О НЕУСТОЙЧИВОСТИ СФЕРИЧЕСКОГО ТЕЛА ПРИ РАВНОМЕРНОМ НАГРУЖЕНИИ

М. Н. Кирсанов, А. Н. Спорыхин

(Воронеж)

Исходя из трехмерных уравнений теории устойчивости в динамической постановке исследована устойчивость шара из упрочняющегося упруговязкопластического материала при равномерном нагружении. Докритические деформации малы. Показано, что результаты, полученные по приближенной и трех-

мерной теориям для упругопластических задач устойчивости, практически не отличаются качественно и количественно.

Ранее аналогичная задача в статической постановке на основе приближенного подхода и соотношений теории малых упругопластических деформаций рассматривалась в [1].

Осесимметричное упругопластическое состояние сферического тела радиусов r_1 и r_2 , находящегося под действием внутреннего давления q , определяется соотношениями

$$(1) \quad \begin{aligned} \sigma_r^{p0} &= -q_0 + \frac{4k_0}{2+c_0} \left[6 \ln \frac{r}{\alpha} + c_0 \gamma^3 \left(\frac{1}{\alpha^3} - \frac{1}{r^3} \right) \right], \\ \sigma_\theta^{p0} &= -q_0 + \frac{4k_0}{2+c_0} \left[6 \ln \frac{r}{\alpha} + 3 + c_0 \gamma^3 \left(\frac{1}{\alpha^3} + \frac{1}{2r^3} \right) \right], \\ \sigma_r^{e0} &= 4k_0 \gamma^3 \left(1 - \frac{1}{r^3} \right) \quad \sigma_\theta^{e0} = 4k_0 \gamma^3 \left(1 + \frac{1}{2r^3} \right), \\ \alpha &= r_1 r_2^{-1}. \end{aligned}$$

Здесь и в дальнейшем все величины, имеющие размерность напряжения, отнесены к модулю сдвига μ , длины — к внешнему радиусу r_2 ; c_0 — коэффициент упрочнения, k_0 — предел текучести, индексы p и e приписаны соответственно компонентам напряжений в пластической и упругой областях.

Радиус упругопластической границы γ удовлетворяет уравнению

$$(2) \quad \gamma^3 \left(1 - \frac{c_0}{\alpha^3(2+c_0)} \right) = 6 \ln \frac{\gamma}{\alpha(2+c_0)} - \frac{q_0}{4k_0} + \frac{2}{2+c_0}.$$

Для определения упругопластического состояния сферического тела были привлечены уравнения равновесия, условие пластичности [2], общие уравнения теории упругости, граничные условия, а также условия сопряжения решений в упругой и пластической областях.

Запишем основные соотношения, необходимые для исследования устойчивости сферического тела, обладающего упруговязкопластическими свойствами. Связь между амплитудными значениями напряжений деформаций и перемещений в пластической и упругой областях представим соответственно в виде [3]

$$(3) \quad \begin{aligned} \sigma_{ij}^p &= \lambda e_{kk} \delta_{ij} + 2\mu e_{ij} - \frac{4\mu^2 \left(e_{hl} - \frac{1}{3} e_{mm} \delta_{hl} \right) \left(s_{hl}^0 - c e_{hl}^{p0} \right)}{k^2 (2\mu + c + s\eta)} (s_{ij} - c e_{ij}^{p0}), \\ \sigma_{ij}^e &= \lambda e_{kk} \delta_{ij} + 2\mu e_{ij}, \end{aligned}$$

где

$$(4) \quad e_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}).$$

Условия на упругопластической границе γ имеют вид

$$(5) \quad n_j [\sigma_{ij} + \sigma_{ij,h} X_h] = 0, \quad [u_i + u_{i,h}^0 X_h] = 0,$$

где X_h — компоненты вектора, определяющие форму упругопластической границы; квадратные скобки означают разность соответствующих компонентов в пластической и упругой областях.

Уравнения равновесия и граничные условия [4] для амплитудных величин перемещений запишем в виде

$$(6) \quad (\sigma_{ij} + \sigma_{jk}^0 u_{i,k}),_{,j} + \rho \omega^2 u_i = 0, \quad (\sigma_{ij} + \sigma_{jk}^0 u_{i,k}) n_j = q_j^0 u_{i,j}.$$

Принято, что в результате малых возмущений нагрузка изменяет свое направление.

Система уравнений в сферических координатах для определения перемещений в пластической области, согласно (6), (3) и (4), может быть записана в виде

$$\begin{aligned}
 & r(4 - 3a_0)u_{1,1} + \frac{u_{1,33}}{\sin^2\theta} + u_{1,22} + \operatorname{ctg}\theta u_{1,2} + 2u_1 + u_{1,11}(1 - a_0 + \sigma_r^0)r^2 + \\
 & + r^2 \frac{\partial p}{\partial r} + \sigma_\theta^0 \left(u_{1,22} + \frac{1}{\sin^2\theta} u_{1,33} + \operatorname{ctg}\theta u_{1,2} + 2u_1 + 4ru_{1,1} \right) + \rho\omega^2 u_1 = 0, \\
 (7) \quad & r^2 \left(1 + \frac{a_0}{2} \right) u_{1,12} + r^2 u_{2,11} + 4ru_{1,2} - 2u_2 + 2u_{2,22} + \frac{1}{\sin^2\theta} (u_{2,33} + u_{3,33} - \\
 & - 2 \operatorname{ctg}\theta u_{3,3}) + \sigma_r^0 (u_{2,11} r^2 - 2ru_{2,1} + 2u_2) + r^2 \frac{\partial p}{\partial \theta} + \sigma_\theta^0 (u_{2,22} + 4ru_{1,2} - 2u_2 - \\
 & - \frac{1}{\sin^2\theta} u_2 + \frac{1}{\sin^2\theta} u_{2,33} - 2 \operatorname{ctg}\theta \frac{1}{\sin^2\theta} u_{3,3} + \operatorname{ctg}\theta u_{2,2}) + \rho\omega^2 r^2 u_2 = 0, \\
 & r^2 \left(1 + \frac{a_0}{2} \right) u_{1,13} + r^2 u_{3,11} + 4ru_{1,3} + u_{3,22} + u_{2,32} + \operatorname{ctg}\theta (u_{3,2} + u_{2,3}) + \\
 & + \frac{2}{\sin^2\theta} u_{3,33} + r^2 \frac{\partial p}{\partial \varphi} + \sigma_r^0 (r^2 u_{3,11} + 2u_3 - 2ru_{3,1}) + \sigma_\theta^0 (u_{3,22} + \operatorname{ctg}\theta u_{2,3} + \\
 & + 2r(u_{3,1} + u_{1,3}) + \frac{1}{\sin^2\theta} u_{3,33} - 2u_3) + \rho\omega^2 r^2 u_3 = 0, \quad a_0 = 4(2 + c_0 + s\eta)^{-1}.
 \end{aligned}$$

Условие несжимаемости имеет вид

$$(8) \quad r^2 u_{1,1} + u_{2,2} + 2ru_1 + \operatorname{ctg}\theta u_2 + \frac{1}{\sin^2\theta} u_{3,3} = 0.$$

Перемещение в упругой области определяем из системы (7), (8), где значение a_0 следует положить равным нулю. В случае приближенного подхода [5, 6] в (7) необходимо положить равными нулю величины, учитывающие параметр нагружения, т. е. $\sigma_r^0 = \sigma_\theta^0 = 0$.

Решение как в пластической, так и в упругой области ищем в виде рядов Фурье по сферическим функциям

$$\begin{aligned}
 (9) \quad u_1 &= \sum_{n=\nu}^{\infty} \sum_{\nu=1}^{\infty} A_{n\nu}(r) Y_{n\nu}(\theta, \varphi), \quad u_2 = \sum_{n=\nu}^{\infty} \sum_{\nu=1}^{\infty} B_{n\nu}(r) \frac{\partial}{\partial \theta} Y_{n\nu}(\theta, \varphi), \\
 u_3 &= \sum_{n=\nu}^{\infty} \sum_{\nu=1}^{\infty} C_{n\nu}(r) \frac{\partial}{\partial \varphi} Y_{n\nu}(\theta, \varphi), \quad p = \sum_{n=\nu}^{\infty} \sum_{\nu=1}^{\infty} D_{n\nu}(r) Y_{n\nu}(\theta, \varphi).
 \end{aligned}$$

Функции $Y_{n\nu}$ удовлетворяют уравнению

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \operatorname{ctg}\theta \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin^2\theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + n(n+1) \right] Y_{n\nu}(\theta, \varphi) = 0.$$

Для упрощения записи индексы n и ν далее опустим.

Можно убедиться, что $B = C$. Действительно, дифференцируя второе уравнение (7) по φ , а третье по θ и вычитая полученные уравнения, получаем

$$(10) \quad L(u_{2,3} - u_{3,2}) = 0,$$

где L — некоторый дифференциальный оператор.

Так как (10) выполняется для любого r , то из (9) следует, что $B = C$. Подстановка разложений (9) в уравнения (7), (8) и исключение B и D дает обыкновенное дифференциальное уравнение четвертого порядка вида

$$(11) \quad \sum_{m=0}^4 R_m^p(r) \frac{\partial^m A}{\partial r^m} = 0,$$

где

$$(12) \quad \begin{aligned} R_0 &= (N-2)(1 + \sigma_0^0 - \rho_0 r^2 N^{-1}); \\ R_1 &= -r(4 - 3a_0 + 4\sigma_0^0 - rN^{-1}(8\sigma_{r,r}^0 + 4\rho_0 r - \sigma_{0,r}^0(2+N))); \\ R_2 &= -r^2 N^{-1} \left(2N - \frac{3}{2} a_0 N - \rho_0 r^2 + \sigma_r^0 N - \sigma_0^0 - \right. \\ &\quad \left. - 12(1 + \sigma_r^0) - 4r\sigma_{r,r}^0 - 2r\sigma_{0,r}^0 \right); \\ R_3 &= r^3 N^{-1} (6\sigma_r^0 + r\sigma_{r,r}^0 + 2\sigma_0^0 + 8); \\ R_4 &= r^4 N^{-1} (1 + \sigma_r^0); \quad N = n^2 + n; \quad \rho_0 = \rho\omega^2. \end{aligned}$$

Аналогичное уравнение имеет место и в упругой зоне, необходимо лишь в (12) положить $a_0 = 0$ и $\sigma_r^0 = \sigma_r^{e0}$, $\sigma_0^0 = \sigma_0^{e0}$, которые имеют вид (1).

Граничные условия (6) приводятся к виду

$$(13) \quad \sum_{i=0}^3 Q_i \frac{\partial^i A}{\partial r^i} = 0, \quad r^2 \frac{\partial^3 A}{\partial r^3} + 2r \frac{\partial A}{\partial r} + A(N-2) = 0$$

при $r = 1, \alpha$.

Здесь

$$(14) \quad \begin{aligned} Q_0 &= 2\rho_0 r, \quad Q_1 = 6 + 8\sigma_r^0 - \sigma_0^0(2+N) - 3N + \frac{3}{2} a_0 N, \\ Q_2 &= r(6 + 4\sigma_r^0 + 2\sigma_0^0), \quad Q_3 = r^2(1 + \sigma_r^0). \end{aligned}$$

При этом для $r = 1$ в (14) следует положить $a_0 = 0$, $\sigma_r^0 = \sigma_r^{e0}$, $\sigma_0^0 = \sigma_0^{e0}$, а при $r = \alpha$ $\sigma_r^0 = \sigma_r^{p0}$, $\sigma_0^0 = \sigma_0^{p0}$.

Условия (5) в терминах сферических функций таковы

$$(15) \quad [A] = 0, \quad \left[\frac{\partial A}{\partial r} \right] = 0, \quad \left[\frac{\partial^2 A}{\partial r^2} \right] = 0, \quad r^2 N^{-1} (1 + \sigma_r^{e0}) \left[\frac{\partial^3 A}{\partial r^3} \right] + a_0 \frac{\partial A}{\partial r} = 0.$$

В случае приближенного подхода уравнения, аналогичные (13), могут быть получены на основе граничных условий [5, 6]

$$(\sigma_{ij} + \sigma_{ik} u_{k,j}) n_j = q_j^0 u_{i,j}.$$

Давление q_0 всюду будем выражать из уравнения (2) так, что q_0 будет входить в систему (11)–(15) неявно, через критический радиус γ . Нетривиальное решение системы (11)–(15) соответствует потере устойчивости сферы.

Методом конечных разностей заменим исследуемые уравнения системой однородных линейных алгебраических уравнений, определитель которой зависит от параметров среды c_0 , k_0 , η_0 , комплексного числа $s = i\omega$, параметра волнообразования n , безразмерного радиуса α и критического радиуса γ .

Приравнявая определитель системы нулю, находим условия потери устойчивости сферы. Особенность численной реализации заключается в

том, что здесь γ принимает конечное число значений, пробегая весь отрезок от α до 1. Следовательно, можно найти минимальный корень определителя $\gamma_{кр}$, соответствующий критическому давлению q_0 . Вычисления были выполнены на ЭВМ М222. На фигуре представлена зависимость критического давления q_0 от геометрии конструкции α при $k_0 = 0,1$, $c_0 = 0,5$, $\eta_0 = 0,1$, $\rho = 1$ и $n = 2$ ($n = 0$, $n = 1$ исключены из анализа численной реализации, так как они не имеют физического смысла).

Нижняя кривая соответствует варианту трехмерной теории, штриховая — приближенному подходу, верхняя — давлению, при котором вся сфера находится в пластическом состоянии (исчерпание несущей способности). Сравнение показывает, что результаты, полученные по точной и приближенной теории, отличаются лишь количественно и притом незначительно.

Поступила 13 III 1978

ЛИТЕРАТУРА

1. Ершов Л. В. Об осесимметричной потере устойчивости тонкостенной сферической оболочки, находящейся под действием равномерного давления. — ПМТФ, 1960, № 4.
2. Спорыхин А. Н. Об устойчивости деформирования упруговязкопластических тел. — ПМТФ, 1967, № 4.
3. Спорыхин А. Н. К устойчивости равновесия упруговязкопластической среды. — ПМТФ, 1970, № 5.
4. Новожилов В. В. Основы нелинейной теории упругости. М., Гостехиздат, 1948.
5. Лейбензон Л. С. О применении гармонических функций к вопросу об устойчивости сферической и цилиндрической оболочек. Сб. трудов. Т. 1. М., Изд-во АН СССР, 1951.
6. Ишлинский А. Ю. Рассмотрение вопросов об устойчивости равновесия упругих тел с точки зрения математической теории упругости. — «Укр. мат. журнал», 1954, т. 6, № 2.