ФГАОУ ВПО «Казанский (Приволжский) Федеральный Университет»
Институт математики и механики им. Н.И. Лобачевского

ПРОЕКТИВНАЯ ГЕОМЕТРИЯ

и

МЕТОДЫ ИЗОБРАЖЕНИЙ

III семестр

Курс лекций для студентов математического факультета

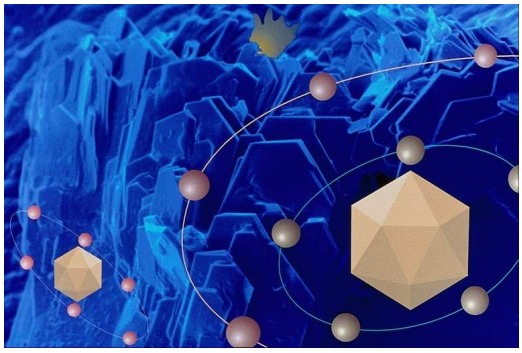
проф. Ю.Г. Игнатьева, А.А. Агафонова

(Специальности: математика и информатика, математика и английский язык)

Большое количество примеров по всем разделам!
Примеры решения задач в пакете Maple

Большое количество конкретных примеров!

Лаборатория НИЛИТМО КФУ



Казанский университет
2014

Печатается по рекомендации учебно-методической комиссии Института математики и механики им. Н.И. Лобачевского, протокол № ? от 19 июня 2014 г.

УДК 513

Игнатьев Ю.Г., Агафонов А.А. Проективная геометрия и методы изображений. Учебное пособие. - Казань: Казанский университет, 2014, - 179 с.

Учебное пособие является приложением к Курсу лекций Автора по проективной геометрии. Курс лекций снабжен большим количеством примеров решений основных геометрических задач проективной геометрии.

Материалы пособия предназначены для студентов математических факультетов педагогических институтов по специальностям «Математика», «Математика и информатика», «Математика и иностранный язык».

Рецензенты: **Сушков С.В.,** д-р. физ.-мат. наук, проф., (КФУ);
Мухлисов Ф.Г.., д-р. физ.-мат. наук, проф., (КФУ)

@Казанский университет, 2014
@Игнатьев Ю.Г., 2014

Оглавление

I Проективные пространства **9**

I Понятие проективного пространства **10**
I.1 Определение проективного пространства 10
I.2 Модели проективного пространства 11
I.2.1 Проективное пространство $P(V)$, порожденное векторным пространством V 11
I.2.2 Изоморфизм 13
I.2.3 Аффинная модель проективного пространства 14
I.3 Проективные координаты 15
I.3.1 Определение проективных координат 15
I.3.2 Точки общего положения 16
I.3.3 Проективный репер на точках общего положения 18
I.4 Расширенная прямая 22
I.5 Проективные реперы на расширенной прямой 24
I.5.1 Однородные аффинные координаты на прямой 25
I.6 Расширенная плоскость 27
I.6.1 Расширение аффинной плоскости 29
I.7 Проективные реперы на расширенной плоскости 30
I.7.1 Теорема о проективном репере на плоскости 31
I.7.2 Однородные аффинные координаты на плоскости 35
I.8 Преобразование проективных координат 38
I.9 Простейшие свойства проективного пространства 41
I.9.1 Простейшие свойства проективной плоскости 41
I.9.2 Простейшие свойства трехмерного проективного пространства 43

II Прямые на проективной плоскости **46**
II.1 Уравнение прямой на проективной плоскости 46
II.1.1 Параметрические уравнения прямой на проективной плоскости 46

II.1.2 Общее уравнение прямой на проективной плоскости 47
II.1.3 Общее уравнение плоскости в проективном пространстве . 51
II.2 Принцип двойственности 51
II.2.1 Ковариантные векторы 52
II.2.2 Принцип двойственности для проективной плоскости . . . 53
II.2.3 Принцип двойственности для проективного пространства . 56
II.3 Теорема Дезарга 57
II.4 Построение конфигурации Дезарга в СКМ Maple 63

III Проективные преобразования 66
III.1 Проективные отображения и преобразования 66
III.1.1 Определение проективных отображений 66
III.1.2 Задание проективного отображения 67
III.1.3 Теорема о проективном отображении 68
III.1.4 Проективные преобразования (коллинеации) 70
III.1.5 Формула проективного преобразования 71
III.1.6 Группа проективных преобразований и предмет проективной геометрии 73
III.1.7 Проективный образ прямой на плоскости 75
III.2 Перспективные отображения 76
III.2.1 Перспективное отображение прямой на пучок прямых . . . 76
III.2.2 Перспективное отображение прямой на прямую 79
III.2.3 Перспективное отображение пучка на пучок 82

IV Двойное (сложное) отношение 84
IV.1 Двойное отношение четырех точек прямой 84
IV.1.1 Определение сложного отношения 84
IV.1.2 Свойства сложного отношения 85
IV.1.3 Сложное отношение прямых 89
IV.1.4 Нахождение сложного отношения по проективным координатам на плоскости 90
IV.2 Гармонические четверки точек 93
IV.2.1 Определение гармонической четверки точек 93
IV.2.2 Полный четырехвершинник 94
IV.3 Проективные преобразования прямой 97
IV.3.1 Инвариантные точки проективной прямой 97
IV.3.2 Гиперболические преобразования прямой 99
IV.3.3 Инволюции прямой 100

IV.4 Проективные преобразования плоскости 103
IV.4.1 Инварианты проективного преобразования плоскости . . . 103
IV.4.2 Гомологии 105

II Методы изображений 112

V Основные виды проектирования 113
V.1 Центральное проектирование 113
V.1.1 Общие понятия 113
V.1.2 Проектирование плоских фигур 114
V.2 Параллельное проектирование 117
V.2.1 Перспективно аффинное отображение 117

VI Изображение фигур в параллельной проекции 122
VI.1 Изображение плоских фигур в параллельной проекции . . . 122
VI.1.1 Изображение треугольника 122
VI.1.2 Изображение четырехугольников 124
VI.1.3 Изображение окружности 125
VI.2 Изображение пространственных фигур 129
VI.2.1 Изображение призмы 129
VI.2.2 Изображение пирамиды 130
VI.2.3 Изображение цилиндра 130
VI.2.4 Изображение конуса 132
VI.2.5 Изображение шара 134

VII Методы проектирования 138
VII.1 Понятие о методе Монжа 138
VII.2 Аксонометрия 141
VII.3 Полные и неполные изображения 145
VII.4 Демонстрация полноты изображения в СКМ Maple 146
VII.5 Метрические задачи 151

III Задачи проективной геометрии 154

VIII Стандартные задачи проективной геометрии 155
VIII.1 Задачи на проективный репер 155

VIII.1.1 Построение точки по ее координатам в заданном репере на прямой . . . 155
VIII.1.2 Построение точки по ее координатам в заданном репере на плоскости . . . 157
VIII.2 Задачи на теорему Дезарга и сложное отношение . . . 158
VIII.2.1 Построение гармонически сопряженной точки . . . 158
VIII.2.2 Построение параллельных прямых . . . 160
VIII.3 Задачи на проективные отображения . . . 165

IX Стандартные задачи методов изображений 169
IX.1 Построение сечения треугольной призмы . . . 169
IX.2 Построение сечения четырехугольной пирамиды . . . 171
IX.3 Построение сечения цилиндра . . . 172
IX.4 Построение сечения параллелепипеда . . . 174
IX.5 Построение изображения высот треугольника . . . 176

Литература 178

Введение

Курс лекций является продолжением книг Автора “Аналитическая геометрия. Курс лекций. Часть I, Часть II.” [7], [8]. В ней также нашли отражение основные идеи более ранней книги Автора [9]. Курс лекций построен в соответствие с требованиями нового Госстандарта Российской Федерации.

В данном Курсе лекций излагаются основные вопросы аксиоматики проективных пространств, основные факты проективной геометрии, рассмотрена группа проективных преобразований и ее подгруппы, а также изложены основные методы построения изображений.

Сокращение часов, отводимое в новом Госстандарте Российской Федерации на геометрию, при сохранении[1] числа и качества вопросов, выносимых на Государственную аттестацию, потребовало существенной переработки Курса геометрии. В связи с этим мы были вынуждены пойти на некоторые сокращения и несколько упрощенное изложение ряда теоретических вопросов Курса. В основном, это относится к теории проективных преобразований, теории кривых второго порядка на проективной плоскости и ряда специальных вопросов методов изображений. С другой стороны, мы постарались сделать Курс более наглядным, снабдив его решениями стандартных задач, собранных в конце книги. Следует заметить, что Курс лекций сопровождается также и комплектами индивидуальными заданий [10], без которых он был бы не полным.

Курс лекций представлен в двух вариантах: *Вариант А* содержит в качестве приложения примеры решения стандартных задач проективной геометрии, а *Вариант Б* не имеет такового приложения. В книге принята следующая система ссылок: поглавная нумерация формул, например, (III.34) означает тридцать четвертую третьей главы. Для теорем, определений, аксиом, следствий, свойств принята сквозная нумерация, причем Т.9 означает ссылку на 9-ю теорему, О.17 - на 17-е определение, А.14 - на аксиому, С.12 - на следствие, $\bar{\text{С}}$ - свойство. Нумерация таблиц и рисунков - сквозная.

Автор

[1] И даже некотором увеличении.

Основные обозначения

$\{a, b, \ldots\}$ - множество, состоящее из элементов $a, b, \ldots$;
$a \in A$ - "a" принадлежит множеству A ;
$a \notin A$ - "a" не принадлежит множеству A ;
$B \subset A$ - множество A включает в себя множество B ;
$B \not\subset A$ - множество A не включает в себя множество B ;
$A \cup B$ - объединение множеств A и B ;
$A \cap B$ - пересечение множеств A и B ;
$\alpha = \overline{1, n}$ - α пробегает значения от 1 до n на множестве натуральных чисел $\mathcal{N}$;
$\mathcal{R}$ - множество действительных чисел ;
$\mathcal{R}_+$ - множество неотрицательных чисел ;
$\mathcal{N}$ - множество натуральных чисел (включая 0) ;
$\mathcal{Z}$ - множество целых чисел ;
$\exists x \in X | x + a = b, \ (\forall a, b \in X)$ - "существует элемент x, принадлежащий множеству X, такой, что для любых a, b, принадлежащих множеству X, справедливо:
$x + a = b$ ";
$a \Longrightarrow b$ - "из a следует b" ;
$a \Longleftrightarrow b$ - "b имеет место тогда и только тогда, когда имеет место a".
$\emptyset$ - пустое множество;
$[a, b]$ - замкнутый промежуток;
(a, b) - открытый промежуток, интервал;
$(a, b]$, $[a, b)$ - полуоткрытые промежутки;
$\vec{0}$ - нуль-вектор;
$A \backslash B$ - дополнение множества B до множества A, т.е.: $A = B \cup A \backslash B$;
$A \stackrel{def}{=} B$ - "A по определению равно B";
$\{a\} \stackrel{\rightarrow}{=} A$ - "элемент a пробегает все множество A".
(AB) - прямая, проходящая через точки A, B;
(ABC) - плоскость, проходящая через точки A, B, C.

Часть I

Проективные пространства

Глава I

Понятие проективного пространства

I.1 Определение проективного пространства

Пусть V - вещественное векторное пространство, и $V\backslash\{\vec{0}\}$ - дополнение нуль - вектора до векторного пространства V. Наряду с векторным пространством V рассмотрим непустое множество $\mathcal{P} \neq \emptyset$, элементы которого, $A, B, C, \ldots$ будем называть *точками*.

Определение OI.1. *Непустое множество $\mathcal{P}$ называется проективным пространством над полем вещественных чисел $\mathcal{R}$ (или, просто - проективным пространством), если задано отображение*

$$\Phi \ : V\backslash\{\vec{0}\} \longrightarrow \mathcal{P}, \tag{I.1}$$

удовлетворяющее двум условиям (аксиомам проективного пространства)

Аксиома AI.1. *Отображение Φ - сюръективно*[1]*;*

Аксиома AI.2. *Образы коллинеарных векторов, и только их, в отображении (I.1) равны:*

$$\Phi(\vec{x}) = \Phi(\vec{y}) \Longleftrightarrow \vec{y} = \lambda\vec{x}, \qquad (\lambda \in \mathcal{R}\backslash 0). \tag{I.2}$$

[1] Т.е. любой элемент из $\mathcal{P}$ имеет хотя бы один прообраз.

Подчеркнем, что отображение Φ не является взаимно однозначным: множество **всех** коллинеарных между собой векторов[2] векторного пространства V отображается в одну и ту же точку:

$$\Phi(\vec{x}) = X \Longrightarrow \Phi(\lambda\vec{x}) = X.$$

Таким образом, каждой точке в проективном пространстве $\mathcal{P}$ соответствует множество всех коллинеарных между собой векторов в векторном пространстве V. Если $\Phi(\vec{x}) = X$, будем говорить, что *вектор $\vec{x}$ порождает точку X*. Таким образом, все коллинеарные между собой векторы порождают одну и ту же точку.

Определение OI.2. *Если $\dim V = n+1$, то проективное пространство $\mathcal{P}$ называется n-мерным: $\dim \mathcal{P} = n$ и обозначается как $\mathcal{P}_n$.*

Определение OI.3. *Пусть $V_{k+1} \subset V_{n+1}$ — $(k+1)$ - мерное подпространство векторного пространства V_{n+1}, а $\mathcal{P}_n = \Phi(V_n \backslash \{\vec{0}\})$ - n - мерное проективное пространство. Тогда множество*

$$\Phi(V_{k+1} \backslash \{\vec{0}\}) \subset \mathcal{P}_n$$

называется k-мерной проективной плоскостью $\Pi_k \subset \mathcal{P}_n$ проективного пространства. При этом одномерная проективная плоскость ($k = 1$) называется проективной прямой, а двумерная проективная плоскость ($k = 2$) называется просто - проективной плоскостью.

I.2 Модели проективного пространства

I.2.1 Проективное пространство $P(V)$, порожденное векторным пространством V

Введем отношение Δ в множестве $V \backslash \{\vec{0}\}$. Будем говорить, что два вектора $\vec{x}$ и $\vec{y}$ из множества $V \setminus \{\vec{0}\}$ *находятся в отношении Δ: $\vec{x}\Delta\vec{y}$, если они коллинеарны*, т.е.:

$$\vec{x}\Delta\vec{y}, \quad \text{если} \quad \exists\lambda \in \mathcal{R}\backslash 0 \,\Big|\, \vec{x} = \lambda\vec{y}; \quad \left(\vec{x}, \vec{y} \in V \backslash \{\vec{0}\}\right). \tag{I.3}$$

[2] А таких векторов бесконечно много.

Теорема TI.1. *Отношение коллинеарности, Δ, является отношением эквивалентности в множестве $V\backslash\{\vec{0}\}$.*

Доказательство: $\langle\langle$ Для доказательства теоремы достаточно доказать выполнение трех свойств отношения эквивалентности [8]: симметричности, транзитивности и рефлексивности. Рефлексивность этого отношения очевидна, так как из тождества $\vec{x} = \vec{x}$ сразу следует: $\vec{x}\Delta\vec{x}$ - любой вектор коллинеарен самому себе. Далее, пусть вектор $\vec{x}$ коллинеарен вектору $\vec{y}$: $\vec{x} = \lambda\vec{y}$, причем $\lambda \neq= 0$. Тогда $\vec{y} = \dfrac{1}{\lambda}\vec{x}$, т.е., и вектор $\vec{y}$ коллинеарен вектору $\vec{x}$, — $\vec{x}\Delta\vec{y} \Longleftrightarrow \vec{y}\Delta\vec{x}$, т.е., отношение коллинеарности симметрично. Пусть теперь $\vec{x}\Delta\vec{y}$ и $\vec{y}\Delta\vec{z}$, т.е., $\vec{x} = \lambda\vec{y}$ и $\vec{y} = \mu\vec{z}$. Тогда $\vec{x} = (\lambda\mu)\vec{z}$, т.е.: $\vec{x}\Delta\vec{y}$ и $\vec{y}\Delta\vec{z} \Longrightarrow \vec{x}\Delta\vec{z}$, — отношение коллинеарности транзитивно. $\rangle\rangle$

Рассмотрим произвольный ненулевой вектор $\vec{a} \in V\backslash\{\vec{0}\}$ а также множество всех ненулевых векторов, коллинеарных вектору $\vec{a}$:

$$A = \{\vec{x}_a \in V\backslash\{\vec{0}\} \,\big|\, \vec{x}_a = \lambda\vec{a}; \quad \{\lambda\} \overset{\rightarrow}{=} \mathcal{R}\backslash 0\} \,.$$

Сопоставим этому множеству *всех* коллинеарных между собой векторов один элемент, например, тот же самый ненулевой вектор $\vec{a}$. В результате такой операции мы получим *фактормножество*, которое обозначим $P(V)$:

$$P(V) \overset{def}{=} V\backslash\{\vec{0}\}/\Delta.$$

Указанную процедуру можно рассматривать как отображение Φ_0 множества $V\backslash\{\vec{0}\}$ на $P(V)$, такое, что $\Phi_0(\vec{x})$ есть тот класс эквивалентности по отношению к Δ, который содержит вектор $\vec{x}$. Очевидно, что *каноническое отображение* Φ_0:

$$\Phi_0 \,:\, (V\backslash\{\vec{0}\}) \longrightarrow P(V) \tag{I.4}$$

удовлетворяет аксиомам 1,2 проективного пространства (OI.1). Таким образом, $P(V)$ является проективным пространством над полем вещественных чисел. Построенное таким образом проективное пространство называется *проективным пространством, порожденным векторным пространством* V.

Пусть векторное пространство V имеет размерность $n+1$: $\dim V = n+1$, т.е., $V = V_{n+1}$. Согласно определению размерности проективного пространства (OI.2) размерность проективного пространства $P(V)$ равна $\dim V = n$. В этом случае проективное пространство $P(V)$ обозначается как $P_n(V)$.

I.2.2 Изоморфизм

Пусть теперь $\mathcal{P}_n$ - n-мерное проективное пространство над полем вещественных чисел. Тогда согласно определению (OI.1) задано отображение Φ, удовлетворяющее аксиомам 1,2 (OI.1):

$$\Phi \ : \Big(V_{n+1} \backslash \{\vec{0}\}\Big) \longrightarrow \mathcal{P}_n.$$

Построим с помощью векторного пространства V_{n+1} проективное пространство $P_n(V)$. Для установления изоморфизма между $\mathcal{P}_n$ и $P_n(V)$ необходимо рассмотреть биективное отображение Ψ проективного пространства $\mathcal{P}_n$ на проективное пространство $P_n(V)$:

$$\Psi \ : \mathcal{P}_n \longrightarrow P_n(V).$$

Построим это отображение по следующему закону. Пусть точка $X \in \mathcal{P}_n$ в отображении Φ порождена вектором $\vec{x} \in V_n$:

$$\forall X \in \mathcal{P}_n \exists \vec{x} \in V_{n+1} \,|\Phi(\vec{x}) = X \ .$$

Пусть $\vec{x}\,'$ произвольный ненулевой вектор, коллинеарный вектору $\vec{x}$: $\vec{x}\,' = \lambda\vec{x}; \lambda \in \mathcal{R} \setminus 0$, который в отображении Φ порождает ту же самую точку $X \in \mathcal{P}_n$. Если при этом $\Phi_0(\vec{x}\,') = X' \in P(V)$, то положим $\Psi(X) = X'$. Так как отображения Φ и Φ_0 по определению (OI.1) сюръективны, то и отображение Ψ сюръективно. Докажем, что оно кроме того и инъективно, т.е., биективно.

Доказательство: $\langle\langle$ Для доказательства рассмотрим любые *две различные точки* $X_1, X_2 \in \mathcal{P}_n$, порожденные векторами $\vec{x}_1\,, \vec{x}_2 \ \in V_{n+1} \backslash \{\vec{0}\}$ в отображении Φ. Одновременно отображение Φ_0 порождает точки и в проективном пространстве $P_n(V)$: $X_1' = \Phi_0(\vec{x}_1\,)$ и $X_2' = \Phi_0(\vec{x}_2\,)$. Так как точки $X_1 \neq X_2$ различны, то векторы $\vec{x}_1\,, \vec{x}_2$ неколлинеарны, а, значит, неколлинеарны и векторы $\vec{x}_{\prime 1} = \lambda_1 \vec{x}_1$ и $\vec{x}_{\prime 2} = \lambda \vec{x}_2$. Поэтому и точки X_1', X_2' также различны. Таким образом, Ψ - инъекция, а, значит, Ψ - биекция. $\rangle\rangle$

Пусть теперь $\Pi_k \in \mathcal{P}_n$ - k-мерная плоскость в проективном пространстве $\mathcal{P}_n$ $(k <= n-1)$. В отображении Φ эта плоскость порождается некоторым $(k+1)$-мерным подпространством, V_{k+1}, векторного пространства V_n.

$$\Pi_k = \Phi(V_{k+1} \backslash \{\vec{0}\}), \quad V_{k+1} \subset V_{n+1}.$$

Но тогда и $\Phi_0(V_n + 1 \backslash \{\vec{0}\})$ также является k-мерной плоскостью Π_k' в проективном пространстве $P_n(V)$. Таким образом, $\Psi(\Pi_k) = \Pi_k'$, т.е., биективное

отображение Ψ переводит каждую k-мерную плоскость проективного пространства $\mathcal{P}_n$ в k-мерную плоскость проективного пространства $P_n(V)$.

Установив взаимно - однозначное соответствие между проективными пространствами $\mathcal{P}_n$ и $P_n(V)$, тем самым мы установили их *изоморфизм.* Все свойства фигур одного пространства с помощью биекции Ψ переносятся на свойства фигур другого пространства. Проективное пространство $\mathcal{P}_n$ состоит из элементов (точек) произвольной природы. Проективное же пространство $P_n(V)$ получено из векторного пространства, наделенного структурой проективного пространства, т.е., является *моделью проективного пространства.* В дальнейшем будем называть эту модель, $P_n(V)$ *векторной моделью проективного пространства.*

I.2.3 Аффинная модель проективного пространства

Рассмотрим теперь в качестве базового множества модели проективного пространства $\mathcal{P}_n$ аффинное пространство $n+1$ измерений, $\mathbf{A}_{n+1}$. Пусть V_{n+1} - пространство переносов аффинного пространства $\mathbf{A}_{n+1}$ и $O \in \mathbf{A}_{n+1}$ - произвольная (но фиксированная) точка. Как известно[3], множество всех направленных отрезков аффинного пространства $\mathbf{A}_{n+1}$ с общим началом (в том числе и отрезков нулевой длины) изоморфно векторному пространству V_{n+1}. При этом множество всех коллинеарных между собой векторов лежит на одной прямой связки $\mathcal{S}(O)$.

Напомним, что связкой прямых $\mathcal{P}(O)$ с центром O *в аффинном пространстве* $\mathbf{A}$ *называется множество* всех *прямых аффинного пространства, проходящих через точку* $O \in \mathbf{A}$. *В случае двумерной аффинной плоскости* $\mathbf{A}_2$ *связка прямых называется* пучком прямых.

Любой из этих ненулевых векторов может служить направляющим вектором прямой связки. Можно сказать, что любая прямая связки $d \in \mathcal{S}(O)$ однозначно определяется центром связки, O, и множеством коллинеарных между собой ненулевых векторов. Таким образом, прямые связки осуществляют факторизацию множества векторов по отношению коллинеарности векторов. При этом каждой прямой связки можно сопоставить точку проективного пространства $P(V)$. Пусть теперь $V_{k+1} \subset V_{n+1}$, тогда векторы из V_{k+1} будут отображаться на множество направленных отрезков, принадлежащих $(k+1)$-мерной аффинной плоскости, $\Pi_{k+1} \in \mathbf{A}_{n+1}$, аффинного пространства. С другой стороны прямые связки, принадлежащие этой плоскости, отображаются на множество точек k-мерной плоскости проективного пространства $P(V)$.

[3]См., например, “Курс лекций...” [7], тему “Геометрические векторы.”

Таким образом, связка прямых $\mathcal{S}(O) \in \mathbf{A}_{n+1}$ аффинного пространства является моделью проективного пространства $\mathcal{P}_n$, которую мы будем называть аффинной моделью.

I.3 Проективные координаты

I.3.1 Определение проективных координат

Рассмотрим $n+1$-мерное векторное пространство V_{n+1} и в нем пару базисов $\{\vec{e}_i\}_{n+1}$, $\{\vec{g}_i\}_n$; $(i = \overline{0,n}.)$[4]

Определение OI.4. *Два базиса, $\{\vec{e}_i\}_n$ и $\{\vec{g}_i\}_n$ векторного пространства V_{n+1} называются* гомотетичными*, если:*

$$\exists\lambda \in \mathbb{R} \left| \vec{e}_i = \lambda\vec{g}_i\,; \quad (i = \overline{0,n}). \right. \tag{I.5}$$

Согласно доказанной выше теореме (TI.1) отношение гомотетичности, Γ, является отношением эквивалентности на множестве всех базисов векторного пространства, так как Γ связывает пары коллинеарных между собой множеств векторов. Каждый базис, $\{\vec{a}_i\}_{n+1}$, векторного пространства V_{n+1} в отображении:

$$\Phi\ : V_{n+1} \longrightarrow \mathcal{P}$$

порождает в проективном пространстве $P(V)$ $(n+1)$ точку $A_0, A_1, \ldots, A_n$, причем гомотетичные между собой базисы порождают одни и те же точки. С другой стороны каждый базис порождает только одну упорядоченную систему точек.

Определение OI.5. *Проективным репером $\Re(\{\vec{a}_i\}_n) \stackrel{def}{=} \Re(\vec{a}_i)$ проективного пространства $P(V)$ называется множество всех гомотетичных между собой базисов векторного пространства V.*

Таким образом, проективный репер проективного пространства $\mathcal{P}_n$ можно определить и как упорядоченную систему $n+1$ точек.

Рассмотрим произвольный вектор $\vec{m} \in V_{n+1}\backslash\{\vec{0}\}$ и разложим его по базису $\{\vec{a}_i\}_{n+1}$:

$$\vec{m} = x^i\vec{a}_i\,, \quad x^i \in \mathbb{R}; \quad i = \overline{0,n}. \tag{I.6}$$

[4]В дальнейшем для удобства и согласно установившимся традициям будем нумеровать векторы базиса порождающего векторного пространства (и соответствующие координаты) целыми числами от 0 до n.

Так как $\vec{x}$ - ненулевой вектор, то все числа x^i одновременно не равны нулю. В отображении

$$\Phi\ : V_{n+1} \longrightarrow P_n(V)$$

вектор $\vec{m} \in V_{n+1} \backslash \{\vec{0}\}$ порождает точку $M = \Phi(\vec{m})$ проективного пространства $P_n(V)$.

Определение OI.6. *Упорядоченная система чисел $x^0, x^1, \ldots, x^n)$, одновременно не равных нулю, называется проективными координатами точки $M = \Phi(\vec{m}) \in P(V)$.*

При этом, как и в аффинной геометрии, будем писать: $M(x^0, x^1, \ldots, x^n)$.

Рассмотрим в векторном пространстве V_{n+1} наряду с базисом $\{\vec{a}_i\}_{n+1}$ гомотетичный ему базис $\{\vec{b}_i\}_{n+1}$, так что:

$$\vec{b}_i\ = \lambda \vec{a}_i\,, \quad (\lambda \in \mathbb{R} \backslash 0, i = \overline{0, n}).$$

Разложим вектор $\vec{m}$ по каждому из этих базисов:

$$\vec{m} = x^i \vec{a}_i\,; \qquad \vec{m} = y^i \vec{b}_i \implies$$

$$\vec{m} = y^i \lambda \vec{a}_i \implies$$

$$x^i = \lambda y^i; \qquad (i = \overline{0, n}, \tag{I.7}$$

откуда следует, что:

Проективные координаты точки $M \in P(V)$ определены не однозначно, с точностью до общего ненулевого множителя.

I.3.2 Точки общего положения

Выше мы отмечали, что проективный репер может быть задан точками проективного пространства. Покажем это на основе аффинной модели проективного пространства. Зададим в аффинном пространстве $\mathbf{A}_{n+1}$ произвольную точку O и рассмотрим связку прямых с центром в этой точке, $\mathcal{S}(O)$, ((Рис.I.1)). Пусть V_{n+1} - пространство переносов $\mathbf{A}_{n+1}$, порождающее проективное пространство $P_n(V)$. Прямые связки $\mathcal{S}(O)$ порождают точки проективного пространства $P(V)$. Пусть $\{\vec{a}_i\}_{n+1} \in V_{n+1}$ - базис пространства переносов. Тогда в отображении $\Phi\,(\vec{a}_i\,)$ он порождает репер проективного

пространства $\mathbb{R}(\vec{a}_i\,)$, а также упорядоченную систему $(n+1)$ точек проективного пространства $P(V)$:

$$A_i = \Phi(\vec{a}_i\,), \quad (i = \overline{0,n}).$$

Однако, упорядоченная система точек $A_0, A_1, \ldots, A_n$ не определяет проективный репер однозначно.

Доказательство: $\langle\langle$ Действительно, отображение Φ сюръективно, но не инъективно. Следовательно, любая точка A_i из этой системы может порождаться любым вектором, коллинеарным $\vec{a}_i$, например: $\vec{b}_i = \lambda_i \vec{a}_i$, где λ - любое ненулевое число. Но при этом базисы $\{\vec{a}_i\}_{n+1}$ и $\{\vec{b}_i\}_n$ оказываются в общем случае не гомотетичными (все λ_i могут оказаться различными, так что не будет выполняться соотношение (I.5)), а, следовательно, одна и та же система $(n+1)$ точек проективного пространства может порождаться не гомотетичными базисами, т.е., не определять проективный репер согласно определению (OI.5). $\rangle\rangle$

Для однозначного задания проективного репера с помощью точек проективного пространства к указанной системе $(n+1)$ точек необходимо добавить еще одну точку. Напомним, что аффинный репер в n-мерном аффинном пространстве определялся упорядоченным набором $(n+1)$ *точек общего положения*. В свою очередь точки общего положения определялись таким образом, чтобы на их парах можно было построить n линейно независимых геометрических векторов, т.е., базис пространства переносов. При этом точки общего положения не принадлежат аффинному пространству размерности, меньшей n. Аналогично для проективного пространства размерности n, $P_n(V)$, определим систему $(n+2)$ *точек общего положения*:

Определение OI.7. *Система различных* $(n+2)$ *точек* $A_0, A_1, \ldots, A_n, A_{n+1}$ *n-мерного проективного пространства* $\mathcal{P}_n$ *называется* точками общего положения*, если никакие* $(n+1)$ *точки из этой системы не принадлежат проективной плоскости размерности меньшей* n.

Это означает, что система точек общего положения в проективном пространстве размерности n порождается системой $(n+1)$ линейно независимых векторов $\mathcal{A} = \{\vec{a}_0\,, \vec{a}_1\,, \ldots, \vec{a}_n\,\}$ векторного пространства V_n, (т.е., базисом векторного пространства), и еще одним ненулевым вектором, $\vec{e}$, таким, что система, состоящая из подсистемы n любых векторов из $\mathcal{A}$ и вектора $\vec{e}$, снова образовывала базис пространства V_{n+1}.

I.3.3 Проективный репер на точках общего положения

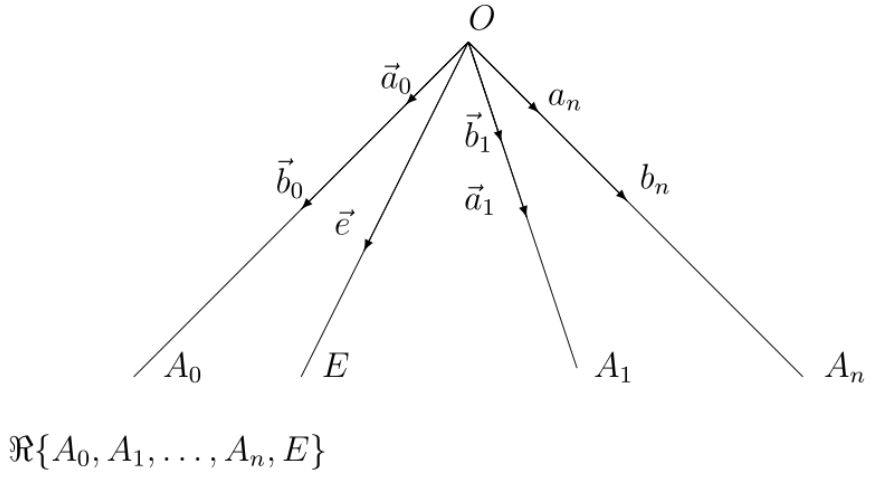


Рис.I.1. *Проективный репер на точках общего положения*

Для построения системы точек общего положения введем вектор:

$$\vec{e} = \vec{a}_0 + \vec{a}_1 + \ldots + \vec{a}_n\,, \tag{I.8}$$

который определяет некоторую точку $E = \Phi(\vec{e})$ проективного пространства $P(V)$. В дальнейшем построенную таким образом точку будем называть *единичной точкой.* Пусть два базиса, $\{\vec{a}_i\}_{n+1}$ и $\{\vec{b}_i\}_{n+1}$, гомотетичны друг другу, т.е.,

$$\vec{a}_i = \lambda\vec{b}_i\,; \qquad (i = \overline{0, n})$$

и пусть E_a - единичная точка, порожденная базисом $\{\vec{a}_i\}_{n+1}$, т.е., $E_a = \Phi\left(\sum_{i=0}^{n}\vec{a}_i\right)$, а E_b - единичная точка, порожденная базисом $\{\vec{b}_i\}_{n+1}$, т.е., $E_b = \Phi\left(\sum_{i=0}^{n}\vec{b}_i\right)$. Вследствие гомотетичности базисов:

$$\sum_{i=1}^{n}\vec{a}_i = \lambda\sum_{i=1}^{n}\vec{b}_i \Longrightarrow$$

$$\vec{e}_a = \lambda\vec{e}_b \Longrightarrow E_a = E_b,$$

- таким образом, два гомотетичных базиса определяют одну и ту же единичную точку.

Согласно вышесказанному очевидно, что система $(n+2)$ точек $A_0, A_1, \ldots, A_n, E$ является системой точек общего положения в $P_n(V)$.

Теорема TI.2. *Если* $\{A_0, A_1, \ldots, A_n, E\}$ *- упорядоченная система* $(n+2)$ *точек общего положения в* n*-мерном проективном пространстве* $P_n(V)$,

то существует и единственен проективный репер $\Re(\vec{a}_i\,)$, $(i = \overline{0,n})$, *такой, что*

$$\Phi(\vec{a}_i\,) = A_i; \quad \Phi\left(\sum_{i=0}^{n} \vec{a}_i\right) = E. \tag{I.9}$$

Доказательство: $\langle\langle$

<u>Существование:</u>

Пусть точки $A_0, A_1, \ldots, A_n, E \in P_n(V)$ порождены векторами $\vec{a}_0\,, \vec{a}_1\,, \ldots, \vec{a}_n\,,$ $\vec{e} \in V_n$. Так как указанные точки являются точками общего положения, то соответствующие им векторы $\vec{a}_0\,, \vec{a}_1\,, \ldots, \vec{a}_n$ являются линейно независимыми векторами, и поэтому на них можно построить базис $\{\vec{a}_i\,\}_{n+1}$ векторного пространства V_{n+1}. При этом могут возникнуть два случая:

1. Система векторов $\vec{a}_0\,, \vec{a}_1\,, \ldots, \vec{a}_n\,, \vec{e}$ *согласована* ((Рис.I.2)), т.е.:

$$\sum_{i=0}^{n} \vec{a}_i \; = \vec{e},$$

   - в этом случае репер $\Re\{\vec{a}_0\,, \vec{a}_1\,, \ldots, \vec{a}_n\,\}$ и является искомым репером.

2. Система векторов $\vec{a}_0\,, \vec{a}_1\,, \ldots, \vec{a}_n\,, \vec{e}$ *не согласована* ((Рис.I.3)), т.е.:

$$\sum_{i=0}^{n} \vec{a}_i \; \neq \vec{e},$$

   -

в этом случае введем новую систему базисных векторов, $\vec{a}_{\prime i}$, коллинеарных исходным векторам $\vec{a}_i$:

$$\vec{a}_{\prime i} = \lambda_i \vec{a}_i\,,$$

подбирая числа λ_i таким образом, чтобы векторы нового базиса были согласованы с вектором $\vec{e}$. Эта процедура перехода от несогласованного базиса к согласованному называется *нормированием системы векторов*. Для нахождения чисел λ_i разложим вектор $\vec{e}$ по базису $\{\vec{a}_i\,\}_{n+1}$:

$$\vec{e} = \sum_{i=0}^{n} \varepsilon^i \vec{a}_i\,,$$

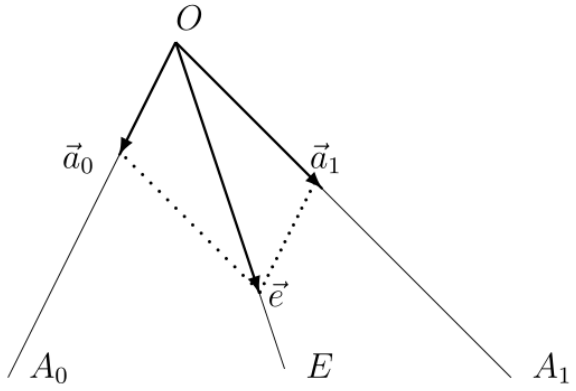


Рис.I.2. *Проективный репер для одномерного проективного пространства в случае согласованной системы векторов*

где ε^i - координаты вектора $\vec{e}$ в базисе $\{\vec{a}_i\}_{n+1}$.

Сравнивая это выражение с определением (I.8) вектора $\vec{e}$, получим связь согласованной системы векторов, $\vec{a}_{\prime i}$, с векторами несогласованного базиса, $\{\vec{a}_i\}_{n+1}$:

$$\vec{a}_{\prime i} = \varepsilon^i \vec{a}_i\,, \quad \text{(Суммирования нет!)}$$

Так как точки $A_0, A_1, \ldots, A_n, E$ - точки общего положения, то все числа ε^i отличны от нуля, поэтому векторы $\vec{a}_{\prime i}$ также образуют базис векторного пространства, $\{\vec{a}_{\prime i}\}_{n+1}$. В этом случае репер $\Re(\vec{a}_{\prime i})$ является искомым.

Таким образом, искомые коэффициенты λ_i равны: $\lambda_i = \varepsilon^i$, $i = \overline{0, n}$ - координатам вектора $\vec{e}$ относительно старого базиса. Эти коэффициенты называются *нормирующими множителями.*

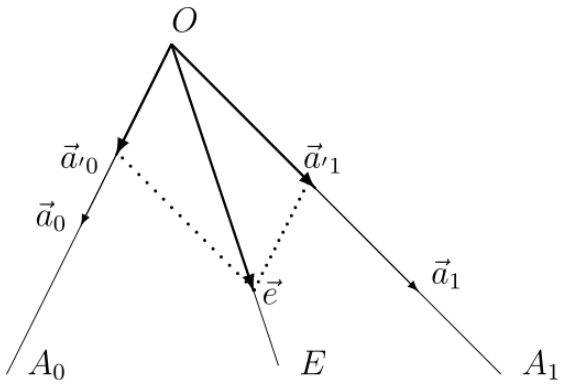


Рис.I.3. *Процедура нормирования системы векторов в случае одномерного проективного пространства*

<u>Единственность:</u>

Докажем теперь единственность полученного таким образом репера. Предположим обратное, что существуют два репера, $\Re(\vec{a}_i\,)$ и $\Re(\vec{b}_i\,)$, такие, что согласно условиям (I.10) теоремы (TV.1):

I). $\Phi(\vec{a}_i\,) = \Phi(\vec{b}_i\,) = A_i, \quad (i = \overline{0,n})$;

II). $\Phi\left(\sum_{i=0}^{n} \vec{a}_i\,\right) = \Phi\left(\sum_{i=0}^{n} \vec{b}_i\right) = E.$

Тогда получим следствия:

$$\{\text{I}).\ ,(\text{I.2}),(\text{I.2})\ :\} \implies \vec{b}_i\ = \lambda_i \vec{a}_i\,, \qquad (i = \overline{0,n}), \tag{I.10}$$

$$\text{II}).\ :\ \implies \sum_{i=0}^{n} \vec{b}_i\ = \Lambda \sum_{i=0}^{n} \vec{a}_i\,. \tag{I.11}$$

Таким образом, подставляя $\vec{b}_i$ из (I.10) в соотношение (I.11), получим:

$$\sum_{i=0}^{n} \lambda_i \vec{a}_i\ = \mu \sum_{i=0}^{n} \vec{a}_i\,, \tag{I.12}$$

откуда вследствие линейной независимости векторов базиса $\{\vec{a}_i\,\}_{n+1}$ получим:

$$\lambda_i = \mu, \qquad (i = \overline{O,n}) \implies \vec{b}_i\ = \Lambda \vec{a}_i\,. \tag{I.13}$$

Следовательно, базисы $\{\vec{a}_i\,\}_{n+1}$ и $\{\vec{b}_i\,\}_{n+1}$ гомотетичны, т.е., согласно определению (OI.5): $\Re(\vec{b}_i\,) = \Re(\vec{a}_i\,)$. $\rangle\rangle$

Из доказанной теоремы следует, что на проективной прямой проективный репер однозначно определяется упорядоченной тройкой различных точек, $\Re = \{A_0, A_1, E\}$, а на проективной плоскости, - упорядоченной четверкой различных точек, $\Re = \{A_0, A_1, A_2, E\}$, из которых никакие три не лежат на проективной прямой.

Координаты точек репера

В заключение раздела выясним, каковы координаты самих точек, образующих проективный репер? Пусть точки $A_0, A_1, \ldots, A_n, E$ определяют проективный репер $\Re = \{A_0, A_1, \ldots, A_n, E\}$. По определению (OI.7) координаты точки в проективном пространстве равны координатам вектора ее порождающего в векторном базисе, порождающем проективный репер. Так как

реперные точки $A_0, A_1, \ldots, A_n$ как раз порождены векторами базиса, то они имеют координаты:

$$\begin{aligned} &A_0 = (1, 0, \ldots, 0); \\ &A_1 = (0, 1, \ldots, 0); \\ &\ldots\ldots\ldots \\ &A_n = (0, 1, \ldots, 1). \end{aligned} \tag{I.14}$$

Вследствие определения (I.8) единичной точки E получим из (I.14) для ее координат:

$$E = (1, 1, \ldots, 1). \tag{I.15}$$

I.4 Расширенная прямая

Согласно сказанному в разделе (I.2) в качестве модели проективной прямой $P_1(V_2)$ рассмотрим пучок прямых, $\mathcal{P}(O)$, на аффинной плоскости $\mathbf{A}_2$. В этом отображении, $\Psi : \mathcal{P}(O) \longrightarrow P_1(V)$, каждой прямой пучка, $d_i \in \mathcal{P}(O)$, соответствует одна точка M_i проективной прямой $M_i \in P_1(V)$. Мы же для наглядности, хотим поместить эту проективную прямую, P_1, на аффинную плоскость $\mathbf{A}_2$.

Пусть $d \in \mathbf{A}_2$ произвольная прямая аффинной плоскости, не проходящая через центр пучка, т.е., $d \notin \mathcal{P}(O)$.

Зададим отображение φ (обратное отображению Ψ) множества точек прямой $M \in d$ на множество прямых пучка

$$\varphi : M \longrightarrow \mathcal{P}(O) \tag{I.16}$$

по закону:

$$\varphi(M \in d) = (OM). \tag{I.17}$$

Такое отображение называется *перспективным отображением прямой d в пучок прямых $\mathcal{P}(O)$*. Таким образом, в отображении φ каждой точке прямой M соответствует та прямая пучка $\mathcal{P}(O)$, которая пересекается с прямой d в этой точке, т.е., $M = d \cap \mathcal{P}(O)$ (см. (Рис.I.4)). Очевидно, что это отображение инъективно:

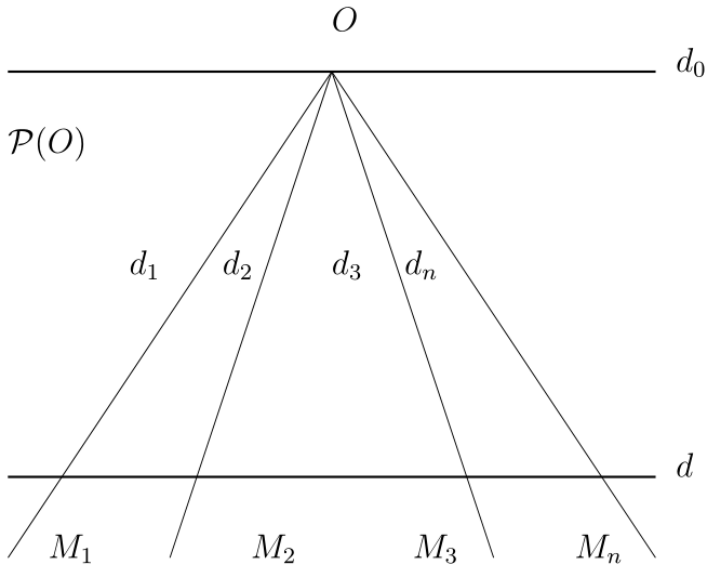
$$M_1 \neq M_2 \Longrightarrow \varphi(M_1) \neq \varphi(M_2),$$

но не сюръективно, так как в пучке прямых $\mathcal{P}(O)$ содержится прямая d_0, параллельная прямой d, которая не пересекает ее. В обратном к φ отображению Ψ этой прямой пучка не соответствует никакая точка прямой d. Этого и

следовало ожидать, так как аффинная прямая, будучи одномерным аффинным пространством $\mathbf{A}_1$, не является проективной прямой, т.е., одномерным проективным пространством P_1.

Для того, чтобы отображение φ было сюръективным проделаем следующую формальную логическую операцию. Добавим к этой прямой некоторую новую точку, M_∞, так, чтобы образом этой точки в отображении φ как раз и являлась прямая пучка $d_0 \parallel d$, параллельная нашей прямой d :

$$\varphi(M_\infty) = d_0. \tag{I.18}$$



$\varphi : d \longrightarrow \mathcal{P}(O)$

Рис.I.4. *Перспективное отображение прямой в пучок прямых*

В дальнейшем прямую $d_0 \parallel d$ пучка $\mathcal{P}(O)$ будем называть *особой прямой пучка*, а точку M_∞ (I.18) - *несобственной точкой прямой* d. При этом отображение φ становится сюръективным, а, значит, и биективным, а обратное к нему отображение Ψ удовлетворяет аксиомам проективного пространства, следовательно, множество:

$$\overline{d} = d \cap M_\infty \tag{I.19}$$

является одномерным проективным пространством P_1, или - проективной прямой. Такая аффинная модель $\overline{d}$ проективной прямой P_1 называется *расширенной прямой*, а сама процедура дополнения аффинной прямой до расширенной называется *расширением прямой.*

Важно подчеркнуть, что ни на аффинной плоскости, ни на аффинной прямой не существует несобственных точек. Дополнив аффинную прямую

несобственной точкой, мы тем самым получили совсем другое множество, которое для наглядности можем по - прежнему считать “почти аффинной прямой”, а ее несобственную точку M_∞ рассматривать как - бы “бесконечно удаленную”. С другой стороны на проективной прямой P_1 все точки равноправны[5], и никакой несобственной точки на проективной прямой не существует, как не существует и никакой выделенной прямой в пучке $\mathcal{P}(O)$ до тех пор, пока не определена конкретная прямая проектирования d. Таким образом, выделенность несобственной точки M_∞ на расширенной прямой является следствием выделенности (фиксации) отображения Ψ в модели проективной прямой на аффинной плоскости. Изменив прямую проектирования d, мы тем самым изменим и особую прямую d_0, а, следовательно, и несобственную точку модели проективной прямой. Вследствие вышесказанного, абстрагируясь от способа построения, мы должны несобственную точку расширенной прямой считать равноправной со всеми остальными точками этой прямой.

I.5 Проективные реперы на расширенной прямой

Согласно теореме (TV.1) раздела (I.3) проективный репер на расширенной прямой $\overline{d} = P_1$ определяется упорядоченной тройкой различных точек этой прямой:

$$\Re = \{A_0, A_1, E\}; \qquad (A_1, A_2, E \neq).$$

При этом положение любой точки M этой прямой определяется ее проективными координатами (см. (I.3)), т.е., упорядоченной парой чисел: (x^0, x^1). Пусть на аффинной плоскости заданы пучок прямых, $\mathcal{P}O$, и прямая $\overline{d}$, не проходящая через его центр, и пусть на прямой d задана упорядоченная тройка ее собственных точек, $\{A_0, A_1, E\}$. Также на этой прямой зададим произвольную точку M (см. (Рис.I.5)). Как найти проективные координаты точки M? Для этого на прямой (OE) возьмем *произвольную* точку и отложим вектор $\overrightarrow{OE}$.

Методически проще всего при этом выбирать в качестве саму единичную точку E. Далее отложим вдоль прямых (OA_0) и (OA_1) пучка $\mathcal{P}(O)$ векторы $\vec{e}_0$ и $\vec{e}_1$, так, чтобы:

$$\vec{e}_0 + \vec{e}_1 = \overrightarrow{O}.$$

Ясно, что векторы $\vec{e}_0$, $\vec{e}_1$ при *заданной* точке определяются однозначно. Выберем эти векторы в качестве векторов базиса и разложим по нему любой

[5]Как равноправны и все точки аффинной прямой.

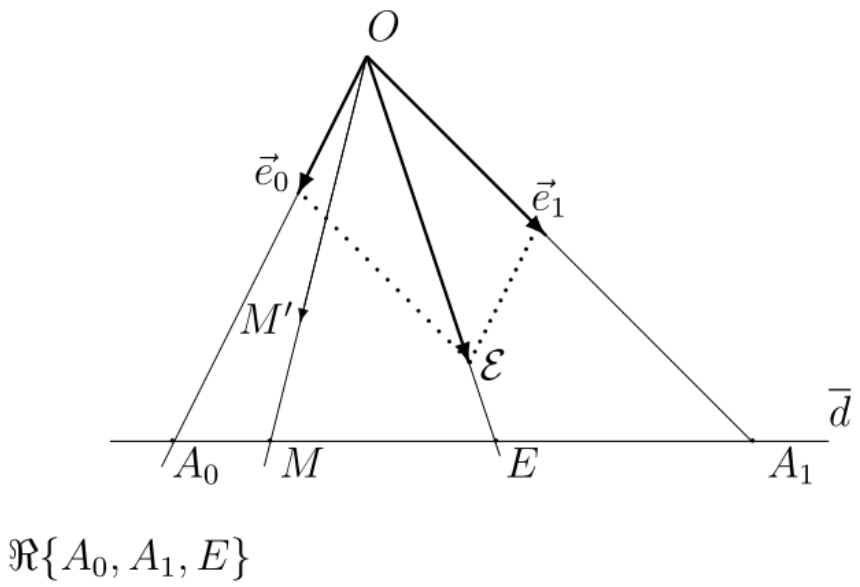


Рис.I.5. *Проективный репер на собственных точках прямой*

вектор, коллинеарный $\overrightarrow{OM}$, например, вектор $\overrightarrow{OM'}$ (см. (Рис.I.5)). Поскольку базис при этом автоматически получился согласованным, то координаты вектора $\overrightarrow{OM'}$ в этом базисе:

$$\overrightarrow{OM'} = x^0\vec{e}_0 + x^1\vec{e}_1 \tag{I.20}$$

согласно определению (OI.7) и теореме (TV.1) и будут являться искомыми проективными координатами точки M на проективной прямой, $M(x^0, x^1)$.

К сказанному следует добавить, что полученные координаты можно умножить (или поделить) на любое число, не равное нулю. Например, $M(-4, 2) = M(2, -1)$. Этот факт очевиден на основе построения ((Рис.I.5)), так как и в качестве точки и в качестве точки M' можно взять любую точку, лежащую на соответствующих прямых, (OE) и (OM). Часто бывает удобным взять в качестве этих точек первоначальные точки, т.е., положить $= E$ и $M' = M$.

Аналогично решается и обратная задача - построения точки по ее проективным координатам.

I.5.1 Однородные аффинные координаты на прямой

Пусть теперь в рассмотренной модели проективной прямой точка A_1 является несобственной: $A_1 = X_\infty$, т.е., ее прообразом служит особая прямая $d_0 \parallel d$ пучка $\mathcal{P}(O)$. Векторный базис и в этом случае определяется просто с той лишь только разницей, что вектор $\vec{e}_1$ теперь лежит на особой прямой пучка (см. (Рис.I.6)). Очевидно, что при этом несобственная точка является

образом особой прямой пучка, т.е., порождается вектором $\vec{e}_1$. Но тогда из определения проективных координат точки (I.20) следует, что первая (по порядку) координата несобственной точки $M = X_\infty$ равна нулю, т.е.:

$$X_\infty = (O, x^1),\ (x^1 \neq 0) \Longrightarrow X_\infty = (0, 1).$$

Все остальные точки расширенной прямой имеют ненулевую первую координату $x^0 \neq 0$. Поделив на величину x^0 координаты любой собственной точки проективной прямой, получим для ее координат:

$$M \neq X_\infty \Longrightarrow M = (1, x).$$

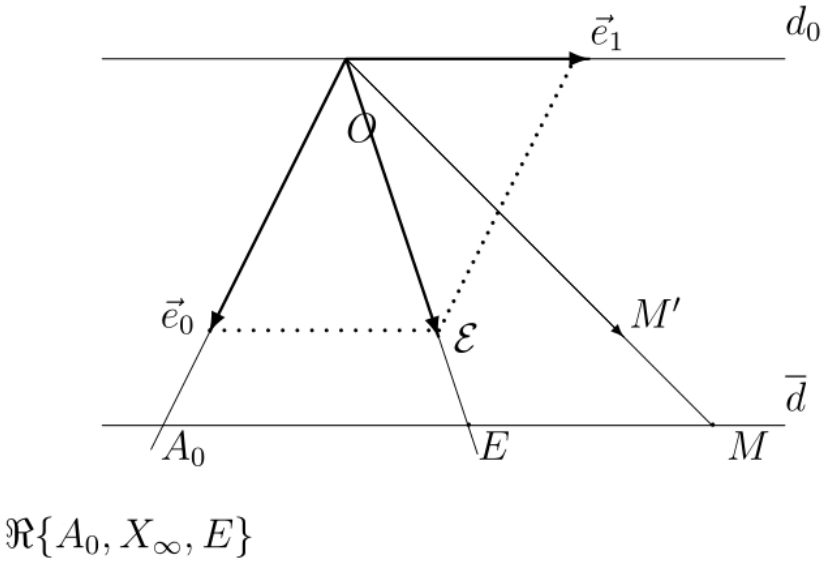


Рис.I.6. *Проективный репер прямой в случае, когда одна из его точек несобственная*

Заметим, что геометрически этому результату соответствует такой выбор базиса $\{\vec{e}_0, \vec{e}_1\}$, при котором (см. (Рис.I.7)):

$$\vec{e}_0 = \overrightarrow{OA_0}; \vec{e}_1 = \overrightarrow{A_0E}.$$

При этом:

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA_0} + \overrightarrow{A_0M} \Longrightarrow \overrightarrow{OM} = \vec{e}_0 + x\vec{e}_1.$$

Заметим, что число x имеет простой геометрический смысл — это аффинная координата точки M на аффинной прямой d в аффинном репере $\Re\{A_1; \overrightarrow{A_1E}\}$ этой прямой.

Итак, указанный репер, $\Re\{A_0, X_\infty, E\}$, построенный на системе точек расширенной прямой, из которых одна, вторая: $A_2 = X_\infty$, является несобственной, обладает следующими свойствами:

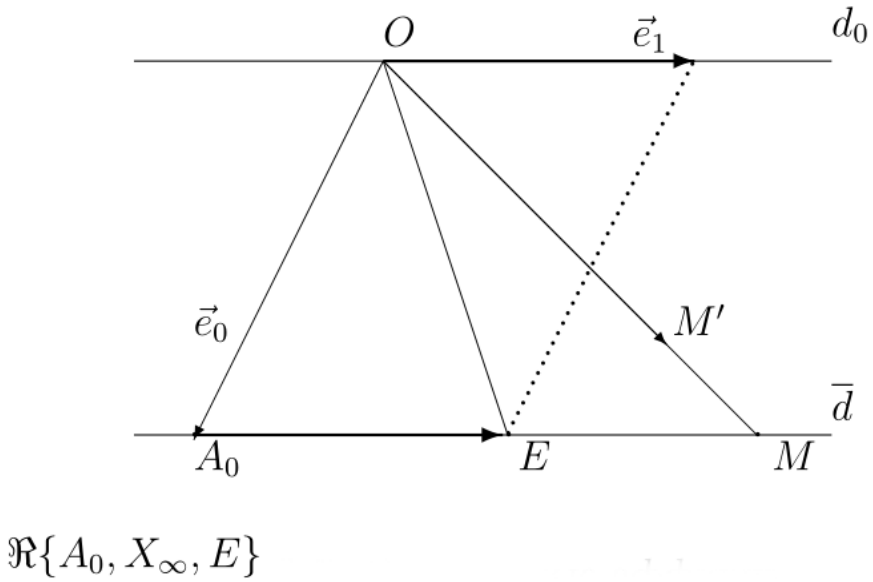


Рис.I.7. *Однородные аффинные координаты на прямой*

1. Несобственная точка прямой имеет в этом репере координаты, $(0, x^1)$, где x^1 - любое отличное от нуля число.

2. Любая собственная точка прямой имеет координаты $(1, x)$, где x - аффинная координата точки прямой в аффинном репере $\Re\{A_1; \overrightarrow{A_1E}\}$.

Проективные координаты точек расширенной прямой $\overline{d}$ относительно такого репера называются *однородными аффинными координатами.*

Примеры построения точки по ее проективным координатам на прямой см. в разделе (VIII.1).

I.6 Расширенная плоскость

Аналогично процедуре предыдущего раздела возьмем в аффинном пространстве $\mathbf{A}_3$ связку прямых $\mathcal{S}(O)$ с центром в точке O и плоскость Π, не проходящую через центр связки: $O \notin \Pi$. Связка прямых в аффинном пространстве является моделью проективной плоскости. Зададим отображение множества точек плоскости Π на множество прямых связки $\mathcal{S}(O)$:

$$\varphi : \Pi \longrightarrow \mathcal{S}(\mathcal{O}) \tag{I.21}$$

по закону:

$$\varphi(M) = (OM), \quad \forall M \in \Pi. \tag{I.22}$$

Такое отображение называется *перспективным отображением плоскости* Π *в связку прямых* $\mathcal{S}(O)$ (см. (Рис.I.8)).

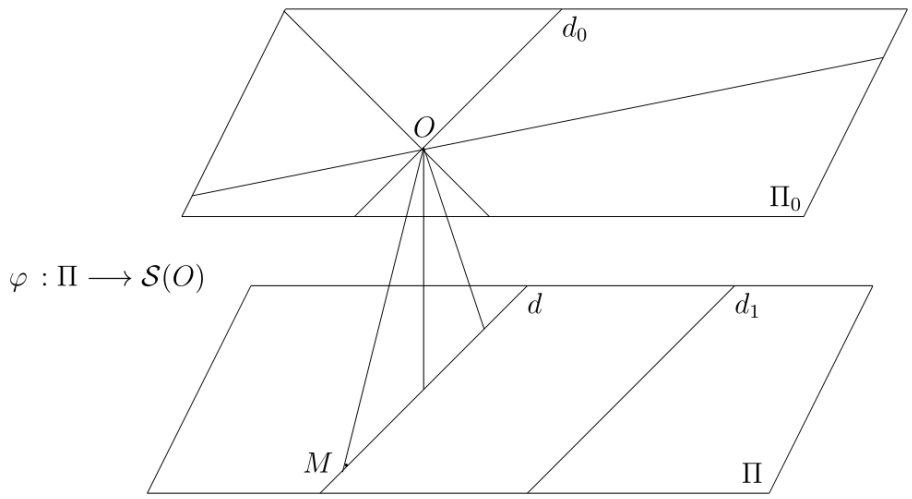


Рис.I.8. *Перспективное отображение плоскости в связку прямых*

Согласно закону (I.22) образом прямой $d \in \Pi$ плоскости Π в отображении φ (I.21) является двумерный пучок прямых $\mathcal{P}(O)_d$ с центром O, принадлежащий плоскости, в которой лежат точка O и прямая d, без особой прямой этого пучка d_0 (см. (Рис.I.8)): $\varphi(d) = \mathcal{P}(O)_d \backslash d_0$. Здесь и ниже плоскость, проходящую через точку O и содержащую прямую $d|O \notin d$, будем обозначать посредством $\Pi(O; d)$. Особая прямая d_0 проходит через центр пучка O параллельно данной прямой $d : \quad d_0 \parallel d$. Каждой прямой плоскости $d \in \Pi$ соответствует своя особая прямая. Все множество этих особых прямых образуют *особый пучок прямых*, $\mathcal{P}_0(O)$, лежащих в *особой плоскости*, Π_0, проходящей через центр O параллельно плоскости Π :

$$\Pi_0 \,|O \in \Pi_0; \quad \Pi_0 \parallel \Pi \,.$$

Далее, отображение φ (I.21), как и в предыдущем случае, инъективно, но не сюръективно — прямые особого пучка связки $\mathcal{S}(O)$ в этом отображении не имеют прообраза на плоскости Π. Исходя из вышесказанного можно утверждать, что каждой прямой $d \in \Pi$ в отображении φ соответствует некоторая плоскость, в которой лежит соответствующий пучок прямых, $\Pi(O; d)$ и которая в свою очередь принадлежит *связке плоскостей с центром* O : $\mathbf{S}(O)$, если последнюю определить как множество всех плоскостей аффинного пространства, проходящих через точку O. Именно, каждая прямая $d \in \Pi$

является пересечением плоскости Π со связкой плоскостей $\mathbf{S}(O)$:

$$d = \Pi \cap \Pi(O; d) \in \mathbf{S}(O).$$

I.6.1 Расширение аффинной плоскости

Для того, чтобы сделать отображение φ сюръективным, повторим процесс формального расширения аффинной плоскости Π до плоскости проективной , $\overline{\Pi}$, дополняя плоскость Π множеством несобственных точек $\{M_\infty\}$ таким, что:

$$\varphi(\{M_\infty\}) = \mathcal{P}_0(O).$$

Поскольку в отображении φ прообразом каждой плоскости связки плоскостей $\mathbf{S}(O)$ является прямая на плоскости d, то очевидно, что множество всех несобственных точек расширенной плоскости:

$$\overline{\Pi} = \Pi \cap \{M_\infty\},$$

$\{M_\infty\}$, представляет собой *несобственную прямую* d_∞ *расширенной плоскости*, являющуюся прообразом особой плоскости Π_0 :

$$\varphi(d_\infty) = \mathcal{P}_0(O) \qquad (= \Pi_0). \tag{I.23}$$

Договоримся, что последнее равенство $\mathcal{P}_0(O) = \Pi_0$ здесь и в дальнейшем мы будем понимать в смысле равенства *множеств точек*, но наделенных *различной структурой*. Дополнив аффинную плоскость несобственной прямой, мы добились того, что отображение φ (I.21) стало биективным на множестве всех точек расширенной плоскости:

$$\varphi \ : \overline{\Pi} \longrightarrow \mathcal{S}(\mathcal{O}). \tag{I.24}$$

Поэтому обратное отображение $\varphi^{-1} \stackrel{def}{=} \Psi$:

$$\Psi \ : \mathcal{S}(O) \longrightarrow \overline{\Pi}$$

также является биекцией. Но связка прямых $\mathcal{S}(O)$ аффинного пространства является аффинной моделью проективной плоскости $\mathcal{P}_2$. Пучки этой связки, в свою очередь, являются моделями проективных прямых $\mathcal{P}_1 \in \mathcal{P}_2$ этой плоскости. Но тогда и расширенная плоскость $\overline{\Pi}$ также является моделью проективной плоскости $\mathcal{P}_2$, а расширенные прямые этой плоскости, $\overline{d} \in \overline{\Pi}$, в свою очередь, — моделями проективных прямых этой плоскости.

Несобственная прямая расширенной плоскости $d_\infty \in \overline{\Pi}$ является множеством несобственных точек всех расширенных прямых $\overline{d}$ расширенной плоскости $\overline{\Pi}$. Поэтому расширенную плоскость можно получить из аффинной, добавляя к последней несобственные точки всех расширяемых прямых, лежащих в данной плоскости.

Несобственная прямая, d_∞, расширенной плоскости, как и несобственная точка, M_∞, расширенной прямой $\overline{d}$ в предыдущем разделе, ничем не выделена на проективной плоскости $\overline{\Pi}$. Рассмотрим теперь на плоскости Π прямую $d' \in \Pi$, параллельную исходной прямой d. Ясно, что плоскости $\Pi(O; d)$ и $\Pi(O; d')$ содержат одну и ту же прямую, d_0, которая является особой прямой для каждой из этих прямых (см. (Рис.I.8)), а с другой стороны является прообразом несобственной точки M_∞. Отсюда сразу следует важный вывод:

Теорема TI.3. *Прямые d и d', параллельные на аффинной плоскости Π, при расширении ее до проективной плоскости $\overline{\Pi}$ пересекаются в одной ее несобственной точке M_∞ :*

$$d \cap d' = M_\infty.$$

Обратно, если на расширенной плоскости $\overline{\Pi}$ две прямые d и d' пересекаются в несобственной точке, то на исходной аффинной плоскости эти прямые параллельны.

I.7 Проективные реперы на расширенной плоскости

Проективный репер, $\Re$, расширенной плоскости $\overline{\Pi}$, как модели проективной плоскости, согласно теореме (TV.1) раздела (I.3) определяется упорядоченной четверкой точек общего положения,

$$\Re = \{A_0, A_1, A_2, E\},$$

из которых *никакие три не лежат на одной расширенной прямой.* Итак, зададим на плоскости Π упорядоченную четверку точек общего положения, $\{A_0, A_1, A_2, E\}$ (см. (Рис.I.9)).

Возьмем некоторую точку, O, вне плоскости Π ($O \notin \Pi$) в качестве центра связки прямых $\mathcal{S}(O)$, с помощью которой определим указанное в предыдущем разделе перспективное отображение: $\varphi : \Pi \longrightarrow \mathcal{S}(O)$. На трех прямых

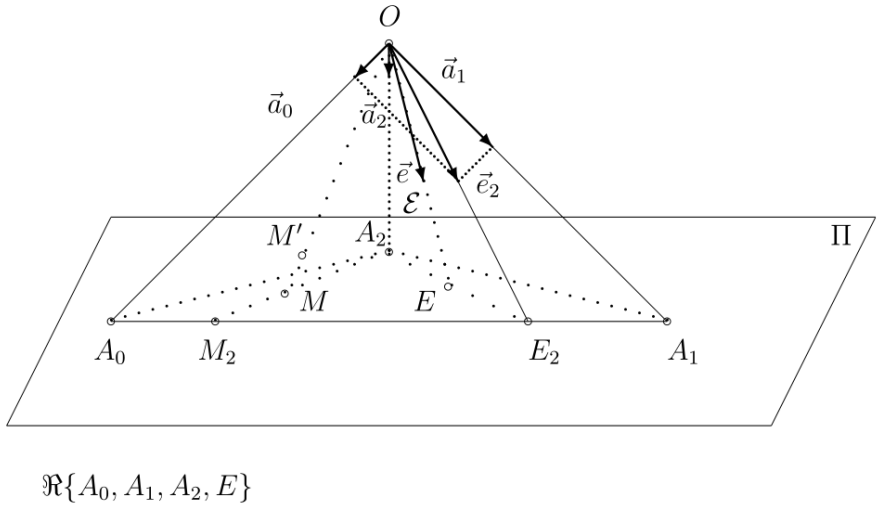


Рис.I.9. *К построению проективного репера плоскости*

связки $(OA_0), (OA_1), (OA_2)$ отложим соответствующие направляющие векторы произвольной длины: $\vec{a}_0\,, \vec{a}_1\,, \vec{a}_2\,,$ а на прямой связки (OE) отложим вектор

$$\overrightarrow{O} = \vec{e} = \vec{a}_0 + \vec{a}_1 + \vec{a}_2\,. \tag{I.25}$$

Таким образом, по построению упорядоченная четверка векторов $\{\vec{a}_0\,, \vec{a}_1\,, \vec{a}_2\,, \vec{e}\}$ является согласованной.

Возьмем на плоскости Π произвольную точку $M \in \Pi$. Как найти проективные координаты этой точки в проективном репере $\Re\{A_0, A_1, A_2, E\} = \Re\{\vec{a}_0\,, \vec{a}_1\,, \vec{a}_2\,\}$?

I.7.1 Теорема о проективном репере на плоскости

Возьмем произвольную точку M' на прямой (OM) связки $\mathcal{S}(O)$, отложим на ней вектор $\vec{m} = \overrightarrow{OM'}$ и разложим его по базису $\{\vec{a}_0\,, \vec{a}_1\,, \vec{a}_2\,\}$:

$$\overrightarrow{OM'} = x^i\vec{a}_i = x^0\vec{a}_0 + x^1\vec{e}_1 + x^2\vec{a}_2\,. \tag{I.26}$$

По определению (OI.7) упорядоченная система чисел x^0, x^1, x^2 и является искомыми проективными координатами точки M : $\quad (M(x^0, x^1, x^2).)$

Прямые (OM), (OA_2) и (OE) связки $\mathcal{S}(O)$ определяют векторы $\vec{m}$, $\vec{a}_2$ и $\vec{e}$ и пару соответствующих плоскостей (MOA_2) и (EOA_2) связки плоскостей $\mathbf{S}(O)$. Пересечение этих плоскостей с плоскостью Π есть прямые (A_2M) и (A_2E). Пересечение плоскости $(A_0OA_1) \in \mathbf{S}(O)$ с плоскостью Π, очевидно, есть прямая (A_0A_1).

Определим на сторонах треугольника $\Delta A_0A_1A_2$ две тройки точек $\{M_0, M_1, M_2\}$, $\{E_0, E_1, E_2\}$:

$$\begin{aligned} &(A_0M) \cap (A_1A_2) \stackrel{def}{=} M_0; && (A_0E) \cap (A_1A_2) \stackrel{def}{=} E_0; \\ &(A_1M) \cap (A_0A_2) \stackrel{def}{=} M_1; && (A_1E) \cap (A_0A_2) \stackrel{def}{=} E_1; \\ &(A_2M) \cap (A_0A_1) \stackrel{def}{=} M_2; && (A_2E) \cap (A_0A_1) \stackrel{def}{=} E_2. \end{aligned} \tag{I.27}$$

Будем называть в дальнейшем указанные точки M_i, E_i $(i = \overline{0,2})$ *проекциями точек* M, E *из центров проектирования* A_i *на прямые* (A_kA_j), $(i, j, k \neq$).

Обозначим:

$$\begin{aligned} \vec{e}_0 &\stackrel{def}{=} \vec{a}_1 + \vec{a}_2\,; \\ \vec{e}_1 &\stackrel{def}{=} \vec{a}_0 + \vec{a}_2\,; \\ \vec{e}_2 &\stackrel{def}{=} \vec{a}_0 + \vec{a}_1\,. \end{aligned} \tag{I.28}$$

Соответствующие геометрические векторы принадлежат следующим боковым граням тетраэдра $OA_0A_1A_2$:

$$\vec{e}_0 \in (OA_1A_2); \quad \vec{e}_1 \in (OA_0A_2); \quad \vec{e}_2 \in (OA_0A_1).$$

С другой стороны эти векторы, $\vec{e}_i$, являются направляющими векторами прямых (OE_i). Действительно, рассмотрим, например, вектор $\vec{e}_2$. Нетрудно видеть, что вследствие (I.25) векторы $\vec{a}_2, \vec{e}_2, \vec{e}$ компланарны, а именно:

$$\vec{e} = \vec{a}_2 + \vec{e}_2\,.$$

Таким образом, геометрический вектор $\vec{e}_2$ лежит в плоскости, определяемой точкой O и векторами $\vec{a}_2$ и $\vec{e}$, т.е., в плоскости (OA_2E). Пересечение же этой плоскости с гранью A_0OA_1 и есть прямая (OE_2). Аналогично и для других векторов.

Отсюда видно, что, например, векторы $\vec{a}_0, \vec{a}_1$ определяют проективный репер
$\Re_2\{A_0, A_1, E_2\}$ на прямой (A_0A_1) (при этом вследствие (I.28) система векторов $\vec{a}_0, \vec{a}_1, \vec{e}_2$ автоматически оказывается согласованной.)

Рассмотрим теперь прямую (OM_2), - эта прямая является пересечением грани (OA_0A_1) тетраэдра с плоскостью (OA_2M). Как мы отмечали выше, грань (OA_0A_1) определяется точкой O и линейной оболочкой $\mathcal{L}_2$, натянутой

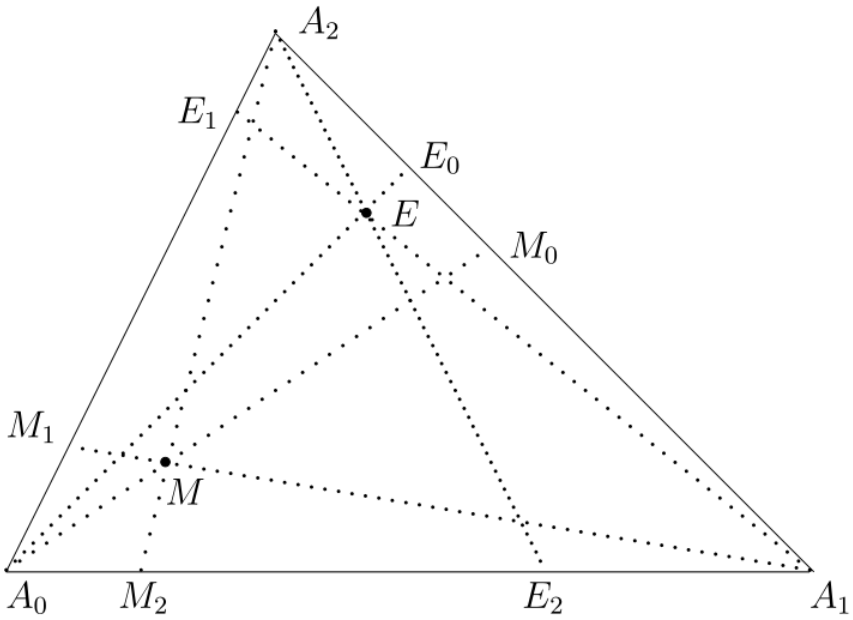


Рис.I.10. *Проективный репер на плоскости*

на пару векторов $\mathcal{L}_2 = \{\vec{a}_0\,, \vec{a}_1\,\}$. Плоскость же (OA_2M) определяется точкой O и линейной оболочкой $\overline{\mathcal{L}}_2$, натянутой на другую пару векторов $\overline{\mathcal{L}}_2 = \vec{a}_2\,, \vec{m}$.

Согласно (I.26) $\vec{m} = x^0\vec{a}_0 + x^1\vec{a}_1 + x^2\vec{a}_2$. Выбирая из векторов $\vec{a}_2\,, \vec{m}$ линейно независимую подсистему $\overline{\mathcal{L}}_2$, однозначно определяющую плоскость OA_2M, найдем:

$$\overline{\mathcal{L}}_2 = \{\vec{a}_2\,, x^0\vec{a}_0 + x^1\vec{a}_1\,\}.$$

Направляющий вектор $\vec{m}_2$ прямой (OM_2) является пересечением линейных оболочек:

$$\vec{m}_2 = \mathcal{L}_2 \cap \overline{\mathcal{L}}_2 \Longrightarrow \vec{m}_2 = x^0\vec{a}_0 + x^1\vec{a}_1\,. \tag{I.29}$$

Но тогда из определения проективных координат (OI.7) сразу следует:

$$\overrightarrow{OM}_2 = x^0\vec{a}_0 + x^1\vec{a}_1 \Longrightarrow M_2 = (x^0, x^1, 0), \tag{I.30}$$

т.е., первая пара координат точки M совпадает с первой парой координат точки M_2 - проекции этой точки из центра проектирования A_2 на прямую (A_0A_1). С другой стороны из (I.30) и (OI.7) следует, что x^0, x^1 есть проективные координаты точки M относительно репера $\Re_2 = \{A_0, A_1, E\}$ на прямой (A_0A_1). Аналогично можно доказать, что если x^0, x^1, x^2 - координаты точки M относительно репера $\Re = \{A_0, A_1, A_2, E\}$, то x^0, x^2 - координаты проекции этой точки, M_1, из центра A_1 на прямую (A_0A_2) относительно репера $\Re_1 = \{A_0, A_2, E_1\}$ на этой прямой, а (x^1, x^2) - координаты проекции этой точки из центра A_0 на прямую (A_1A_2) относительно репера $\Re_0 = \{A_1, A_2, E_0\}$

на этой прямой. Таким образом, отвечая на вопрос, поставленный в начале раздела, мы доказали теорему о проективном репере (см. (Рис.I.10)).

Теорема TI.4. *Пусть* $\Re = \{A_0, A_1, A_2, E\}$ *- проективный репер на плоскости* Π *и* $(x^0, x^1, \ldots, x^n)$ *- проективные координаты точки* M *в репере* $\Re$, *а* E_i, M_i $(i = \overline{0,2})$ *- проекции точек* $E, M \in Pi$ *из центров проектирования* A_i *на прямые* (A_jA_k) $(i, j, k \neq)$. *Тогда* (x^1, x^2) *-проективные координаты точки* M_0 *относительно репера* $\Re_0 = \{A_1, A_2, E_0\}$; *на прямой* (A_1A_2); (x^0, x^2) *- проективные координаты точки* M_1 *относительно репера* $\Re_1 = \{A_0, A_2, E_1\}$; *на прямой* (A_0A_2); *и* (x^0, x^1) *- проективные координаты точки* M_2 *относительно репера* $\Re_2 = \{A_0, A_1, E_2\}$.

Каковы координаты перечисленных выше точек? Согласно (I.14), (I.15) имеем для координат этих точек относительно репера плоскости $\Re = \{A_0, A_1, A_2, E\}$:

$$\begin{array}{ll} A_0 = (1,0,0); & A_1 = (0,1,0); \\ A_2 = (0,0,1); & E = (1,1,1); \\ M_0 = (0, x^1, x^2); & M_1(x^0, 0, x^2). \end{array} \tag{I.31}$$

Относительно реперов прямых (A_0A_1), (A_1A_2), (A_0A_2) их единичные точки, E_2, E_0, E_1, имеют координаты $(1,1)$. Заметим, что достаточно знать координаты точки M относительно реперов двух прямых, чтобы затем восстановить координаты этой точки относительно репера плоскости.

Замечание

В заключение заметим, что несобственным точкам, $\overline{M}$, расширенной плоскости $\overline{\Pi}$ соответствуют особые прямые, d_0 связки прямых $\mathcal{S}(O)$, которые определяются направляющими векторами, $\vec{m}_0$, параллельными исходной плоскости Π. Поэтому с точки зрения расширенной плоскости каждая несобственная точка M_∞ определяется некоторым *направлением* на нее, $\vec{m}_0$. Коллинеарные же векторы на расширенной плоскости согласно (I.21) задают прямые, пересекающиеся в одной и той же несобственной точке.

Пример ПI.1. *Пусть координаты точки* M_2 *относительно репера на прямой* (A_0A_1) *равны* $M_2 = (3, -4)$, *а координаты точки* M_1 *относительно репера на прямой* (A_0A_2) *равны* $M_1 = (-2, 1)$. *Найти координаты точки* M *относительно репера плоскости* $\Re = \{A_0, A_1, A_2, E\}$.

Решение

Согласно (I.14) координаты точек M_2 и M_1 относительно проективного репера плоскости равны:

$$M_2 = (3, -4, 0); \qquad M_1 = (-2, 0, 1).$$

Их общие ненулевые координаты (в данном случае, - первые по счету) должны быть равны. Как мы помним, проективные координаты точек заданы с точностью до умножения на любое ненулевое число. Поэтому координаты точки M_2 следует умножить на 2, а координаты точки M_1 — на (-3). В результате получим искомые проективные координаты:

$$M(6, -8, -3).$$

Примеры построения точки по ее проективным координатам на плоскости см. в разделе (VIII.1).

I.7.2 Однородные аффинные координаты на плоскости

Несобственная прямая d_∞ расширенной плоскости $\overline{\Pi}$, как и любая прямая, может быть задана любыми двумя различными точками. Однако, поскольку эта прямая состоит только из несобственных точек, то и задавать ее необходимо парой несобственных точек. Итак, рассмотрим на расширенной плоскости проективный репер, $\Re$, построенный на точках общего положения, из которых две, вторая, X_∞, и третья, Y_∞, по счету, - несобственные:

$$\Re = \{A_0, X_\infty, Y_\infty, E\}.$$

Заметим, что при этом точки A_0 и E репера *обязаны* быть собственными, иначе в противном случае четверка точек $A_0, X_\infty, Y_\infty, E$ не будет являться точками общего положения, так как три из них будут лежать на одной (несобственной) прямой.

Возьмем произвольную точку O вне расширенной плоскости $\overline{\Pi}$ и связку прямых $\mathcal{S}(O)$ и установим отображение (I.24)

$$\varphi : \overline{\Pi} \longrightarrow \mathcal{S}(\mathcal{O}) \tag{I.32}$$

по закону (I.22). В этом отображении (см. (TI.3) и замечание в конце раздела (I.6)) несобственным точкам плоскости $\overline{\Pi}$ соответствуют особые прямые

связки $\mathcal{S}(O)$. Таким образом:

$$\begin{array}{ll} \varphi(A_0) = (OA_0); & \varphi(E) = (OE); \\ \varphi(X_\infty) = d_1 \in \Pi_0; & \varphi(Y_\infty) = d_2 \in \Pi_0, \end{array}$$

(см. (Рис.I.10)).

Проведем на расширенной плоскости $\overline{\Pi}$ прямые из собственной точки A_0 параллельно особым прямым пучка, являющихся образами несобственных точек, X_∞ и Y_∞, — $(A_0x) \overset{def}{=} (A_0X_\infty) \parallel d_1$ и $(A_0y) \overset{def}{=} (A_0Y_\infty) \parallel d_2$. Спроектируем единичную точку E на прямые (A_0x) и (A_0y) параллельно осям y и x, соответственно, в результате получим точки E_1 и E_2, соответственно. Таким образом, мы разложим вектор $\overrightarrow{A_0E}$ по составляющим:

$$\overrightarrow{A_0E} = \overrightarrow{A_0E_1} + \overrightarrow{A_0E_2}.$$

Поскольку по построению прямые (A_0x) и (E_2E) параллельны, то на расширенной плоскости $\overline{\Pi}$ они пересекаются в несобственной точке X_∞. Точно также прямые (A_0y) и (E_1E) пересекаются в несобственной точке Y_∞. Поэтому точки E_1 и E_2 являются проекциями точки E из центров проектирования X_∞ и Y_∞, соответственно. Полагая $\vec{e}_1 = \overrightarrow{A_0E_1}$, $\vec{e}_2 = \overrightarrow{A_0E_2}$ определим аффинный репер на особой плоскости $\Pi_0 : \Re\{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2\}$. Полагая $\vec{e}_0 = \overrightarrow{OA_0}$ и $\vec{e} = \overrightarrow{OE}$, мы, тем самым, получим согласованную четверку векторов:

$$\vec{e}_0 + \vec{e}_1 + \vec{e}_2 = \vec{e},$$

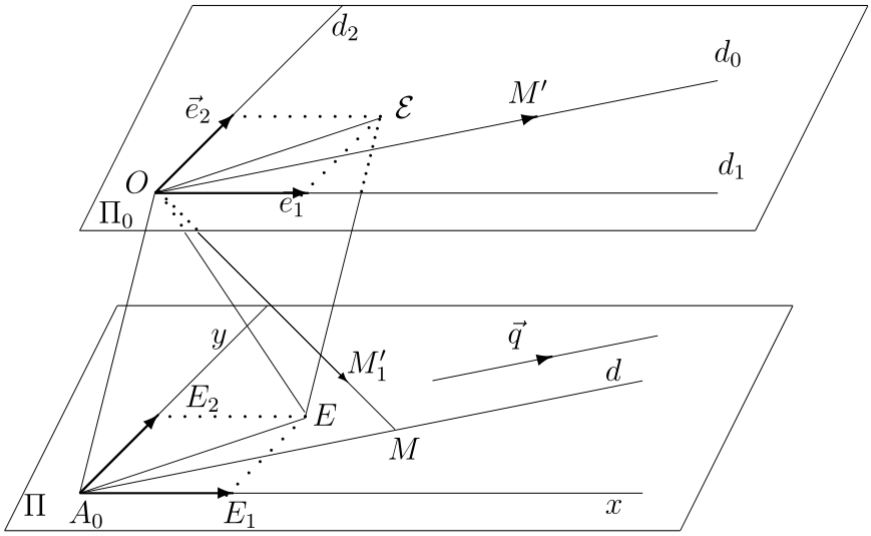
из которых любые три не компланарны по построению.

Поэтому вследствие теоремы (TV.1), введенный репер $\Re\{A_0, X_\infty, Y_\infty, E\}$ определяется векторным базисом $\{\vec{e}_0, \vec{e}_1, \vec{e}_2\}$.

Пусть M_∞ - некоторая несобственная точка расширенной плоскости, ее образом в отображении (I.32) является некоторая особая прямая связки, $d_0 \in \Pi_0$. Любой направляющий вектор этой прямой, имеет нулевую первую координату, таким образом, любая несобственная точка расширенной плоскости в репере $\Re\{A_0, X_\infty, Y_\infty, E\}$ также имеет нулевую первую по счету координату:

$$M = M_\infty \Longleftrightarrow M(0, x^1, x^2) \big| \, \forall M \in \overline{Pi}. \tag{I.33}$$

Проведем на плоскости $\overline{\Pi}$ параллельно прямой d_0 любую прямую, $\overline{d} \in \overline{\Pi}$. По определению прямая $\overline{d}$ содержит рассматриваемую несобственную точку M_∞. Пусть M' - любая точка прямой d_0 и $\overrightarrow{OM'} = \vec{q}$ - направляющий вектор этой прямой. Согласно определению проективных координат точки (OI.7),



$\Re\{A_0, X_\infty, Y_\infty, E\}$

Рис.I.11. *Однородные аффинные координаты на плоскости*

координаты этого вектора в базисе $\{\vec{e}_0\,, \vec{e}_1\,, \vec{e}_2\,\}$ являются координатами точки M_∞ в рассматриваемом проективном репере $\Re$. Разложим вектор $\overrightarrow{OM'}$ по базису плоскости Π_0 :

$$\overrightarrow{OM'} = x^1\vec{e}_1 + x^2\vec{e}_2\,.$$

Таким образом, геометрический смысл координат x^1, x^2 несобственной точки в рассматриваемом проективном репере заключается в том, что числа x^1, x^2 есть *координаты направляющего вектора на несобственную точку* M_∞ в векторном базисе плоскости $\{\vec{e}_1\,, \vec{e}_2\,\}$.

В дальнейшем направляющий вектор $\vec{q}$ прямых, проходящих через несобственную точку M_∞ расширенной плоскости будем называть просто *направлением на несобственную точку.*

Примечание

Заметим, что существует тесная практическая аналогия между несобственными точками расширенной плоскости (пространства) и "бесконечно далекими" объектами реального мира, как, например, звезды и другие небесные светила. Лучи света от таких источников света приходят на

Землю практически параллельными, так что различным земным наблюдателям, находящихся в разных точках Земли, они кажутся приходящими под одним и тем же углом. Именно поэтому в наблюдательной астрономии положение звезд однозначно характеризуется направлением.

Пусть теперь M - собственная точка расширенной плоскости, тогда по правилу треугольника (см. (Рис.I.11)):

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA_0} + \overrightarrow{A_0M}. \tag{I.34}$$

Поскольку вектор $\overrightarrow{A_0M}$ лежит в плоскости Π, параллельной особой плоскости Π_0, его можно разложить по векторному базису этой плоскости:

$$\overrightarrow{A_0M} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2\,. \tag{I.35}$$

Таким образом:

$$(I.34), (I.35) \Longrightarrow \vec{O}_M = \vec{e}_0 + x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2\,, \tag{I.36}$$

т.е. любая собственная точка расширенной плоскости имеет в указанном репере координаты $M(1, x, y)$, где (x, y) - аффинные координаты этой точки на плоскости Π в аффинном репере $\Re\{A_0; \vec{e}_1\,, \vec{e}_2\,\}$.

Итак, проективный репер $\Re\{A_0, X_\infty, Y_\infty, E\}$ на расширенной плоскости $\overline{\Pi}$ обладает следующими свойствами:

1. Любая несобственная точка плоскости, M_∞, имеет в этом репере координаты, $(0, x^1, x^2)$, где x^1, x^2 - одновременно не равные нулю числа являются координатами направляющего вектора прямой, содержащей данную несобственную точку.

2. Любая собственная точка плоскости, M, имеет координаты $(1, x, y)$, где x - аффинные координаты точки M в аффинном репере плоскости $\Re\{A_1; \overrightarrow{A_1E}, \overrightarrow{A_0E}\}$.

Указанные координаты точек расширенной плоскости называются *однородными аффинными координатами.*

I.8 Преобразование проективных координат

Зададим теперь на проективной плоскости $P_2(V)$ упорядоченную пару проективных реперов, в свою очередь заданных парой упорядоченных четверок точек общего положения: $\Re\{A_0, A_1, A_2, E\}$ и

$\Re'\{A_{\prime 0}, A_{\prime 1}, A_{\prime 2}, E_{\prime}\}$.[6] Для фиксации порядка, как обычно, первый из реперов, $\Re$, назовем старым репером, а соответствующую ему систему координат, - старой координатной системой, второй, $\Re'$, - новым репером и соответствующую координатную систему - новой. Пусть далее $M \in P(V)$ - произвольная точка проективной плоскости, и x^i, $(i = \overline{0,2})$ - ее координаты относительно репера $\Re$, (старые координаты), а $x'^{\,i}$, $(i = \overline{0,2})$ - координаты относительно репера $\Re'$ (новые координаты). Поставим стандартную задачу: найти связь новых и старых координат точки M.[7]

Поскольку на проективной плоскости задана упорядоченная пара реперов, то в порождающем векторном пространстве V_3 одновременно заданы и два упорядоченные четверки векторов, $\{\vec{a}_0\,, \vec{a}_1\,, \vec{a}_2\,, \vec{e}\}$ и $\{\vec{a}_{\prime 0}, \vec{a}_{\prime 1}, \vec{a}_{\prime 2}, \vec{e}\,'\}$, причем при условии согласованности векторов каждой четверки, т.е.:

$$\vec{a}_0 + \vec{a}_1 + \vec{a}_2 = \vec{e}, \tag{I.37}$$

$$\vec{a}_{\prime 0} + \vec{a}_{\prime 1} + \vec{a}_{\prime 2} = \vec{e}\,' \tag{I.38}$$

координаты точки $M = \Phi(\vec{x})$, $\vec{x} \in V_3$ относительно этих реперов определяются из соотношений (I.6):

$$\vec{x} = x^i \vec{a}_i\,; \qquad (i = \overline{0,2}), \tag{I.39}$$

$$\vec{x}\,' = x'^{\,i} \vec{a}_{\prime i}; \qquad (i = \overline{0,2}). \tag{I.40}$$

Но векторы $\vec{x}$ и $\vec{x}\,'$ порождают одну и ту же точку M, следовательно, они коллинеарны: $\vec{x} = \lambda \vec{x}\,'$. Таким образом, из (I.39) и (I.40) получаем условия, связывающие проективные координаты точки в новом и старом проективных реперах:

$$x^k \vec{a}_k = \lambda x'^{\,i} \vec{a}_{\prime i}; \qquad (i, k = \overline{0,2},\ \lambda \neq 0). \tag{I.41}$$

Пусть координаты, точек нового репера $\{A_{\prime 0}, A_{\prime 1}, A_{\prime 2}, E_{\prime}\}$ относительно старого есть:

$$\begin{array}{ll} A_{\prime 0}(C^0_{\prime 0}, C^1_{\prime 0}, C^2_{\prime 0}); & A_{\prime 1}(C^0_{\prime 1}, C1_{\prime 1}, C^2_{\prime 1}) \\ A_{\prime 2}(C^0_{\prime 2}, C^1_{\prime 2}, C^2_{\prime 2}); & E_{\prime}(^0, ^1, ^2), \end{array} \tag{I.42}$$

т.е.:

$$A^i_{\prime k} = C^i_{\prime k}, \tag{I.43}$$

где верхний индекс, i, - номер координаты, нижний, k, - номер точки. Поскольку координаты точек проективной плоскости по определению (OI.7)

[6] В отличие от распространенного обозначения мы ставим штрихи у реперных точек нового репера внизу, добиваясь, тем самым, большего однообразия в формулах.

[7] Напомним, что сама точка M при этом остается неподвижной.

есть координаты порождающих их векторов, то координаты точек A'_i относительно старого репера совпадают с координатами векторов нового базиса $\{\vec{a}_0\,,\vec{a}_1\,,\vec{a}_2\,\}$ относительно старого базиса V_3, — $\{\vec{a}_{\prime 0},\vec{a}_{\prime 1},\vec{a}_{\prime 2}\}$. Поэтому координаты $(A^k_{\prime i})$ точек нового проективного репера, A_i, относительно старого, $C^k_{\prime i}$, $(i,k=\overline{0,2})$, являются (см., например, [8]) элементами *матрицы перехода* от старого базиса V_3, $\{\vec{a}_i\,\}_3$, к новому базису, $\{\vec{a}_{\prime i}\}_3$, т.е., матрицы: $C^i_{\prime k}$:

$$\vec{a}_{\prime i}=C^k_{\prime i}\vec{a}_k\,, \tag{I.44}$$

при этом:

$$\vec{a}_k\;=C^{\prime i}_k\vec{a}_{\prime i}, \tag{I.45}$$

где $C^{\prime i}_k$ - матрица, обратная к матрице перехода $C^i_{\prime k}$:

$$C^{\prime i}_j C^j_{\prime k}=\Delta^i_k. \tag{I.46}$$

Обычно старый репер бывает задан и порождающие его векторы уже согласованы, процедура же согласования описана в разделе (I.3). Таким образом, условие (I.37) предполагается выполненым. При этом новый репер, $\Re'$, в конкретных задачах необходимо строить, а векторы, его порождающие, - согласовывать. В связи с этим рассмотрим два случая.

I. Векторы нового базиса согласованы:

На координатном языке согласованность векторов означает выполнение условий:

$$\sum_{k=0}^{2}C^i_{\prime k}=^i;\qquad (i=\overline{0,2}). \tag{I.47}$$

В этом случае вследствие (I.41) и (I.44) - (I.46) получим:

$$x^k=\lambda C^k_{\prime i}x^{\prime\,i},\qquad (\lambda\neq 0) \tag{I.48}$$

и

$$x^{\prime\,i}=\mu C^{\prime i}_k x^k,\qquad (\mu=\lambda^{-1}\neq=0). \tag{I.49}$$

Формулы (I.48), (I.49) и являются искомыми формулами преобразования проективных координат в случае согласованного базиса. Отметим, что числам λ и μ можно придавать любые, отличные от нуля значения, в том числе, можно полагать $\lambda=\mu=1$.

II. Векторы нового базиса не согласованы:

В этом случае условие (I.47) не выполняется, и мы должны прибегнуть к

стандартной процедуре согласования базиса (см. раздел (I.3)). Именно, разложим вектор $\vec{\ }'$ по базису $\{\vec{a}_{'i}\}_3$:

$$\vec{\ }' = {}'^{i}\vec{a}_{'i} \tag{I.50}$$

и введем новую систему векторов базиса, $\vec{a}_{''i}$, коллинеарных векторам $\vec{a}_{'i}$:

$$\vec{a}_{''i} \stackrel{def}{=} {}'^{i}\vec{a}_{'i}; \qquad (\ !). \tag{I.51}$$

Подставляя эти новые векторы в условия согласованности (I.38) и записывая его в координатах, получим вместо (I.47) уравнение:

$$\sum_{k=0}^{2} {}'^{k}C^{i}_{'k} = {}^{i}\ . \tag{I.52}$$

Уравнения (I.52) являются системой линейных неоднородных алгебраических уравнений относительно неизвестных ${}'^{i}$, которая всегда имеет единственное решение, так как $\det(C) \neq 0$. Поскольку система векторов $\vec{a}_{''i}, \vec{\ }'$ согласована, мы можем записать формулу преобразования проективных координат, аналогичную (I.46):

$$x^k = \lambda C^k_{'i} x\,'^{i}, \qquad (\lambda \neq 0).\,' \tag{I.53}$$

I.9 Простейшие свойства проективного пространства

I.9.1 Простейшие свойства проективной плоскости

Проективная плоскость, $P_2(V)$, порождается трехмерным векторным пространством, V_3, прямые проективной плоскости, d, порождаются двумерными подпространствами векторного пространства, $V_2 \subset V_3$, а точки проективной плоскости, $M \in P_2(V)$, порождаются множеством всех коллинеарных между собой векторов векторного пространства, т.е., *одномерным подпространством векторного пространства*, $V_1 \subset V_3$. Отсюда и вытекают все простейшие свойства проективной плоскости. Для того, чтобы с легкостью каждый раз получать их, необходимо держать в голове следующую схему:

На основе схемы, приведенной в (Табл.1), докажем следующие основные свойства проективной плоскости:

Таблица.1. Схема соответствия образов на проективной плоскости прообразам векторного пространства V_3

Прообраз: объект $V_3 \backslash \{\vec{0}\}$	Образ: объект $P_2(V) = \Phi(V_3 \backslash \{\vec{0}\})$
Множество коллинеарных векторов $V_1 \backslash \{\vec{0}\} \subset V_3$	Точка $M = \Phi(V_1 \backslash \{\vec{0}\}) \in P_2(V)$
Множество компланарных векторов $V_2 \backslash \{\vec{0}\} \subset V_3$	Прямая $d = \Phi(V_2 \backslash \{\vec{0}\}) \in P_2(V)$
Отношение подчиненности подпространств: $V_1 \backslash \{\vec{0}\} \subset V_2$	Принадлежность точки прямой: $M \in d = \Phi(V_2 \backslash \{\vec{0}\}) \in P_2(V)$
Пересечение векторных подпространств: $V_1 = V_2 \cap V'_2$	Пересечение прямых d и d' в точке $M = \Phi(V_1 \backslash \{\vec{0}\}) \in d$

Свойство $\bar{\text{C}}$I.1. *Через любые две различные точки проективной плоскости проходит прямая, и притом единственная.*

Доказательство: $\langle\langle$ Две различные точки, A и B проективной плоскости $P_2(V)$ порождаются одномерными векторными подпространствами, $V_1 \backslash \{\vec{0}\}, U_1 \backslash \{\vec{0}\} \subset V_3$. Пересечение этих множеств пусто, так как точки A и B различны. Поэтому их объединение, $V_1 \backslash \{\vec{0}\} \cup U_1 \backslash \{\vec{0}\} = V_2 \backslash \{\vec{0}\} \in VOV_3$. Но двумерное векторное подпространство V_2 порождает единственную проективную прямую d, которой принадлежат точки A и B. $\rangle\rangle$

Свойство $\bar{\text{C}}$I.2. *На каждой прямой проективной плоскости лежит не менее трех точек.*

Доказательство: $\langle\langle$ Действительно, пусть $d \subset P_2(V)$ - некоторая прямая проективной плоскости. Пусть векторное подпространство $V_2 \subset V_3$, порождающее прямую d, натянуто на два неколлинеарных вектора, $\vec{a}$ и $\vec{b}$, порождающих точки прямой, A и B. Тогда, например, вектор $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$ породит точку $C \in d$ прямой, так как этот вектор принадлежит линейной оболочке, натянутые на векторы $\vec{a}, \vec{b}$. $\rangle\rangle$

Свойство $\bar{\text{C}}$I.3. *На проективной плоскости существует не менее трех различных точек, не лежащих на одной прямой.*

Доказательство: $\langle\langle$ Действительно, пусть $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in VOV_3$ три некомпланарных вектора. Эти векторы порождают три различные точки проективной плоскости, не лежащие на одной прямой, A, B, C. $\rangle\rangle$

Свойство $\bar{\text{C}}$I.4. *Любые две различные прямые проективной плоскости, d и d', пересекаются в одной точке.*

Доказательство: $\langle\langle$ Действительно, прямые d и d' проективной плоскости порождены двумерными векторными подпространствами, $V_2 \subset V_3$ и $V_2' \subset V_3$, векторного пространства V_3. Но по теореме о размерности пересечения два двумерных подпространства трехмерного пространства могут или совпадать, или пересекаться по одномерному подпространству V_1. В первом случае соответствующие прямые совпадают, во втором - пересекаются в одной точке, порожденной V_1. $\rangle\rangle$

I.9.2 Простейшие свойства трехмерного проективного пространства

Проективное трехмерное пространство, $P_3(V)$, порождается четырехмерным векторным пространством V_4. Трехмерные подпространства этого пространства, $V_3 \subset V_4$, порождают двумерные проективные плоскости, $P_2(V_3) \subset P_3(V_4)$, в проективном пространстве.

Аналогично (Табл.1) сформулируем схему соответствия объектов векторного и проективного пространств (см. (Табл.2)).

На основе этой схемы сформулируем и докажем основные свойства трехмерного проективного пространства $P_3(V)$:

Свойство $\bar{\text{C}}$I.5. *Через любые две различные точки проективного пространства проходит прямая, и притом единственная.*

Свойство $\bar{\text{C}}$I.6. *На каждой прямой проективной плоскости лежит не менее трех различных точек.*

Доказательство этих свойств полностью аналогично доказательству свойств ($\bar{\text{C}}$I.1), ($\bar{\text{C}}$I.2).

Свойство $\bar{\text{C}}$I.7. *Через любые три точки проективного пространства, не лежащие на одной прямой, проходит плоскость, $\overline{\Pi}$, и притом единственная.*

Доказательство: $\langle\langle$ Пусть даны три точки проективного пространства, A, B, C, не лежащие на одной прямой. Это означает, что векторы, $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, их

порождающие, некомпланарны. Но тогда эти векторы однозначно определяют трехмерное векторное подпространство $V_3 \subset V_4$, которое, в свою очередь, единственным образом определяет проективную плоскость $\overline{\Pi}$. $\rangle\rangle$

Таблица.2. Схема соответствия образов в проективном пространстве $P_3(V)$ прообразам векторного пространства V_4

Прообраз: объект $V_4 \backslash \{\vec{0}\}$	Образ: объект $P_2(V) = \Phi(V_4 \backslash \{\vec{0}\})$
Множество коллинеарных векторов $V_1 \backslash \{\vec{0}\} \subset V_4$	Точка $M = \Phi(V_1 \backslash \{\vec{0}\}) \in P_3(V)$
Множество компланарных векторов $V_2 \backslash \{\vec{0}\} \subset V_4$	Прямая $d = \Phi(V_2 \backslash \{\vec{0}\}) \subset P_3(V)$
Множество четверок линейно зависимых векторов $V_3 \subset V_4$	Плоскость $P_2 = \Phi(V_3 \backslash \{\vec{0}\}) \subset P_3(V)$
Отношение подчиненности подпространств: $V_2 \subset V_3$	Принадлежность прямой плоскости $d \subset P_2 = \Phi(V_3 \backslash \{\vec{0}\}) \subset P_3(V)$
Пересечение векторных подпространств $V_3 \cap V'_3 = V_2 \subset V_4$	Пересечение плоскостей P_2 и P'_2 по прямой $d = \Phi(V_2 \backslash \{\vec{0}\}) \subset P_3(V)$

Свойство $\bar{\text{C}}$I.8. *Любая прямая либо лежит в данной проективной плоскости, либо имеет с ней одну точку пересечения.*

Доказательство: $\langle\langle$ Пусть в $P_3(V)$ даны проективная прямая, порожденная двумерным подпространством $V_2 \subset V_4$ четырехмерного векторного пространства V_4, и плоскость, Π, порожденная трехмерным подпространством, $V_3 \subset V_4$, четырехмерного векторного пространства V_4. По теореме о размерности пересечения векторных подпространств:

$$\dim(V_2 \cap V_3) = 2 + 3 - \dim(V_2 \cup V_3).$$

Но размерность объединения подпространств меньше или равна 4 и больше или равна 3. Поэтому размерность пересечения меньше или равна 2 и больше или равна 1. Таким образом, возможны только два варианта:
1). $V_2 \cap V_3 = V_2$;
2). $V_2 \cap V_3 = V_1$.
В первом случае пересечение векторных подпространств совпадает с одним из них, V_2, — а, значит, пересечение прямой и плоскости совпадает с самой прямой. Во втором случае одномерное векторное пересечение порождает одну и только одну точку пересечения. $\rangle\rangle$

Свойство $\bar{\text{C}}$I.9. *Любые две проективные плоскости пересекаются по проективной прямой.*

Доказательство: $\langle\langle$ Пусть в $P_3(V)$ даны две плоскости, $\overline{\Pi}$ и $\overline{\Pi'}$, порожденные трехмерными подпространствами, V_3 и V_3', четырехмерного векторного пространства V_4. По теореме о размерности пересечения подпространств векторного пространства размерность пересечения $V_3 \cap V_3'$ может быть равна 3 или 2. В первом случае векторные подпространства совпадают, а, стало быть, совпадают и порожденные ими проективные плоскости. Во втором случае одномерное векторное пересечение порождает в проективном пространстве прямую пересечения. $\rangle\rangle$

Свойство $\bar{\text{C}}$I.10. *В проективном пространстве существуют четыре точки, не лежащие в одной плоскости.*

[8] **Доказательство:** $\langle\langle$ В четырехмерном векторном пространстве V_4, порождающем трехмерное проективное пространство существуют четыре линейно независимых вектора, которые порождают четыре точки, не лежащие в одной плоскости. $\rangle\rangle$

[8] Точки общего положения.

Глава II

Прямые на проективной плоскости

II.1 Уравнение прямой на проективной плоскости

Пусть на проективной плоскости $P_2(V)$ даны две различные точки $P \neq Q$, которые в отображении $\Phi\ :\ V_3 \setminus \{\vec{0}\} \longrightarrow P_2(V)$ порождены одномерными векторными подпространствами, натянутыми на векторы $\vec{p}$ и $\vec{q}$. В соответствие с определением проективной прямой (OI.3) и материалом, изложенным в предыдущем разделе (I.9), можно дать определение проективной прямой (PQ), проходящей через пару различных точек P, Q.

Определение OII.1. *Прямой $(PQ) \subset P_2(V)$ проективной плоскости $P_2(V)$, проходящей через пару ее различных точек, P, Q, называется образ двумерного векторного подпространства $V_2 \subset V_3$, натянутого на векторы, порождающие эти точки, в отображении Φ :* $\quad \Phi\ : V_3 \setminus \{\vec{0}\} \longrightarrow P_2$.

II.1.1 Параметрические уравнения прямой на проективной плоскости

Перейдем теперь к аналитическому описанию прямых на проективной плоскости, основанному, как и прежде, на использовании репера. Пусть на проективной плоскости $P(V)$ задан репер $\Re\{A_0, A_1, A_2, E\}$, в котором точки P и Q имеют координаты $P(x_P^0, x_P^1, x_P^2)$ и $Q(x_Q^0, x_Q^1, x_Q^2)$. Таким образом, если $\vec{a}_0\,, \vec{a}_1\,, \vec{a}_2\ \in V_3$ - векторный базис порождающего пространства, определяющий проективный репер $\Re(\vec{a}_i\,);\ (i = \overline{0,2})$, то координаты точек P и Q относительно репера $\Re$ определяются как координаты порождающих их векторов, $\vec{p}$ и $\vec{q}$, относительно векторного базиса $\{\vec{a}_i\,\}$:

$$\vec{p} = p^i \vec{a}_i\,; \quad \vec{q} = q^i \vec{a}_i\,, \quad (i = \overline{0,2}),$$

причем координаты точек не пропорциональны.

Пусть далее M - произвольная точка прямой (PQ) и (x^0, x^1, x^2) - ее проективные координаты. Таким образом, вектор $\vec{m}$, порождающий точку M в отображении Φ есть:

$$\vec{m} = x^i \vec{a}_i \,.$$

Поскольку этот вектор порождает точку прямой (PQ), он должен быть линейной комбинацией векторов $\vec{p}$ и $\vec{q}$:

$$\vec{m} = \lambda^0 \vec{p} + \lambda^1 \vec{q},$$

где λ^0 и λ^1 - числа, одновременно не равные нулю. Используя в этом выражении координатное представление векторов, получим *параметрические уравнения прямой на проективной плоскости*:

$$x^i = \lambda^0 p^i + \lambda^1 q^i, \qquad (i = \overline{0,2}). \tag{II.1}$$

Как и в аффинной геометрии параметрические уравнения проективной прямой являются уравнениями относительно координат точки прямой, M, и однозначно определяют эту точку при фиксированных значениях *параметров* $\lambda^0, \lambda^1 \in \mathbb{R}$. Поскольку координаты точки в проективном репере заданы с точностью до умножения на любое отличное от нуля число, то и параметры точки прямой *одновременно* можно умножать на любое число отличное от нуля.

Замечание

Заметим, что, упорядоченная пара чисел λ^0, λ^1 являются внутренними координатами прямой в ее репере $\Re_d = (P, Q, E_d)$, где точка E_d порождена вектором $\vec{e}_d = \vec{p} + \vec{q}$.

II.1.2 Общее уравнение прямой на проективной плоскости

Так как уравнения (V.1) представляют собой условия компланарности трех векторов, $\vec{m}, \vec{p}, \vec{q}$, в координатной записи, они могут быть записаны (после исключения параметров) в более компактной форме (см., например, [8]):

$$\begin{vmatrix} x^0 & x^1 & x^2 \\ p^0 & p^1 & p^2 \\ q^0 & q^1 & q^2 \end{vmatrix} = 0. \tag{II.2}$$

Разлагая определитель в (V.2) по элементам первой строки, запишем это уравнение в виде линейного однородного уравнения:

$$a_i x^i = 0, \tag{II.3}$$

где введены обозначения:

$$a_0 = \begin{vmatrix} p^1 & p^2 \\ q^1 & q^2 \end{vmatrix}; \quad a_1 = \begin{vmatrix} p^2 & p^0 \\ q^2 & q^0 \end{vmatrix}; \quad a_2 = \begin{vmatrix} p^0 & p^1 \\ q^0 & q^1 \end{vmatrix}. \tag{II.4}$$

Так как векторы $\vec{p}$ и $\vec{q}$ не коллинеарны, вторая и третья строчки в определителе (V.2) не пропорциональны, поэтому все коэффициенты уравнения (V.3) одновременно не равны нулю. Таким образом, проективные координаты любой точки прямой удовлетворяют линейному однородному уравнению вида (V.3).

Рассмотрим теперь произвольное линейное однородное уравнение вида (V.3) относительно переменных x^0, x^1, x^2 с одновременно не равными нулю коэффициентами. Согласно теории линейных однородных алгебраических уравнений, уравнение (V.3) имеет два линейно независимых нетривиальных решений, X_1 и X_2. При заданном проективном репере $\Re$ эти решения соответствуют двум различным точкам прямой. Получим такие решения, полагая для определенности: $a_0 \neq 0$ и полагая для точки X_1 координату x^2, равной нулю: $x^2 = 0$, а для точки X_2: $x^1 = 0$. Таким образом, получим два указанных решения:

$$X_1(-a_1, a_0, 0); \qquad X_2(-a_2, 0, a_0).$$

Запишем уравнение прямой (X_1X_2), полагая в уравнении (V.2) $P = X_1$ и $Q = X_2$:

$$\begin{vmatrix} x^0 & x^1 & x^2 \\ -a_1 & a_0 & 0 \\ -a_2 & 0 & a_1 \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow$$

$$a_0(a_0x^0 + a_1x^1 + a_2x^2) = 0.$$

Так как по предположению $a_0 \neq 0$, получаем отсюда однородное уравнение (V.3). Таким образом, мы доказали важную теорему.

Теорема TII.1. *Любая прямая на проективной плоскости при заданном проективном репере определяется линейным однородным уравнением относительно своих координат, и, обратно, всякое линейное однородное уравнение относительно проективных координат определяет прямую и притом, только одну.*

В дальнейшем уравнение прямой в форме (V.3) будем называть *общим уравнением проективной прямой*, а упорядоченную тройку чисел a_0, a_1, a_2

при заданном проективном репере будем называть *проективными координатами прямой относительно репера* $\Re$. Так же, как и проективные координаты точки, эти координаты заданы с точностью до умножения на любое ненулевое число (что эквивалентно умножению на это число уравнения).

Пример ПII.1. *Записать уравнение прямой* (AB) *в репере* $\Re$, *если точки* A *и* B *имеют в этом репере координаты:* $A(1,2,3)$, $B(-2,1,1)$.

Решение

Подставляя координаты точек A и B в левую часть уравнения (V.2), получим:

$$\begin{vmatrix} x^0 & x^1 & x^2 \\ 1 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Вычисляя определитель, найдем искомое уравнение:

$$x^0 + 7x^1 - 5x^2 = 0.$$

Пример ПII.2. *Записать уравнения сторон реперного треугольника.*

Решение

Рассмотрим реперный треугольник $A_0A_1A_2$ проективного репера $\Re\{A_0, A_1, A_2, E\}$. Реперные точки имеют следующие координаты (см. (Рис.II.12)).

Составим уравнение реперной прямой (A_0A_1):

$$\begin{vmatrix} x^0 & x^1 & x^2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Вычисляя определитель, найдем:

$$(A_0A_1): \quad x^2 = 0.$$

Аналогично получим:

$$(A_0A_2): \quad x^1 = 0; \qquad (A_1A_2): \quad x^0 = 0.$$

Найдем теперь уравнение прямой (A_0E) :

$$\begin{vmatrix} x^0 & x^1 & x^2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0, \Longrightarrow$$

$$(A_0E): \quad x^1 - x^2 = 0, \Longrightarrow x^1 = x^2.$$

Аналогично найдем:

$$(A_1E): \quad x^0 - x^2 = 0; \qquad (A_2E): \quad x^0 - x^1 = 0.$$

Таким образом, перечисленные выше реперные прямые имеют следующие координаты:

$$(A_0A_1) := (0,0,1); \quad (A_0A_2) := (0,1,0); \quad (A_1A_2) := (1,0,0);$$

$$(A_0E) := (0,1,-1); \quad (A_1E) := (1,0,-1); \quad (A_2E) := (1,-1,0).$$

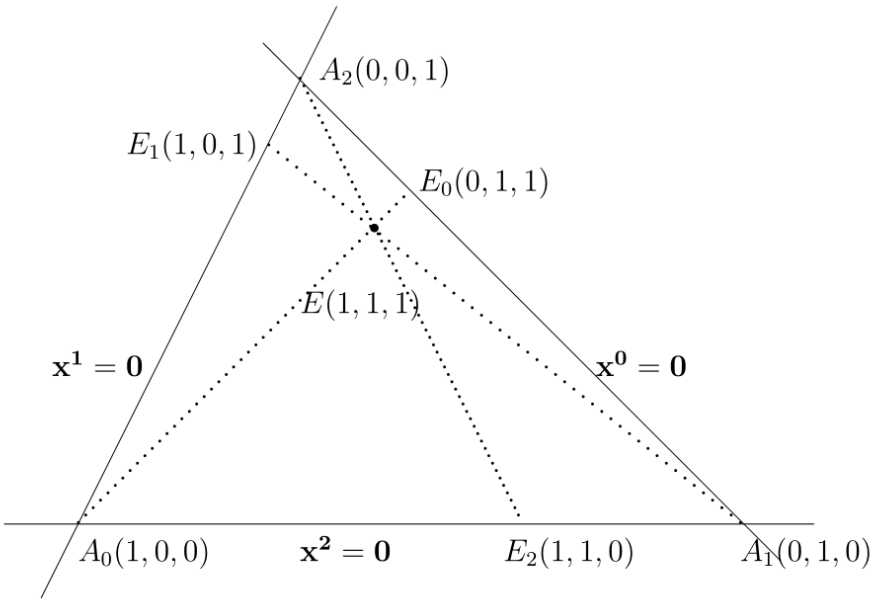


Рис.II.12. *Реперный треугольник*

II.1.3 Общее уравнение плоскости в проективном пространстве

Пусть теперь V_4 четырехмерное векторное пространство, а $P_3(V_4)$ - трехмерное проективное пространство. Любая двумерная плоскость этого пространства, $\overline{\Pi} = P_2(V_3)$, порождается трехмерным подпространством векторного пространства, $V_3 \subset V_4$. Зададим в V_4 векторный базис, $\{\vec{a}_i\}_4$, а в $P_3(V_4)$ — соответствующий ему проективный репер, $\Re(\vec{a}_i)$. Пусть точки плоскости, P, Q, R, не лежащие на одной прямой, порождены линейно независимыми векторами $\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}$. Тогда любая точка плоскости, M, порождена вектором $\vec{m}$, являющимся линейной комбинацией векторов $\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}$:

$$\vec{m} = \lambda^0\vec{p} + \lambda^1\vec{q} + \lambda^2\vec{r}, \tag{II.5}$$

где $\lambda^0, \lambda^1, \lambda^2$ - числа, одновременно не равные нулю. Пусть точки P, Q, R, M имеют координаты в репере $\Re$:

$$P(p^0, p^1, p^2, p^3); \quad Q(q^0, q^1, q^2, q^3); \quad R(r^0, r^1, r^2, r^3); \quad M(x^0, x^1, x^2, x^3).$$

Это значит, что соответствующие им векторы, $\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}, \vec{m}$ имеют такие же координаты в базисе $\{\vec{a}_i\}_4$. Подставляя эти координаты в соотношение (II.4), получим *параметрические уравнения плоскости в проективном пространстве*:

$$x^i = \lambda^0 p^i + \lambda^1 q^i + \lambda^2 r^i; \qquad (i = \overline{0,3}). \tag{II.6}$$

Исключая отсюда параметры $\lambda^(\alpha)$, либо записывая в координатной форме условие линейной зависимости четырех векторов, получим общее уравнение плоскости в детерминантном виде :

$$\begin{vmatrix} x^0 & x^1 & x^2 & x^3 \\ p^0 & p^1 & p^2 & p^3 \\ q^0 & q^1 & q^2 & q^3 \\ r^0 & r^1 & r^2 & r^3 \end{vmatrix} = 0, \tag{II.7}$$

или в явном виде линейного однородного уравнения:

$$a_i x^i = 0, \qquad (i = \overline{0,3}). \tag{II.8}$$

Упорядоченный набор чисел $\{a_0, a_1, a_2, a_3\}$, одновременно не равных нулю, называется *координатами плоскости.*

II.2 Принцип двойственности

Как мы отметили в предыдущем разделе, введенные нами проективные координаты прямой, (a_0, a_1, a_2), обладают таким же свойством, как и проективные координаты точки: при умножении их на любое отличное от нуля число

они определяют тот же самый объект. Это свойство координат прямой имеет далеко идущие последствия, которые мы изучим в этом разделе.

Напомним, (см., например, [8]), что *линейной формой* ϕ, *заданной на векторном пространстве* V_n, *называется линейное отображение* $\phi : V_n \longrightarrow \mathbb{R}$.

Таким образом, задать линейную форму ϕ на V_n — значит сопоставить любому вектору $\vec{x} \in V_n$ число $\phi \in \mathbb{R}$, причем

$$\phi(\alpha\vec{x} + \beta\vec{y}) = \alpha\phi(\vec{x}) + \beta\phi(\vec{y})$$

для любых $\vec{x}, \vec{y} \in V_n$ и любых $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. В заданном базисе $\{\vec{e}_i\}_n$ векторного пространства V_n линейная форма ϕ однозначно определяется упорядоченным набором чисел, $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$:

$$\phi = x^i a_i,$$

где x^i - координаты вектора $\vec{x}$ в базисе $\{\vec{e}_i\}_n$:

$$\vec{x} = x^i \vec{e}_i\,.$$

Эти числа называются *коэффициентами линейной формы.*

II.2.1 Ковариантные векторы

Пусть на проективной плоскости $P_2(V_3)$ задан репер $\Re$. Тогда, как мы показали выше, любая прямая проективной плоскости, $d \subset P_2$, определяется линейным однородным уравнением относительно координат x^i точки прямой $M(x^0, x^1, x^2)$:

$$a_i x^i = 0, \tag{II.9}$$

причем *проективные координаты прямой относительно репера* $\Re$, т.е., упорядоченная тройка вещественных чисел, $\{a_0, a_1, a_2\}$, одновременно не обращаются в нуль. С другой стороны точка $M(x^i) \in P_2(V_3)$ порождается вектором $\vec{m} \in V_3$ с теми же самыми координатами в базисе векторного пространства, порождающем репер $\Re$. Поэтому левая часть общего уравнения прямой (II.9) определяет в векторном пространстве V_3 некоторую *линейную форму* ,$\phi = a_i x^i$. Линейная форма ϕ однозначно определяется координатами прямой, $\{a_0, a_1, a_2\}$. Обозначим через V^* множество всех линейных форм на векторном пространстве V_3. При заданном базисе V_3 это множество определяется множеством всех возможных упорядоченных троек коэффициентов формы: $\underset{\rightarrow}{a} = (a_0, a_1, a_2)$. Пусть далее при заданном базисе V_3 $\underset{\rightarrow}{a} = (a_0, a_1, a_2)$ и

$\underset{\rightarrow}{b} = (b_0, b_1, b_2)$. Зададим на этом множестве *операцию сложения элементов*, $\underset{\rightarrow}{a} + \underset{\rightarrow}{b} = \underset{\rightarrow}{c}$, по закону:

$$\underset{\rightarrow}{a} + \underset{\rightarrow}{b} = (a_0 + b_0, a_1 + b_1, a_2 + b_2) \tag{II.10}$$

и *умножения элементов на число*, $\underset{\rightarrow}{b} = \lambda \underset{\rightarrow}{a}$, по закону:

$$\lambda \underset{\rightarrow}{a} = (\lambda a_0, \lambda a_1, \lambda a_2) \tag{II.11}$$

Легко показать, что при этом множество V^* является трехмерным векторным пространством. Это пространство обозначается V^*3 и называется *сопряженным векторному пространству* V_3, а его элементы, $\underset{\rightarrow}{a}$, называются *ковариантными векторами*, или просто, *ковекторами* в отличие от обычных векторов $\vec{a}$, которые называются *контрвариантными векторами.*

Поскольку V_3^* является трехмерным векторным пространством, в нем можно ввести векторный базис. Для этого необходимо взять 3 линейно независимых ковектора. В качестве таковых рассмотрим стандартный базис:

$$\begin{aligned} \underset{\rightarrow}{e}^0 &= (1, 0, 0), \\ \underset{\rightarrow}{e}^1 &= (0, 1, 0), \\ \underset{\rightarrow}{e}^2 &= (0, 0, 1). \end{aligned} \tag{II.12}$$

Вследствие законов (II.10) и (II.11) любой ковектор, $\underset{\rightarrow}{x}$, разлагается по стандартному базису (II.12):

$$\underset{\rightarrow}{x} = x_i \underset{\rightarrow}{e}^i \ . \tag{II.13}$$

II.2.2 Принцип двойственности для проективной плоскости

Поскольку векторные пространства V_3 и V_3^* имеют одинаковую размерность, они изоморфны. Установим координатный изоморфизм:

$$\psi \ : V_3 \longrightarrow V_3^*, \tag{II.14}$$

т.е., если $\vec{x} \in V_3$ имеет в базисе $\{\vec{e}_i\}_3$ координаты $x^i : \vec{x} = x^i \vec{e}_i$, то его образ $\psi(\vec{x}) \in V_3^*$ имеет те же координаты в стандартном базисе $\{\underset{\rightarrow}{e}^i\}_3$:

$$\psi(\vec{x}) = \sum_{i=0}^{2} x^i \underset{\rightarrow}{e}^i \ . \tag{II.15}$$

Сопряженное векторное пространство V_3^* можно использовать в качестве пространства, порождающего некоторую проективную плоскость $P_2^*(V_3^*)$. Эту плоскость будем называть *двойственной, (дуальной) к проективной плоскости* $P_2(V)$. Любая точка A^* двойственной плоскости в ее модели $P_2^*(V_3^*)$ есть множество всех коллинеарных между собой ковекторов. Репером двойственной плоскости будет являться репер $\Re^*(\underset{\rightarrow}{e}^i)$. Ясно, что отображение ψ (II.14) порождает отображение φ :

$$\varphi \ : P_2(V_3) \longrightarrow P_2^*(V_3^*) \tag{II.16}$$

по закону координатного изоморфизма:

$$\varphi(M(x^i)) = M^*(x^i) \in P_2^*(V_3^*), \qquad (\forall M \in P_2(V_3)), \tag{II.17}$$

т.е., точка $M^* \in P_2^*(V_3^*)$ имеет в репере $\Re^*$ те же координаты, что и ее прообраз $M \in P_2(V_3)$ в репере $\Re$. Отображение (II.16) по закону (II.17), как координатный изоморфизм, является биекцией.

С другой стороны каждой точке двойственной плоскости $A^* \in P^*(V^*)$ с координатами (a_0, a_1, a_2) в репере $\Re(\underset{\rightarrow}{e}^i)$ соответствует порождающий ее ковектор с теми же самыми координатами, $\underset{\rightarrow}{a} = (a_0, a_1, a_2)$, в кобазисе $\{\underset{\rightarrow}{e}^i\}_3$, которому, в свою очередь, на проективной плоскости $P(V)$ соответствует прямая, $a \in P(V) : \ a_i x^i = 0$. Поэтому мы можем установить еще одно отображение, $\tilde{\varphi}$, множества всех точек двойственной плоскости на множество $\mathcal{D}$ всех прямых проективной плоскости $P(V)$:

$$\tilde{\varphi} \ : P^*(V^*) \longrightarrow \mathcal{D}. \tag{II.18}$$

Докажем, что отображение $\tilde{\varphi}$ является биекцией.

Доказательство: $\langle\langle$ Если две любые точки A^* и B^* двойственной плоскости $P^*(V^*)$ различны, то порождающие их ковекторы $\underset{\rightarrow}{a} = a_i \ \underset{\rightarrow}{e}^i$ и $\underset{\rightarrow}{b} = b_i \ \underset{\rightarrow}{b}^i$ сопряженного пространства V^* неколлинеарны. Но тогда и прямые проективной плоскости $P(V)$:

$$a = \tilde{\varphi}(A^*) \in P(V) : \quad a_i x^i = 0,$$

$$b = \tilde{\varphi}(B^*) \in P(V) : \quad b_i x^i = 0$$

также различны. Таким образом:

$$A^* \neq B^* \Longrightarrow \tilde{\varphi}(A^*) \neq \tilde{\varphi}(B^*),$$

следовательно, $\tilde{\varphi}$ - инъекция.

Пусть теперь $d \subset P(V)$ - любая прямая проективной плоскости, которая в заданном проективном репере $\Re(\vec{e}_i\,)$ описывается уравнением:

$$d_i x^i = 0.$$

Этой прямой в сопряженном векторном пространстве V^* соответствует ковектор $\underset{\rightarrow}{d} = d_i \underset{\rightarrow}{e}^i$, который порождает на двойственной плоскости точку $D^*(d_0, d_1, d_2)$. Таким образом, $\tilde{\varphi}$ - сюръекция, а, значит, и биекция. $\rangle\rangle$

Поскольку $\tilde{\varphi}$ является биекцией, мы приходим к выводу, что в отображении $\tilde{\varphi}$ образом прямой a является пучок прямых с центром A, с теми же самыми координатами. Рассмотрим теперь композицию отображений (II.16) и (II.18),

$$\Phi = \tilde{\varphi} \odot \varphi. \tag{II.19}$$

Это отображение сначала (с помощью φ) отображает *любую* точку $A(a^0, a^1, a^2) \in P(V)$ проективной плоскости $P(V)$ в точку $A^*(a^0, a^1, a^2) \in P^*(V^*)$ двойственной плоскости $P^*(V^*)$, а затем (с помощью $\tilde{\varphi}$) отображает эту точку на прямую

$$a : a^0 x^0 + a^1 x^1 + a^2 x^2 = 0 \subset P(V)$$

проективной плоскости $P(V)$. Поскольку и φ и $\tilde{\varphi}$ - биекции, то и их композиция, Ψ, также является биекцией. Важно подчеркнуть, что Ψ отображает одни объекты проективной плоскости (точки) на объекты *этой же плоскости* (прямые). Таким образом, в композиции отображений двойственная плоскость, $P^*(V^*)$, как бы выпадает из окончательного результата и играет вспомогательную роль. Обратное отображение, $\Psi^1 = \tilde{\varphi}^{-1} \odot \varphi^{-1}$, отображает *любую* прямую проективной плоскости на точку этой же плоскости с теми же проективными координатами.

Заметим, что если точка $A(a^0, a^1, a^2)$ принадлежала прямой $a(a_0, a_1, a_2)$, то ее координаты удовлетворяли уравнению этой прямой, т.е.:

$$a_0 a^0 + a_1 a^1 + a_2 a^2 = 0.$$

В отображении Ψ этой точке будет соответствовать прямая a' проективной плоскости с координатами $a'(a^0, a^1, a^2)$, а прямой a будет соответствовать точка A' проективной плоскости с координатами $A'(a_0, a_1, a_2)$. Таким образом, если точка A принадлежала прямой a, то и образ этой прямой, $A' = \Psi(a)$, будет принадлежать образу точки, $a' = \Psi(A)$. И, наоборот, если прямая a проходила через точку A, то и образ этой прямой, A', будет лежать на образе точки, a'. Это устанавливает важное свойство отображения Ψ :

Отображения Ψ и Ψ^{-1} (II.19) не нарушают отношений принадлежности точек и прямых проективной плоскости.

Отсюда следует так называемый "*принцип двойственности на проективной плоскости*", который мы сформулируем в виде теоремы:

Теорема TII.2. (Принцип двойственности для проективной плоскости).
Если на проективной плоскости справедливо предложение $\mathcal{A}$, в котором говорится о точках, прямых и их взаимном расположении, то справедливо и двойственное предложение $\mathcal{A}^*$, которое получается из предложения $\mathcal{A}$ подстановкой слов:

$\mathcal{A}$	точка	прямая	лежит на	проходит через
$\Updownarrow$	$\Updownarrow$	$\Updownarrow$	$\Updownarrow$	$\Updownarrow$
$\mathcal{A}^*$	прямая	точка	проходит через	лежит на

II.2.3 Принцип двойственности для проективного пространства

Пусть теперь V_4 - четырехмерное векторное пространство, а $P_3(V_4)$ - трехмерное проективное пространство. Как и выше, на множестве линейных форм $\phi = a_i x^i, (i = \overline{0,3})$, где a_i - координаты плоскости, определим сопряженное векторное пространство V_4^*, с помощью которого построим проективное пространство $P_3^*(V_4^*)$, двойственное к $P_3(V_4)$ и зададим биекции $\varphi, \tilde{\varphi}, \Psi$. Отображение Ψ отличается от рассмотренного в предыдущем n^o, лишь тем, что точка отображается не в прямую, а в плоскость с такими же координатами. Отсюда по аналогии можно вывести *принцип двойственности для проективного пространства*, который мы сформулируем в виде теоремы.

Теорема TII.3. (Принцип двойственности для проективного пространства).
Если в проективном пространстве справедливо предложение $\mathcal{A}$, в котором говорится о точках, плоскостях, прямых и их взаимном расположении, то справедливо и двойственное предложение $\mathcal{A}^*$, которое получается из предложения $\mathcal{A}$ подстановкой слов:

$\mathcal{A}$	точка	плоскость	прямая	лежит на	проходит через
$\Updownarrow$	$\Updownarrow$	$\Updownarrow$	$\Updownarrow$	$\Updownarrow$	$\Updownarrow$
$\mathcal{A}^*$	плоскость	точка	прямая	проходит через	лежит на

Пример ПII.3. *Рассмотрим, например, следующее предложение $\mathcal{A}$: "Любые две прямые проективной плоскости пересекаются в одной и только одной точке." Для того, чтобы получить предложение$\mathcal{A}^*$, двойственное к $\mathcal{A}$, необходимо сначала приготовить $\mathcal{A}$ в виде, удовлетворяющем условиям теоремы (ТII.1), т.е., чтобы в предложении фигурировали указанные ключевые слова: "лежит на", "проходит через". Это можно сделать, например, так: "Для каждых двух различных прямых, a и b, проективной плоскости существует одна и только одна точка A, через которую проходят эти прямые". Тогда результат применения теоремы (ТII.1) будет выглядеть так:*

$\mathcal{A}$	Для каждых двух различных прямых, a и b, проективной плоскости существует одна и только одна точка A, которая лежит на этих двух прямых.	$\mathcal{A}^*$	Для каждых двух различных точек, A и B, проективной плоскости существует одна и только одна прямая a, которая проходит через эти две точки.

Затем результат применения теоремы необходимо переработать к более изящной форме: "*Через каждые две различные точки проективной плоскости проходит одна и только одна прямая*".

II.3 Теорема Дезарга

Определение ОII.2. *Фигура* Γ *проективной плоскости, образованная упорядоченным множеством* $n >= 3$ *точек* $M_1, M_2, \ldots, M_n$ *таких, что никакие три последующих не лежат на одной прямой, и прямыми, соединяющими пары последовательных точек,* $(M_1M_2), (M_2M_3), \ldots, (M_{n-1}M_n), (M_nM_1)$

называется n-вершинником (n-угольником), а прямые $(M_iM_i{+}1), (M_nM_1)$, $(i = \overline{1,n})$, $(M_{n+1} \equiv M_1)$ *называются сторонами n-вершинника.*

Всякие три точки A, B, C, не лежащие на одной прямой, служат вершинами трехвершинника ABC. В дальнейшем стороны трехвершинников, не содержащие вершины M, будем обозначать малой буквой m (см. (Рис.II.13)).

Из принципа двойственности для проективной плоскости (TII.1) следует, что при отображении Ψ трехвершинник ABC перейдет в некоторый трехвершинник же $A'B'C'$.

Сформулируем и докажем одну из основных теорем проективной геометрии — *теорему Дезарга*[1].

Теорема TII.4. (Дезарга) *Пусть на проективной плоскости или в проективном пространстве даны два трехвершинника, ABC и $A'B'C'$, такие, что ни одна из вершин или сторон одного трехвершинника не совпадает с соответствующим элементом другого. Тогда:*

$\mathcal{A}$	Если три прямые, (AA'), (BB'), (CC') проходят через одну точку, то три точки, $U = c \cap c'$, $V = a \cap a'$, $W = b \cap b'$, лежат на одной прямой.	$\mathcal{A}^*$	Если три точки, $U = c \cap c'$, $V = a \cap a'$, $W = b \cap b'$, лежат на одной прямой, то три прямые, (AA'), (BB'), (CC') проходят через одну точку.

Таким образом, теорема Дезарга включает в себя предложение $\mathcal{A}$ и и предложение $\mathcal{A}^*$, двойственное ему в случае, если треугольники ABC и $A'B'C'$ лежат в одной плоскости. В этом случае предложение $\mathcal{A}^*$ доказывать не надо. В случае, когда указанные треугольники не лежат в одной плоскости, необходимо доказывать оба предложения, что мы и сделаем ниже.

Примечание

В дальнейшем пары треугольников, удовлетворяющих условиям теоремы Дезарга, будем называть *Дезарговыми треугольниками.*

Доказательство: $\langle\langle$ Предложение $\mathcal{A}$

[1]Французский математик XVI-XVII веков Desargues, военный инженер, один и основоположников проективной геометрии.

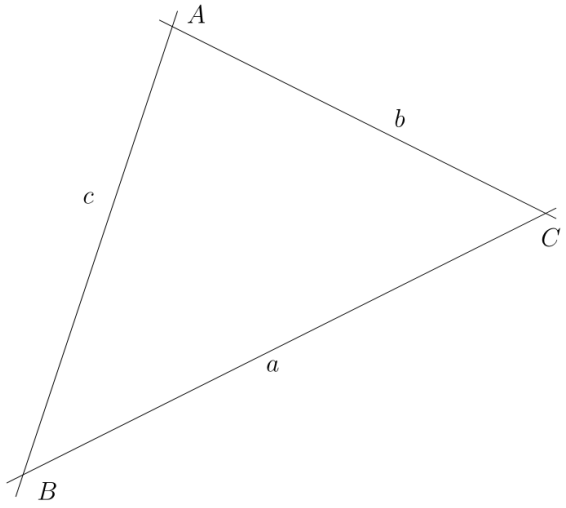


Рис.II.13. *Трехвершинник ABC*

Пусть прямые $(AA'), (BB'), (CC')$ проходят через точку S ((Рис.II.14)).

Тогда, например, точки A, A', S лежат на одной прямой, а, значит, порождающие их векторы, $\vec{a}, \vec{a}\,', \vec{s}$, коллинеарны. Таким образом:

$$\vec{s} = \lambda\vec{a} + \lambda'\vec{a}\,'.$$

Аналогично получим:

$$\vec{s} = \mu\vec{b} + \mu'\vec{b}\,';$$

$$\vec{s} = \nu\vec{c} + \nu'\vec{c}\,'.$$

Вычитая поочередно эти равенства и исключая из них вектор $\vec{c}$, получим новую систему равенств:

$$\lambda\vec{a} + \lambda'\vec{a}\,' = \mu\vec{b} + \mu'\vec{b}\,';$$

$$\mu\vec{b} + \mu'\vec{b}\,' = \nu\vec{c} + \nu'\vec{c}\,';$$

$$\nu\vec{c} + \nu\vec{c}\,' = \lambda\vec{a}\,' + \lambda'\vec{a}\,'.$$

Группируя штрихованные и нештрихованные величины в их разных частях этих равенств, получим:

$$\lambda\vec{a} - \mu\vec{b} = \lambda'\vec{a}\,' - \mu'\vec{b}\,' \stackrel{def}{=} \vec{u};$$

$$\mu\vec{b} - \nu\vec{c} = \mu'\vec{b}\,' - \nu'\vec{c}\,' \stackrel{def}{=} \vec{v}; \qquad \text{(II.20)}$$

$$\nu\vec{c} - \lambda\vec{a} = \nu'\vec{c}\,' - \lambda'\vec{a}\,' \stackrel{def}{=} \vec{w}.$$

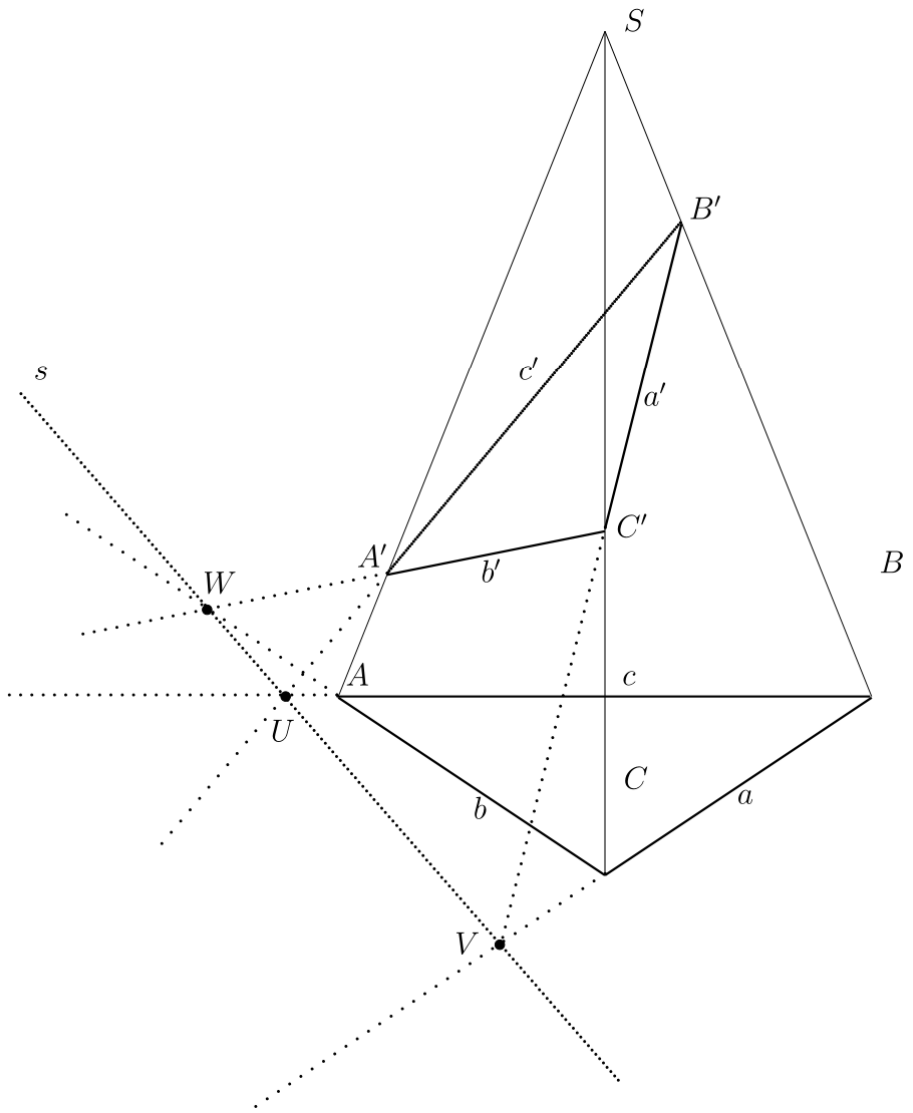


Рис.II.14. *К теореме Дезарга*

Линейная комбинация векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, например, порождает прямую (AB), а линейная комбинация векторов $\vec{a}\,'$ и $\vec{b}\,'$ — прямую $(A'B')$. Пересечение соответствующих линейных оболочек дает вектор $\vec{u}$, порождающий точку U - точку пересечения прямых $(AB) = c$ и $(A'B') = c'$. Аналогично $V = a \cap a'$ и $W = b \cap b'$.

Складывая левые и правые части равенств (II.20), получим тождество:

$$\vec{u} + \vec{v} + \vec{W} = \vec{0}.$$

Таким образом, векторы $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ компланарны, а, значит, соответствующие им точки лежат на одной прямой, что и требовалось доказать.

Предложение $\mathcal{A}^*$

Обозначим точки пересечения прямых: $(AB) \cap (A'B') = U$, $(BC) \cap (B'C') =$

V, $(AC) \cap (A'C') = W$. По условию эти точки лежат на одной прямой $d = (ABC) \cap (A'B'C')$. Необходимо доказать, что прямые $(AA'), (BB'), (CC')$ пересекаются в одной точке. Пусть опять, $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ - векторы, порождающие соответствующие точки. Запишем условие того, что точки U, V, W являются точками пересечения указанных прямых:

$$\begin{aligned} \vec{u} &= \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} = \alpha'\vec{a}\,' + \beta'\vec{b}\,'; \\ \vec{v} &= \Gamma\vec{b} + \Delta\vec{c} = \Gamma'\vec{b}\,' + \Delta'\vec{c}\,'; \\ \vec{w} &= \lambda\vec{c} + \mu\vec{a} = \lambda'\vec{c}\,' + \mu'\vec{a}\,'. \end{aligned} \tag{II.21}$$

Перенося векторы, обозначаемые одинаковыми буквами, в одну сторону равенств (II.21) (для этого, например, из обеих частей первого равенства необходимо вычесть $\alpha'\vec{a}\,' + \beta\vec{b}$), получим новую систему равенств:

$$\begin{aligned} \alpha\vec{a} - \alpha'\vec{a}\,' &= \beta\vec{b} - \beta'\vec{b}\,' \stackrel{def}{=} \vec{s}_{ab}; \\ \Gamma\vec{b} - \Gamma'\vec{b}\,' &= \Delta\vec{c} - \Delta'\vec{c}\,' \stackrel{def}{=} \vec{s}_{bc}; \\ \lambda\vec{c} - \lambda'\vec{c}\,' &= \mu\vec{a} - \mu'\vec{a}\,' \stackrel{def}{=} \vec{s}_{ca}. \end{aligned} \tag{II.22}$$

Ненулевые векторы $\vec{s}_{ab}, \vec{s}_{bc}, \vec{s}_{ca}$ порождают соответствующие точки: $S_{ab} = (AA') \cap (BB')$,
$S_{bc} = (BB') \cap (CC'), S_{ac} = (AA') \cap (CC')$.

Поскольку плоскости (ABC) и $(A'B'C')$ различны, то хотя бы одна из точек A', B', C' не принадлежит плоскости (ABC). Пусть для определенности $A' \notin (ABC)$. Но тогда векторы, $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{a}\,'$, порождающие точки A, B, C, A', линейно независимы, поэтому в векторных равенствах (II.21) $\beta' \neq 0, \lambda' \neq 0$, иначе бы из первого и третьего равенств (II.21) мы сделали бы вывод о линейной зависимости систем векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{a}\,'$ и $\vec{a}, \vec{c}, \vec{a}\,'$. Но тогда $A' \in (AB), A' \in (AC) \Longrightarrow A' = A$, что противоречит условиям теоремы.

Учитывая, что $\beta' \neq 0, \lambda' \neq 0$ и поделив на эти числа обе части первого и третьего равенств (II.21), выразим штрихованные векторы $\vec{b}\,'$ и $\vec{c}\,'$ через остальные:

$$\vec{b}\,' = \frac{1}{\beta'}(\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} - \alpha'\vec{a}\,');$$

$$\vec{c}\,' = \frac{1}{\lambda'}(\lambda\vec{c} + \mu\vec{a} - \mu'\vec{a}\,').$$

Подставив далее эти выражения во второе равенство (II.21) и перенося все векторы в правую часть равенства, получим линейную комбинацию четырех

векторов:

$$\left(\alpha\frac{\gamma'}{\beta'}+\mu\frac{\Delta'}{\lambda'}\right)\vec{a}+\left(\beta\frac{\gamma'}{\beta'}-\gamma\right)\vec{b}+\left(\lambda\frac{\Delta'}{\lambda'}-\Delta\right)\vec{c}+\left(-\alpha'\frac{\gamma'}{\beta'}-\mu'\frac{\Delta'}{\lambda'}\right)\vec{a}\,'=\vec{0}.$$

Но векторы $\vec{a},\vec{b},\vec{c},\vec{a}\,'$ линейно независимы, так как соответствующие им точки не принадлежат одной плоскости. Поэтому все коэффициенты данной линейной комбинации должны равняться нулю:

$$\alpha\frac{\gamma'}{\beta'}+\mu\frac{\Delta'}{\lambda'}=0;\qquad \beta\frac{\gamma'}{\beta'}-\gamma=0;$$

$$\lambda\frac{\Delta'}{\lambda'}-\Delta;\qquad \alpha'\frac{\gamma'}{\beta'}+\mu'\frac{\Delta'}{\lambda'}=0,\Longrightarrow$$

$$\gamma=\beta\frac{\gamma'}{\beta'};\qquad \Delta=\lambda\frac{\Delta'}{\lambda'}.$$

Но тогда из левой части второго равенства (II.22) получим:

$$\vec{s}_{bc}=\gamma\vec{b}-\gamma'\vec{b}\,'=\frac{\gamma'}{\beta'}(\beta\vec{b}-\beta'\vec{b}\,').$$

Подставляя в круглые скобки значение из первого равенства (II.22), получим:

$$\vec{s}_{bc}=-\frac{\gamma'}{\beta'}\vec{s}_{ab}.$$

Аналогично, используя правую часть второго равенства (II.22), получим:

$$\vec{s}_{bc}=-\frac{\Delta'}{\lambda'}\vec{s}_{ca}.$$

Таким образом, векторы $\vec{s}_{bc},\vec{s}_{ab},\vec{s}_{ca}$ коллинеарны, а, значит, соответствующие им точки совпадают:

$$(AA')\cap(BB')=(BB')\cap(CC')=(AA')\cap(CC')\overset{def}{=}S.$$

$\rangle\rangle$

Замечание

В дальнейшем указанную точку S будем называть *центром перспективы* треугольников ABC и $A'B'C'$, а прямую s - *осью перспективы.*

Поэтому доказанную выше теорему Дезарга можно сформулировать более кратко:

Теорема TII.5. *Два треугольника имеют центр перспективы тогда и только тогда, когда они имеют ось перспективы.*

II.4 Иллюстрация построения конфигурации Дезарга в СКМ Maple

Проведем построение конфигурации Дезарга в СКМ Maple по аналогии с построением в разделе **VII.4**. Мы не будем здесь приводить коды программы, отсылая Читателя к книге одного из Авторов [13]. Покажем лишь поэтапное построение трехмерного изображения.

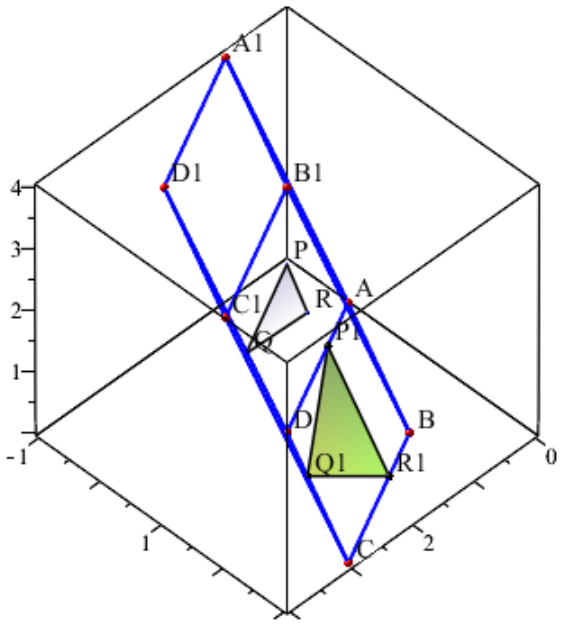


Рис.II.15. *Иллюстрация полноты изображения в СКМ Maple с помощью процедуры* `display(dno,a,b,c,line0,text,text1, scaling=UNCONSTRAINED);`.

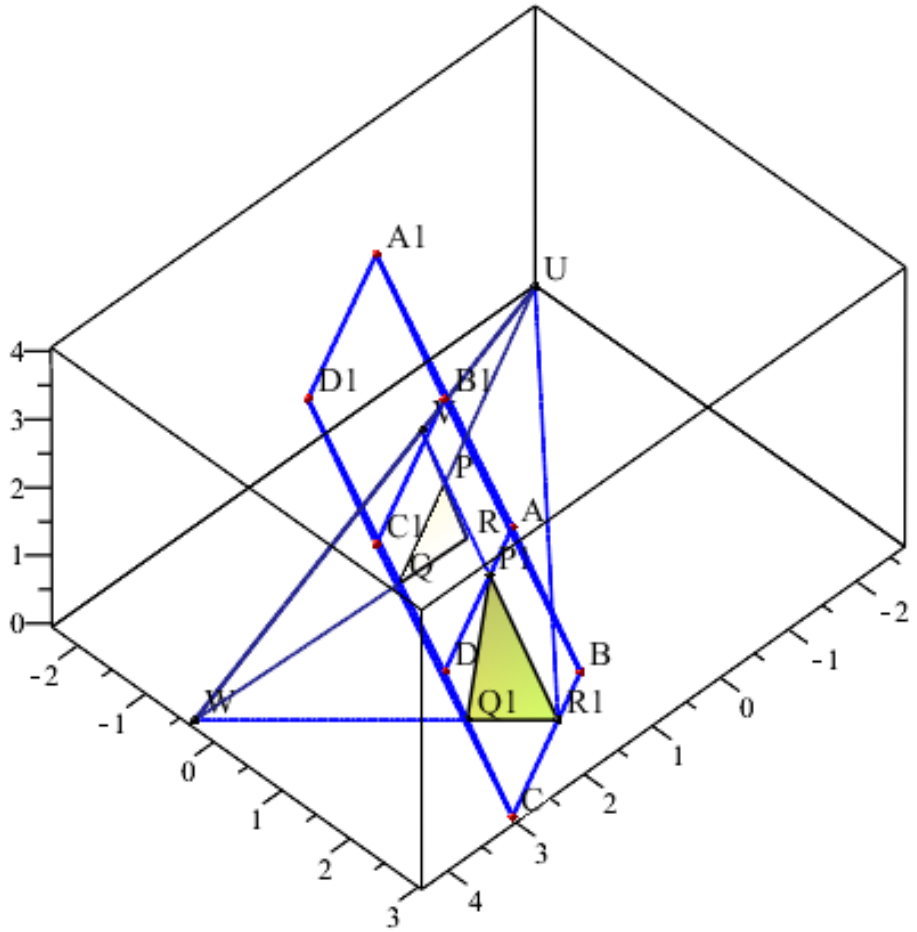


Рис.II.16. *Иллюстрация полноты изображения в СКМ Maple с помощью процедуры* `display(dno,a,b,c,line0,text,text1, scaling=UNCONSTRAINED);`.

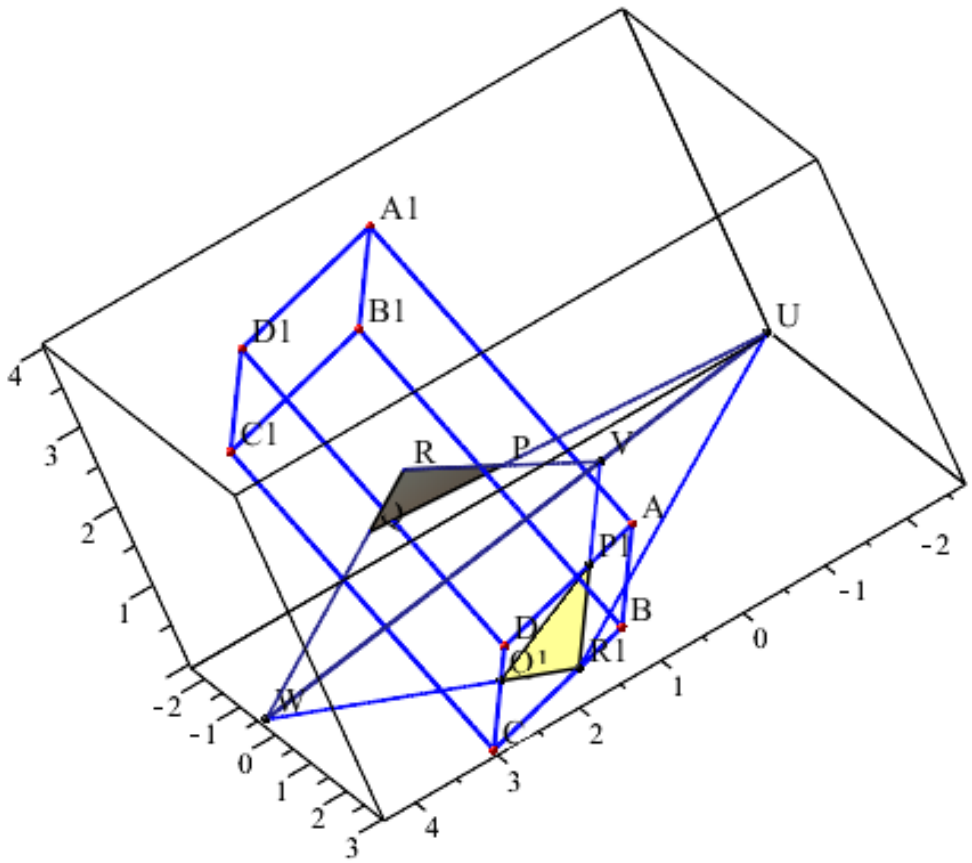


Рис.II.17. *Иллюстрация полноты изображения в СКМ Maple с помощью процедуры* `display(dno,a,b,c,line0,text,text1, scaling=UNCONSTRAINED);`.

Глава III

Проективные преобразования

III.1 Проективные отображения и проективные преобразования

III.1.1 Определение проективных отображений

Пусть $P(V)$ и $P'(V')$ проективные пространства одинаковой размерности, n, $(P(V) = P_n(V_{n+1})$, $P'(V') = P'_n(V'_{n+1}))$. Зададим в этих пространствах проективные реперы, $\Re$ и $\Re'$, соответственно.

Определение OIII.1. *Биективное отображение проективного пространства $P(V)$ на проективное пространство $P'(V')$ той же размерности:*

$$\phi : P(V) \longrightarrow P'(V') \tag{III.1}$$

по закону, согласно которому каждой точке $M \in P(V)$, имеющей в репере $\Re \in P(V)$ координаты (x^i), ставится в соответствие точка $M' \in P'(V')$ с теми же самыми координатами в репере $\Re' \in P'(V')$, называется проективным отображением пространства $P(V)$ на пространство $P'(V')$.

Рассмотрим множество точек $M \in P(v)$, координаты которых в репере $\Re$ удовлетворяют линейному однородному уравнению:

$$a_i x^i = 0. \tag{III.2}$$

При отображении (III.2) множество точек $M \in P(V)$, координаты которых удовлетворяют уравнению (III.2), перейдет в множество точек $M' \in P'(V')$ с теми же самыми координатами.

Поэтому:

1. При проективном отображении (III.1) плоскости $P_2(V_3)$ на плоскость $P'_2(V'_3)$ каждая прямая $d \subset P_2$ переходит в некоторую прямую $d' \subset P'_2$ с теми же самыми координатами;

2. При проективном отображении (III.1) трехмерного пространства $P_3(V_4)$ на пространство $P_3'(V_4')$ каждая плоскость $\Pi \subset P_3$ переходит в некоторую плоскость $\Pi' \subset P_3'$ с теми же самыми координатами.

3. При проективном отображении (III.1) трехмерного пространства $P_3(V_4)$ на пространство $P_3'(V_3')$ пара плоскостей переходит в пару плоскостей, а прямая их пересечения, d, — в прямую пересечения их образов. Следовательно, всякая прямая трехмерного пространства отображается на прямую.

Заметим, что можно доказать и обратное: любая биекция (III.1), которая переводит любую прямую $d \subset P(V)$ в прямую $d' \subset P'(V')$, является проективным отображением.

III.1.2 Задание проективного отображения

Пусть даны два проективных пространства, $P(V)$ и $P'(V')$, одинаковой размерности n и задано проективное отображение Φ пространства $P(V)$ на пространство $P'(V')$ (III.1) с помощью упорядоченной пары проективных реперов, $\Re\{A_0, A_1, \ldots, A_n, E\}$ и $\Re'\{A_0', A_1', \ldots, A_n', E'\}$, где $A_0, A_1, \ldots, A_n, E$ и $A_0', A_1', \ldots, A_n', E'$ - две упорядоченные системы точек общего положения.

Как мы указывали ранее (см. (I.14)), эти точки имеют следующие координаты *в соответствующих им* реперах:

$$\begin{array}{ll} A_0(1,0,\ldots,0,0) & A_0'(1,0,\ldots,0,0) \\ A_1(0,1,\ldots,0,0) & A_1'(0,1,\ldots,0,0) \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ A_n(0,0,\ldots,0,1) & A_n'(0,0,\ldots,0,1) \\ E(1,1,\ldots,1,1) & E'(1,1,\ldots,1,1) \end{array}$$

Согласно же определению проективного отображения (OIII.1) найдем по закону проективного отображения для реперных точек:

$$\Phi(A_i) = A_i', \quad \Phi(E) = E', \qquad (i = \overline{0,n}.)$$

Таким образом, можно говорить, как и в аффинной геометрии, что *проективное отображение* Φ *переводит репер* $\Re$ *в репер* $\Re'$. Поэтому для однозначного задания проективного отображения (III.1) пространства $P(V)$ на пространство $P'(V')$ достаточно задать в этих пространствах упорядоченную пару проективных реперов, $\Re$ и $\Re'$.

Проективное отображение прямых. Для задания проективного отображения прямой d на прямую d' необходимо задать упорядоченную пару

упорядоченных троек различных точек, $\{A, B, C\} \in d$ и $\{A', B', C'\} \in d'$. Тогда существует единственное проективное отображение Φ, переводящее репер $\Re(A, B, C)$ в репер $\Re'(A', B', C')$:

$$\Phi : d \longrightarrow d' \left| \begin{array}{ccc} A & \to & A' \\ B & \to & B' \\ C & \to & C' \end{array} \right. \tag{III.3}$$

Проективное отображение плоскостей. Для задания проективного отображения плоскости Π на плоскость Π' необходимо задать упорядоченную пару упорядоченных четверок точек общего положения, $\{A, B, C, D\} \in \Pi$ и $\{A', B', C', D'\} \in \Pi'$. Тогда существует единственное проективное отображение Φ, переводящее репер $\Re(A, B, C, D)$ в репер $\Re'(A', B', C', D')$:

$$\Phi : \Pi \longrightarrow \Pi' \left| \begin{array}{ccc} A & \to & A' \\ B & \to & B' \\ C & \to & C' \\ D & \to & D' \end{array} \right. \tag{III.4}$$

III.1.3 Теорема о проективном отображении

Пусть теперь проективное отображение (III.1), Φ, задано упорядоченной парой реперов, $\Re \in P(V)$ и $\Re' \in P'(V')$, т.е., Φ переводит репер $\Re$ в репер $\Re'$. Возьмем еще какой - нибудь репер $\Re_1$ в проективном пространстве $P(V)$. При проективном отображении Φ этот репер перейдет в некоторый репер $\Re'_1 \in P'(V')$. Возникает вопрос, можно ли определить отображение Φ, заданное упорядоченной парой реперов, $\Re$ и $\Re'$, другой упорядоченной парой реперов, $\Re_1$ и $\Re'_1$? На этот вопрос отвечает следующая теорема:

Теорема TIII.1. *Проективное отображение*

$$\Phi : P(V) \longrightarrow P'(V')$$

можно задать любой упорядоченной парой реперов, $\Re \in P(V)$ *и* $\Re' \in P'(V')$.

Доказательство: $\langle\langle$ Пусть репер $\Re \in P(V)$ задан точками общего положения, $\{A_0, A_1, \ldots, A_n, E\}$, порожденными согласованными векторами, $\vec{a}_0, \vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n, \vec{e} \in V_{n+1}$,

$$\vec{a}_0 + \vec{a}_1 + \ldots + \vec{a}_n = \vec{e},$$

причем упорядоченный набор линейно независимых векторов $\vec{a}_i$ выбран в качестве базиса порождающего векторного пространства V_{n+1}. Таким образом, $\Re = \Re(\vec{a}_i\,)$.

Аналогично, пусть репер $\Re' \in P'(V')$ задан точками общего положения $\{A'_0, A'_1, \ldots, A'_n, E'\}$, порожденными согласованной системой векторов базиса векторного пространства $\vec{a}_{\prime i} \in V'$ и единичным вектором, $\vec{e}\,'$:

$$\vec{a}_{\prime 0} + \vec{a}_{\prime 1} + \ldots + \vec{a}_{\prime n} = \vec{e}\,',$$

т.е., $\Re' = \Re'(\vec{a}_{\prime i})$.

Зададим новый репер $\Re_1 \in P(V)$ с помощью нового векторного базиса $\{\vec{b}_i\,\}_{n+1} \in V_{n+1}$:

$$\vec{b}_i \;= C^k_{\prime i}\vec{a}_k\,, \tag{III.5}$$

причем определитель матрицы перехода (размером $(n+1)\times(n+1)$!) отличен от нуля:

$$\det(C^k_{\prime i}) \neq 0. \tag{III.6}$$

Как известно, (см., например, [8]) столбцы матрицы перехода являются координатами векторов нового базиса. В нашем случае $C^k_{\prime i} = b^k_i$. Но согласно определению проективных координат точки (OI.7) координаты вектора, порождающего точку, совпадают с координатами порожденной им точки. Поэтому $C^k_{\prime i}$ - координаты точки, B_i, нового репера $\Re_1$ по отношению к старому реперу $\Re$. По определению проективного отображения, переводящего репер $\Re$ в репер $\Re'$, координаты точек $B'_i = \Phi(B_i)$ в новом репере, $\Re'$, будут совпадать с координатами точек B_i в старом репере, $\Re$, т.е.:

$$\vec{b}_{\prime i} = C^k_{\prime i}\vec{a}_{\prime i}. \tag{III.7}$$

Следовательно, репер $\Re'_1 = \Phi(\Re_1)$ можно определить с помощью векторного базиса $\{\vec{b}_{\prime i}\}_{n+1}$.

Возьмем теперь любую точку $M \in P(V)$, имеющую координаты x^i по отношению к реперу $\Re$:

$$\vec{m} = x^i\vec{a}_i\,, \tag{III.8}$$

где $\vec{m}$ - вектор, порождающий точку M. Тогда образ этой точки $M' = \Phi(M)$ порождается вектором $\vec{m}\,'$:

$$\vec{m}\,' = x^i\vec{a}_{\prime}. \tag{III.9}$$

Умножая (V.4) и (III.7) на обратную матрицу перехода, C'^i_j, получим обратные формулы связи:

$$\vec{a}_i \;= C'^k_i\vec{b}_k\,; \qquad \vec{a}_{\prime i} = C'^k_i\vec{b}_{\prime k}, \tag{III.10}$$

подставляя которые в (III.8) и (III.9), получим:

$$\vec{m} = y^i \vec{b}_i\,; \qquad \vec{m}\,' = y^i \vec{b}_{'i},$$

где

$$y^i \stackrel{def}{=} C'^i_k x^k. \tag{III.11}$$

Из (TIII.1) следует, что точки M и M' имеют одни и те же координаты в реперах $\Re_1$ и $\Re'_1$, т.е., связаны проективным отображением, задаваемым парой реперов, $\Re_1$ и $\Re'_1$. $\rangle\rangle$

III.1.4 Проективные преобразования (коллинеации)

Определение OIII.2. *Проективное отображение*

$$\Phi\ : P(V) \longrightarrow P(V) \tag{III.12}$$

проективного пространства $P(V)$ самого на себя называется проективным преобразованием этого пространства.

Проективные преобразования плоскости или пространства называются также *коллинеациями*, поскольку они сохраняют принадлежность точек прямым. Поскольку проективное преобразование есть частный случай проективного отображения, оно наследует все свойства последнего. Поэтому проективное преобразование переводит точку в точку, прямую в — прямую, плоскость — в плоскость с сохранением отношения принадлежности.

Кроме того, существует одно и только одно проективное преобразование (III.12) проективного пространства $P(V)$, которое переводит один заданный репер, $\Re$, в другой, $\Re'$. Поэтому любое проективное преобразование пространства однозначно задается упорядоченной парой проективных реперов и может быть определено, как преобразование, переводящее один заданный репер в другой.

Проективное преобразование прямых. Для задания проективного преобразования прямой d необходимо задать на этой прямой упорядоченную пару упорядоченных троек различных точек, $\{A, B, C\} \in d$ и $\{A', B', C'\} \in d$. Тогда существует единственное проективное преобразование Φ, переводящее репер $\Re(A, B, C)$ в репер $\Re'(A', B', C')$:

$$\Phi\ : d \longrightarrow d \left| \begin{array}{ccc} A & \to & A' \\ B & \to & B' \\ C & \to & C' \end{array} \right. \tag{III.13}$$

Проективное преобразование плоскостей. Для задания проективного преобразования плоскости Π необходимо задать упорядоченную пару упорядоченных четверок точек общего положения, $\{A, B, C, D\} \in \Pi$ и $\{A', B', C', D'\} \in \Pi'$. Тогда существует единственное проективное преобразование Φ, переводящее репер $\Re(A, B, C, D)$ в репер $\Re'(A', B', C', D')$:

$$\Phi\ : \Pi \longrightarrow \Pi \left| \begin{array}{lcl} A & \to & A' \\ B & \to & B' \\ C & \to & C' \\ D & \to & D' \end{array} \right. \tag{III.14}$$

III.1.5 Формула проективного преобразования

Аналогично аффинной геометрии выведем формулы, связывающие координаты проективного образа, M', с координатами прообраза, M, относительно одного и того же репера. Такие формулы и будут называться *формулами проективного преобразования.*

Пусть проективное преобразование Φ задано парой реперов $\Re$ и $\Re'$. и пусть репер $\Re$ порождается базисом $\{\vec{a}_i\}_{n+1} \in V_{n+1}$ векторного пространства V_{n+1}, а репер $\Re'$, — базисом $\{\vec{a}_{\prime i}\}_{n+1} \in V_{n+1}$ векторного пространства V_{n+1}. Поскольку проективное преобразование порождается преобразованием одного и того же векторного пространства, векторы его нового базиса, $\{\vec{a}_{\prime i}\}_{n+1}$, можно разложить по старому базису с помощью матрицы перехода:

$$\vec{a}_{\prime i} = C^k_{\prime i}\vec{a}_k\,; \qquad (\det C^k_{\prime i}) \neq 0. \tag{III.15}$$

Заметим, что поскольку, с одной стороны, реперные точки A_i и $A_{\prime k}$ порождены векторами $\vec{a}_i$ старого и $\vec{a}_{\prime k}$ нового базисов, а с другой стороны, координаты точки равны координатам порождающего ее вектора, то координаты вершин нового репера, $A_{\prime k}$, относительно старого репера $\Re$ равны:

$$A^i_{\prime k} = C^i_{\prime k} \Longrightarrow A_{\prime k}(C^0_{\prime k}, C^1_{\prime k}, \ldots, C^n_{\prime k}), \tag{III.16}$$

т.е., координаты вершин нового репера относительно старого совпадают с элементами матрицы перехода. Таким образом, координаты k-ой вершины, $A_{\prime k}$, нового репера $\Re'$ относительно старого, $\Re$, определяются k-*ым столбцом*

матрицы перехода:

$$A_{\prime k} = \begin{bmatrix} C^0_{\prime k} \\ C^1_{\prime k} \\ . \\ . \\ . \\ C^n_{\prime k} \end{bmatrix}. \tag{III.17}$$

Пусть произвольная точка $M \in P(V)$ имеет координаты x^i относительно репера $\Re$. Это значит:

$$\vec{m} = x^i \vec{a}_i \,. \tag{III.18}$$

По определению проективных преобразований образ этой точки, $M' \in P(V)$, имеет те же самые координаты относительно нового репера, $\Re'$:

$$\vec{m}\,' = x^i \vec{a}_{\prime i}. \tag{III.19}$$

Используя в (III.19) выражение векторов нового базиса через векторы старого, (III.18), получим:

$$\vec{m}\,' = x^i C^k_{\prime i} \vec{a}_k \,.$$

Обозначим с помощью $x\,'^{\,i}$ координаты образа M' относительно старого репера:

$$\vec{m}\,' = x\,'^{\,i} \vec{a}_i \,.$$

Тогда получим окончательно формулу проективного преобразования:

$$x\,'^{\,i} = C^i_{\prime k} x^k. \tag{III.20}$$

Эта формула по заданным координатам x^i относительно репера $\Re \in P(V)$ и заданной невырожденной квадратной матрице $C^i_{\prime k}$ определяет координаты $x\,'^{\,i}$ проективного образа $M' = \Phi(M)$ относительно того же репера.

Докажем теперь, что если в проективном пространстве $P(V)$ задан репер $\Re(\vec{a}_i\,)$, то формула (III.20) при условии $\det(C^i_{\prime k} \neq 0)$ определяет проективное преобразование Φ пространства $P(V)$, такое, что образом точки $M(x^i)$ является точка $M'(x\,'^{\,i})$ с координатами $x\,'^{\,i}$ относительно того же репера.

Определим с помощью репера $\Re$ и невырожденной матрицы $C^i_{\prime k}$ новый репер, $\Re'(\vec{a}_{\prime i})$, по закону:

$$\vec{a}_{\prime i} = C^k_{\prime i} \vec{a}_k \,.$$

Пусть y^i - координаты точки M' относительно этого репера, $\Re'$:

$$\vec{m}\,' = y^i \vec{a}_{\prime i} = y^k C^i_{\prime k} \vec{a}_i \,.$$

С другой стороны относительно старого репера координаты образа выражаются по формуле (III.20), т.е.:

$$\vec{m}\,' = x'^{\,k} C^i_{\prime k} \vec{a}_i\,.$$

Приравнивая полученные выражения, найдем:

$$C^i_{\prime k}(y^k - x'^{\,k}) = 0.$$

Поскольку матрица $C^i_{\prime k}$ невырождена, эта система линейных однородных уравнений допускает лишь тривиальное решение:

$$y^k - x'^{\,k} = 0 \Longrightarrow x'^{\,k} = y^k, \qquad (k = \overline{0, n}).$$

Следовательно, точки $M(x^i)$ и $M'(x'^{\,i})$ имеют одинаковые координаты относительно реперов $\Re$ и $\Re'$, соответственно.

Таким образом, проективное преобразование пространства можно определить и как такое отображение $P(V) \to P(V)$, которое переводит каждую точку $M(x^i)$ в такую точку $M'(x'^{\,i})$, что ее координаты, $x'^{\,i}$, относительно того же репера выражаются по формулам (III.20) при условии $\det(C^i_{\prime k}) \neq 0$.

III.1.6 Группа проективных преобразований и предмет проективной геометрии

Пусть дано n-мерное проективное пространство, $P(V)$, и в нем - проективный репер $\Re$. Пусть далее задана невырожденная квадратная матрица, $||C^i_{\prime k}||$ порядка $(n+1)$. Тем самым определено некоторое проективное преобразование, $\Phi_C\ :\ P(V) \longrightarrow P(V)$, проективного пространства, которое, как мы видели, описывается формулой (III.20). Пусть $\mathcal{P}$ — множество всех таких преобразований, а $\Phi \in \mathcal{P}$ конкретный элемент этого множества, который однозначно определяется матрицей $||C^i_{\prime k}||$.

Теорема TIII.2. *Все множество проективных преобразований образует группу преобразований порядка $n(n+2)$.*

Доказательство: $\langle\langle$ Для доказательства теоремы нам необходимо доказать, что:

1. Тождественное преобразование содержится во множестве $\mathcal{P}$;
2. Преобразование, обратное к любому проективному преобразованию, содержится во множестве $\mathcal{P}$;

3. Композиция двух проективных преобразований содержится во множестве $\mathcal{P}$.

Доказательство этих свойств проективного преобразования элементарно, так как формула проективного преобразования (III.20) совпадает с формулой преобразования координат вектора $(n+1)$-мерного векторного пространства, и доказательство пп 1 - 3 можно провести полностью аналогично доказательству для группы аффинных преобразований (Автор относит Читателя к Курсу лекций [8]).

Остановимся, однако, на менее элементарном вопросе - вопросе о порядке группы. На первый взгляд кажется, что порядок группы проективных преобразований равен числу независимых элементов невырожденной матрицы перехода, т.е., - $(n+1)^2$. Однако, это не совсем так. Дело в том, что проективные координаты точек определены с точностью до умножения на любое отличное от нуля число. Поэтому, если проективное преобразование Φ (III.20) задано с помощью невырожденной матрицы $C^i_{\prime k}$, то это же самое преобразование можно задать и с помощью матрицы

$$\overline{C}^i_{\prime k} = \lambda C^i_{\prime k},$$

где λ - любое отличное от нуля число. Поэтому полное число существенно независимых параметров проективного преобразования, определяющее порядок группы преобразований, уменьшается на 1. Таким образом, получим: $(n+1)^2 - 1 = n(n+2)$. $\rangle\rangle$

Так, например, порядок группы проективных преобразований прямой равен $N = 3$, порядок группы проективных преобразований плоскости, - $N = 8$. Напомним, что для аффинных пространств эти величины были равны $n(n+1)$, соответственно: 2 и 6.

Группа проективных преобразований называется *проективной группой* и обозначается $PGL(V)$. Раздел геометрии, называемый "*проективная геометрия*, изучает *проективные инварианты* фигур, т.е., те их свойства, которые не изменяются при проективных преобразованиях. Это и является предметом проективной геометрии с точки зрения группового подхода к геометрии.

III.1.7 Проективный образ прямой на плоскости

Пусть $P(V)$ – проективная плоскость и $d \subset P(V)$ – прямая этой плоскости, заданная своим общим уравнением

$$a_i x^i = 0 \tag{III.21}$$

относительно некоторого проективного репера $\Re$ плоскости $P(V)$. Пусть теперь задано с помощью пары реперов, $\Re, \Re'$, проективное преобразование плоскости: $\Phi : \Re \longrightarrow \Re'$, при котором каждая точка прямой $M(x^i) \in d$ перейдет в точку образа этой прямой $M'(x^i) \in d'$ с теми же самыми координатами x^i относительно нового репера. Найдем уравнение прямой d' относительно старого репера $\Re$. Уравнение прямой d' относительно нового репера $\Re'$ совпадает с уравнением (III.21). Умножая обе части формулы проективного преобразования (III.20) на обратную матрицу, получим *формулы обратного проективного преобразования*:

$$x^i = C'^i_k x'^k, \tag{III.22}$$

где C'^i_k – обратная матрица перехода. Подставляя затем выражение для координат x^i из (III.22) в уравнение прямой (III.21), получим уравнение образа прямой,d', относительно старого репера $\Re$:

$$a'_i x'^i = 0, \tag{III.23}$$

где x'^i – координаты точки прямой d' относительно старого репера $\Re$, а a'_i – *координаты прямой d' относительно старого репера*, которые определяются согласно формуле:

$$a'_i = C'^k_i a_k. \tag{III.24}$$

Формула (III.24) называется *формулой преобразования координат ковариантного вектора*. Формула обратного преобразования имеет вид:

$$a_i = C'^k_i a'_k. \tag{III.25}$$

Теорема TIII.3. *Пусть проективное преобразование Φ плоскости $P(V)$ переводит прямую d в прямую d'. Тогда Φ устанавливает и проективное отображение d на d'.*

Доказательство: $\langle\langle$ Пусть прямая $d \in P(V)$ проективной плоскости задана парой своих различных точек, A и B, $d = (AB)$. Проективное преобразование Φ плоскости однозначно определяется упорядоченной парой реперов, $\Re$ и $\Re'$, порожденные упорядоченными тройками линейно независимых

векторов, $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ и $\{\vec{a}\,', \vec{b}\,', \vec{c}\,'\}$. Эти векторы, как мы знаем, порождают вершины реперных треугольников, A, B, C и A', B', C'. Возьмем две точки прямой, $A, B \in d$ в качестве вершин репера $\Re$, а третью вершину репера, C, вне прямой (см. (Рис.III.18)).

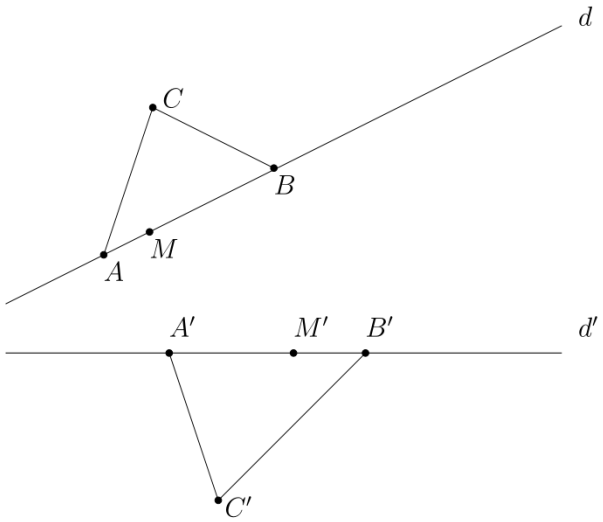


Рис.III.18. *К доказательству теоремы Т.12*

В проективном преобразовании Φ точки A, B, C перейдут в точки $A', B' \in d'$ и $C' \notin d'$. Возьмем произвольную точку на прямой $M \in d$. В репере $\Re(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ общее уравнение этой прямой будет иметь вид:

$$d: \qquad x^2 = 0.$$

Поэтому для любой точки M прямой d :

$$\vec{m} = x^0\vec{a} + x^1\vec{b}.$$

Образом точки M будет точка $M' = \Phi(M)$ прямой d' ($M' \in d'$) с теми же самыми координатами в репере $\Re'(\vec{a}\,', \vec{b}\,', \vec{c}\,')$. Поэтому

$$\vec{m}\,' = x^0\vec{a}\,' + x^1\vec{b}\,'.$$

Поэтому, если мы определим реперы на прямых, $\Re_d(\vec{a}, \vec{b})$ и $\Re_{d'}(\vec{a}\,', \vec{b}\,')$, то тем самым мы определим проективное отображение $\Phi_d : d \longrightarrow d'$. $\rangle\rangle$

III.2 Перспективные отображения

III.2.1 Перспективное отображение прямой на пучок прямых

В разделе (I.4) при построении модели расширенной прямой мы рассматривали *перспективное отображение прямой в пучок прямых*. Это отображение является частным случаем проективного и практически важно для нас.

Изучим его подробнее. В разделе (II.2) мы отметили, что моделью двойственной плоскости $P^*(V^*) \stackrel{def}{=} P_2^*(V_3^*)$ может являться множество всех прямых, $\mathcal{D}$, проективной плоскости $P(V) \stackrel{def}{=} P_2(V_3)$. При этом биективное отображение, $\tilde{\varphi}$ (II.18):

$$\tilde{\varphi} \, : P^*(V^*) \longrightarrow \mathcal{D},$$

устанавливающее модель $\mathcal{D}$, ставит в соответствие каждой точке $A^*(a_i) \in P^*(V*)$ прямую $a(a_i) \in \mathcal{D}$ с теми же самыми координатами, a_i. С помощью этой модели и определяется *перспективное отображение* прямых проективной плоскости.

Возьмем на двойственной плоскости две различные точки, $A^*, B^* \in P^*(V^*)$, которые порождаются парой неколлинеарных ковекторов, $\underset{\rightarrow}{a}, \underset{\rightarrow}{b} \in P^*(V^*)$, соответственно. Тогда прямая $d^* = (A^*B^*) \subset P^*(V^*)$ определится как множество всех точек $M^* \in P^*(V^*)$, таких что порождающий их ковектор, $\underset{\rightarrow}{m}$, является линейной комбинацией ковекторов $\underset{\rightarrow}{a}, \underset{\rightarrow}{b}$:

$$\underset{\rightarrow}{m} = \lambda \underset{\rightarrow}{a} + \mu \underset{\rightarrow}{b} \, . \tag{III.26}$$

Зададим в сопряженном векторном пространстве V^* базис, $\{\underset{\rightarrow}{e}^i\}_3$, (а, значит, в двойственной плоскости, - репер, $\Re'(\underset{\rightarrow}{e}^i)$), и пусть ковекторы $\underset{\rightarrow}{a}, \underset{\rightarrow}{b}$ имеют в этом кобазисе координаты: $\underset{\rightarrow}{a} = a_i \underset{\rightarrow}{e}^i$, $\underset{\rightarrow}{b} = b_i \underset{\rightarrow}{e}^i$. Пусть далее, произвольная точка прямой $M^* \in (A^*B^*)$ имеет в этом репере координаты $M^*(m_i)$. Тогда прямая d^* описывается в этом репере следующими параметрическими уравнениями:

$$(A^*B^*) : \; m_i = \lambda a_i + \mu b_i, \qquad (i = \overline{0, 2}.) \tag{III.27}$$

Поскольку в модели $\mathcal{D}$ каждой прямой $d^* \in P^*(V^*)$ двойственной плоскости соответствует пучок прямых,$\mathcal{P}(A)$, с центром A, имеющим такие же координаты, как и прямая (см. раздел (II.2)), то согласно (III.27) прямой (A^*B^*) плоскости $P^*(V^*)$ в модели $\mathcal{D}$ соответствует пучок прямых плоскости $P(V)$, определяемый уравнениями (III.27). Тогда каждому реперу на прямой $d^* \in P^*(V^*)$, задаваемому упорядоченной тройкой точек, $\{A_0^*, A_1^*, A_2^*\}$, будет соответствовать в этой модели репер пучка прямых, $\mathcal{P}(O)$, задаваемый упорядоченной тройкой его прямых.

В каждой из плоскостей, $P(V)$ и $P^*(V^*)$, возьмем соответствующую прямую, $d \subset P(V)$ и $d^* \subset P^*(V^*)$, и зададим на этих прямых проективные реперы, $\Re$ и $\Re^*$, соответственно.

Поскольку проективные прямые d и d^* являются, в свою очередь, одномерными проективными пространствами, данная упорядоченная пара реперов проективных прямых устанавливает некоторое проективное отображение φ:

$$\varphi\ : d \longrightarrow d^*,$$

переводящее репер $\Re$ в репер $\Re^*$. Но прямой d^* в модели $\mathcal{D}$ соответствует пучок прямых, $\mathcal{P}(O)$, плоскости $P(V)$, а соответствующему прямой реперу $\Re^*$ — некоторый репер $\Re'$ пучка прямых $\mathcal{P}(O)$:

$$\varphi\ : d \longrightarrow d^* \Longrightarrow d^* \longrightarrow \mathcal{P}(O).$$

Определяя композицию отображений, $\Psi = \tilde{\varphi} \odot \varphi$, тем самым мы устанавливаем некоторое отображение ψ прямой $d \subset P(V)$ на пучок прямых $\mathcal{P}(O)$ этой же проективной плоскости:

$$\Psi\ : d \longrightarrow \mathcal{P}(O). \tag{III.28}$$

Это отображение биективно вследствие биективности каждого из отображений. Биекция (III.29) устанавливается обычным способом: на прямой d и в пучке $\mathcal{P}(O)$ необходимо задать реперы $\Re$ и $\Re'$, соответственно и каждой точке прямой $M \in d$, имеющей координаты x^i относительно репера $\Re$, поставить в соответствие прямую пучка $m = \Psi(M)$, имеющую те же координаты относительно репера $\Re'$. Заметим, что двойственная плоскость, $P^*(V^*)$, как и двойственная прямая, d^*, выпадает, как и ранее, из окончательного результата и поэтому играет вспомогательную роль.

Возьмем на прямой d репер $\Re = \{A_1, A_2, E\}$ (см. (Рис.III.19)). В отображении Ψ ((III.29)) он перейдет в репер $\Re' = \{a_1, a_2, e\}$, образованный тремя прямыми $a_0 = (OA_1)$, $a_2 = (OA_2)$ и $e = (OE)$ пучка прямых $\mathcal{P}O$.

Возьмем любую точку $\mathcal{E}$ прямой (OE), не совпадающую с точками O, E, и построим репер плоскости $\Re_0 = \{O, A_1, A_2, \mathcal{E}\}$. В проективном репере плоскости $\{O, A_1, A_2, \mathcal{E}\}$ реперные точки имеют координаты:

$$O(1,0,0);\ A_1(0,1,0);\ A_2(0,0,1), E(0,1,1).$$

Прямые $a_1 = (OA_1)$, $a_2 = (OA_2)$ и $e = (OE)$ пучка прямых $\mathcal{P}O$ определяются своими общими уравнениями (см. задачу в конце раздела (II.1)):

$$a_1 = (OA_1):\ x^2 = 0; \quad a_2 = (OA_2):\ x^1 = 0; \quad e = (OE):\ x^1 - x^2 = 0,$$

поэтому ковекторы этих прямых имеют следующие координаты:

$$\underset{\rightarrow}{a}^1 = (0,0,1); \quad \underset{\rightarrow}{a}^2 = (0,1,0); \quad \underset{\rightarrow}{e} = (0,1,-1).$$

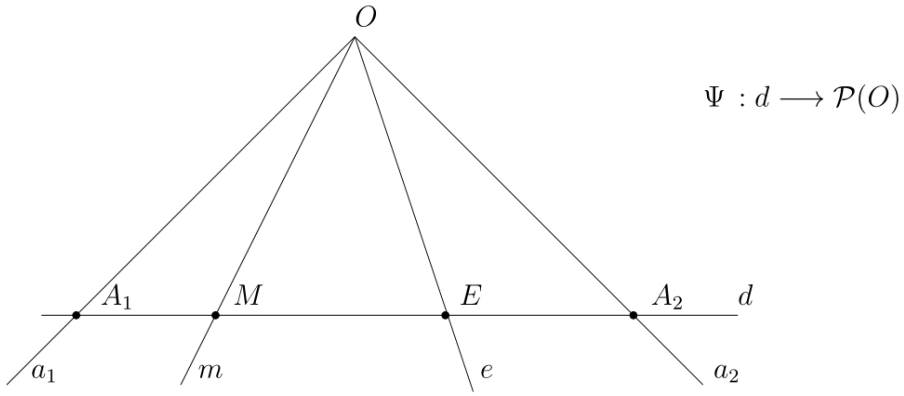


Рис.III.19. *Перспективное отображение прямой на пучок*

Эта тройка ковекторов не согласована. Поэтому вместо нее возьмем другую, согласованную:

$$\{\underset{\rightarrow}{\tilde{a}}^1, \underset{\rightarrow}{a}^2, \underset{\rightarrow}{e}\} : \qquad \Big| \underset{\rightarrow}{\tilde{a}}^1 + \underset{\rightarrow}{a}^2 = \underset{\rightarrow}{e} \ ,$$

где $\underset{\rightarrow}{\tilde{a}}^1 = - \underset{\rightarrow}{a}^1$. Тогда согласованный базис $\{\underset{\rightarrow}{\tilde{a}}^1, \underset{\rightarrow}{a}^2\}$ порождает репер $\Re'$ пучка прямых $\mathcal{P}(O)$. Любая точка $M \in d$ прямой d в репере плоскости $\Re_0$ имеет координаты $M(0, \lambda^1, \lambda^2)$, где λ^1, λ^2 одновременно не равны нулю(см. ту же задачу раздела (II.1). Уравнение произвольной прямой $m = (OM)$ пучка $\mathcal{P}(O)$ есть:

$$\begin{vmatrix} x^0 & x^1 & x^2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda^1 & \lambda^2 \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow \lambda^1 x^1 - \lambda^2 x^2 = 0.$$

Таким образом, прямая $m = (OM)$ определяется ковектором:

$$\underset{\rightarrow}{m} = (0, \lambda^1, -\lambda^2) = \lambda^1 \underset{\rightarrow}{\tilde{a}}^1 + \lambda^2 \underset{\rightarrow}{a}^2 \ .$$

Поскольку прямая $m = (OM)$ имеет в репере $\Re'$ пучка прямых те же самые координаты, (λ^1, λ^2), что и точка M в репере $\Re$ прямой d, то введенное нами биективное отображение Ψ ((III.29)) является проективным отображением.

III.2.2 Перспективное отображение прямой на прямую

Рассмотрим другой важный тип перспективных отображений. Пусть $\mathcal{P}(O)$ - пучок прямых, а d и d' - две различные прямые проективной плоскости, не принадлежащие пучку $PR(O)$, т.е., $O \notin d$ и $O \notin d'$. Рассмотрим отображение

точек M прямой d на точки M' прямой d'

$$\Psi\ : d \longrightarrow d' \tag{III.29}$$

по закону (см. (Рис.III.20)):

$$M' = (OM) \cap d'. \tag{III.30}$$

Теорема TIII.4. *Отображение (III.29) по закону (III.30) является проективным отображением.*

Доказательство: $\langle\langle$ Для этого построим репер $\Re_0 = \{a_1, a_2, e\}$ на прямых пучка $\mathcal{P}(O)$. Этот репер определяет проективные реперы прямых d и d', соответственно: $\Re = \{A_1, A_2, E\}$ и $\Re' = \{A'_1, A'_2, E'\}$. Но в этих реперах точки M и M' будут иметь одни и те же координаты, совпадающие с координатами прямой пучка (OM). Поэтому отображение (III.29) является проективным, что и требовалось доказать. Очевидно, что это отображение является биективным. $\rangle\rangle$

Определение OIII.3. *Биекция Ψ (III.29) называется перспективным отображением прямой d на прямую d', если любые пары точек $M \in d$ прямой и $M' = \Psi(M) \in d'$ лежат на прямых одного и того же пучка $\mathcal{P}(O)$. Точка O называется центром перспективы.*

Часто перспективное отображение прямой на прямую называют просто *перспективой*; говорят также, что пучок $\mathcal{P}(O)$ *проектирует* прямую d на прямую d'.

Прямые d и d', как и любые прямые проективной плоскости, пересекаются в одной точке. Обозначим эту точку $d \cap d' = D$. Имеет место теорема:

Теорема TIII.5. *Пусть d и d' две прямые проективной плоскости $P(V)$, $D = d \cap d'$ - точка их пересечения и дано проективное отображение Ψ : $d \longrightarrow d'$.*

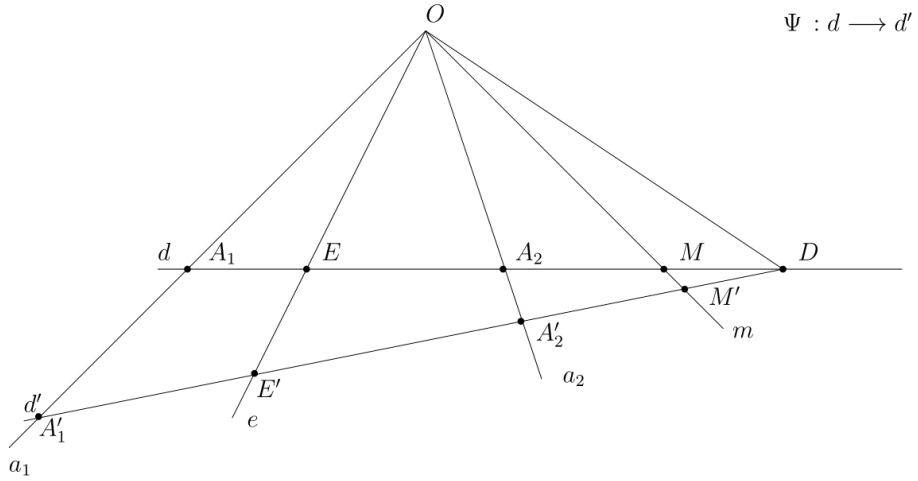


Рис.III.20. *Перспективное отображение прямой на прямую*

Тогда необходимым и достаточным условием того, что Ψ есть перспективное отображение, является:

$$\Psi(D) = D. \tag{III.31}$$

Доказательство: $\langle\langle$ **Необходимость:** Итак, пусть Ψ - перспективное отображение, тогда существует точка O, причем $O \notin d, d'$, такая, что точки $M \in d$ и $M' = \Psi(M) \in d'$ принадлежат прямой (OM) пучка $\mathcal{P}(O)$. Но тогда прямые d и d' пересекаются в некоторой точке D, а это означает, что $\Psi(D) = D$.

Достаточность: Пусть известно, что Ψ - проективное отображение и существует точка D, такая что $\Psi(D) = D$. Нужно доказать, что Ψ - перспективное отображение.

Возьмем на прямой d пару различных точек, $A, B \in d$, не совпадающих с D, и пусть $A' = \Psi(A), B' = \Psi(B)$ (см. (Рис.III.21)). Тогда различные точки A' и B' определяют некоторую прямую, $(A'B')$, которая, с одной стороны, содержит точку $D' = D$, а с другой стороны, пересекается с прямой d в этой точке. Таким образом, $D \in (A'B')$.

Возьмем точку $O = (AA') \cap (BB')$ проективной плоскости и рассмотрим некоторое перспективное отображение, Ψ_1, из центра O

$$\Psi_1 \ : d \longrightarrow d'.$$

Поскольку Ψ_1 является перспективным отображением и переводит репер $\Re = \{A, B, D\}$ прямой d в репер $\Re' = \{A', B', D\}$ прямой d', то вследствие

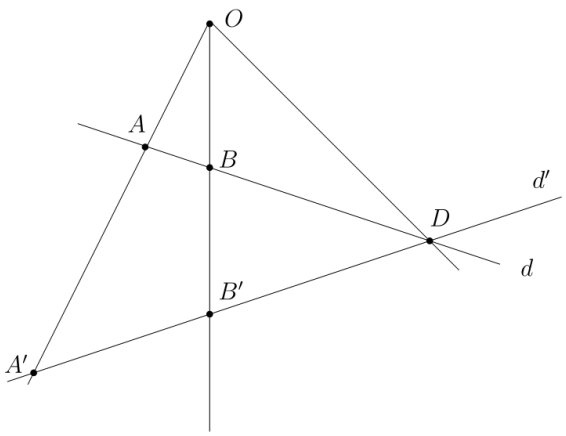


Рис.III.21. *К доказательству теоремы о перспективном отображении прямой на прямую*

теоремы (TIII.4) Ψ_1 есть проективное отображение. Но проективное отображение Ψ также переводит репер $\Re$ в репер $\Re'$.

Так как проективное отображение, переводящее один заданный репер в другой, определяется однозначно, то $\Psi_1 = \Psi$. $\rangle\rangle$

III.2.3 Перспективное отображение пучка на пучок

Рассмотрим еще один тип перспективных отображений. Возьмем на проективной плоскости $P(V)$ два различных пучка прямых, $\mathcal{P}(O)$ и $\mathcal{P}(O')$, причем $O \neq O'$.

Определение OIII.4. *Биекция*

$$\Psi : \mathcal{P}(O) \longrightarrow \mathcal{P}(O') \tag{III.32}$$

называется перспективным отображением пучка $\mathcal{P}(O)$ на пучок $\mathcal{P}(O')$, если существует такая прямая s, что всякие две соответствующие в отображении Ψ прямые, $d \in \mathcal{P}(O)$ и $d' = \Psi(d) \in \mathcal{P}(O')$, имеют одну точку пересечения с прямой s. Прямая s называется осью перспективы данных пучков.

Очевидно, что определение (OIII.4) перспективного отображения пучка на пучок двойственно определению (OIII.3) перспективного отображение прямой на прямую. Поэтому из теоремы (TIII.5) по принципу двойственности следует *двойственная* ей[1] теорема:

Теорема TIII.6. *Пусть $\mathcal{P}(O)$ и $\mathcal{P}(O')$ — два различных пучка прямых*

[1]И, следовательно, не требующая специального доказательства.

на проективной плоскости, (OO') — общая прямая этих пучков и дано проективное отображение

$$\Psi\ : \mathcal{P}(O) \longrightarrow \mathcal{P}(O').$$

Проективное отображение Ψ тогда и только тогда является перспективным, когда выполняется условие:

$$\Psi(OO') = (OO'). \tag{III.33}$$

Глава IV

Двойное (сложное) отношение

IV.1 Двойное отношение четырех точек прямой

IV.1.1 Определение сложного отношения

На проективной прямой P_1[1] рассмотрим упорядоченную четверку различных точек A, B, C, D и проективный репер $\Re = \{A_0, A_1, E\}$. Пусть в этом репере точки A, B, C, D имеют следующие координаты: $A(x^0, x^1)$, $B(y^0, y^1)$, $C(z^0, z^1)$, $D(u^0, u^1)$.

Определение OIV.1. *Двойным (или сложным)*[2] *отношением четырех точек A, B, C, D прямой называется число:*

$$(AB, CD) = \frac{\begin{vmatrix} x^0 & x^1 \\ z^0 & z^1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} y^0 & y^1 \\ u^0 & u^1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x^0 & x^1 \\ u^0 & u^1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} y^0 & y^1 \\ z^0 & z^1 \end{vmatrix}}. \tag{IV.1}$$

В дальнейшем для краткости будем записывать формулу (TIV.1) в более компактном виде:

$$(AB, CD) = \frac{(AC) \cdot (BD)}{(AD) \cdot (BC)}, \tag{IV.2}$$

где (XY) - определитель, составленный из координат точек X и Y.

[1] В дальнейшем для краткости будем часто обозначать $P_1 = P_1(V_2)$, $P_2 = P_2(V_3)$.

[2] Иногда двойное отношение называют ангармоническим.

IV.1.2 Свойства сложного отношения

Теорема TIV.1. *Сложное отношение четырех точек прямой не зависит от выбора репера прямой.*

Доказательство: $\langle\langle$ Наряду с репером $\Re$ рассмотрим репер $\overline{\Re}$, в котором указанные точки прямой имеют координаты:

$$A(\overline{x}^0, \overline{x}^1),\ B(\overline{y}^0, \overline{y}^1),\ C(\overline{z^0}, \overline{z}^1),\ D(\overline{u}^0, \overline{u}^1).$$

Пусть матрица перехода $||C^i_{\prime k}||$, описывающая преобразование проективных координат при переходе от репера $\Re$ к реперу $\overline{\Re}$, (см. раздел (I.8), формулы (I.42),(I.48), (I.49)) есть:

$$||C^i_{\prime k}|| = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \Gamma & \Delta \end{pmatrix}, \qquad \Delta = \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \Gamma & \Delta \end{vmatrix} \neq 0.$$

Тогда формулы преобразования от новых координат к старым имеют вид:

$$x^i = C^i_{\prime k}\overline{x}^k \Longrightarrow \begin{array}{rcl} x^0 & = & \alpha\overline{x}^0 + \beta\overline{x}^1\,; \\ & & \\ x^1 & = & \Gamma\overline{x}^0 + \Delta\overline{x}^1 \end{array}.$$

Аналогичный вид формулы преобразования будут иметь и для координат других точек.

Подсчитаем определитель, входящий в определение двойного отношения (TIV.1):

$$\begin{vmatrix} x^0 & x^1 \\ z^0 & z^1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha\overline{x}^0 + \beta\overline{x}^1 & \Gamma\overline{x}^0 + \Delta\overline{x}^1 \\ \alpha\overline{z}^0 + \beta\overline{z}^1 & \Gamma\overline{z}^0 + \Delta\overline{z}^1 \end{vmatrix}.$$

Так как определитель произведения матриц равен произведению определителей матриц, получим окончательно:

$$\begin{vmatrix} x^0 & x^1 \\ z^0 & z^1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \overline{x}^0 & \overline{x}^1 \\ \overline{z}^0 & \overline{z}^1 \end{vmatrix} \Delta. \tag{IV.3}$$

Аналогично найдем:

$$\begin{vmatrix} y^0 & y^1 \\ u^0 & u^1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \overline{y}^0 & \overline{y}^1 \\ \overline{u}^0 & \overline{u}^1 \end{vmatrix} \Delta; \begin{vmatrix} x^0 & x^1 \\ u^0 & u^1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \overline{x}^0 & \overline{x}^1 \\ \overline{u}^0 & \overline{u}^1 \end{vmatrix} \Delta; \begin{vmatrix} y^0 & y^1 \\ z^0 & z^1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \overline{y}^0 & \overline{y}^1 \\ \overline{z}^0 & \overline{z}^1 \end{vmatrix} \Delta.$$

Подставляя эти выражения в правую часть (TIV.1) и производя сокращения, убедимся в справедливости теоремы. $\rangle\rangle$

Теорема TIV.2. *Если A, B, C, D - собственные точки, а D_∞ - несобственная точка расширенной прямой, то*

$$(AB, CD) = \frac{(AB, C)}{(AB, D)}, \tag{IV.4}$$

$$(AB, CD_\infty) = -(AB, C), \tag{IV.5}$$

где (AB, C) и (AB, D) - простые отношения троек соответствующих точек (см. [8]).

Доказательство: $\langle\langle$ Поскольку сложное отношение точек прямой не зависит от выбора проективного репера на этой прямой, выберем для удобства репер $\overline{\Re} = \{A_0, X_\infty, E\}$, который соответствует однородным аффинным координатам прямой. В этом репере любая собственная точка M имеет координаты $M(1, x)$, где $x = \frac{x^1}{x^0}$ — абсцисса точки M относительно аффинного репера $\Re_0 = \{A_0, \overrightarrow{A_0E}\}$ (см. раздел (I.4)). Поэтому:

$$A(1, x);\ B(1, y);\ C(1, z);\ D(1, u). \tag{IV.6}$$

Тогда по формуле (TIV.1) получим:

$$(AB, CD) = \frac{(z - x)(u - y)}{(u - x)(z - y)}. \tag{IV.7}$$

С другой стороны вычислим простые отношения указанных точек по их координатам (IV.6) в аффинном репере $\Re_0$:

$$\overrightarrow{AC} = z - x;\ \overrightarrow{CB} = y - z;\ \overrightarrow{AD} = u - x;\ \overrightarrow{DB} = y - u,$$

$$\Longrightarrow (AB, C) = \frac{z - x}{y - z}; \qquad (AB, D) = \frac{u - x}{y - u},$$

подставляя которые вместе с (IV.7) в соотношение (IV.4), убеждаемся в справедливости последнего.

Пусть теперь одна из четырех точек является несобственной, $D = D_\infty$. Тогда в качестве репера прямой можно взять репер $\overline{\Re}\{A_0, A_1, D_\infty, E\}$. В этом репере точки имеют координаты:

$$A(1, x);\ B(1, y);\ C(1, z);\ D(0, 1). \tag{IV.8}$$

Тогда по формуле (TIV.1) получим:

$$(AB, CD_\infty) = \frac{z - x}{z - y}.$$

Но с другой стороны это выражение совпадает с простым отношением (AB, C), взятым с противоположным знаком (данное простое отношение не изменяется). $\rangle\rangle$

Возьмем в качестве репера на проективной прямой, P_1, репер $\Re = \{A, B, C\}$. В этом репере точки A, B, C имеют координаты: $A(1, 0), B(0, 1), C(1, 1)$. Тогда из (TIV.1) найдем сложное отношение:

$$(AB, CD) = \frac{u^0}{u^1}. \tag{IV.9}$$

Вследствие независимости сложного отношения отсюда следует важный вывод:

> При фиксированных точках A, B, C проективной прямой любая ее текущая точка, D,однозначно определяется двойным отношением (AB, CD).

Сформулируем и докажем основные свойства сложного отношения (TIV.1).

Свойство $\bar{\text{C}}$IV.1. *Сложное отношение не изменяется при перестановке первой и второй пар точек:*

$$(CD, AB) = (AB, CD). \tag{IV.10}$$

Доказательство: $\langle\langle$ Из определения двойного отношения (IV.2) найдем:

$$(CD, AB) = \frac{(CA)(DB)}{(CB)(DA).}$$

Но определители меняют знак при перестановке двух строчек, поэтому: $(CA) = -(AC)$, $(DB) = -(BD)$, $(CB) = -(BC)$, $(DA) = -(AD)$. Подставляя эти значения, убеждаемся в справедливости утверждения. $\rangle\rangle$

Свойство $\bar{\text{C}}$IV.2. *При перемене местами точек одной пары сложное отношение меняет свое значение на обратное:*

$$(BA, CD) = (AB, DC) = (AB, CD)^{-1}. \tag{IV.11}$$

Доказательство: $\langle\langle$ Из (IV.2) найдем, например:

$$(BA, CD) = \frac{(BC)(AD)}{(BD)(AC)} = (AB, CD)^{-1},$$

и т.д.. $\rangle\rangle$

Свойство $\bar{\text{C}}$IV.3. *При перемене местами точек каждой пары сложное отношение не изменяется:*

$$(BA, DC) = (AB, CD). \tag{IV.12}$$

Доказательство: $\langle\langle$ Дважды применяя (IV.11), получим (IV.12). $\rangle\rangle$

Свойство $\bar{\text{C}}$IV.4. *Пусть $D \neq A$, тогда:*

$$\begin{aligned} (AB, CD) = 0 &\iff D = B, \\ (AB, CD) = 1 &\iff D = C. \end{aligned} \tag{IV.13}$$

Доказательство: $\langle\langle$ Для доказательства необходимо учесть инвариантность двойного отношения при изменении репера прямой и воспользоваться соотношением (IV.9). $\rangle\rangle$

Теорема TIV.3. *При любом проективном преобразовании плоскости сложное отношение четырех точек прямой не изменяется.*

Доказательство: $\langle\langle$ Пусть Φ проективное преобразование плоскости P_2, при котором прямая d переходит в прямую $d' = \Phi(d)$, а четверка точек этой прямой, $A, B, C, D \in d$ - в четверку точек, $A' = \Phi(A), B' = \Phi(B), C' = \Phi(C), D' = \Phi(D) \in d'$, прямой d'. Согласно теореме (TIII.3) проективное преобразование Φ плоскости устанавливает и проективное отображение прямой d на прямую d'. Это отображение определяется парой реперов, $\Re = \{A, B, C\}$ и $\Re' = \{A', B', C'\}$ по следующему закону: если (u^0, u^1) - координаты произвольной точки D прямой d относительно репера $\Re$, то эти же координаты будет иметь и образ точки, $D' \in d'$ относительно репера $\Re'$. Но тогда согласно (IV.9):

$$(AB, CD) = \frac{u^0}{u^1};\ (A'B', C'D') = \frac{u^0}{u^1} \Longrightarrow (AB, CD) = (A'B', C'D').$$

$\rangle\rangle$

Вследствие этой теоремы сложное отношение четырех точек сохраняется при любом проективном отображении прямой на другую прямую.

Теорема TIV.4. *Если биекция $\varphi : d \longrightarrow d'$ сохраняет сложное отношение любой четверки точек, то φ — проективное отображение.*

Доказательство: $\langle\langle$ Пусть A, B, C - различные точки прямой d, а A', B', C' их образы на прямой d' в отображении φ. Как мы знаем, существует единственное проективное отображение Φ, которое переводит точки A, B, C в точки A', B', C', соответственно. Возьмем любую точку прямой $M \in d$, не совпадающую с точкой A, и пусть $\Phi(M) = M_1$. Тогда вследствие (TIV.3)

$$(AB, CM) = (A'B', C'M_1). \tag{IV.14}$$

Полагая $\varphi(M) = M'$, получим по условию:

$$(AB, CM) = (A'B', C'M'), \tag{IV.15}$$

Но тогда из (IV.14) и (IV.15) получим:

$$(A'B', C'M_1) = (A'B', C'M'),$$

а, значит, согласно (IV.9) точки M_1 и M' совпадают:

$$\Phi(M) = \varphi(M).$$

Но так как $\Phi(A) = \varphi(A) = A'$, то данный вывод справедлив для любой точки прямой. Следовательно, данное отображение φ совпадает с проективным отображением Φ. $\rangle\rangle$

Следствие CIV.1. *Биекция $\varphi : d \longrightarrow d'$ является проективным отображением тогда и только тогда, когда она сохраняет сложное отношение любой четверки точек.*

IV.1.3 Сложное отношение прямых

Определение OIV.2. *Пусть дан пучок $\mathcal{P}(O)$ и прямая $g \notin \mathcal{P}(O)$ не принадлежащая ему. Сложное отношение точек пересечения (AB, CD) прямой g с соответствующими прямыми пучка, a, b, c, d, называется сложным отношением, (ab, cd), этих прямых.*

Теорема TIV.5. *Пусть a, b, c, d - четыре различных прямых пучка $\mathcal{P}(O)$ и прямая g не проходит через точку O. Тогда сложное отношение прямых, (ab, cd), не зависит от выбора прямой g.*

Доказательство: $\langle\langle$ Проведем еще какую-либо прямую g', не принадлежащую пучку $\mathcal{P}(O)$, т.е., $O \notin g'$. Тогда прямая g' пересекается с прямыми пучка a, b, c, d в различных точках A', B', C', D', соответственно (см. (Рис.IV.22)).

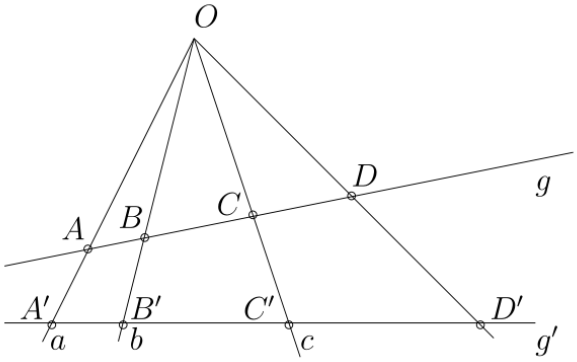


Рис.IV.22. *Сложное отношение прямых пучка*

Пучок $\mathcal{P}(O)$ устанавливает перспективное отображение прямой g на прямую g' (см. раздел (III.2)) $\Psi : g \longrightarrow g'$ по закону:

$$\Psi(A) = a',\ \Psi(B) = B', \ldots$$

Так как перспективное отображение Ψ есть частный случай проективного, то $(AB, CD) = (A'B', C'D')$. $\rangle\rangle$

Следствие CIV.2. *Биекция $\varphi : \mathcal{P}(O) \longrightarrow \mathcal{P}(O')$ одного пучка на другой является проективным отображением тогда и только тогда, когда она сохраняет сложное отношение любой упорядоченной четверки прямых.*

IV.1.4 Нахождение сложного отношения по проективным координатам на плоскости

Пусть на проективной плоскости своими координатами в проективном репере $\Re = \{A_0, A_1, A_2, E\}$ даны четыре точки прямой $g : A(a^0, a^1, a^2, B(b^0, b^1, b^2)$,

$C(c^0, c^1, c^2)$,
$D(d^0, d^1, d^2)$. Поставим задачу: найти сложное отношение (AB, CD).

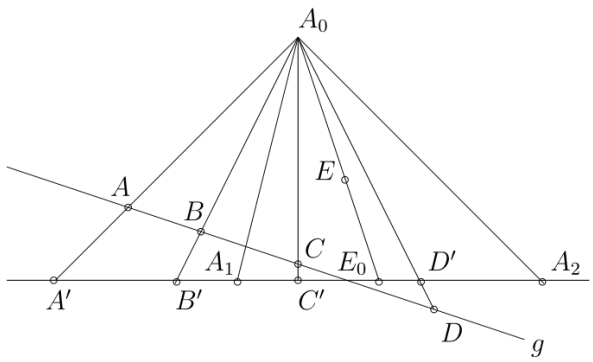


Рис.IV.23. *Нахождение сложного отношения по проективным координатам на плоскости*

Поскольку прямая g не проходит, по крайней мере, через одну из вершин репера, A_0, A_1, A_2, для определенности будем полагать, что $A_0 \notin g$ (см. (Рис.IV.23)). Рассмотрим перспективное отображение $\Phi : g \longrightarrow (A_1A_2)$ из центра перспективы O с помощью пучка прямых $\mathcal{P}(O)$ (см. раздел (III.2)). Вследствие доказанных выше свойств сложного отношения:

$$(AB, CD) = (A'B', C'D'). \tag{IV.16}$$

Возьмем на стороне (A_1A_2) реперного треугольника плоскости репер $\Re_0 = \{A_1, A_2, E_0\}$. Точки A', B', C', D' получаются из точек A, B, C, D проектированием их с из центра проектирования A_0 на прямую (A_1A_2). По теореме (TI.4) о проективном репере плоскости эти точки имеют следующие координаты в репере прямой, $\Re_0$:

$$A'(a^1, a^2);\ B'(b^1, b^2);\ C'(c^1, c^2);\ D'(d^1, d^2).$$

Поэтому:

$$(A'B', C'D') \stackrel{def}{=} \frac{(A'C')(B'D')}{(A'D')(B'C')} = \frac{\begin{vmatrix} a^1 & a^2 \\ c^1 & c^2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b^1 & b^2 \\ d^1 & d^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a^1 & a^2 \\ d^1 & d^2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b^1 & b^2 \\ c^1 & c^2 \end{vmatrix}}. \tag{IV.17}$$

Учитывая равенство (IV.16), найдем:

$$(AB, CD) = \frac{(A'C')(B'D')}{(A'D')(B'C')}. \tag{IV.18}$$

Таким образом, в случае, когда прямая g не проходит через вершину A_0 репера плоскости, $\Re = \{A_0, A_1, A_2, E\}$, двойное отношение четырех точек прямой g подсчитывается по стандартной формуле (TIV.1), в которой необходимо сделать замену для координат всех точек:

$$x^0 \to x^1; \qquad x^1 \to x^2.$$

Если же прямая не проходит через точку A_1 или A_2 реперного треугольника, проектирование необходимо осуществить из этих точек. В этих случаях получим аналогичные (IV.17) выражения с учетом необходимых замен координат.

Аналитическое выражение для сложного отношения

Получим аналитическое выражение для двойного отношения. Пусть A, B, C, D - четыре различные точки прямой g, имеющие указанные проективные координаты относительно репера плоскости. Прямая g проходит через точки A, B, поэтому $g = (AB)$, следовательно, векторы, порождающие точки C и D, можно разложить по векторам точек A и B :

$$\vec{c} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}; \qquad \vec{d} = \Gamma\vec{a} + \Delta\vec{b}.$$

Таким образом, точки C и D имеют следующие координаты:

$$C(\alpha a^0 + \beta b^0, \alpha\alpha^1 + \beta b^1, \alpha a^2 + \beta b^2); \quad C(\Gamma a^0 + \Delta b^0, \Gamma a^1 + \Delta b^1, \Gamma a^2 + \Delta b^2).$$

Подсчитаем далее определители, входящие в выражение (IV.17):

$$\begin{vmatrix} a^1 & a^2 \\ c^1 & c^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a^1 & a^2 \\ \alpha a^1 + \beta b^1 & \alpha a^2 + \beta b^2 \end{vmatrix}.$$

Как мы знаем, определитель, одна строка которого состоит из суммы элементов, равен сумме соответствующих определителей. Поэтому:

$$\begin{vmatrix} a^1 & a^2 \\ \alpha a^1 + \beta b^1 & \alpha a^2 + \beta b^2 \end{vmatrix} = \alpha \begin{vmatrix} a^1 & a^2 \\ a^1 & a^2 \end{vmatrix} + \beta \begin{vmatrix} a^1 & a^2 \\ b^1 & b^2 \end{vmatrix} = \beta \begin{vmatrix} a^1 & a^2 \\ b^1 & b^2 \end{vmatrix}.$$

Но

$$\operatorname{rank} \begin{pmatrix} a^0 & a^1 & a^2 \\ b^0 & b^1 & b^2 \end{pmatrix} = 2,$$

так как точки A и B различны. Аналогично получим:

$$\begin{vmatrix} a^1 & a^2 \\ d^1 & d^2 \end{vmatrix} = \Delta \begin{vmatrix} a^1 & a^2 \\ b^1 & b^2 \end{vmatrix};$$

$$\begin{vmatrix} b^1 & b^2 \\ c^1 & c^2 \end{vmatrix} = \alpha \begin{vmatrix} b^1 & b^2 \\ a^1 & a^2 \end{vmatrix};$$

$$\begin{vmatrix} b^1 & b^2 \\ d^1 & d^2 \end{vmatrix} = \Gamma \begin{vmatrix} b^1 & b^2 \\ a^1 & a^2 \end{vmatrix}.$$

В итоге формулы (IV.17), (IV.18) примут вид:

$$(AB, CD) = \frac{\beta}{\alpha} : \frac{\Delta}{\Gamma}. \tag{IV.19}$$

Подводя итоги, заметим следующее. На проективной плоскости возьмем репер $\Re = \{A_0, A_1, A_2, E\}$ и произвольную точку $M(x^0, x^1, x^2)$. Пусть E_2, M_2 - проекции точек E и M на прямую (A_0A_1) из центра A_2 (см. раздел (I.7)). Согласно теореме (TI.4) в репере $\Re_2\{A_0, A_1, E_2\}$ точка M_2 имеет координаты (x^0, x^1). Поэтому по формуле (IV.17) получаем:

$$(A_0A_1, E_2M_2) = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ x^0 & x^1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ x^0 & x^1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{x^0}{x^1}, \tag{IV.20}$$

при условии $x^0 \neq 0$, т.е., $M \notin (A_0A_1)$. Аналогичные выражения получим и для других отношений. Таким образом, мы доказали теорему:

Теорема TIV.6. *Если точка M имеет координаты (x^0, x^1, x^2) относительно репера $\Re = \{A_0, A_1, A_2, E\}$ проективной плоскости, то отношение $\dfrac{x^\alpha}{x^\beta}$ равно сложному отношению $(A_\alpha A_\beta, E_\Gamma M_\Gamma)$ четырех точек: двух вершин, A_α, A_β, и проекций, E_Γ, M_Γ, на прямую $(A_\alpha A_\beta)$ точек E, M из третьей вершины, A_Γ, реперного треугольника (при условии $x^\beta \neq 0$, т.е., $M \notin (A_\alpha A_\beta)$).*

IV.2 Гармонические четверки точек

IV.2.1 Определение гармонической четверки точек

Определение OIV.3. *Четверка точек A, B, C, D называется гармонической, если*

$$(AB, CD) = -1. \tag{IV.21}$$

Говорят также, что точки C и D гармонически сопряжены относительно точек A и B, а также, что пары A, B и C, D гармонически разделяют друг друга.

Точку D при этом называют "четвертой гармонической точкой" к упорядоченной тройке точек A, B, C.

Из свойств сложного отношения (IV.10) - (IV.13) следует, что:

Сложное отношение гармонической четверки точек не изменяется не только при перестановке пар точек, но и при перестановке точек внутри любой пары:

$$(AB, CD) = -1 \Longrightarrow (CD, AB) = -1,\ (BA, CD) = -1,\ (AB, DC) = -1. \tag{IV.22}$$

Аналогичным свойством обладает и *гармоническая четверка прямых a, b, c, d пучка*, которая определяется условием:

$$(ab, cd) = -1. \tag{IV.23}$$

IV.2.2 Полный четырехвершинник

Пусть теперь A, B, C, D - точки общего положения на проективной плоскости. Проведем прямые через каждую пару из них. Всего таких прямых будет $\frac{1}{2}A_4^2 = 6$, (см. (Рис.IV.24)).

Определение OIV.4. *Фигура, образованная четырьмя точками общего положения, A, B, C, D, и шестью прямыми, проходящими через каждую пару точек, называется полным четырехвершинником.*

Точки A, B, C, D называются вершинами четырехвершинника, а прямые (AB), (AC), (AD), (BC), (BD), (CD) — сторонами четырехвершинника.

Всякие две стороны, не имеющие общей вершины, называются противоположными, точки R, S, L пересечения противоположных сторон называются диагональными точками, а прямые, $(RS), (RL), (SL)$, проходящие через диагональные точки — диагоналями четырехвершинника.

Пусть M и N — точки пересечения диагонали (SL) с противоположными сторонами, (AC) и (BD), проходящими через диагональную точку R :

$$M = (AC) \cap (SL); \qquad N = (BD) \cap (SL).$$

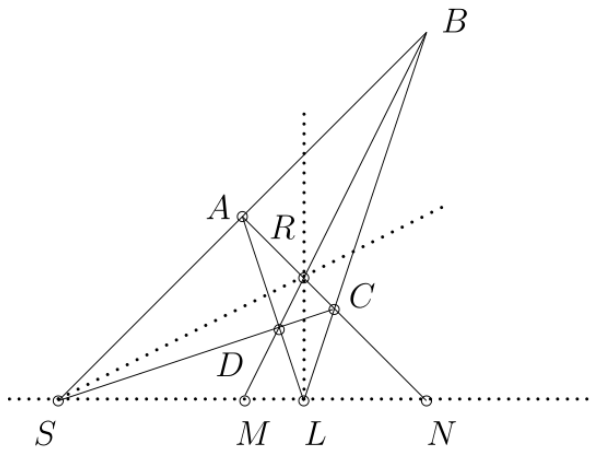


Рис.IV.24. *Полный четырехвершинник*

Докажем, что точки S, L, M, N образуют гармоническую четверку точек, т.е.:

$$(SL, MN) = -1. \tag{IV.24}$$

Доказательство: $\langle\langle$ Проектируя точки S, L, M, N прямой (SL) на прямую (AC) из центра D, получим вследствие независимости сложного отношения от выбора прямой (теорема (TIV.5)):

$$S \to C, L \to A, M \to R, N \to N \Longrightarrow$$

$$(SL, MN) = (CA, RN). \tag{IV.25}$$

Проектируя затем точки A, R, C, N прямой (AC) обратно на прямую (SL) из центра проектирования B, аналогично получим:

$$A \to S, R \to M, C \to L, N \to N \Longrightarrow$$

$$(CA, RN) = (LS, MN). \tag{IV.26}$$

Таким образом, из (IV.25) и (IV.26) получим:

$$(SL, MN) = (LS, MN). \tag{IV.27}$$

Тогда по свойству (IV.11) сложного отношения:

$$(LS, MN) = (SL, MN)^{-1}. \tag{IV.28}$$

Таким образом, из (IV.27) и (IV.28) найдем:

$$(SL, MN)^2 = 1 \Longrightarrow (SL, MN) = \pm 1.$$

Но (SL, MN) не может равняться 1, так как тогда из свойства сложного отношения (IV.13) следовало бы $M = N$, что противоречит условию, так как в этом случае точки A, B, C, D окажутся лежащими на одной прямой. Следовательно

$$(SL, MN) = -1, \Longrightarrow$$

$$(AC, RN) = -1, \tag{IV.29}$$

$$((SA)(SC), (SR)(SN)) = -1. \tag{IV.30}$$

$\rangle\rangle$

Таким образом, доказана теорема:

Теорема TIV.7. *Полный четырехвершинник обладает следующими свойствами:*

1. *На каждой диагонали имеется гармоническая четверка точек, в которой одной парой служат диагональные точки, а другой парой — точки пересечения этой диагонали со сторонами, проходящими через третью диагональную точку;*

2. *На каждой стороне имеется гармоническая четверка точек, в которой одной парой служат вершины, а другая образована диагональной точкой и точкой пересечения этой стороны с диагональю, проходящей через две другие диагональные точки;*

3. *Через каждую диагональную точку проходит гармоническая четверка прямых, в которой одной парой служат противоположные стороны, а другой — диагонали.*

В заключение этого раздела докажем полезную теорему:

Теорема TIV.8. *Пусть C - середина отрезка $[AB]$. Тогда четверка точек этой прямой A, B, C, D_∞ является гармонической:*

$$(AB, CD_\infty) = -1. \tag{IV.31}$$

Доказательство: $\langle\langle$ Возьмем репер $\Re\{A, D_\infty, B\}$ на прямой (AB), т.е., положим: $A_0 = A, A_1 = D_\infty, E = B$. В этом репере указанные точки имеют координаты:

$$A(1, 0); \quad D_\infty = (0, 1); \quad B(1, 1).$$

С другой стороны указанный репер реализует однородные аффинные координаты на прямой (AB). Поэтому координаты середины отрезка, C, равны:

$$C = (1, \frac{1}{2}).$$

Вычисляя сложное отношение (AB, CD) по формулам (TIV.1), (IV.2) найдем:

$$(AB, CD_\infty) = \frac{(AC)\cdot(BD_\infty)}{(AD_\infty)\cdot(BC)} \Longrightarrow$$

$$(AB, CD_\infty) = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & \frac{1}{2} \end{vmatrix}} = -1.$$

Поскольку сложное отношение четырех точек прямой не зависит от выбора репера, теорема доказана. $\rangle\rangle$

Построение четвертых гармонических точек и прямых см. в разделе (IV.2).

IV.3 Проективные преобразования прямой

Пусть на проективной прямой $d = P_1(V_2)$ задан проективный репер $\Re = \{A_0, A_1, E\}$. Тогда согласно формуле (III.20) всякое проективное преобразование Φ прямой определяется формулой вида:

$$x'^{\,i} = C^i_{\prime k} x^k \quad (i, k = \overline{0,1}), \quad \det ||C^i_{\prime k}|| \neq 0, \tag{IV.32}$$

где x^k и $x'^{\,i}$ - координаты произвольной точки прямой и ее образа, соответственно, относительно одного и того же репера $\Re$.

IV.3.1 Инвариантные точки проективной прямой

Исследуем вопрос о существовании инвариантных (неподвижных) точек в проективном преобразовании Φ. Для того, чтобы точка $M(x^i)$ была инвариантной в преобразовании Φ, необходимо и достаточно, чтобы координаты ее образа, $\Phi(M)$, были пропорциональны координатам самой точки (прообраза):

$$x'^{\,i} = \lambda x^i \Longrightarrow C^i_{\prime k} x^k = \lambda x^i. \tag{IV.33}$$

Таким образом, перенося все члены в левую часть (IV.33), получим уравнения на координаты инвариантной точки:

$$\begin{aligned} (C^0_{\prime 0} - \lambda)x^0 + C^0_{\prime 1}x^1 &= 0\,; \\ C^1_{\prime 0}x^0 + (C^1_{\prime 1} - \lambda)x^1 &= 0. \end{aligned} \tag{IV.34}$$

При этом преобразование Φ является тождественным, $\Phi = e$, тогда и только тогда, когда формулы (IV.34) справедливы при любых одновременно ненулевых x^i. Поэтому, для того, чтобы преобразование Φ было тождественным, необходимо и достаточно:

$$C^0_{\prime 1} = C^1_{\prime 0} = 0; \qquad C^0_{\prime 0} = C^1_{\prime 1} \quad (= \lambda). \tag{IV.35}$$

Система (IV.34) является системой однородных линейных алгебраических уравнений. Для ее нетривиальной совместности[3] необходимо и достаточно, чтобы определитель системы равнялся нулю:

$$\begin{vmatrix} C^0_{\prime 0} - \lambda & C^0_{\prime 1} \\ C^1_{\prime 0} & C^1_{\prime 1} - \lambda \end{vmatrix} = 0, \tag{IV.36}$$

т.е., чтобы λ являлись *вещественными* собственными значениями матрицы перехода $||C^i_{\prime k}||$.

Замечание.
Заметим, что поскольку матрица перехода не является симметрической, то ее собственные значения не обязаны быть вещественными.

Расписывая характеристическое уравнение (IV.36)

$$\lambda^2 - (C^0_{\prime 0} + C^1_{\prime 1})\lambda + C^0_{\prime 0}C^1_{\prime 1} - C^1_{\prime 0}C^0_{\prime 1} = 0$$

и решая его относительно λ, найдем:

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}(C^0_{\prime 0} + C^1_{\prime 1}) \pm \sqrt{\Delta},$$

где дискриминант равен:

$$\Delta = (C^0_{\prime 0} - C^1_{\prime 1})^2 + 4C^0_{\prime 1}C^1_{\prime 0}.$$

Если проективное преобразование является тождественным, то все точки являются инвариантными, т.е., оно имеет более двух инвариантных точек. Пусть проективное далее преобразование Φ не является тождественным, т.е., условия (IV.35) не выполняются.

[3]Напомним, что проективные координаты точки одновременно не могут быть равны нулю.

Определение OIV.5. *Не тождественное проективное преобразование прямой называется:*

1. *эллиптическим, если оно не имеет инвариантных точек, т.е.:* $\Delta < 0$*;*
2. *гиперболическим, если оно имеет одну инвариантную точку, т.е.:* $\Delta = 0$*;*
3. *параболическим, если оно имеет две инвариантные точки, т.е.:* $\Delta > 0$.

IV.3.2 Гиперболические преобразования прямой

Гиперболическое преобразование имеет две различные инвариантные точки, A_0 и A_1, которые мы возьмем в качестве вершин проективного репера $\Re = \{A_0, A_1, E\}$ прямой P_1. Тогда координаты точек $A_0(1,0)$ и $A_1(0,1)$ должны удовлетворять системе уравнений (IV.34), которая в нашем случае для каждой из этих точек примет вид:

$$\begin{array}{lcl} C^0_{\prime 0} - \lambda_1 & = & 0\,; \\ & & \text{д } A_0, \\ C^1_{\prime 0} & = & 0, \\ C^0_{\prime 1} & = & 0\,; \\ & & \text{д } A_1, \\ C^1_{\prime 1} - \lambda_2 & = & 0; \end{array}$$

откуда получим:

$$C^0_{\prime 0} = \lambda_1;\ C^0_{\prime 1} = C^1_{\prime 0} = 0;\ C^1_{\prime 1} = \lambda_2,$$

причем существенно, что $\lambda_1 \neq \lambda_2$, иначе в противном случае преобразование станет тождественным.

Подставляя этот результат в формулы преобразования, найдем:

$$x'^{\,0} = \lambda_1 x^0; \qquad x'^{\,1} = \lambda_2 x^1, \qquad (\lambda_1 \neq \lambda_2).$$

Произвольная точка прямой $M(x^0, x^1)$, не совпадающая с вершинами репера A_0, A_1, а, значит, имеющая отличные от нуля координаты в этом репере, в преобразовании Ψ переходит в точку $M'(\lambda_1 x^0, \lambda_2 x^1)$. Таким образом, для векторов, порождающих эти точки, имеем:

$$\vec{m} = x^0 \vec{a}_0 + x^1 \vec{a}_1\,;$$

$$\vec{m}\,' = \lambda_1 x^0 \vec{a}_0 + \lambda_2 x^1 \vec{a}_1 \,.$$

$$(A_0A_1, MM') = \frac{(A_0M)(A_1M')}{(A_0M')(A_1M)} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ x^0 & x^1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ \lambda_1 x^0 & \lambda_2 x^1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \lambda_1 x^0 & \lambda_1 x^1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ x^0 & x^1 \end{vmatrix}} = \frac{x^1}{\lambda_2 x^1} \frac{(-\lambda_1 x^0)}{(-x^0)} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2},$$

или короче:

$$(A_0A_1, M\Phi(M)) = \frac{C'^0_0}{C'^1_1}. \tag{IV.37}$$

Таким образом, мы доказали теорему:

Теорема TIV.9. *Если A_0, A_1 - инвариантные точки гиперболического проективного преобразования Φ прямой P_1, то:*

$$(A_0A_1, M\Phi(M)) = \mathrm{Const} \qquad \left(= \frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)$$

для любой точки $M \in P_1$, отличной от точек A_0, A_1.

IV.3.3 Инволюции прямой

Определение OIV.6. *Проективное преобразование Φ прямой называется инволютивным, или короче, инволюцией, если для любых точек прямой:*

$$\Phi^2 = e, \tag{IV.38}$$

где e - тождественное преобразование.

Для удобства запишем формулу преобразования (IV.32) в матричном виде:

$$\vec{m}\,' = \mu C \vec{m}, \tag{IV.39}$$

($\mu \in \mathbb{R}$, - любое число, C - матрица перехода) сопоставляя, как обычно, векторам матрицы - столбцы:

$$\vec{m} = \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \end{pmatrix}; \vec{m}\,' = \begin{pmatrix} x'^0 \\ x'^1 \end{pmatrix}.$$

Тогда условие инволютивности проективного преобразования (IV.38) можно записать в виде:

$$C^2 = \mu E, \tag{IV.40}$$

где E - единичная матрица. Возводя в квадрат матрицу перехода, получим согласно (IV.40):

$$C^2 = \begin{pmatrix} C^0_{\prime 0} & C^0_{\prime 1} \\ C^1_{\prime 0} & C^1_{\prime 1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C^0_{\prime 0} & C^0_{\prime 1} \\ C^1_{\prime 0} & C^1_{\prime 1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (C^0_{\prime 0})^2 + C^0_{\prime 1}C^1_{\prime 0} & C^0_{\prime 0}C^0_{\prime 1} + C^1_{\prime 1}C^0_{\prime 1} \\ C^0_{\prime 0}C^1_{\prime 0} + C^1_{\prime 1}C^1_{\prime 0} & C^0_{\prime 1}C^1_{\prime 0} + (C^1_{\prime 1})^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}.$$

Таким образом, исключая μ и упрощая выражения, получаем систему трех уравнений:

$$\begin{cases} \text{а).} & (C^0_{\prime 0})^2 & = & (C^1_{\prime 1})^2\,; \\ \text{б).} & C^0_{\prime 1}(C^0_{\prime 0} + C^1_{\prime 1}) & = & 0\,; \\ \text{в).} & C^1_{\prime 0}(C^0_{\prime 0} + C^1_{\prime 1}) & = & 0. \end{cases} \tag{IV.41}$$

Уравнение а). системы (IV.41) можно записать в виде:

$$(C^0_{\prime 0} + C^1_{\prime 1})(C^0_{\prime 0} - C^1_{\prime 1}) = 0.$$

Если $C^0_{\prime 0} + C^1_{\prime 1} \neq 0$, то $C^0_{\prime 0} = C^1_{\prime 1}$, но тогда из уравнений б), в) системы (IV.41) следует:

$$C^0_{\prime 1} = C^1_{\prime 0} = 0,$$

т.е., получим тождественное преобразование. Однако, по условию инволюция не является тождественным преобразованием. Следовательно,

$$C^1_{\prime 1} = -C^0_{\prime 0} \Longrightarrow C = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \Gamma & -\alpha \end{pmatrix}. \tag{IV.42}$$

Таким образом, мы доказали теорему:

Теорема TIV.10. *Условием инволютивности проективного преобразования прямой, заданного формулами (IV.32), является:*

$$C^0_{\prime 0} + C^1_{\prime 1} = 0. \tag{IV.43}$$

Следствие CIV.3. *Не существует параболических инволюций. Для гиперболических инволюции* $\det ||C|| < 0$, *для эллиптических* $\det ||C|| > 0$.

Доказательство: $\langle\langle$ Учитывая условие инволютивности (IV.42) (или (IV.43)), получим для дисриминанта Δ, определяющего тип преобразований:

$$\Delta = 4\left((C'^0_0)^2 + C'^0_1 C'^1_0\right) = 4(\alpha^2 + \beta\Gamma) = -4\det||C||.$$

Но $\det||C|| \neq 0$. $\rangle\rangle$

Следствие CIV.4. *Если Φ - гиперболическая инволюция с инвариантными точками A_0, A_1, то*

$$(A_0A_1, M\Phi(M)) = -1 \tag{IV.44}$$

— при гиперболической инволюции образ и прообраз гармонически разделяют инвариантные точки.

Доказательство: $\langle\langle$ Согласно (IV.37) при гиперболическом преобразовании:

$$(A_0A_1, M\Phi(M)) = \frac{C'^0_0}{C'^1_1} \qquad (= \mathrm{Const}).$$

Учитывая здесь условие иволютивности (IV.42) этого преобразования, получим (IV.44). $\rangle\rangle$

Теорема TIV.11. *Если в проективном преобразовании Φ прямой найдутся две различные точки A и B такие, что :*

$$\Phi(A) = B, \qquad \Phi(B) = A, \tag{IV.45}$$

то Φ - инволюция.

Доказательство: $\langle\langle$ Так как A и B различные точки, то $\Phi(A) \neq A \Longrightarrow \Phi \neq e$, т.е., Φ - не тождественное преобразование. Пусть M - произвольная точка прямой. Тогда при преобразовании Φ :

$$A \to B = \Phi(A); B \to A = \Phi(B), M \to M' = \Phi(M).$$

Сама точка M' прямой при этом преобразовании перейдет в некоторую точку $M'' = \Phi(M')$. Поскольку Φ - проективное преобразование, то оно сохраняет сложное отношение любых четырех точек прямой. Поэтому:

$$(AB, MM') = (BA, M'\Phi(M')). \tag{IV.46}$$

При перемене местами точек любой пары сложного отношения последнее изменяет знак на противоположный. Поэтому равенство (IV.46) сохранится,

если мы поменяем местами в левой части этого соотношения точки второй пары, а в правой части — точки первой пары:

$$(AB, M'M) = (AB, M'\Phi(M')). \tag{IV.47}$$

Но поскольку сложное отношение однозначно определяет положение четвертой точки при фиксированных трех, то из (IV.47) следует:

$$\Phi(M') = M, \quad \text{т..}, \quad \Phi(\Phi(M)) = M \Longrightarrow$$

$$\Phi^2(M) = M$$

— для любой точки M. Таким образом, $\Phi^2 = e$. $\rangle\rangle$

Теорема TIV.12. *Если на прямой даны четыре различные точки A, B, C, D, то существует и притом единственная инволюция Φ этой прямой, такая что:*

$$\Phi(A) = B, \qquad \Phi(C) = D.$$

Доказательство: $\langle\langle$ Так как все точки различны, мы можем построить на них упорядоченную пару проективных реперов, $\Re = \{A, B, C\}$ и $\Re' = \{B, A, D\}$. Как мы знаем, существует единственное проективное преобразование Φ, переводящее один проективный репер в другой. В этом проективном преобразовании точка A переходит в точку B, а точка B — в точку A. Следовательно, по теореме (TIV.11) Φ - инволюция. $\rangle\rangle$

IV.4 Проективные преобразования плоскости

IV.4.1 Инварианты проективного преобразования плоскости

Формулы преобразования (III.20) в случае проективного преобразования плоскости принимают вид;

$$x'^{\,i} = C^i_{\prime k} x^k \quad (i, k = \overline{0, 2}), \quad \det ||C^i_{\prime k}|| \neq 0. \tag{IV.48}$$

Будем искать инвариантные точки и инвариантные прямые в преобразовании Φ (IV.48). Для инвариантных точек M должно быть: $\Phi(M) = M$, следовательно, координаты образа и прообраза относительно одного и того же репера должны быть пропорциональны:

$$C^i_{\prime k} x^k = \lambda x^i \Longrightarrow (C^i_{\prime k} - \lambda \Delta^i_k) x^k = 0 \Longrightarrow$$

$$\begin{cases} (C^0_{\prime 0} - \lambda)x^0 + C^0_{\prime 1}x^1 + C^0_{\prime 2}x^2 &= 0\,; \\ C^1_{\prime 0}x^0 + (C^1_{\prime 1} - \lambda)x^1 + C^1_{\prime 2}x^2 &= 0\,; \\ C^2_{\prime 0}x^0 + C^2_{\prime 1}x^1 + (C^2_{\prime 2} - \lambda)x^2 &= 0, \end{cases} \tag{IV.49}$$

т.е., λ - собственные значения матрицы C.

Поскольку характеристическое уравнение в нашем случае:

$$\det ||C - \lambda E|| = 0, \Longrightarrow P_3(\lambda) = 0 \tag{IV.50}$$

является кубическим уравнением относительно λ, оно имеет, по крайней мере, один вещественный корень: $\lambda = \lambda_1$. Поэтому *проективное преобразование плоскости имеет, по крайней мере, одну инвариантную точку.*

Рассмотрим теперь некоторую прямую $d \in P_2$, описываемую в данном репере своим общим уравнением:

$$a_i x^i = 0. \tag{IV.51}$$

Образ, $d' = \Phi(d)$, прямой d определяется общим уравнением (III.23) относительно этого же репера:

$$a'_i x'^i = 0, \tag{IV.52}$$

причем координаты прообраза прямой, a_i, связаны с координатами образа, a'_i, формулой преобразования (III.25):

$$a_i = C^k_{\prime i} a'_k. \tag{IV.53}$$

Для того, чтобы прямая d совпадала со своим образом d', необходимо и достаточно, чтобы их координаты были пропорциональны, т.е.:

$$a_i = \lambda a'_i.$$

Подставляя сюда координаты a_i из (IV.53), получим:

$$(C^k_{\prime i} - \lambda \Delta^k_i) a'_k = 0. \tag{IV.54}$$

Если, по-прежнему, сопоставлять ковекторам прямых матрицы-столбцы, то уравнение (IV.54) в матричной записи примет вид:

$$(C^T - \lambda E)\, \underset{\rightarrow}{a'} = 0. \tag{IV.55}$$

Но матрица C и транспонированная к ней матрица C^T имеют один и тот же характеристический многочлен $P_3(\lambda)$. Поэтому условие нетривиальной разрешимости уравнений (IV.55) совпадает с условием (IV.50). Таким образом,

получим, по крайней мере, одно вещественное собственное значение: $\lambda = \lambda_1$. Итак, мы доказали теорему:

Теорема TIV.13. *Всякое проективное преобразование плоскости P_2 имеет, по крайней мере, одну инвариантную точку и одну инвариантную прямую.*

Заметим, что, вообще говоря, число инвариантных точек в проективном преобразовании плоскости совпадает с числом инвариантных прямых.

IV.4.2 Гомологии

Итак, пусть $\lambda = \lambda_1$ вещественное собственное значение матрицы C кратности $k = 1$. Тогда

$$\operatorname{rank} C = 1.$$

Тогда из (IV.49) следует, что существует прямая инвариантных точек, а из (IV.54) следует, что существует пучок инвариантных прямых, центр которого также будет инвариантной точкой.

Определение OIV.7. *Проективное преобразование Φ плоскости P_2 называется гомологией, если оно имеет прямую s инвариантных точек, а значит, и пучок $\mathrm{Pr}(O)$ инвариантных прямых. Прямая s называется осью, а точка O — центром гомологии.*

Пусть теперь дана гомология Φ с центром O и осью s, и пусть точка M не совпадает с центром. Тогда прямая (OM) инвариантная, и точка $M' = \Phi(M)$ должна лежать на прямой (OM). Таким образом, для любой точки $M \in \mathrm{Pr}(O)$ плоскости точки $M, \Phi(M), O$ лежат на одной прямой. Пусть заданная прямая d пересекает ось гомологии s в точке $D = d \cap s$. Но тогда D — инвариантная точка, следовательно, $D \in d' = \Phi(d)$. Поэтому прямые d и $d' = \Phi(d)$ пересекаются на оси гомологии s.

Теорема TIV.14. *Если на плоскости даны прямая s и три точки S, A, A', лежащие на одной прямой и не лежащие на прямой s, то существует единственная гомология Φ с осью s и центром s, такая, что $\Phi(A) = A'$.*

Доказательство: $\langle\langle$ Возможны два принципиально различных случая взаимного расположения центра и оси гомологии.

Случай 1. $S \notin s$ (см. (Рис.IV.25)).
Итак, проведем прямую s и возьмем на плоскости пару различных точек, S и A, не принадлежащих прямой s. Проведем прямую (SA) и возьмем на ней любую точку A', не принадлежащую прямой s. Точка A' является образом точки A в гомологии Φ. Обозначим: $A_0 = s \cap (SA)$.

Возьмем на прямой s любые две точки, B и C, не совпадающие с точкой A_0. Как мы знаем, существует единственное проективное преобразование f плоскости, которое переводит репер $\{S, B, C, A\}$ в репер $\{S, B, C, A'\}$: $\Phi(S) = S, \Phi(B) = B, \Phi(C) = C, \Phi(A) = A'$. В преобразовании Φ точки S, B, C инвариантны. Следовательно, инвариантна и прямая $s = (BC)$. Кроме того, так как прямая (SA) переходит сама в себя: $\Phi(SA) = (SA') = (SA)$, то инвариантна и прямая (SA). Следовательно, инвариантна и точка пересечения этих прямых: $A_0 = (SA) \cap s$.

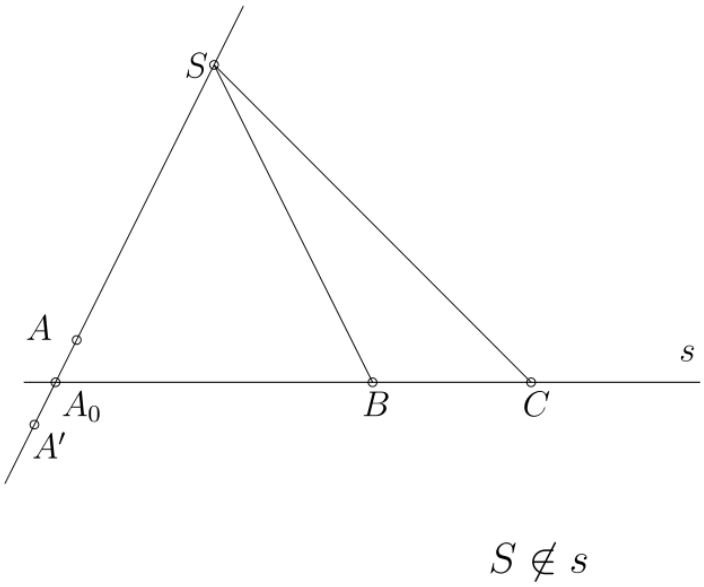


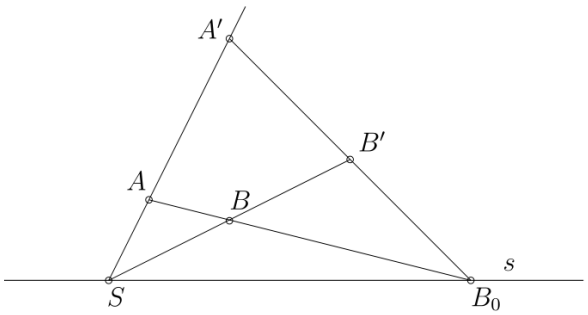
Рис.IV.25. *Гомология*

Сужение преобразования Φ — $\Phi|_s$ является проективным преобразованием прямой s, в котором имеется три инвариантные точки: A_0, B, C. Таким образом, s — прямая инвариантных точек проективного преобразования Φ, т.е., Φ — гомология. Заметим, что при этом $\mathcal{P}(S)$ является пучком инвариантных прямых.

Случай 2. $S \in s$ (особая гомология) (см. (Рис.IV.26)).
Проведем прямую s и возьмем на ней точку S. Проведем прямую (SA) $(A \notin s)$ и возьмем на ней произвольную точку $A' \notin s$. Точка $A' = \Phi(A)$ — образ точки A в отображении Φ. Возьмем произвольную точку B, не при-

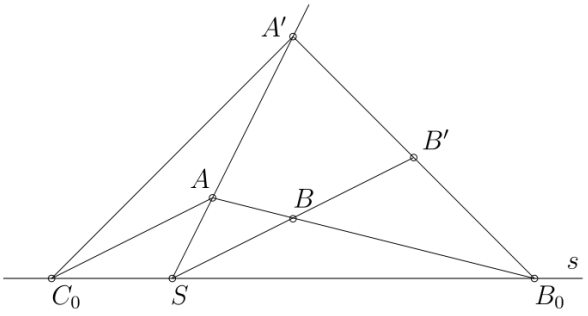
надлежащую указанным прямым: $B \notin s$, $B \notin (SA)$. Тогда образ этой точки, $B' = \Phi(B)$, должен принадлежать прямой (SB). Далее, так как прямая $(A'B')$ есть образ прямой (AB) в гомологии s, точка пересечения этих прямых, $B_0 = (AB) \cap (A'B')$ должна лежать на оси гомологии. Этот факт дает нам рецепт построения образа B' произвольной точки B :

1. Находим точку пересечения $B_0 = (AB) \cap s$;
2. Проводим прямые (SB) и $(A'B_0)$ и находим точку их пересечения $B' = (SB) \cap (A'B_0)$.



$S \in s$

Рис.IV.26. *Особая гомология: построение образа точки B*



$S \in s$

Рис.IV.27. *Особая гомология (к доказательству)*

Возьмем на прямой s какую-либо точку C_0, отличную от точек S и B (см. (Рис.IV.27)). Существует единственное проективное преобразование Φ плоскости, переводящее репер $\{S, A, C_0, B\}$ в репер $\{S, A', C_0, B\}$. В этом пре-

образовании три точки, S, C_0, B, являются инвариантными. Следовательно, прямая s есть прямая инвариантных точек, а, значит, Φ — гомология.

Заметим, что аналогично, в пучке $\mathcal{P}(S)$ три прямые: $s, (AA'), (BB')$ инвариантны, а, значит, пучок $\mathcal{P}(S)$ есть пучок инвариантных прямых в преобразовании Φ. $\rangle\rangle$

Частные случаи гомологии

1. Гомология с несобственной осью

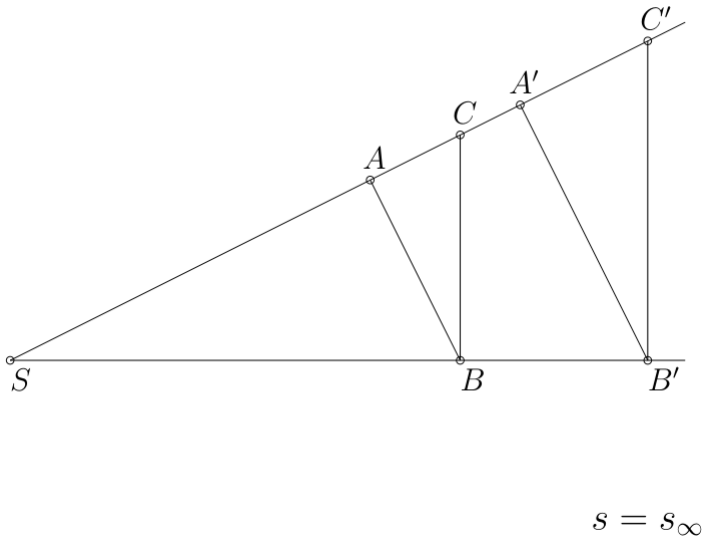


Рис.IV.28. *Гомология с несобственной осью*

Пусть ось гомологии s — несобственная прямая, зададим собственный центр гомологии S, и пусть заданы собственная точка A и ее образ — $A' = \Phi(A)$, принадлежащий прямой (SA), (см. (Рис.IV.28)). Так как прямая и ее образ пересекаются на оси гомологии s, которая является несобственной, т.е., состоит только из несобственных точек (т.е., прямая и ее образ пересекаются в несобственных точках), то в гомологии Φ каждая собственная прямая d перейдет в параллельную ей прямую $d' \parallel d$ на аффинной плоскости Π.

Зададим далее любую собственную точку B, не принадлежащую прямой (SA). Пусть $B' = \Phi(B)$ — образ точки этой точки в гомологии Φ. Тогда $B' \in (SB)$. С другой стороны прямые $d = (AB)$ и ее образ — $d' = (A'B')$ должны быть параллельны. Поэтому, проводя из точки A' прямую d', параллельную (AB), до пересечения ее с прямой (SB), получаем образ точки B :

$$B' = d' \cap (SB).$$

Далее возьмем на прямой (SA) какую - либо другую собственную точку $C \in (SA)$ и ее образ $C' = \Phi(C) \in (SA)$. Для этой пары точек и точек B, B' аналогично получим: $(B'C') \parallel (BC)$. Так как точки S, A, A' принадлежат одной прямой аффинной плоскости, положим:

$$\overrightarrow{SA'} = \mu\overrightarrow{SA}.$$

Но тогда из теоремы о пропорциональных отрезках (см. [9]) для любой точки B и ее образа B' следует:

$$\overrightarrow{SB'} = \mu\overrightarrow{SB}.$$

Таким образом:

Гомология с несобственной осью на аффинной плоскости Π является гомотетией с центром S и коэффициентом μ.

2. Гомология с несобственным центром

Пусть теперь s — собственная прямая, а S — несобственная точка.

Определение OIV.8. *Гомология Φ с собственной осью s и несобственным центром S на расширенной плоскости $\overline{\Pi}$ называется родственным преобразованием (родством).*

Каждое родство Φ вполне определяется заданием оси гомологии (оси родства)[4] и парой любых точек A, A' (прообраза и образа). Возможны два типа родства:

а). Косое сжатие: $S \notin s$

В этом случае прямые, соединяющие образы и прообразы точек, $(AA'), (BB'), \ldots,$ образуют пучок параллельных прямых $\mathrm{Pr}(S)$, пересекающих ось гомологии в собственных точках (см. (Рис.IV.29)). Зададим ось гомологии s[5] и пару точек, A, A'. Пусть теперь B — произвольная точка, образ которой, B', мы хотим построить. Проводим прямую (AB) и строим пересечение $B_0 = (AB) \cap s$. Строим прямую (B_0A'). Через точку B проводим прямую d', параллельную

[4]Иногда родство называют также перспективно - аффинным преобразованием.
[5]Ось гомологии в этом случае называется иногда осью сжатия.

(AA'). Пересечение этой прямой с прямой (B_0A') и будет искомым образом точки B :

$$B' = d' \cap (B_0A').$$

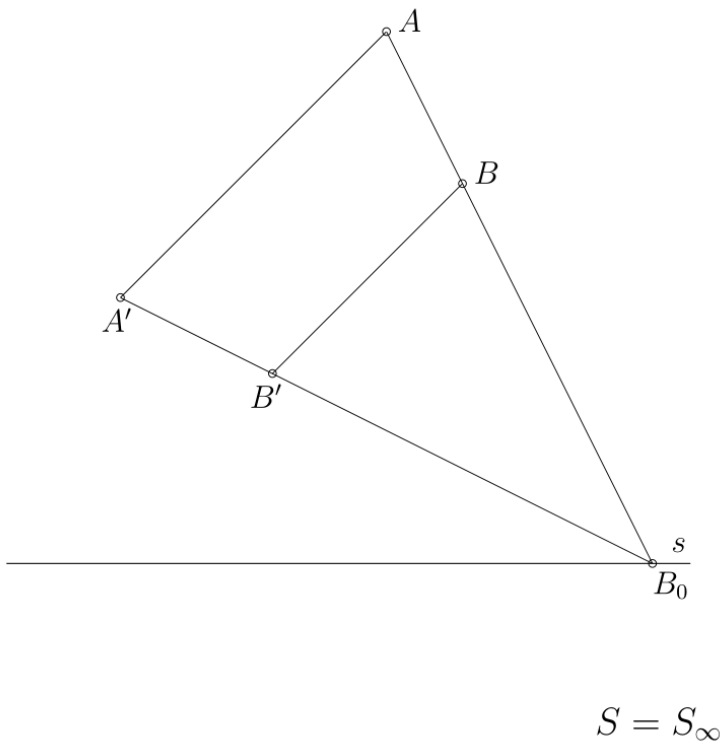


Рис.IV.29. *Косое сжатие*

б). Сдвиг: $S \in s$

Это случай особой гомологии. И в этом случае прямые $(AA'), (BB'), \ldots$ образуют пучок параллельных прямых $\mathrm{Pr}(S)$. Однако, так как $S \in s$, то эти прямые будут параллельны оси гомологии (см. (Рис.IV.29)). Итак, зададим пару точек, A, A', и ось гомологии, параллельную прямой (AA'). Зададим также точку B, образ который хотим построить. Проведем прямую (AB) и найдем точку B_0 :

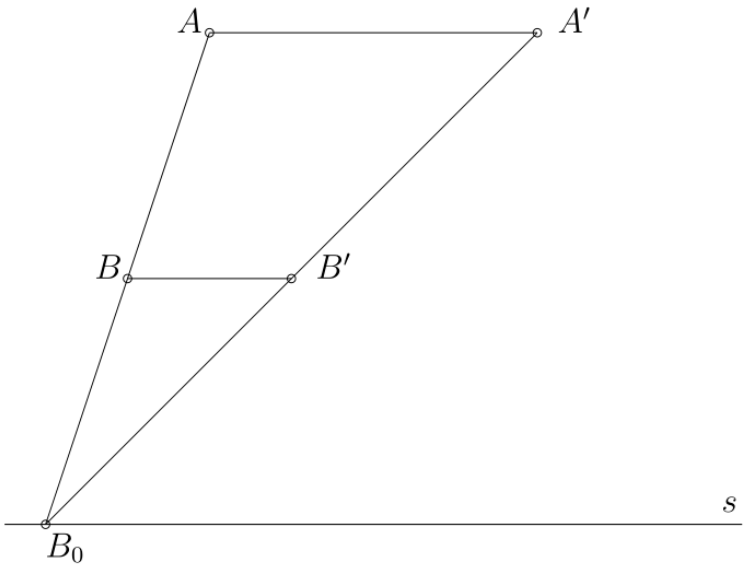
$$B_0 = (AB) \cap s.$$

Проводим прямую (B_0A') и прямую d', проходящую через точку B параллельно оси гомологии s. Искомый образ точки B :

$$B' = d' \cap (B_0A').$$

3. Гомология с несобственной осью и несобственным центром

В этом случае прямые $(AA'), (BB'), \ldots$ образуют пучок параллельных пря-



$$s = s_\infty, \quad S = S_\infty$$

Рис.IV.30. *Сдвиг*

мых $\mathrm{Pr}(S)$ на плоскости Π, причем $(A'B') \parallel (AB)$. Соответствующая гомология на аффинной плоскости является параллельным переносом на вектор $\overrightarrow{AA'}$.

Часть II

Методы изображений

Глава V

Основные виды проектирования

V.1 Центральное проектирование

V.1.1 Общие понятия

В этом разделе нас будут интересовать *изображения* фигур в евклидовом пространстве. Напомним, что фигурой F называется любое множество точек пространства (см. [7]). Аналогично тому, как мы дополняли аффинную прямую d несобственной точкой M_∞ до расширенной прямой $\overline{d}$ и аффинную плоскость Π несобственной прямой d_∞ до расширенной плоскости $\overline{\Pi}$, дополним евклидово пространство $\mathcal{E}_3$ несобственной плоскостью Π_∞ до расширенного пространства $\overline{\mathcal{E}_3}$. Возьмем в $\overline{\mathcal{E}_3}$ некоторую плоскость $\Sigma \in \overline{\mathcal{E}_3}$, фигуру F' и точку S, не принадлежащую ни фигуре, ни плоскости (см. (Рис.V.31)), $S \notin F' \& S \notin \Sigma$. Пусть далее $M' \in F'$ — произвольная точка фигуры F'.

Определение OV.1. *Отображение*

$$\phi : F' \longrightarrow \Sigma \tag{V.1}$$

по закону

$$\phi M = (SM' \cap \Sigma (\stackrel{def}{=} M_0) \tag{V.2}$$

называется проектированием фигуры F' на плоскость Σ из центра S.

Плоскость Σ называется плоскостью изображения, фигура F' — оригиналом, $\phi(F') \stackrel{def}{=} F_0$ — проекцией оригинала F' на плоскость Σ.

В большинстве практически важных случаях изображение F_0 может не поместиться на листе бумаги. В этих случаях плоскость изображения Σ подвергают преобразованию подобия P с таким коэффициентом k, чтобы полученное изображение $F = P(F_0)$ наиболее удобным образом было размещено

на чертеже, холсте, экране. Полученная таким образом фигура F и называется *изображением* оригинала F'. В тех случаях, когда в преобразовании плоскости изображения нет необходимости, изображением оригинала является его проекция F_0.

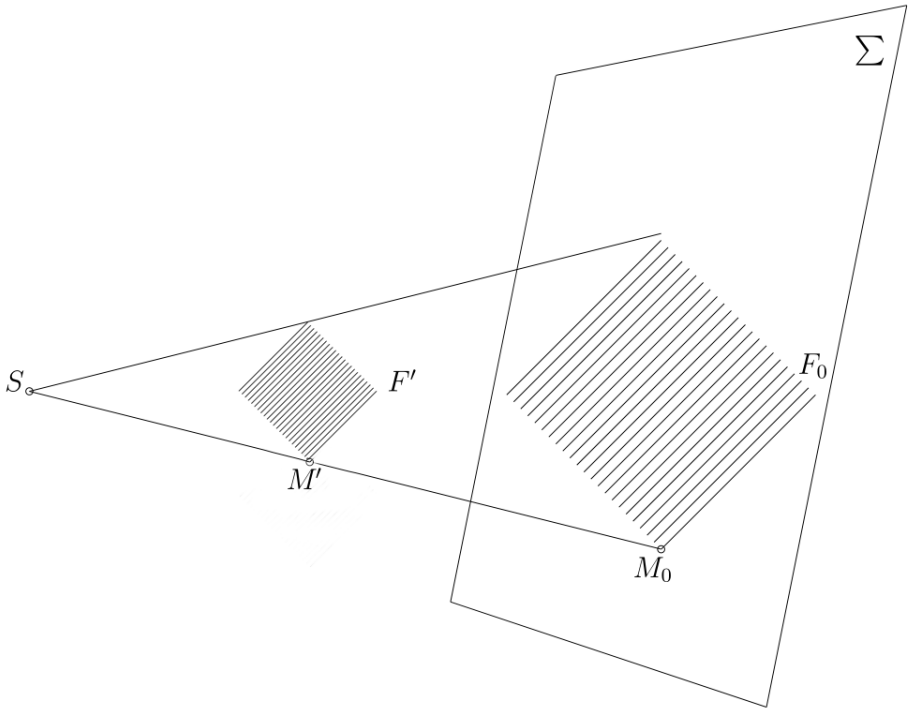


Рис.V.31. *Проектирование фигуры F на плоскость*

V.1.2 Проектирование плоских фигур

Рассмотрим частный случай проектирования, когда $F' = \Sigma'$ - плоскость. В связи с необходимостью преобразования изображения вводят некоторую промежуточную плоскость и промежуточное проектирование, называемое *внутренним проектированием*, в котором оригиналом является плоская фигура. Проектирование фигуры F' на плоскость Σ называют *внешним проектированием*. При этом результат проектирования представляется в виде композиций отдельных проектирований.

Внутреннее проектирование

Итак, рассмотрим в $\overline{\mathcal{E}_3}$ две расширенные плоскости, Σ', Σ'_0 и точку S', не принадлежащую этим плоскостям (см. (Рис.V.32)). Очевидно, что проектирование π_1 плоскости Σ' на плоскость Σ'_0 является биективным отображением, переводящим каждую прямую $a' \subset \Sigma'$ в прямую $a'_0 \subset \Sigma'_0$. Поэтому

такое проектирование является частным случаем проективного отображения плоскости Σ' на плоскость Σ'_0, при котором прямые, проходящие через каждую пару точек M' и M'_0 (прообраза и образа) должны принадлежать одной и той же связке прямых $\overline{\mathcal{E}_3}$ с центром S. Такое проективное отображение в дальнейшем будем называть *перспективным*. точка пересечения прообраза и образа прямых, a' и a'_0, в перспективном отображении всегда лежит на прямой s' пересечения плоскостей $s' = \Sigma' \cap \Sigma'_0$. В случае, если эти плоскости являются параллельными в евклидовом пространстве $\mathcal{E}_3$, прямая пересечения s' является несобственной прямой.

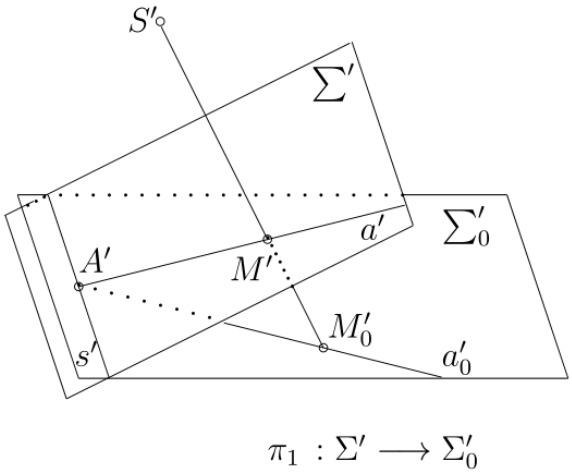


Рис.V.32. *Внутреннее проектирование*

Внешнее проектирование

Спроектируем теперь фигуру $F' = \{S', \Sigma', \Sigma'_0\}$, изображенную на (Рис.V.32), из некоторого центра $S_0 \notin F'$ на плоскость $\Sigma \subset \overline{\mathcal{E}_3}$, не содержащую точку S_0. Обозначим это отображение с помощью π :

$$\pi \ : F' \longrightarrow \Sigma.$$

Пусть $\pi(S') = S$, $\pi(s') = s$ (см. (Рис.V.32)). Отображение π одновременно устанавливает проективные отображения плоскостей Σ' — $\pi_{\Sigma'}$ и Σ'_0 — π_{Σ} на плоскость изображения Σ:

$$\pi_{\Sigma'} \ : \Sigma' \longrightarrow \Sigma, \quad \pi_{\Sigma'_0} \ : \Sigma'_0 \longrightarrow \Sigma.$$

Поэтому композиция отображений:

$$f \stackrel{def}{=} \pi_{\Sigma'_0} \pi_1 \pi_{\Sigma'}^{-1} \tag{V.3}$$

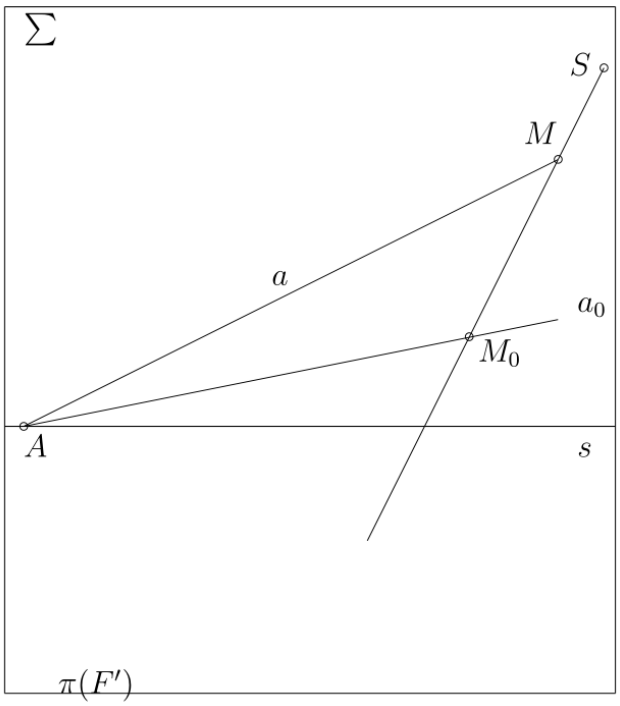


Рис.V.33. *Проекция фигуры (Рис.V.32) на плоскость изображения*

есть проективное преобразование плоскости изображений Σ.

Пусть $M_0' = \pi_1(M') \in \Sigma_0'$ — образ точки $M' \in \Sigma'$ на плоскости Σ_0' (см. (Рис.V.32)), а $\pi(M') = M \in \Sigma$ — образ этой же точки на плоскости Σ в проектировании π. Пусть при этом образ точки M_0' в этом же проектировании есть $M_0 = \pi(M_0')$. Тогда $F(M) = M_0$. Но тогда в проективном преобразовании f плоскости изображений Σ всякая точка $A \in s$ остается неподвижной, следовательно f — гомология с осью s. Каждая прямая $(M'M_0')$ ((Рис.V.32)) проходит через точку S', следовательно ее образ в отображении π, соединяющий пару точек $M, M_0 = f(M)$, проходит через точку S. Таким образом, S — центр гомологии f.

Определение OV.2. *Плоскость Σ_0 называется основной плоскостью, проектирование π_1 называется внутренним проектированием, проектирование π — внешним проектированием, при этом внутренняя проекция M_0' точки M' называется основанием точки M'.*

Таким образом, можно сформулировать теорему *о внешнем проектировании.*

Теорема TV.1. *Внешнее проектирование π устанавливает на плоско-*

сти изображений Σ гомологию f, которая переводит проекцию M всякой точки $M' \in \Sigma'$ в проекцию M_0 ее основания $M'_0 \in \Sigma'_0$. Осью гомологии f служит прямая s, являющаяся внешним образом прямой пересечения плоскостей Σ' и Σ'_0: $s = \pi(\Sigma' \cap \Sigma'_0)$, а ее центром — внешний образ S центра S' внутреннего проектирования $S = \pi(S')$.

Заметим, что прямая s' есть пересечение плоскости фигуры F' (оригинала) и основной плоскости.

V.2 Параллельное проектирование

Определение OV.3. *Пусть*

$$\pi : F' \longrightarrow \Sigma \tag{V.4}$$

— проектирование из центра S (см. (Рис.V.31). Если точка S является собственной, то проектирование (V.4) называется центральным, а если $S = S_\infty$ несобственная точка, то проектирование (V.4) называется параллельным.

Итак, пусть π — параллельное проектирование фигуры F' на плоскость Σ из центра $S = S_\infty$. Как известно, несобственная точка S определяет в расширенном пространстве $\overline{\mathcal{E}_3}$ направление $\vec{t}$, которое однозначно задается любой прямой с данным направляющим вектором (см. (Рис.V.34)).

V.2.1 Перспективно аффинное отображение

Рассмотрим частный случай параллельного проектирования, когда оригинал F' является плоскостью Σ'. Будем полагать, что направление проектирования $\vec{t}$ не параллельно ни одной из плоскостей Σ', Σ. Тогда проектирование π по направлению $\vec{t}$ устанавливает *биективное отображение*:

$$\pi : \Sigma' \longrightarrow \Sigma. \tag{V.5}$$

Возьмем какую - либо прямую $a' \in \Sigma'$ (см. (Рис.V.34)). Все прямые, проектирующие в направлении $\vec{t}$ точки A', B', C' прямой a', лежат в одной плоскости Π. Поэтому образом прямой a' является прямая пересечения этой плоскости

и плоскости изображения:

$$a = \pi(a') = \Pi \cap \Sigma.$$

Так как прямые, связывающие образы и прообразы, $(A'A), (B'B), \ldots$ параллельны друг другу, то вследствие теоремы о пропорциональных отрезках [8] при параллельном проектировании сохраняется простое отношения трех точек:

$$(A'B', C') = (AB, C).$$

Но тогда, отображение π есть аффинное отображение плоскости Σ' на плоскость Σ. Этот *частный* случай аффинного отображения, которое осуществляется пучком параллельных прямых, называется *перспективно - аффинным.* В перспективно - аффинных отображениях сохраняются все инварианты аффинных преобразований (параллельность прямых и плоскостей).

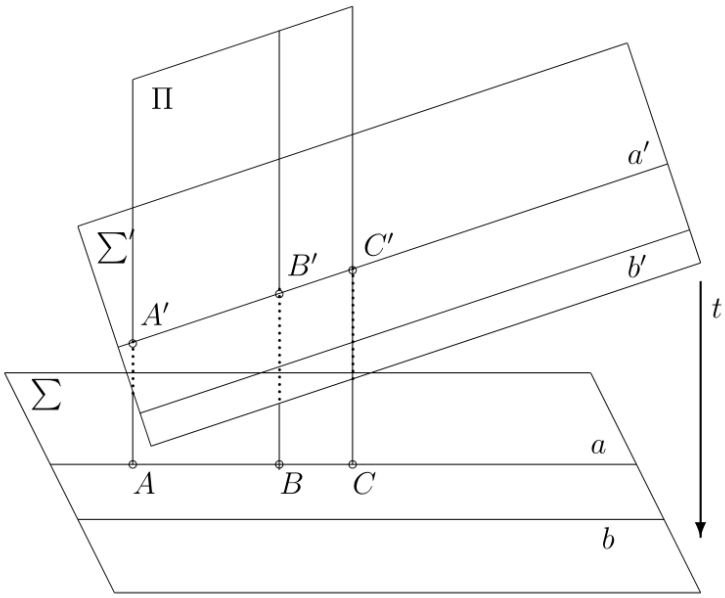


Рис.V.34. *Параллельное проектирование*

Применим теорему (TV.1) к параллельному проектированию. Здесь возникают три частных случая.

1. Внутреннее проектирование π_1 также является параллельным (точка S' — также несобственная), а прямая $s' = \Sigma' \cap \Sigma'_0$ - собственная (см. (Рис.V.35)), но $\Sigma' \not\parallel \Sigma'_0$.

Тогда на плоскости изображений $\Sigma : s = \pi(s')$ — собственная прямая, $S = \pi(S') = (S'S_0) \cap \Sigma$ — несобственная точка, причем $S \notin s$. Таким образом,

гомология f (см. (TV.1)) является родством с осью s и направлением родства (MM_0) и переводит проекцию M точки $M' \in \Sigma'$ в проекцию M_0 ее основания $M'_0 \in \Sigma'_0$.

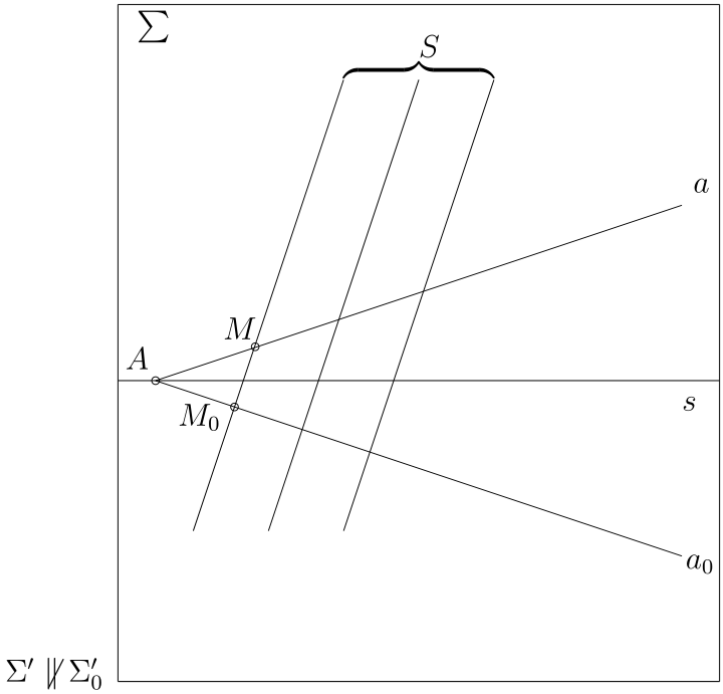


Рис.V.35. *Случай параллельного внутреннего проектирования*

2. Внутреннее проектирование π_1 является центральным (точка S' — собственная), $\Sigma' \parallel \Sigma$ (см. (Рис.V.36)).

Тогда гомология f имеет собственный центр S и несобственную ось s, т.е., является гомотетией с центром S и коэффициентом h, определяемым из соотношения (см. (Рис.V.37)):

$$\overrightarrow{S'M'_0} = h\overrightarrow{SM}.$$

3. Внутреннее проектирование π_1 является параллельным (точка S' — несобственная), ось s — несобственная, $\Sigma' \parallel \Sigma$ (см. (Рис.V.38)).

В этом случае гомология f является параллельным переносом, определяемым вектором $\overrightarrow{MM_0}$.

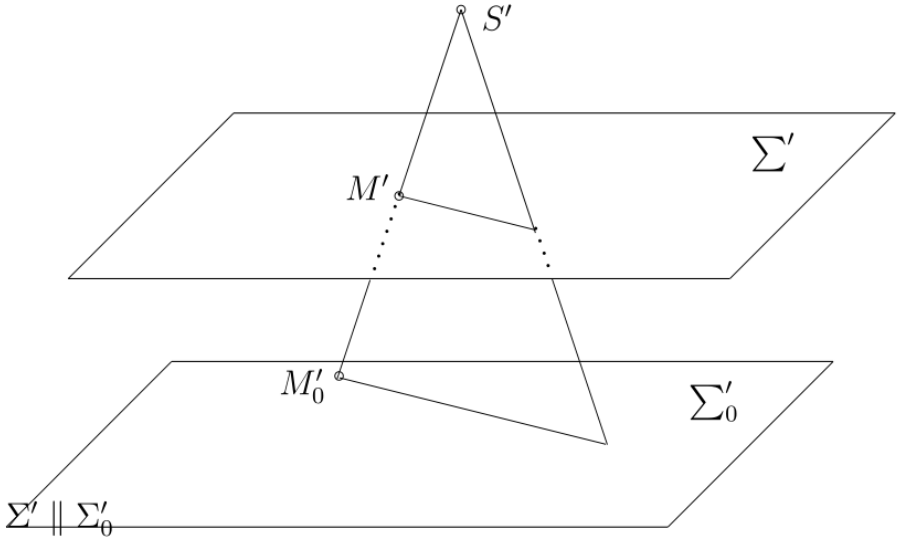


Рис.V.36. *Случай центрального внутреннего проектирования*

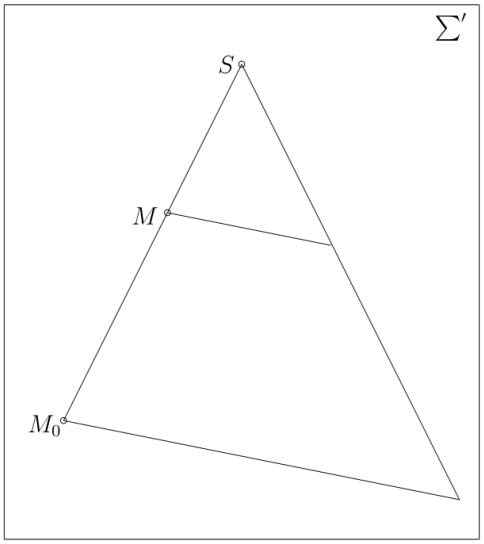


Рис.V.37. *Гомотетия*

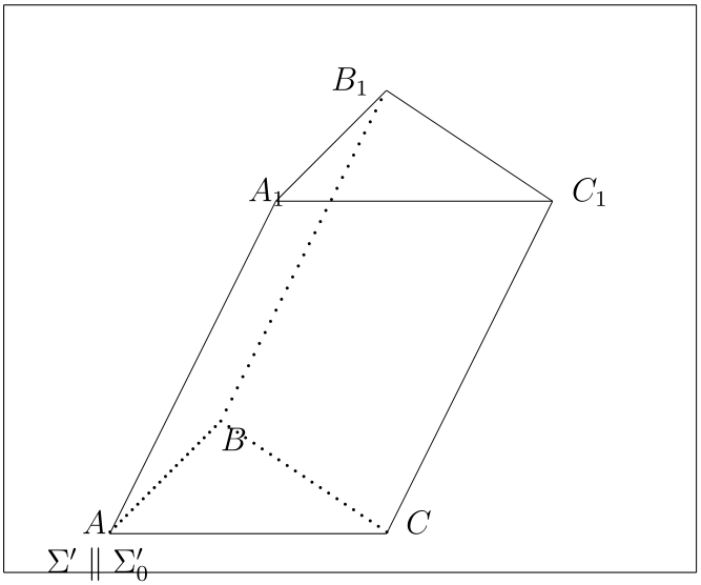


Рис.V.38. *Параллельное внутреннее проектирование*

Глава VI

Изображение простейших фигур в параллельной проекции

VI.1 Изображение плоских фигур в параллельной проекции

VI.1.1 Изображение треугольника

Пусть даны две плоскости, Σ' и Σ, и пусть в плоскости Σ' дан треугольник $\Delta A'B'C'$ (см. (Рис.VI.39)). Возьмем какую - либо плоскость Σ, проходящую через прямую $(A'B')$, и в ней — какой - либо треугольник ΔMNP. В этой же плоскости построим на стороне $[A'B']$ треугольник $\Delta A'B'C$, подобный треугольнику ΔMNP, так что:

$$\Delta A'B'C \sim \Delta MNP \Longleftrightarrow \frac{A'B'}{MN} = \frac{B'C}{NP} = \frac{CA'}{PM} = k.$$

Очевидно, что этот треугольник является параллельной проекцией треугольника $A'B'C'$ на плоскость Σ в направлении $\vec{t} = \overrightarrow{C'C}$. Таким образом, параллельной проекцией данного треугольника $\Delta A'B'C'$ может служить треугольник, подобный *любому* наперед заданному треугольнику, т.е., короче говоря, *изображением данного треугольника $A'B'C'$ может служить любой треугольник MNP.*

Докажем важную для дальнейшего теорему о параллельном проектировании.

Теорема TVI.1. *Если на плоскости изображения Σ указаны изображения каких - либо трех точек общего положения плоскости Σ', полученные при помощи параллельного проектирования, направление которого не параллельно этой плоскости, то изображение любой точки плоскости Σ' может быть построено.*

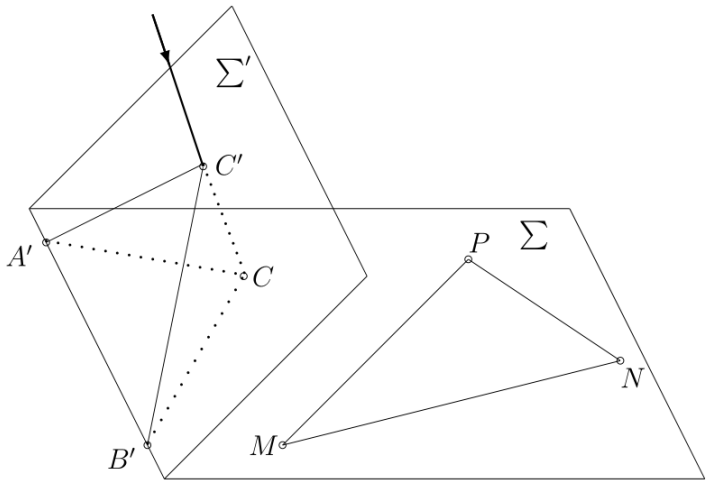


Рис.VI.39.

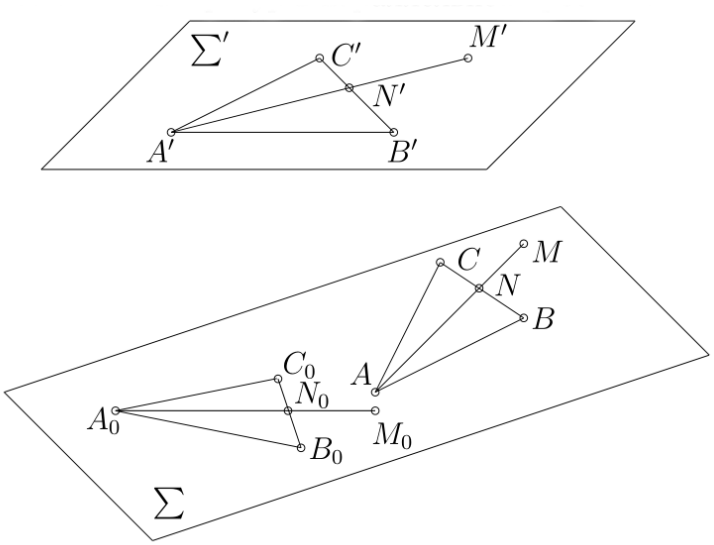


Рис.VI.40. *К доказательству теоремы Т.31*

Доказательство: $\langle\langle$ Пусть точки $A_0, B_0, C_0 \in \Sigma$ являются параллельными проекциями точек общего положения $A', B', C' \in \Sigma'$ плоскости Σ' (см. (Рис.VI.40)).Так как направление проектирования не параллельно плоскости Σ', то точки A_0, B_0, C_0 не лежат на одной прямой. Возьмем на плоскости Σ' произвольную точку $M' \in \Sigma'$ и пусть $N' = (A'M') \cap (B'C')$. Так как простое отношение точек сохраняется при параллельном проектировании, то точки N' и M' будут проектироваться в такие точки $N_0, M_0 \in \Sigma$, для которых:

$$(B_0C_0, N_0) = (B'C', N'); \qquad (A_0N_0, M_0) = (A'N', M').$$

Пусть треугольник $\Delta ABC \subset \Sigma$ является изображением треугольника $\Delta A'B'C' \subset \Sigma'$, а, значит $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$. Подобие P, переводящее ΔABC в $\Delta A'B'C'$, переводит и точки N_0, M_0 в такие точки $N.M$, что:

$$(BC, N) = (B_0C_0, N_0); \qquad (AN.M) = (A_0N_0, M_0).$$

Таким образом:

$$(BC, N) = (B'C', N'); \tag{VI.1}$$

$$(AN, M) = (A'N', M'). \tag{VI.2}$$

В равенствах (VI.1), (VI.2) правые части определяются по оригиналам в плоскости Σ', поэтому известны. С помощью этих равенств строим сначала точку Nß(BC), а затем — точку $M \in (AN)$. Точка M и является искомым изображением произвольной точки M' оригинала. $\rangle\rangle$

VI.1.2 Изображение четырехугольников

Пусть теперь на плоскости Σ' дан четырехугольник $A'B'C'D'$. Из теоремы (TVI.1) следует, что не всякий четырехугольник плоскости Σ может являться его изображением. Для построения изображения четырехугольника можно поступить следующим образом. Проведем в четырехугольнике $A'B'C'D'$ диагонали $A'C'$ и $B'D'$ и найдем точку их пересечения, E'. Найдем простые отношения:

$$(A'C', E') = \mu; \qquad (B'D', E') = \nu.$$

Построим на плоскости Σ произвольный треугольник ABD, который является изображением треугольника $A'B'D'$. На стороне (BD) отложим точку E, такую что (см. (Рис.VI.41)):

$$(BD, E) = (B'D', E') = \mu.$$

Проведем прямую (AE) и отложим на ней точку C, такую что:

$$(AC, E) = (A'C', E') = \mu.$$

Точка C и будет четвертой вершиной искомого изображения четырехугольника $A'B'C'D'$.

Перечислим основные особенности изображения ряда четырехугольников.

Изображение трапеции

Поскольку при параллельной проекции параллельные прямые переходят в

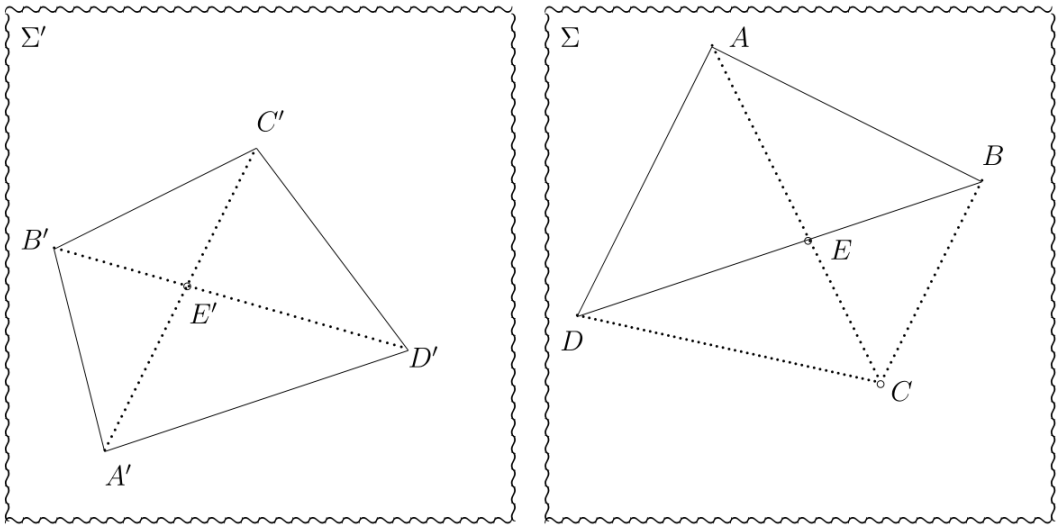


Рис.VI.41. *К построению изображения четырехугольника*

параллельные и сохраняется простое отношение трех точек, то изображением трапеции будет трапеция с таким же простым отношением для точек пересечения диагоналей.

Изображение параллелограмма

Диагонали параллелограмма точкой пересечения делятся пополам, кроме того противоположные стороны параллелограмма параллельны. Поэтому изображением параллелограмма может служить любой параллелограмм. Изображением прямоугольника и квадрата также может служить любой параллелограмм.

Изображение многоугольников

Для изображения многоугольника достаточно построить изображение любых его трех вершин, не лежащих на одной прямой. Таким изображением служат вершины любого треугольника. Остальные вершины изображения получаются построением с учетом сохранения простого отношения трех точек.

VI.1.3 Изображение окружности

Пусть на плоскости Σ' дана окружность Q' с центром O'. Спроектируем ее по направлению $\vec{t}$ на плоскость Σ. При движении точки оригинала M' вдоль окружности Q' проектирующая прямая $(M'M) = d(\vec{t}; M')$ описывает эллиптический цилиндр, который пересекается с плоскостью изображения Σ по некоторому эллипсу Q (см. (**??**)). Таким образом, параллельной проекцией

окружности является эллипс. Вследствие сохранения простого отношения точек центр окружности O' перейдет в центр эллипса O.

Возьмем два взаимно перпендикулярных диаметра $[A'B']$ и $[C'D']$ окружности Q' и проведем любые хорды окружности, параллельные диаметру $[C'D']$. Середины этих хорд лежат на диаметре $[A'B']$. В параллельной проекции диаметры $[A'B']$ и $[C'D']$ спроектируются в диаметры $[AB]$ и $[CD]$ эллипса Q, а хорды окружности, параллельные диаметру $[C'D']$, спроектируются в хорды эллипса, параллельные диаметру $[CD]$. Вследствие свойств параллельных хорд эллипса (см. [7]) середины этих хорд будут лежать на диаметре $[AB]$. Следовательно, $[AB]$ и $[CD]$ — сопряженные диаметры эллипса.

Взаимно перпендикулярные диаметры окружности при параллельном проектировании проектируются в сопряженные диаметры эллипса.

Касательная t' к окружности Q' в точке A' параллельна диаметру $[C'D']$. Прямая t' спроектируется в прямую t, проходящую через точку A эллипса Q и параллельную его диаметру $[CD]$. Следовательно, t — касательная к эллипсу Q в точке A.

Так как подобие плоскости Σ переводит эллипс в эллипс и сохраняет отношение трех точек, то изображением окружности является эллипс, причем перпендикулярные диаметры окружности изображаются сопряженными диаметрами этого эллипса.

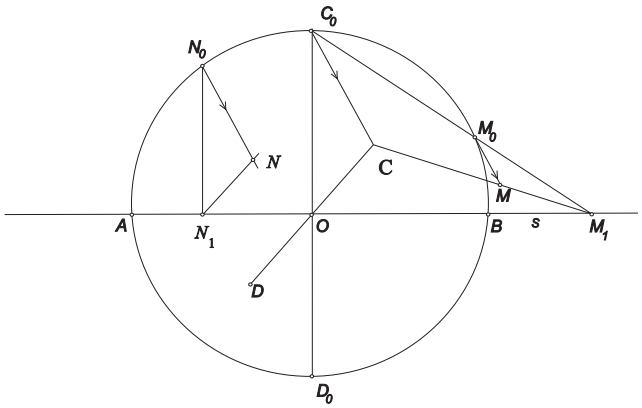


Рис.VI.42.

Укажем способы построения этого эллипса. Пусть заданы отрезки $[AB]$ и $[CD]$, лежащие на сопряженных диаметрах эллипса Q (в частности на его осях), причем $A, B, C, D \in Q$. Так как касательная t к эллипсу Q в точке A параллельна диаметру (CD), то ее можно построить. Задача построения эллипса Q сводится теперь к построению точек овальной кривой второго порядка, заданной четырьмя ее точками и касательной в одной из них.

Эллипс Q можно построить и другим способом. На отрезке $[AB]$ как на диаметре построим окружность Q_0 и ее диаметр $[C_0D_0] \perp [AB]$. В родственном преобразовании f (косом сжатии), заданном осью $s = (AB)$ и парой точек C_0 и $C = f(C_0)$, эллипс Q является образом окружности Q_0. Построение точки $M = f(M_0)$ эллипса Q указано на (Рис.VI.42).

Если воспользоваться сохранением параллельности в родственном преобразовании, то построение точки эллипса можно выполнить следующим образом. Возьмем точку $N_0 \in Q_0$ и проведем прямую $(N_0N_1)||(OC_0)$, где $N_1 = (N_0N_1) \cap s$, $O = [AB] \cap [CD]$. Тогда точка $N = f(N_0)$ лежит на прямой $(N_1N)||f((OC_0)) = (OC)$. Проведя прямую $(N_0N)||(C_0C)$, найдем: $N = (N_1N) \cap (N_0N)$ (Рис.VI.42).

Для каждой построенной нами точки эллипса Q симметричная ей точка относительно центра O эллипса Q также принадлежит эллипсу Q.

Используя указанное родство,
нетрудно построить точки пересечения данной прямой с эллипсом Q, еще одну пару его сопряженных диаметров, его оси и т.п., не вычерчивая самого эллипса.

Различают два вида параллельного проектирования:
a) *косоугольное*, когда направление проектирования не перпендикулярно плоскости Σ;
b) *ортогональное*, когда направление проектирования перпендикулярно плоскости Σ.

Пусть плоскость Σ' проектируется ортогонально на плоскость Σ. Окружность $Q' \subset \Sigma'$ спроектируется в эллипс $Q \subset \Sigma$ (Рис.VI.43). Если диаметр $[A'B']||s = \Sigma' \cap \Sigma$, то он спроектируется в отрезок $[AB]$, конгруэнтный отрезку $[A'B']$, причем $(AB)||s$. Возьмем диаметр $(C'D')$ окружности Q', перпендикулярный $(A'B')$. Тогда $(C'D') \perp s$, и по теореме о трех перпендикулярах ($(C'D')$ - наклонная, (CD) -ее проекция) получим:

$$(CD) \perp s \Longrightarrow (CD) \perp (AB), \tag{VI.3}$$

$(A'B') \perp (C'D') \Longrightarrow (AB)$ и (CD) — сопряженные диаметры эллипса Q. Учитывая (VI.3) заключаем, что $[AB]$ и $[CD]$ — оси эллипса Q, причем $[AB]$ — большая , а $[CD]$ — малая ось.

Пусть прямая $(K'L') \perp \Sigma'$ и (KL) ее проекция на плоскость Σ. Тогда и $(KL) \perp s$ (теорема о трех перпендикулярах) и, значит, $(KL)||(CD)$.

Итак, если прямая $(K'L') \perp \Sigma'$, то проекцией этой прямой на плоскость Σ будет прямая (KL), параллельная малой оси эллипса Q. Указанное соотношение сохраняется и при подобном преобразовании плоскости Σ.

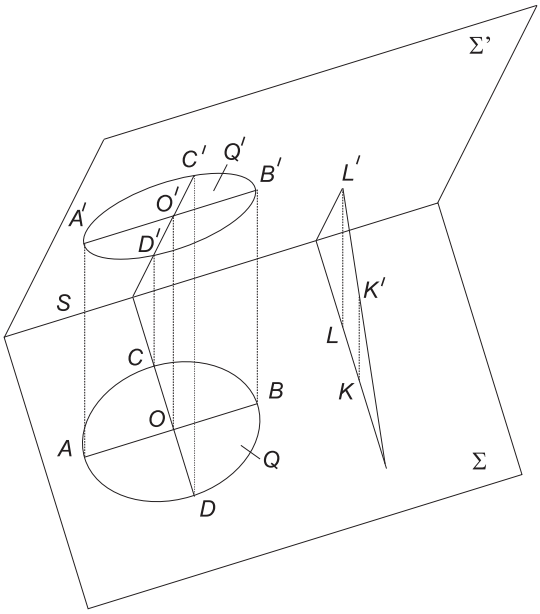


Рис.VI.43. *Проекция окружности*

Этот факт надо учитывать при построении изображений в ортогональной проекции. Пусть требуется изобразить окружность, лежащую в плоскости Σ', и прямую, проходящую через центр окружности перпендикулярно плоскости Σ'. Изображение (Рис.VI.44) a) верное (изображение перпендикуляра имеет направление малой оси эллипса, изображающего окружность), а изображение (Рис.VI.44) b) неверное.

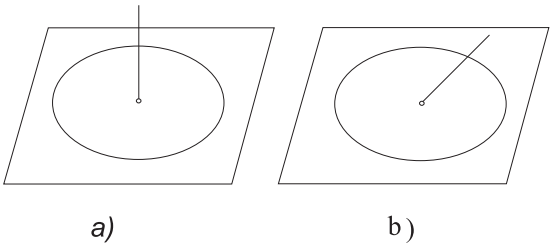


Рис.VI.44.

С построением изображения окружности связана задача построение изображения правильных многоугольников. На (Рис.VI.45) построено изображение правильного шестиугольника $\overline{A}$ $\overline{B}$ $\overline{C}$ $\overline{D}$ $\overline{E}$ $\overline{F}$ с центром в точке $\overline{O}$.

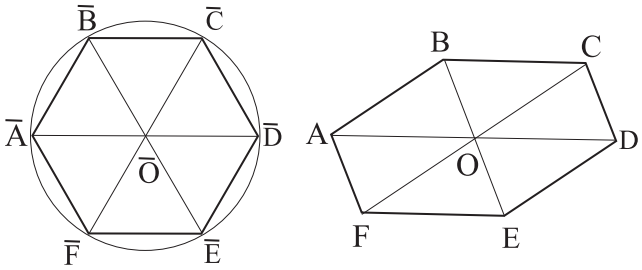


Рис.VI.45. *Построение изображения правильного шестиугольника*

Три какие - либо точки (удобнее взять A, B, O, выбираются произвольно. Затем строим точку D как точку, симметричную A относительно точки O, т.е., $\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{OD}$.

Затем через B проводим прямую, параллельную (AO), а из D — прямую, параллельную (BO). Пересечение этих прямых дает точку C. Точки E и F строим как симметричные точкам C и B относительно точки O.

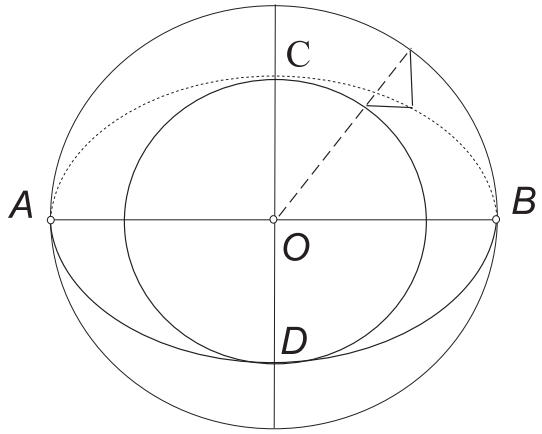


Рис.VI.46. *К изображению окружности*

VI.2 Изображение пространственных фигур в параллельной проекции

VI.2.1 Изображение призмы

Как, отмечено выше, если прямые a' и b' параллельны, то их параллельные проекции a и b на плоскость изображений Σ будут тоже параллельны: $a'||b' \Longrightarrow a||b$. Отсюда следует, что изображение призмы на плоскости Σ представляет собой фигуру, состоящую из нескольких параллелограммов (столько, сколько боковых граней имеет призма) и двух конгруэнтных многоугольников (один получается из другого параллельным переносом), изображающих основание призмы (Рис.VI.47). Основания призмы изображаются на чертеже всегда с учетом сказанного выше о проекциях плоских многоугольников. В частности, параллелепипед (в том числе прямой, прямоугольный и куб) изобразится на чертеже в виде фигуры, состоящей из шести попарно конгруэнтных параллелограммов.

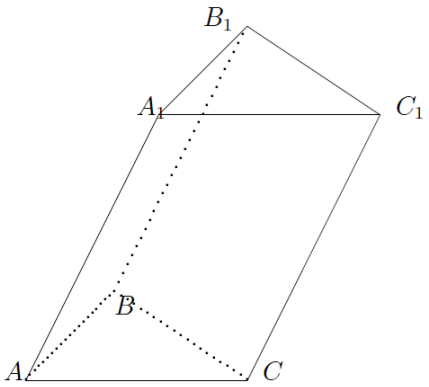


Рис.VI.47. *Изображение призмы*

VI.2.2 Изображение пирамиды

Ее изображением будет фигура, состоящая из многоугольника, изображающего основание пирамиды - оригинала, и нескольких треугольников с общей вершиной, изображающих боковые грани пирамиды (Рис.VI.48). Ясно, что изображение основания строится на чертеже с учетом сказанного о проекциях плоских многоугольников.

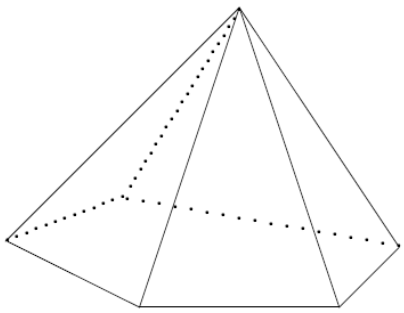


Рис.VI.48. *Изображение пирамиды*

VI.2.3 Изображение цилиндра

Пусть F' — цилиндр-оригинал (Рис.VI.49). Ясно, что существуют две плоскости, касательные к цилиндру F' и параллельные направлению проектирования (напомним, что плоскость, касательная к цилиндрической поверхности, одна и та же во всех точках одной образующей; говорят, что плоскость касается поверхности вдоль этой образующей). Обозначим эти плоскости через Π' и Ω'. Они касаются цилиндра вдоль образующих $(A'A'_1)$ и $(B'B'_1)$ соответственно (это так называемые *контурные* образующие).

Пусть Q' — окружность верхнего основания цилиндра и t' — касательная к этой окружности в точке A'. Прямая $(AA_1) = \Pi' \cap \Sigma$ является проекцией образующей $(A'A'_1)$ цилиндра. Точно так же получим проекцию (BB_1) образующей $(B'B'_1)$. Окружность Q' изобразится эллипсом Q (Рис.VI.50).

Как известно, касательная t' к окружности Q' в точке A' спроектируется в касательную к эллипсу Q в точке A. Но так как $t' \subset \Pi'$, то проекцией прямой t' служит та же прямая (AA_1). Следовательно, эллипс Q касается прямой (AA_1) в точке A. Точно также эллипс Q касается прямой (BB_1) в точке B. Аналогично приходим к выводу, что эллипс Q_1, изображающий на плоскости Σ окружность Q'_1 нижнего основания цилиндра F', касается прямой (AA_1) в точке A_1 и прямой (BB_1) в точке B_1. Изображение цилиндра F' дано (Рис.VI.51).

Так как высота цилиндра F' — отрезок $[O'O'_1]$ — лежит на прямой параллельной плоскости Σ, то она спроектируется в конгруэнтный отрезок $[OO_1]$. Диаметр $[A'B']$ основания цилиндра перпендикулярен плоскости Π' и, значит, параллелен плоскости Σ (ибо $\Pi' \perp \Sigma$) и поэтому спроектируется в конгруэнтный ему диаметр $[AB]$ эллипса. Имеем:

$$(A'B') \perp \Pi' \Longrightarrow (A'B') \perp (AA_1) = \Pi' \cap \Sigma,$$

и так как $(A'B')||(AB)$, то

$$(AB) \perp (AA_1). \tag{VI.4}$$

Но направление касательной (AA_1) к эллипсу Q сопряжено направлению диаметра (AB), и в силу (VI.4) заключаем, что (AB) — ось эллипса Q.

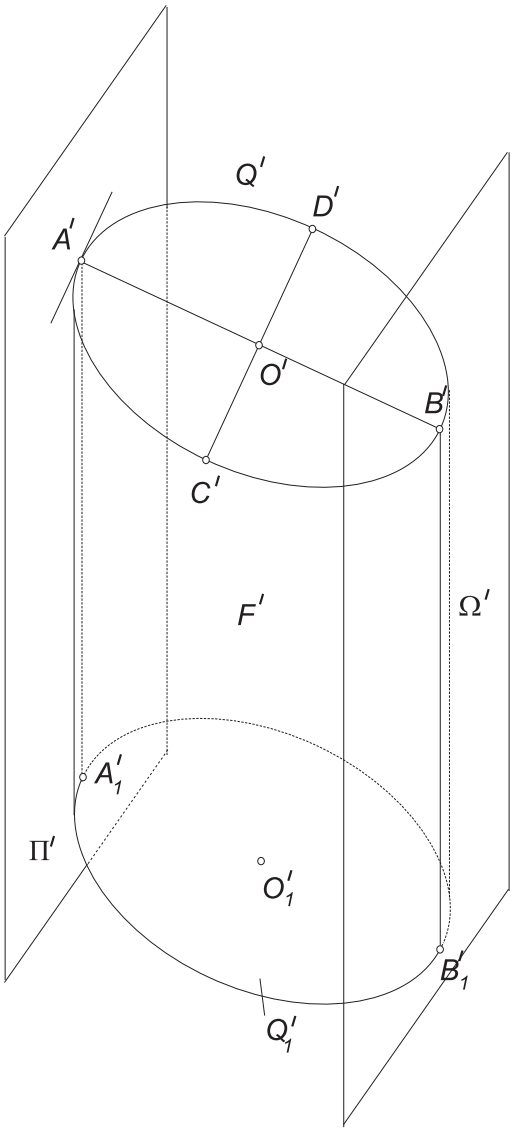


Рис.VI.49. *Цилиндр - оригинал*

Замечание. Возьмем диаметр $(C'D')$ окружности Q', перпендикулярный $(A'B')$ (Рис.VI.49). Очевидно, что $(C'D') \perp (Q'Q'_1)$, а так как $(A'B')$ и $(Q'Q'_1)$ параллельны плоскости Σ, то диаметр $(C'D') \perp \Sigma$. Его проекция (CD) на плоскость Σ является другой осью эллипса Q. Прямые, проектирующие точки отрезка $[C'D']$, лежат в плоскости, проходящей через прямые $(C'D')$ и $(O'O'_1)$. Эта плоскость перпендикулярна плоскости Σ. Пусть φ — угол, который образует каждая из проектирующих прямых с плоскостью Σ (Рис.VI.51). Тогда

$$\frac{CD}{C'D'} = \operatorname{ctg}\varphi. \tag{VI.5}$$

Но $C'D' = A'B' = AB$, и формула (VI.5) примет вид:

$$\frac{CD}{AB} = \operatorname{ctg}\varphi. \tag{VI.6}$$

Мы всегда можем выбрать угол φ (т.е. направление внешнего проектирования) так, чтобы иметь $CD < AB$, и тогда на чертеже отрезок $[AB]$ будет большой осью эллипса Q, а $[CD]$ — его малой осью.

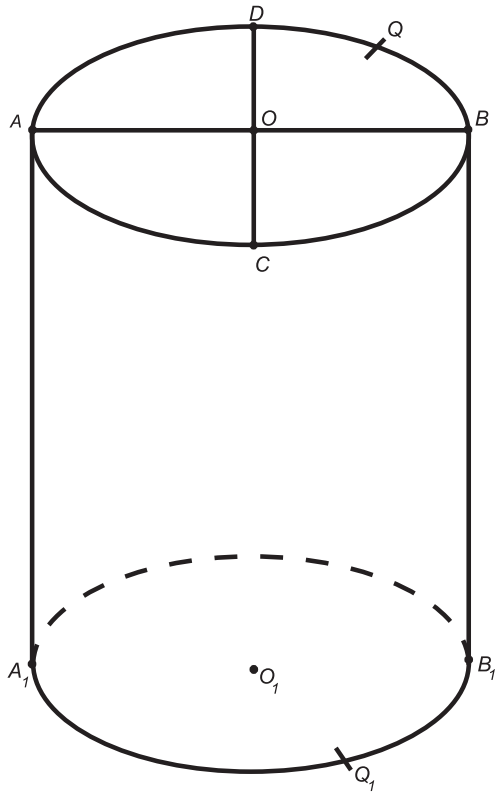


Рис.VI.50. *К построению изображения цилиндра*

VI.2.4 Изображение конуса

Как уже говорилось выше, конус (прямой, круговой) F' располагают в пространстве так, чтобы его ось была вертикальна (как и плоскость изображений Σ) и, следовательно, параллельна плоскости Σ. Направление проектирования берется параллельным плоскости Λ, проходящей через высоту конуса и перпендикулярной плоскости Σ. Но проектирование — не ортогональное.

Очевидно, существуют две плоскости Π', Ω', касательные к боковой поверхности конуса F' и параллельные направлению проектирования (Π' касается конической поверхности вдоль прямолинейной образующей $(S'M')$, а Ω' — вдоль образующей $(S'N')$; это контурные образующие конуса F') (Рис.VI.52).

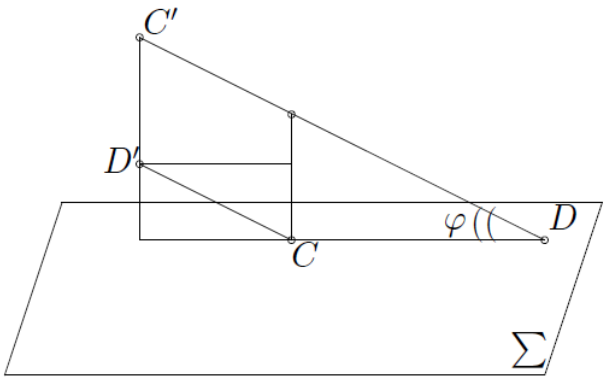


Рис.VI.51.

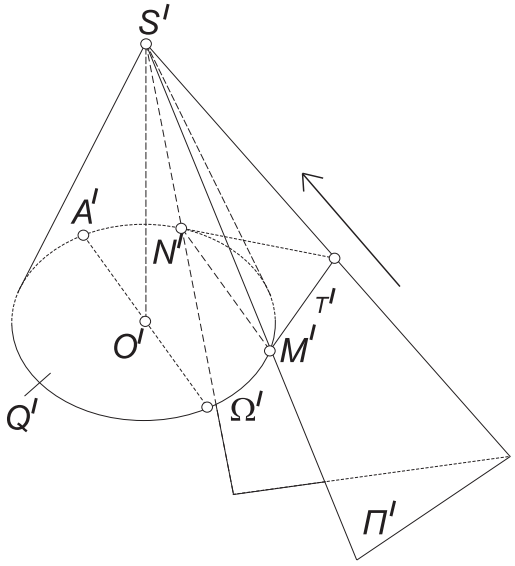


Рис.VI.52.

Пусть Q' — окружность основания конуса F', t' — касательная к этой окружности в точке M' и, значит $t' \subset \Pi'$. Прямая $(SM) = \Pi' \cap \Sigma$ — проекция прямой $(S'M')$ на плоскость Σ; $(SN) = \Omega' \cap \Sigma$ — проекция прямой $(S'N')$. Окружность Q' спроектируется в эллипс Q (Рис.VI.53). Прямая $t' \subset \Pi'$ спроектируются в прямую (SM). Но, как мы знаем, касательная к окружности Q' проектируется в касательную к эллипсу Q. Следовательно, прямая (SM) (проекция контурной образующей $(S'M')$) касается эллипса Q в точке M. Аналогично, прямая (SN) касается этого эллипса в точке N. Изображение конуса F' дано (Рис.VI.53). И здесь высота конуса $[S'O']$ проектируется в конгруэнтный отрезок $[SQ]$. Диаметр $[A'B']$ окружности Q' перпендикулярный к плоскости Λ, также проектируется в конгруэнтный ему (горизонтальный) диаметр $[AB]$ эллипса. Заметим,что хорда $[MN]$ эллипса не проходит через его центр O, так как касательные к эллипсу Q в точках M и N не параллельны, а пересекаются в точке S, которая является проекцией вершины S' конуса F'.

Для изображения основания конуса остается справедливой формула (VI.6). Мы будем выбирать угол φ так, чтобы отрезок $[AB]$ был большой осью эллипса Q.

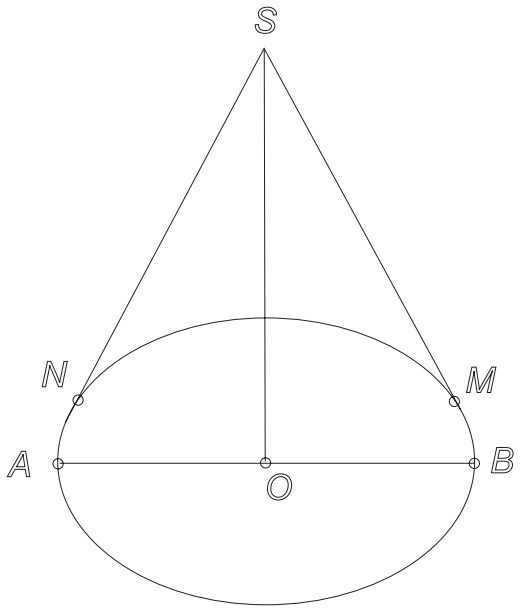


Рис.VI.53.

Следовательно, на изображении конуса большая ось $[AB]$ эллипса Q перпендикулярна отрезку $[SO]$, изображающему высоту $[S'Q']$ конуса.

Замечание. Мы получили изображения цилиндра и конуса в специально выбранной не ортогональной проекции. Такие же изображения цилиндра и конуса мы можем получить и при ортогональном проектировании, чтобы его ось образовывала с плоскость Σ некоторый острый угол. При этом высота цилиндра (конуса) уже не будет конгруэнтна ее проекции.

VI.2.5 Изображение шара

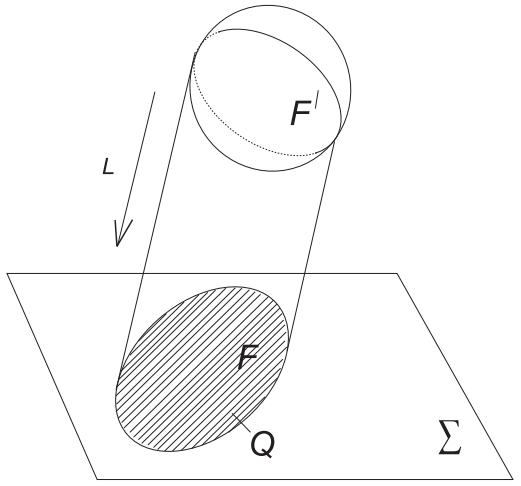


Рис.VI.54.

Пусть F' — шар, и мы проектируем его по некоторому направлению l на плоскость Σ (как и выше, направление проектирования не должно быть параллельным плоскости Σ). Прямые, касательные к шару и имеющие направление проектирования, образуют цилиндрическую поверхность вращения. Если проекция косоугольная, то плоскость Σ пересечет указанную цилиндрическую поверхность по эллипсу Q, отличному от окружности (Рис.VI.54) . Эллипс Q является границей проекции F шара F' на плоскость Σ и называется *очертанием* шара не является наглядным.

Если же проекция ортогональная (и только в том случае), очертанием шара служит окружность (радиус которой равен радиусу шара), а шар F'

изображается на плоскости Σ в виде круга F. Такое изображение шара является верным и наглядным и сохраняет свою форму при подобном преобразовании плоскости Σ.

Чтобы изображение шара сделать более наглядным, рисуют обычно, кроме его очертания, еще какую-либо окружность большого круга (*экватор*), а также точки пересечения диаметра шара, перпендикулярного плоскости экватора, с поверхностью шара (полюсы, соответствующие экватору). При этом плоскость экватора берут не перпендикулярной плоскости Σ, в противном случае окружность большого круга изобразится отрезком (а *полюсы* окажутся на очертании шара) и изображение шара не станет нагляднее.

Заметим, что если плоскость Σ перемещать в направлении проектирования то проекция F шара не будет меняться. Поэтому можно считать, что плоскость Σ проходит через центр шара. Тогда $F = F' \cap \Sigma$.

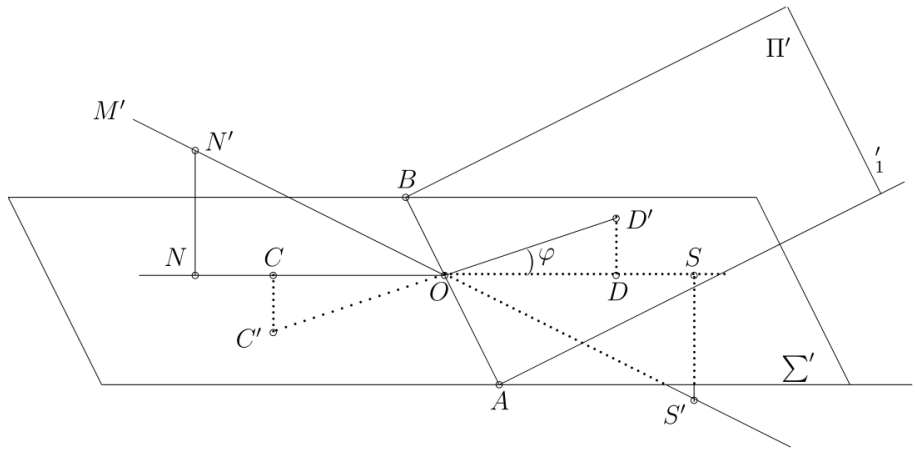


Рис.VI.55.

Возьмем плоскость $\Pi' \neq \Sigma$ большого круга Q_1' шара F', не перпендикулярную плоскости изображений Σ. Пусть $[AB]$ — диаметр шара, лежащий на линии пересечения плоскостей Π' и Σ, $[C'D']$ — диаметр круга Q_1', перпендикулярный $[AB]$, и $[CD]$ — его проекция на плоскость Σ (Рис.VI.55). По теореме о трех перпендикулярах $[CD] \perp [AB]$. Окружность большого круга Q_1' изобразится на плоскости Σ эллипсом Q_1 с большой осью $[AB]$ и малой осью $[CD]$. Длина отрезка $[CD]$ зависит от величины угла φ между плоскостями Π' и Σ:

$$OC = R \cdot \cos\varphi, \tag{VI.7}$$

где R — радиус, O — центр шара F' (угол φ можно считать острым).

Если величина угла φ не задана, то длину отрезка $[CD]$ можно задать произвольно при условии: $CD < AB$.

Пусть (AT) — касательная в точке A к окружности Q очертания шара, (AT_1') — касательная к окружности круга Q_1' в точке A. Тогда $[AT] \perp [OA]$, $[AT_1'] \perp [OA]$, и, значит (AT) — проекция прямой (AT_1') на плоскость Σ. Но проекция (AT) касательной (AT_1') к окружности-оригиналу Q_1' является касательной к эллипсу Q_1 — проекции этого оригинала. Следовательно, окружность Q очертания шара и эллипс Q_1 имеют общую касательную (AT) в точке A (касаются в точке A). Аналогично, убеждаемся, что Q и Q_1 касаются в точке B.

Эллипс Q_1 определен осями $[AB]$ и $[CD]$, и его нетрудно построить как фигуру, родственную окружности Q (Рис.VI.56). Чтобы построить проекции полюсов, соответствующих экватору Q_1', заметим следующее. Пусть $(M'L')$ — диаметр шара F', перпендикулярный плоскости Π', и N', S' — точки его пересечения с поверхностью шара (полюсы) (Рис.VI.55). Прямая $(M'L')$ образует с плоскостью Σ угол $\dfrac{\pi}{2} - \varphi$ (так как $(M'L') \perp \Pi'$). Поэтому радиус $[ON']$ шара проектируется в отрезок $[ON] \perp [AB]$ и

$$ON = R \cdot \sin\varphi. \tag{VI.8}$$

Следовательно, диаметр $[N'S']$ шара изображается отрезком $[NS] \subset (CD)$.

Пусть касательная к эллипсу Q_1 в точке C пересекает окружность Q в точке H (Рис.VI.57). Из прямоугольного треугольника OCH, где $OH = R$, $\widehat{COH} = \varphi_1$, находим:

$$OC = R \cdot \cos\varphi_1, \quad CH = R \cdot \sin\varphi_1. \tag{VI.9}$$

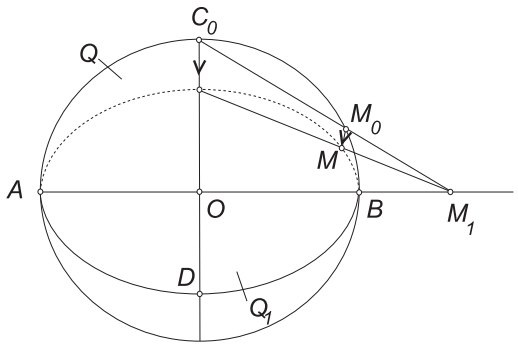


Рис.VI.56.

Сравнивая первую из формул (VI.9) с формулой (VI.7) и учитывая, что углы φ и φ_1 острые, заключаем, что $\varphi_1 = \varphi$. Тогда вторая из формул (VI.9) и формула (VI.8) дают: $ON = CH$. Отложив на луче $[OC)$ от точки O отрезок $[ON] \cong [CH]$, мы получим проекцию N полюса N' большого круга Q_1'. Точка S, симметричная с N относительно точки O, является проекцией второго полюса S' этого круга.

Таким образом, если проекция Q_1 экватора Q_1'задана (т.е задана малая ось $[CD]$ эллипса Q_1), то проекции соответствующих ему полюсов могут быть построены указанным образом.

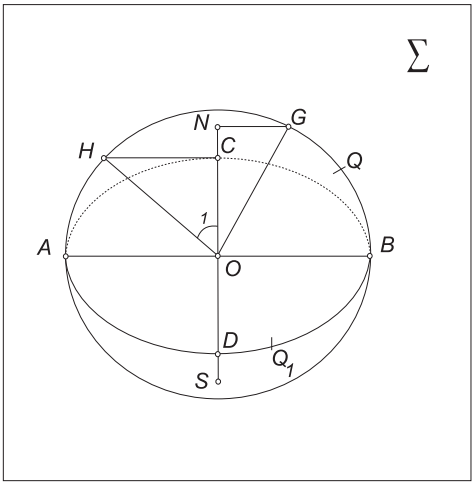


Рис.VI.57.

Проведем через точку N перпендикуляр к (ON), и пусть G — одна из точек пересечения этого перпендикуляра с окружность Q очертания шара (Рис.VI.57). Тогда $\triangle OCH \cong \triangle GNO$ (по катету и гипотенузе) и, значит, $[OC] \cong [NG]$. Поэтому если взять какую-нибудь точку N внутри окружности Q очертания шара и считать ее проекцией одного из полюсов некоторого большого круга Q_1' этого шара, то можно найти эллипс Q_1, который является проекцией окружности круга Q_1', следующим образом:

1) находим отрезок $[NG]|(NG) \perp (ON)$ и $G \in Q$;

2) на луче $[ON)$ откладываем отрезок $[OC] \cong [NG]$ и на продолжении этого луча откладываем отрезок $[OD] \cong [NG]$;

3) проводим диаметр $(AB) \perp (OC)$ окружности Q. Эллипс с осями $[AB]$ и $[CD]$ является искомым.

Глава VII

Методы проектирования

VII.1 Понятие о методе Монжа

Метод Монжа состоит в ортогональном проектировании фигуры на две взаимно-перпендикулярные плоскости с последующим совмещением этих плоскостей. Полученные две проекции фигуры определяют оригинал с точностью до движения. Иногда рассматривается вспомогательная проекция фигуры на третью плоскость, перпендикулярную двум первым.

Рассмотрим основы этого метода.

1. Пусть Π_1 и Π_2 — две взаимно перпендикулярные плоскости; будем называть Π_1 горизонтальной плоскостью, Π_2 — вертикальной плоскостью (Рис.VII.58). Возьмем какую-нибудь точку M и обозначим через M_1 ортогональную проекцию точки M на плоскость Π_1 (*горизонтальная* проекция), а через M_2 — ортогональную проекцию точки M на плоскость Π_2 (*вертикальная* проекция).

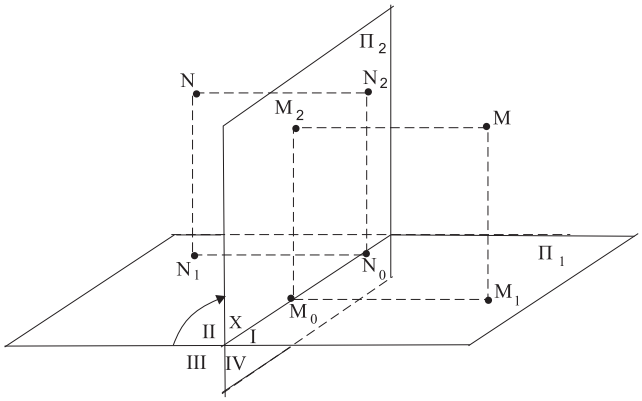


Рис.VII.58.

Назовем *осью проекций* прямую $x = \Pi_1 \cap \Pi_2$. Ясно, что плоскость $(M_1MM_2) \perp x$. Пусть $(M_1MM_2) \cap x = M_0$. Тогда $(M_1M_0) \perp x$, $(M_2M_0) \perp x$. Таким образом, перпендикуляры к прямой x, проведенные через точки M_1 и M_2, пересекаются на прямой x.

Справедливо и обратное: если даны точки $M_1 \in \Pi_1$, $M_2 \in \Pi_2$, такие, что перпендикуляры к оси проекций, проведенные через

эти точки, пересекаются на этой оси, то M_1 и M_2 являются ортогональными проекциями на плоскости Π_1 и Π_2 вполне определенной точки M, которую легко построить (Рис.VII.58).

Заметим, что

$$[MM_1] \cong [M_2M_0], \quad [MM_2] \cong [M_1M_0). \qquad (*)$$

Повернем плоскость Π_1 на прямой угол вокруг прямой x в направлении, указанном (Рис.VII.58). Тогда плоскости Π_1 и Π_2 совпадут. Мы будем предполагать, что плоскость Π_2 является плоскостью чертежа. После совпадения плоскостей Π_1 и Π_2 получим на чертеже (который называется *эпюром*) точки M_1 и M_2, расположенные на одном перпендикуляре к оси проекций x (Рис.VII.59).

$$(*) \Longrightarrow M_1M_0 = \rho(M_1, \Pi_2), \quad M_2M_0 = \rho(M, \Pi_1).$$

Точки M_1 и M_2 могут оказаться на эпюре по разные стороны от прямой x или по одну сторону от нее в зависимости от того, в каком из четырех углов $I - IV$, определяемых плоскостями Π_1 и Π_2, находится точка M. Например, проекции N_1, N_2 точки N (Рис.VII.58) будут располагаться на эпюре выше оси проекций. $L_1 = L_2 \leftrightarrow$ когда L лежит в биссекторной плоскости II и IV углов.

3. Возьмем в пространстве плоскость Σ, которая не перпендикулярна ни плоскости Π_1, ни плоскости Π_2, (Рис.VII.61). Ортогональное проектирование плоскости Σ на плоскости Π_1 и Π_2 устанавливает, как мы знаем, перспективно-аффинное отображение $f : \Sigma \longrightarrow \Pi_1$ и $g : \Sigma \longrightarrow \Pi_2$.

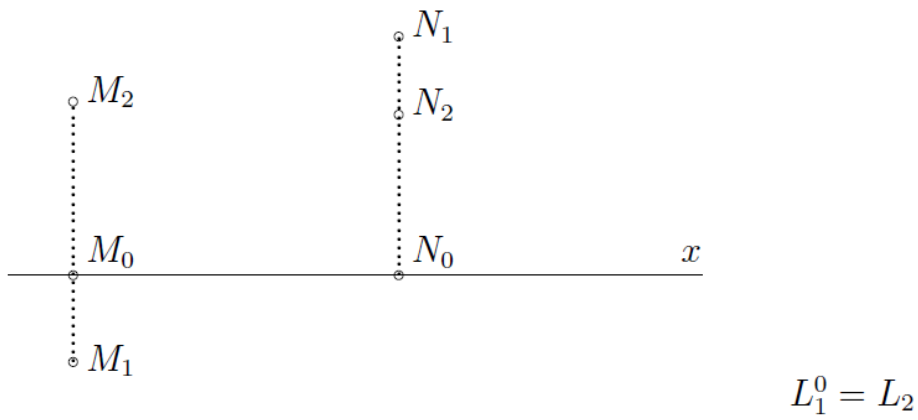


Рис.VII.59.

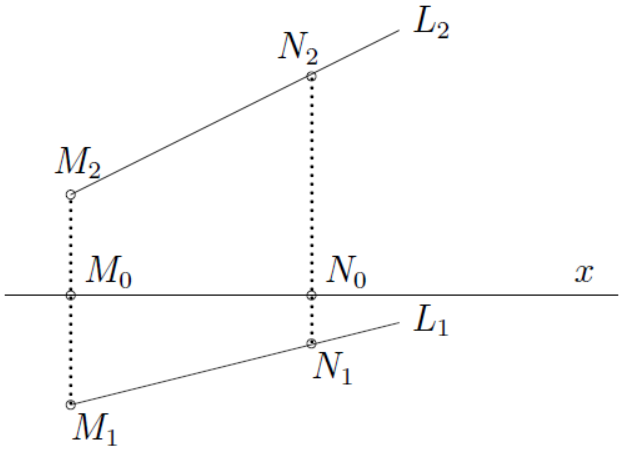


Рис.VII.60.

Заметим, что если прямые $l, m \subset \Sigma$ и $l||f(m)$ то $f(l)||f(m)$ и $g(l)||g(m)$. Так как f и g - частные случаи проективного отображения, то имеем проективное отображение

$$gf^{-1} : \Pi_1 \longrightarrow \Pi_2,$$

причем, очевидно, что $gf^{-1}(M_1) = M_2$ для $\forall M \in \Sigma$. Совместим плоскости Π_1 и Π_2. Тогда получим проективное преобразование плоскости эпюра φ : $\Pi_2 \longrightarrow \Pi_2$ по закону: $\varphi(M_1) = M_2$. Что можно сказать об этом проективном преобразовании?

Пусть Ω - биссекторная плоскость II и IV углов (т.е. той пары вертикальных углов, образованных плоскостями Π_1 и Π_2, которую должна описать плоскость Π_1 при вращении вокруг прямой x до совмещения с плоскостью Π_2) и $a = \Sigma \cap \Omega$. Для любой точки $A \in a$ мы получим на эпюре: $A_1 = A_2$. Следовательно, горизонтальная a_1 и вертикальная a_2 проекции прямой a будут совпадать на эпюре: $a_1 = a_2$ и каждая точка $A_1 = A_2$ прямой $a_1 = a_2$ будет инвариантной точкой проективного преобразования φ плоскости эпюра. Значит, φ - гомология. Но все прямые, каждая из которых соединяет пару соответствующих точек M_1 и $M_2 = \varphi(M_1)$, перпендикулярны оси проекций x и, следовательно, параллельны между собой. Поэтому

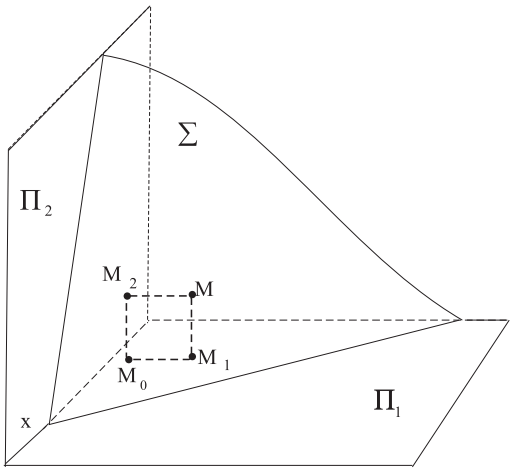


Рис.VII.61.

центр S гомологии φ - несобственная точка, и, значит, φ - родство. Доказана следующая теорема:

Теорема TVII.1. *Каждая плоскость Σ, не перпендикулярная ни одной из плоскостей Π_1 и Π_2, устанавливает на эпюре преобразование родства, которое переводит горизонтальную проекцию M_1 любой точки $M \in \Sigma$ в вертикальную проекцию M_2 этой точки.*

VII.2 Аксонометрия

Введем в пространстве аффинную систему координат $\Re = \{O'; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ и рассмотрим соответствующий репер $\Re = \{O'; \vec{E}_1, \vec{E}_2, \vec{E}_3\}$, где $\overrightarrow{OE_i} = \vec{e}_i$, $i = 1, 2, 3$. Произвольная точка $\overline{M}$ пространства в этом репере имеет координаты x, y, z,которые определяются равенством $\overrightarrow{\overline{OM}} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3$, или

$$\overrightarrow{O'M'} = x\overrightarrow{O'E'_1} + y\overrightarrow{O'E'_2} + z\overrightarrow{O'E'_3}. \qquad \text{(VII.1)}$$

Рассмотрим координатную ломаную $O'M'_xM'_3M'$ точки M'. Здесь M'_3 - проекция точки M' на плоскость $O'xy$ по направлению оси $O'z$, а M'_x - проекция точки M'_3 на ось $O'x$ по направлению оси $O'y$ ((Рис.VII.62)).

Возьмем теперь плоскость Σ изображений, выберем направление проектирования так, чтобы оно не было параллельно координатным плоскостям, и спроектируем на эту плоскость репер $\Re'$ и координатную ломаную точки M'. Подвергнув затем плоскость Σ преобразованию подобия, получим на ней изображения репера $\Re'$ и координатной ломаной точки M' : $R = (O, E_1, E_2, E_3), OM_xM_3M$ (Рис.VII.63). Докажем, что

$$\overrightarrow{OM_x} = x\overrightarrow{OE_1}; \quad \overrightarrow{M_xM_3} = y\overrightarrow{OE_2}; \quad \overrightarrow{M_3M} = z\overrightarrow{OE_3}, \qquad \text{(VII.2)}$$

где x, y, z - координаты точки M' в репере $\Re'$.

В самом деле, по равенству (VII.1) $\overrightarrow{O'M'_x} = x\overrightarrow{O'E'_1}$, поэтому $x = -(M'_xE'_1, O')$. При параллельном проектировании и подобии сохраняется простое отношение трех точек, поэтому $x = -(M'_xE'_1, O') = -(M_xE_1, O)$, т.е. $\overrightarrow{OM_x} = x\overrightarrow{OE_1}$. Аналогично получаем остальные два равенства в отношениях (VII.2).

Из равенства (VII.2) следует важный вывод: *если на плоскости Σ дано изображение $\Re$ репера $\Re'$, то можно построить изображение M любой точки M' по ее координатам в репере $\Re'$.* Для этого на плоскости Σ сначала по

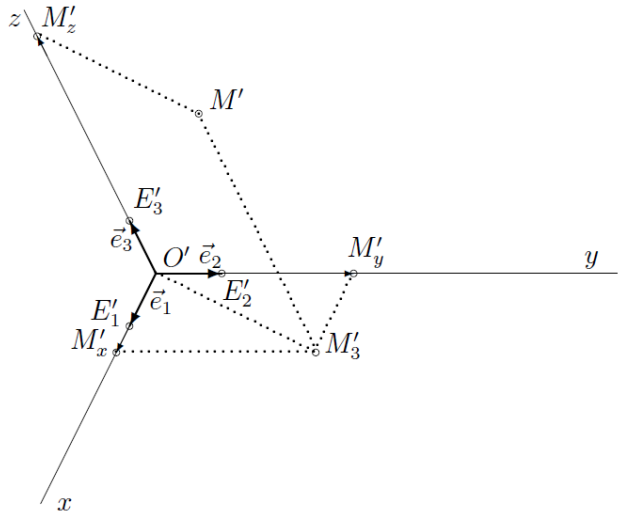


Рис.VII.62.

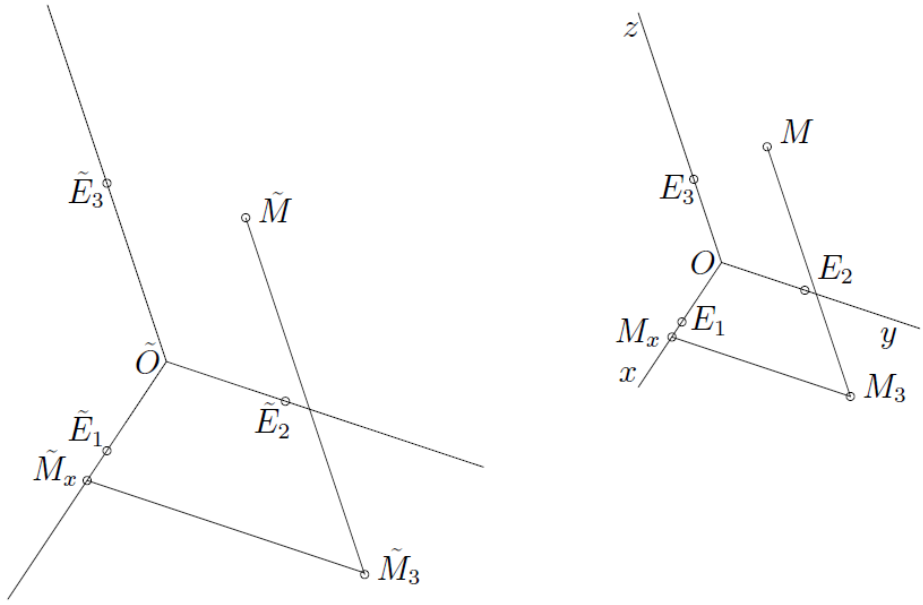


Рис.VII.63.

формулам (VII.2) строим векторы $\overrightarrow{OM_x}$, $\overrightarrow{M_xM_3}$, $\overrightarrow{M_3M}$, а затем строим точку M, используя равенство $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM_x} + \overrightarrow{M_xM_3} + \overrightarrow{M_3M}$.

Умея указанным образом строить изображения точек пространства, мы можем строить и изображения пространственных фигур. Этот метод называется методом *аксонометрического проектирования* (*аксонометрия* - измерение по осям). Точку O называют *началом* аксонометрической системы координат, а оси OE_1, OE_2, OE_3 - аксонометрическими осями. Возникает вопрос: можно ли вершины четырехугольника плоскости Σ, заданные в определенном порядке, рассматривать как изображение данного аффинного ре-

пера $\Re'$ пространства? Ответ на этот вопрос дает теорема *Польке - Шварца*.

Теорема TVII.2. *Всякая упорядоченная четверка точек* $\{A, B, C, D\}$ *общего положения на плоскости* Σ *может служить изображением аффинного репера*

$$\Re' = \{A', B', C', D'\} \in \Sigma',$$

конгруэнтного данному реперу $\Re'_0 = \{A'_0, B'_0, C'_0, D'_0\} \in \Sigma'$.

Во многих задачах оказывается удобным в качестве исходного репера $\Re^*$ выбрать ортонормированный репер. По теореме Польке - Шварца любые четыре точки общего положения O, E_1, E_2, E_3 плоскости Σ, взятые в определенном порядке, можно рассматривать как изображение ортонормированного репера $\Re'$, равному данному реперу $\Re^*$. В этом случае отрезки OE_1, OE_2, OE_3 называются *аксонометрическими единицами*, а их длины e_x, e_y, e_z - *коэффициентами искажения*. Принято различать следующие виды аксонометрических проекций.
а)*Триметрические* проекции - все три коэффициента искажения различны между собой: $e_x \neq e_y$, $e_y \neq e_z$, $e_z \neq e_x$.
б)*Диаметрические* проекции - два коэффициента искажения равны: $e_x \neq e_y = e_z$. В том частном случае, когда $e_y = e_z$, $e_x = \dfrac{1}{2}e_z$, $\angle E_2OE_3 = 90^o$, $\angle E_1OE_2 = \angle E_1OE_3 = 135^o$, проекция называется *кабинетной*.
в) *Изометрические* проекции - все три коэффициента искажения равны. Если к тому же $\angle E_2OE_3 = 90^o$, $\angle E_1OE_2 = \angle E_2OE_3 = 135^o$, то проекция называется *кавальерной* или *военной*.

Пусть $\Re = \{O; E_1, E_2, E_3\}$ - изображение аффинного репера $\Re'$ пространства, а M, M_1, M_2, M_3 - изображения данной точки M' и ее проекций M'_1, M'_2 и M'_3 на координатные плоскости по направлениям соответствующих координатных осей (Рис.VII.64). Точку M называют *аксонометрической проекцией* точки M', а точки M_1, M_2, M_3 *вторичными проекциями* этой точки.

Отметим, что если на плоскости Σ задана точка M и одна из точек M_1, M_2, M_3 (например, M_3) то точка M' в пространстве вполне определяется. В самом деле, по точкам M и M_3 мы сможем восстановить ломаную OM_xM_3M и с ее помощью по формулам (VII.2) найти координаты x, y, z точки M' в репере $\Re'$. Таким образом, точку M' пространства мы можем задать на плоскости Σ с помощью двух точек (M, M_3), которые расположе-

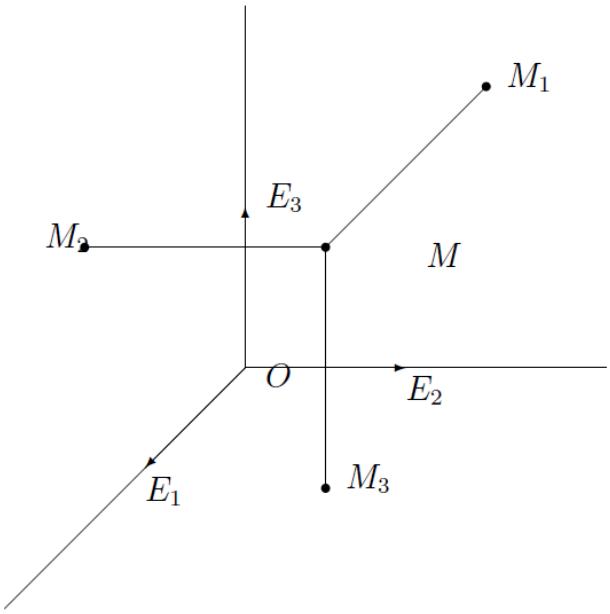


Рис.VII.64. *Аксонометрические проекции точки*

ны так, что прямые MM_3 и Oz параллельны или совпадают (Рис.VII.65). Обратно, любые две точки (M, M_3) плоскости Σ, расположенные так, что прямые MM_3 и Oz параллельны или совпадают, определяют в пространстве некоторую точку M', для которой M - аксонометрическая проекция, а M_3 - вторичная проекция. Точки M и M_3 совпадают тогда и только тогда, когда точка M' лежит в плоскости $O'xy$.

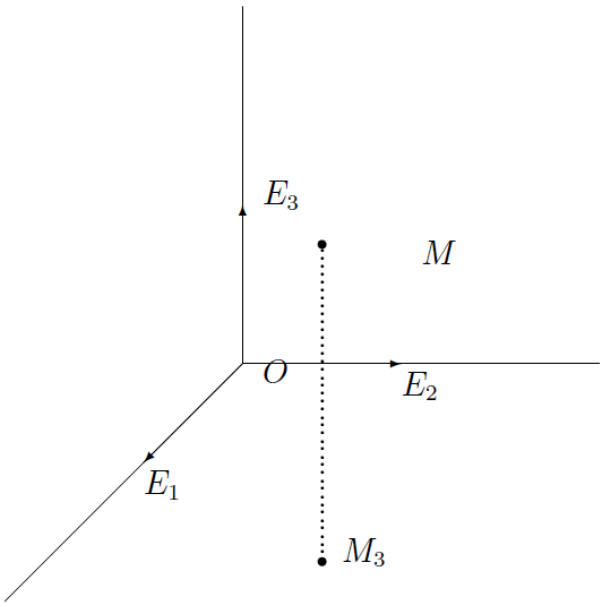


Рис.VII.65. *Аксонометрические проекции точки*

Этот способ и применяется в аксонометрии для задания точек пространства на плоскости изображений. При этом обычно вместо предложения «В пространстве дана точка M', аксонометрическая проекция которой на плоскость Σ есть M, а вторичная проекция - точка M_3» говорят кратко: «Дана точка (M, M_3).»

VII.3 Полные и неполные изображения. Позиционные задачи

Полные и неполные изображения

Пусть на плоскости Σ дано изображение F некоторой фигуры F'.

Определение OVII.1. *Изображение F называется полным, если к нему можно присоединить изображение $\Re$ аффинного репера так, что все точки, прямые и плоскости, определяющие фигуру F', будут заданными на плоскости Σ.*

При этом точка M' считается заданной, если на плоскости Σ даны ее аксонометрическая проекция M и одна из вторичных проекций, например, M_3. Прямая a считается заданной, если заданы две ее точки или даны аксометрическая и одна из ее вторичных проекций. Плоскость Π считается заданной, если заданы элементы, определяющие ее (три точки, не лежащие на одной прямой, две прямые или следы).

Легко видеть, что изображения многих плоских и пространственных фигур, рассмотренных нами ранее (плоские многоугольники, призма, пирамида, цилиндр, конус, шар), являются полными. Можно доказать, что свойство изображения быть полным (или неполным) не зависит от выбора присоединенного аффинного репера.

На (Рис.VII.66) изображен тетраэдр и прямая. Это изображение не является полным, так как если, например, к нему присоединить изображение $\{A, B, C, D\}$ репера, то вершины тетраэдра $A'B'C'D'$ окажутся заданными, а точки M' и N' нет, так как не определены их вторичные проекции.

Определение OVII.2. *Минимальное число точек, которые необходимо добавить к чертежу, чтобы неполное изображение сделать полным, называется коэффициентом неполноты данного изображения.*

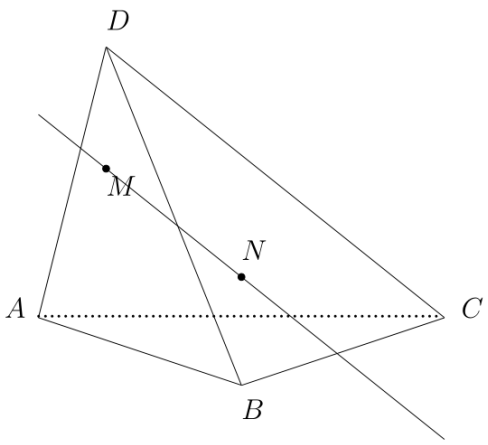


Рис.VII.66. *Неполное изображение*

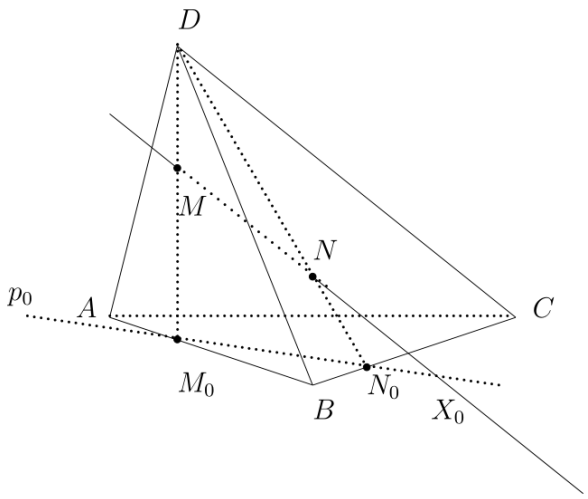


Рис.VII.67. *Полное изображение*

Так, например, в примере (Рис.VII.66) коэффициент неполноты равен двум, так как, для того чтобы изображение сделать полным, можно к (Рис.VII.66) добавить точки M_3 и N_3 — вторичные проекции точек M и N.

Можно доказать, что коэффициент неполноты не зависит от выбора присоединенного изображения аффинного репера.

VII.4 Демонстрация полноты изображения в СКМ Maple

Очень ярко можно продемонстрировать понятие полноты изображения в СКМ Maple. Для этого с помощью пакета `polygonplot3d` библиотеки `plots`

построим нижнюю грань тетраэдра (dno), а затем три его боковые ребра: `a,b,c` с помощью команды `spacecurve` этого же пакета, окрашивая линии в черный цвет (black). Затем построим прямую (OD) – a0, окрашивая ее в темно-синий цвет (navy). Наконец, сделаем текстовые вставки с помощью команды `textplot3d` этой же библиотеки. Наконец, объединим все эти изображения в одно командой `display`, опять-таки, пакета `plots`. В результате получим интерактивное 3-х мерное изображение (Рис.VII.68), поворачивая которое, можно наблюдать реализацию понятия полноты изображения:

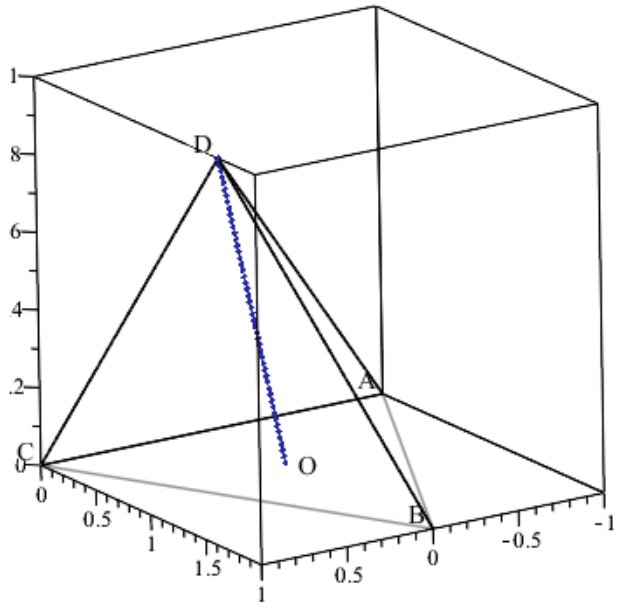


Рис.VII.68. *Иллюстрация полноты изображения в СКМ Maple с помощью процедуры* `display(dno,a0,a,b,c,text,scaling=UNCONSTRAINED);`.

```
>restart:with(plots):

>dno:=
polygonplot3d([[-1,0,0],[0,2,0],[1,0,0]],
style=WIREFRAME,color=black):
a0:=plots[spacecurve]([t,2/3+t,t],t=0..1,
color=navy,style=POINT):
a:=plots[spacecurve]([-1+2*t,5/3*t,t],t=0..1,color=black):
b:=plots[spacecurve]([1,5/3*t,t],t=0..1,color=black):
c:=plots[spacecurve]([t,-1/3*t+2,t],t=0..1,color=black):
text:=textplot3d([[-1,0,0,"A"],
```

```
[0,2,0,"B"],[1,0,0,"C"],[1,5/3,1,"D"],[0,1,0,"O"]],
align={LEFT,ABOVE},color=RED):
```

Далее, аналогично определим команды:

```
line0:=
spacecurve([-1+4*t,2-2*t,1-2*t],
t=0..2/3,color=BLUE,thickness=2):
line:=spacecurve([-1+4*t,2-2*t,1-2*t],
t=0..13/44,color=BLUE,thickness=2):
line1:=spacecurve([-1+4*t,2-2*t,1-2*t],
t=13/44..11/28,color=NAVY,style=POINT,
thickness=1):
line2:=spacecurve([-1+4*t,2-2*t,1-2*t],
t=11/28..2/3,color=BLUE,thickness=2):
text1:=textplot3d([-1,2,1.1,"p"],
align={LEFT,ABOVE},color=BLUE):
```

В результате получим еще один объект демонстрации неполноты изображения Рис.VII.69:

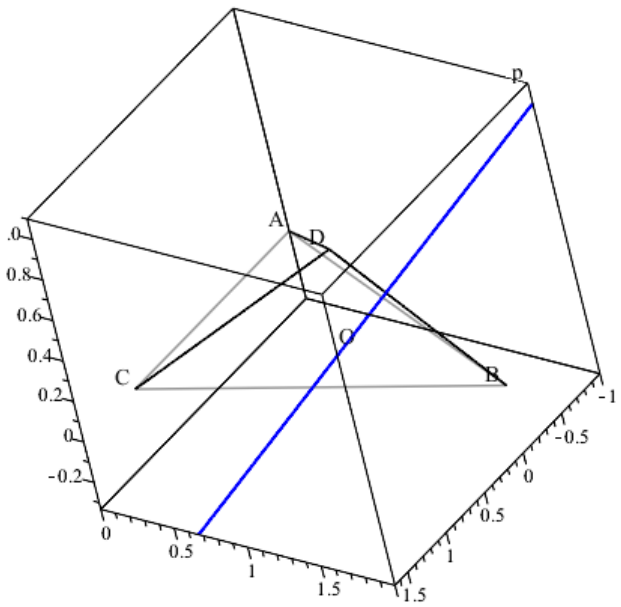


Рис.VII.69. *Иллюстрация полноты изображения в СКМ Maple с помощью процедуры* `display(dno,a,b,c,line0,text,text1, scaling=UNCONSTRAINED);`.

В остальных кодах вдумчивый Читатель разберется самостоятельно:

```
>proek_M:=spacecurve([1-9/11*t,5/3-17/66*t,1-13/22*t],
t=0..22/13,style=POINT,color=BLUE):
proek_N:=spacecurve([1-3/7*t,5/3-19/42*t,1-11/14*t],
t=0..14/11,style=POINT,color=BLUE):
>M1N1:=
spacecurve([-5/13+5*24/11/13*t,48/39+(12/11-48/39)*t,0],
t=-1..2.5,thickness=2,color=RED):
>POINT_M:=plot3d([2/11,31/22,9/22],0..1,0..1,style=POINT,
symbol=CIRCLE,symbolsize=12,color=RED):
>POINT_N:=plot3d([4/7,17/14,3/14],0..1,0..1,style=POINT,
symbol=CIRCLE,symbolsize=12,color=RED):
>POINT_M1:=plot3d([-5/13,48/39,0],0..1,0..1,style=POINT,
symbol=CIRCLE,symbolsize=12,color=RED):
>POINT_N1:=plot3d([5/11,12/11,0],0..1,0..1,style=POINT,
symbol=CIRCLE,symbolsize=12,color=RED):
>POINT_S:=plot3d([1, 1, 0],0..1,0..1,style=POINT,symbol=CIRCLE,
symbolsize=12,color=RED):
>text2:=textplot3d([[-1,2,1.1,"p"],
[2/11,31/22,10/22,"M"],[4/7,17/14,4/14,"N"],
[-5/13,48/39,0.05,"M1"],[5/11,12/11,0.05,"N1"],
[-175/143, 196/143, 0.05,"p1"],
[1,1,0.05,"S"]],
align={LEFT,ABOVE},color=BLUE):

>display(dno,a,b,c,line,line1,line2,text,
text2,POINT_M,POINT_N,POINT_M1,POINT_N1,
POINT_S,proek_M,
proek_N,M1N1,scaling=UNCONSTRAINED);
```

Таким образом, мы добавили «чертеж» деталями для восстановления полноты изображения Рис.VII.70.

.

Позиционные задачи

Пусть F_1' и F_2' — две фигуры пространства, а F_1 и F_2 — их изображения на плоскости Σ, выполненные в одной и той же проекции. Задача построения изображения точек пересечения фигур F_1' и F_2' называется *позиционной задачей*. Такие задачи удобно решать, пользуясь методом аксонометрии. От-

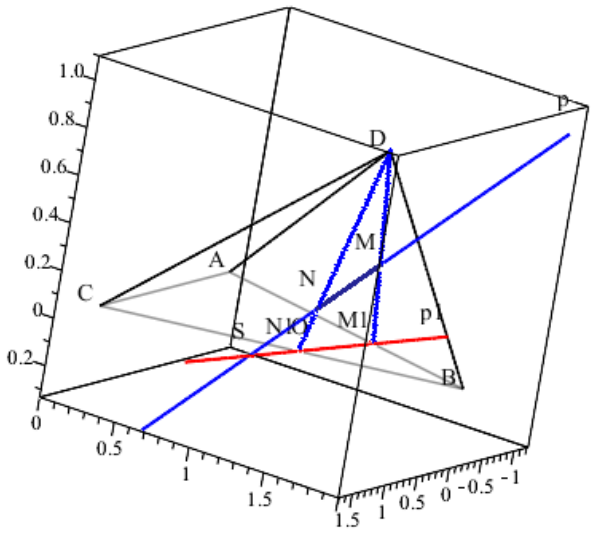


Рис.VII.70. *Построение полного изображения в СКМ Maple.*

метим, что любая позиционная задача на полном изображении имеет вполне определенное решение и не содержит никакого произвола. Если же изображение неполное, то, решая позиционную задачу, некоторые элементы можно задать произвольно.

Рассмотрим пример решения позиционной задачи.

Пример ПVII.1. *Дано изображение пирамиды $ABCD$ и прямой, пересекающей ее грани ABD и BCD в точках M и N ((Рис.VII.67)). Найти след прямой (MN) на плоскости основания ABC.*

Решение

Присоединим к изображению данной пирамиды изображение $\{A, B, C, D\}$ аффинного репера. Тогда все вершины пирамиды и точки M и N будут заданными, поэтому данное изображение является полным.

Прямая (MN) лежит в плоскости DMN, поэтому след X_0 этой прямой лежит на следе p_0 плоскости DMN, т.е., точка X_0 — точка пересечения прямых (MN) и p_0.

Построим след p_0 плоскости DMN. Прямые (DM) и (DN) пересекают плоскость основания пирамиды в точках M_0 и N_0, поэтому прямая p_0 проходит через точки M_0 и N_0, т.е., совпадает с прямой (M_0N_0). Таким образом, $X_0 = (MN) \cap (M_0N_0)$.

VII.5 Метрические задачи

Определение OVII.3. *Аффинный репер* $\Re' = \{O', A'_1, A'_2, A'_3\}$ *называется декартовым, если известны длины базисных векторов* $\vec{e}_i = \overrightarrow{O'A'_i}$, $(i = \overline{1,3})$ *и углы между ними, т.е., известны скалярные произведения:*

$$g_{ik} = (\vec{e}_i \vec{e}_k).$$

В частности, ортонормированный репер является декартовым. Если в пространстве задан декартов репер, то по координатам точек в этом репере можно вычислять расстояние между ними. Пусть координаты точек M' и N' в декартовом репере $\Re'$ есть $M'(x^i)$, $N'(y^i)$. Тогда расстояние $M'N'$ между этими точками равно:

$$M'N' = \sqrt{\sum g_{ik}(y^i - x^i)(y^k - x^k)}. \qquad \text{(VII.3)}$$

Таким образом по координатам точек в декартовом репере мы можем решать любые метрические задачи в пространстве, т.е., находить расстояние между точками, вычислять величины углов, определять расстояние от точки до прямой или плоскости и т.п.

Рассмотрим на плоскости изображений Σ изображение $\Re$ декартова репера $\Re'$. Возникает вопрос, можно ли, зная изображение $\Re$, пользуясь чертежом, по полному изображению F пространственной фигуры F' решать метрические задачи, относящиеся к оригиналу F'?

Оказывается, задание только изображения $\Re$ репера $\Re'$ недостаточно для решения метрических задач. Необходимо задать еще некоторые числа, например, числа g_{ik}, или эквивалентные им величины, которые определяют репер $\Re'$ с точностью до движения в пространстве. В этом случае по аксонометрической и вторичной проекциям любой точки M' фигуры F' можно определить координаты этой точки в репере $\Re'$ и, зная коэффициенты g_{ik}, решить любую метрическую задачу, связанную с фигурой F'. Если F' — пространственная фигура, то достаточно задать шесть параметров, например, чисел g_{ik}, чтобы определить репер $\Re'$ с точностью до движения.

Определение OVII.4. *Изображение* $F \subset \Sigma$ *фигуры* F' *называется евклидово - определенным, если к нему можно присоединить изображение* $\Re$ *репера* $\Re'$ *и задать параметры так, чтобы изображение* F *было пол-*

ным, а заданные параметры определяли репер $\Re$ с точностью до подобия в пространстве.

Если изображение F фигуры F' евклидово определенное, то мы можем с помощью этого изображения решать любые задачи, относящиеся к оригиналу, в которых требуется построить равные углы или отрезки, перпендикулярные прямые и т.д.

Например, если известно, что фигура F, изображенная на (Рис.VII.71), является изображением некоторого куба, то это изображение евклидово определенное. Если же считать, что фигура F является изображением прямоугольного параллелепипеда, то, присоединив к нему репер $\Re = \{A, B, D, A_1\}$, хотя и получим все вершины оригинала заданными (т.е., F — полное изображение фигуры F'), но F не будет евклидово определенным, так как в этом случае о репере $\Re'$ известно лишь то, что углы $\widehat{BAA_1}, \widehat{DAA_1}$ и $\widehat{BAD}$ прямые. Для того, чтобы репер $\Re'$ был задан с точностью до подобия, необходимо еще иметь два параметра: $\lambda_1 = \frac{A'D'}{A'B'}$ и $\lambda_2 = \frac{A'A'_1}{A'B'}$. Таким образом, фигура F является евклидово определенным изображением прямоугольного параллелепипеда, если заданы параметры λ_1 и λ_2.

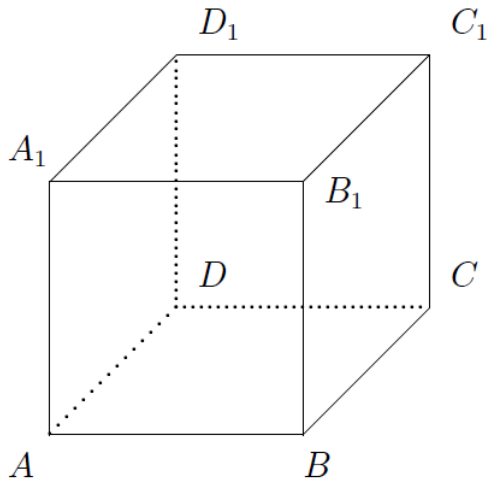


Рис.VII.71.

Если фигура - оригинал F' является плоской, т.е., все ее точки лежат в некоторой плоскости Σ, то репер $\Re' = \{O', A'_1, A'_2, A'_3\}$ можно выбрать так, чтобы вершины $O', A'_1, A'_@$ лежали в плоскости Σ'. Тогда аксонометрическая и вторичная проекции совпадут, поэтому независимо от выбора $\Re$ изображение F будет полным. В этом случае выбор точки A_3 несуществен.

Изображение $F \subset \Sigma$ плоской фигуры $F' \subset \Sigma'$ называется евклидово

определенным, если к нему присоединить изображение $\Re_3$ декартова репера $\Re_3' = \{O', A_1', A_2'\}$ плоскости Σ' и задать параметры так, чтобы они определяли репер $\Re_3'$ с точностью до подобия плоскости Σ'.

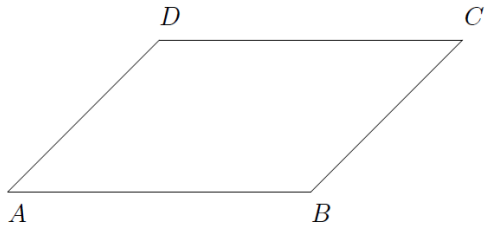


Рис.VII.72.

Например, если известно, что параллелограмм $ABCD$ на (Рис.VII.72) является изображением квадрата $A'B'C'D'$, то это изображение евклидово определенное. Если же считать, что параллелограмм $ABCD$ является изображением прямоугольника $A'B'C'D'$, то для того, чтобы его сделать евклидово определенным, надо задать один параметр: $\lambda = \frac{A'B'}{A'D'}$.[1]

[1]Пример решения метрической задачи см. в следующей части.

Часть III

Задачи проективной геометрии

Глава VIII

Стандартные задачи проективной геометрии

VIII.1 Задачи на проективный репер

VIII.1.1 Построение точки по ее координатам в заданном репере на прямой

Рассмотрим пример построения точки по ее проективным координатам относительно заданного репера на прямой. Пусть на прямой d задан репер $\Re\{A_0, A_1, E\}$ и заданы координаты точки M относительно этого репера $M(x^0, x^1)$. Требуется построить точку M.

Построение проводится по следующей схеме:

0). Построим произвольную прямую d и на ней отложим произвольные различные точки A_0, A_1, E. Тем самым мы осуществим нулевой пункт задачи - зададим прямую и проективный репер.

а). Построим произвольную точку O вне прямой d.

б). На прямой (OE) отложим произвольную точку E' и построим вектор $\vec{e} = \overrightarrow{OM'}$.

в). На прямых (OA_0) и (OA_1) отложим векторы $\vec{a}_0$ и $\vec{a}_1$ так, чтобы: $\vec{e} = \vec{a}_0 + \vec{a}_1$.

г). Построим вектор $\vec{m}$ по его заданным координатам (x^0, x^1) в векторном базисе $\{\vec{a}_0 , \vec{a}_1 \}$.

д). Построим точку $M'|\overrightarrow{OM'} = \vec{m}$ и проведем прямую (OM'). Пересечение этой прямой с прямой d и будет давать искомую точку M: $M = (OM) \cap d$.

Пример ПVIII.1. *Описанную программу реализуем на примере. Пусть на прямой d дан проективный репер $\Re\{A_0, A_1, E\}$, в котором задана своими координатами точка M. На (Рис.VIII.73) приведенная выше программа реализована на примере $M(2, -1)$.*

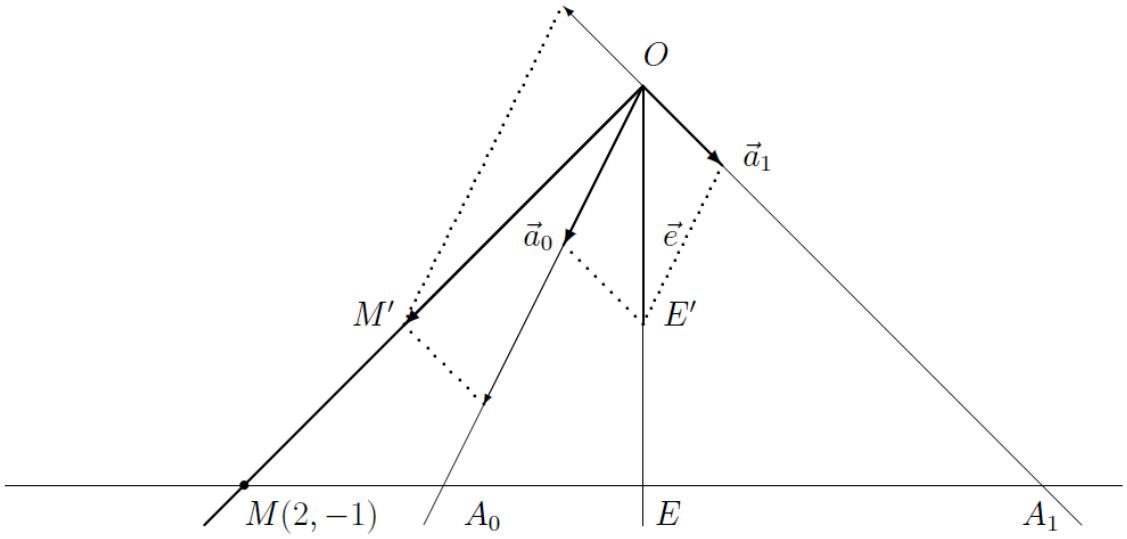


Рис.VIII.73. *Пример построения точки M по ее проективным координатам (2,-1) относительно проективного репера прямой*

Пример ПVIII.2. *На расширенной прямой $\overline{d}$ дан репер $\Re\{A_0, A_1, E_\infty\}$. Найти координаты середины отрезка $[A_0A_1]$ в этом репере.*

Решение

Построим произвольную прямую $\overline{d}$ и на ней две различные точки A_0 и A_1 (см. (Рис.VIII.74)). Вне прямой возьмем произвольную точку O и построим прямую, проходящую через эту точку параллельно прямой $\overline{d}$. Эта прямая является образом несобственной единичной точки E_∞. Для построения согласованного базиса отложим из точки O векторы $\vec{a}_0 = -\overrightarrow{OA_0}$ и $\vec{a}_1 = \overrightarrow{OA_1}$. Тогда по правилу треугольника:

$$\vec{a}_0 + \vec{a}_1 = -\overrightarrow{OA_0} + \overrightarrow{OA_1} =$$
$$= \overrightarrow{A_0O} + \overrightarrow{OA_1} = \overrightarrow{A_0A_1} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \vec{a}_0 + \vec{a}_1 = \vec{e}.$$

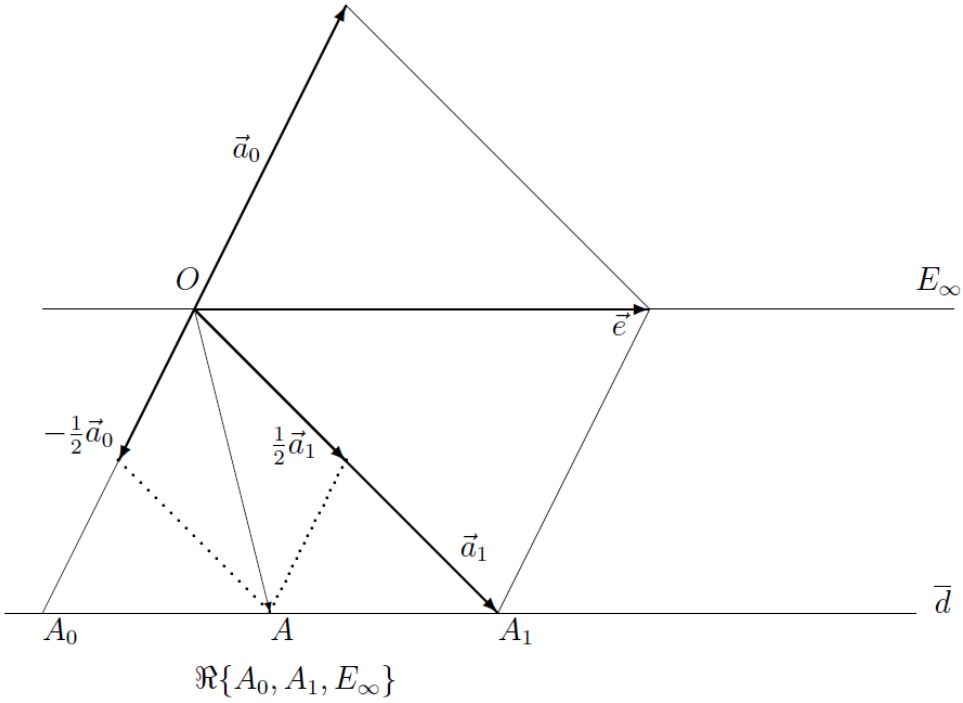


Рис.VIII.74. *К нахождению координат середины отрезка*

Пусть A - середина отрезка $[A_0A_1]$. Прямые, проходящие через A параллельно базисным векторам делят пополам стороны OA_0 и OA_1 треугольника OA_0A_1, так как являются его средними линиями. Следовательно,

$$\overrightarrow{OA} = -\frac{1}{2}\vec{a}_0 + \frac{1}{2}\vec{a}_1 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow A\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \qquad \Longrightarrow A(-1, 1).$$

VIII.1.2 Построение точки по ее координатам в заданном репере на плоскости

Для построения точки M по ее координатам (x^0, x^1, x^2) в заданном проективном репере $\Re = \{A_0, A_1, A_2, E\}$ поступаем по следующей схеме (см. (Рис.VIII.75)):

0). Нулевым пунктом программы строим произвольный треугольник $\Delta A_0A_1A_2$ и отмечаем произвольную точку E, не принадлежащую ни одной стороне треугольника. Тем самым мы задали проективный репер на плоскости $\Re = \{A_0, A_1, A_2, E\}$.

а). Строим проекции единичной точки $E : E_i$, проводя прямые через соответствующие вершины реперного треугольника и точку E до пересечения их с противоположными сторонами реперного треугольника $\Delta A_0A_1A_2$.

б). На любых двух указанных прямых, например, (A_0E) и (A_2E) откладываем произвольные точки, M_0' и M_2', соответственно.

в). Откладываем векторы $\vec{e}_0 = \overrightarrow{A_0M_0'}$ и $\vec{e}_2 = \overrightarrow{A_2M_2'}$ и разлагаем их по направляющим векторам пар прямых, проходящих через соответствующие вершины, A_0 и A_2. В результате получаем две пары базисных векторов: $\{\vec{a}_1\,, \vec{a}_2\,\}$ и $\{\vec{a}_{\prime 0}, \vec{a}_{\prime 1}\}$.

г). На прямой (A_0A_1) в проективном репере $\Re_2\{A_0, A_1, E_2\}$, порожденном пучком прямых $\mathcal{P}(A_2)$ и согласованным базисом $\{\vec{a}_{\prime 0}, \vec{a}_{\prime 1}\}$ строим точку M_2 с координатами (x^0, x^1).

д). На прямой (A_1A_2) в проективном репере $\Re_2\{A_1, A_2, E_0\}$, порожденном пучком прямых $\mathcal{P}(A_0)$ и согласованным базисом $\{\vec{a}_1\,, \vec{a}_2\,\}$ строим точку M_0 с координатами (x^1, x^2).

е). Проводим прямые (A_2M_2) и (A_0M_0) до их пересечения. Точка пересечения этих прямых и является искомой точкой $M(x^0, x^1, x^2)$:

$$M = (A_0M_0) \cap (A_2M_2).$$

VIII.2 Задачи на теорему Дезарга и сложное отношение

VIII.2.1 Построение гармонически сопряженной точки

Пример ПVIII.3. *На прямой d построить точку N, гармонически сопряженную трем заданным точкам S, L, M.*

<u>**Решение**</u>

Проведем прямую d и возьмем на ней 3 различные точки S, L, M (см. (Рис.VIII.76)).

Для построения точки N, гармонически сопряженной точкам S, L, M:

1. Через точку M проводим произвольную прямую (MQ) — (1);

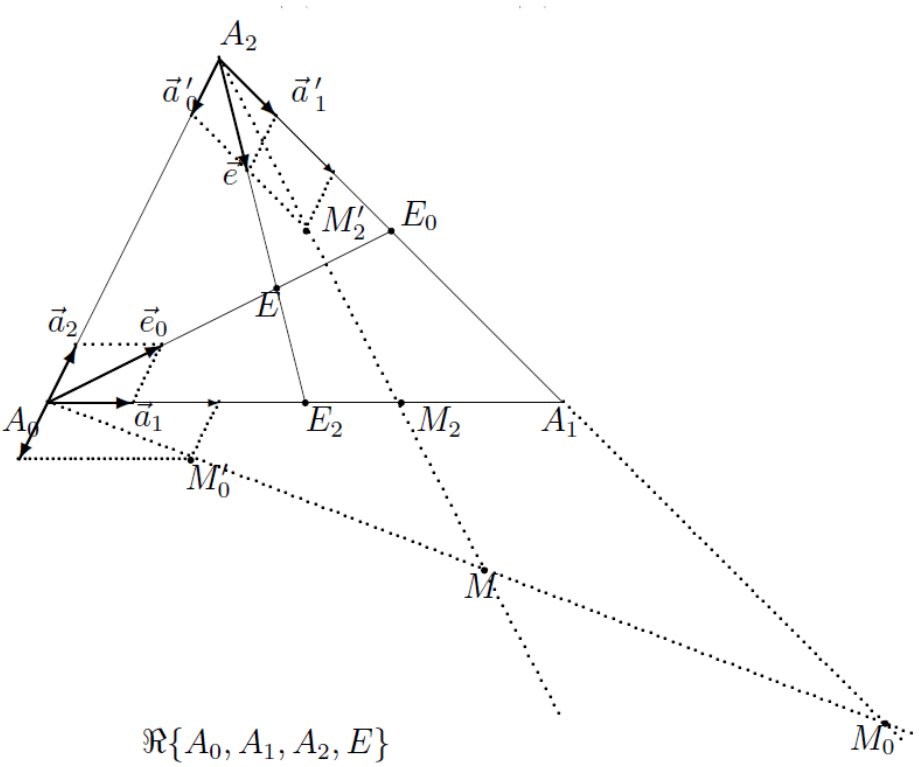


Рис.VIII.75. *Построение точки M по ее проективным координатам (1,2,2) в проективном репере на расширенной плоскости*

2. Через точку S проводим произвольную прямую (SU) — (2);

3. Обозначим: $D = (SU) \cap (MQ)$;

4. Через точку S проведем еще одну произвольную прямую (SV) — (3);

5. Обозначим: $B = (SV) \cap (MQ)$;

6. Проведем прямую (LD) — (4);

7. Обозначим: $A = (LD) \cap (SV)$;

8. Проведем прямую (LB) — (5);

9. Обозначим: $C = (LB) \cap (SU)$;

10. Проведем прямую (CA) — (6);

11. Обозначим: $N = (CA) \cap \overline{d}$. N - искомая точка.

VIII.2.2 Построение параллельных прямых

При решении задач на геометрические построения на плоскости с помощью теоремы Дезарга необходимо учесть следующие обстоятельства:

- По определению односторонней линейки с ее помощью можно провести отрезок неограниченной длины, проходящий через данную точку.
- Две прямые a и b на проективной плоскости параллельны тогда и только тогда, когда их несобственные точки совпадают, т.е., когда они пересекаются в несобственной точке.
- Вследствие теоремы (TIV.8) на проективной плоскости серединой отрезка $[AB]$ является точка M такая, что $(AB, MD_\infty) = -1$, где D_∞ — несобственная точка прямой (AB).

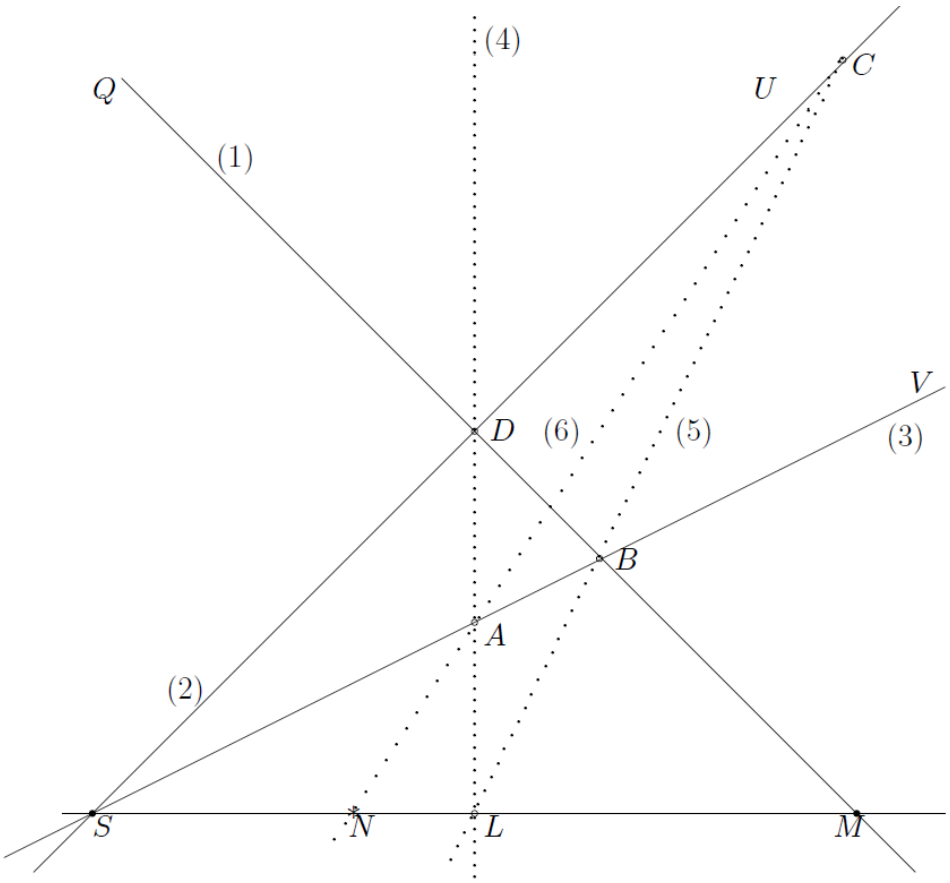


Рис.VIII.76. *Построение точки, гармонически сопряженной трем заданным*

Пример ПVIII.4. *Даны отрезок $[AB]$, его середина C и точка M, не лежащая на прямой (AB). С помощью одной линейки построить прямую, проходящую через точку M параллельно (AB).*

Решение

Пусть $\overline{d}$ — прямая расширенной плоскости, проходящая через точки A, B, и пусть D_∞ — несобственная точка этой прямой. Тогда согласно теореме (TIV.8)

$$(AB, CD_\infty) = -1. \tag{VIII.1}$$

Таким образом, задача сводится к построению прямой (MD_∞), где M - заданная точка, а D_∞ - недоступная точка, лежащая на прямой $\overline{d}$ и гармонически сопряженная точкам A, B, C (см. (Рис.VIII.77)).

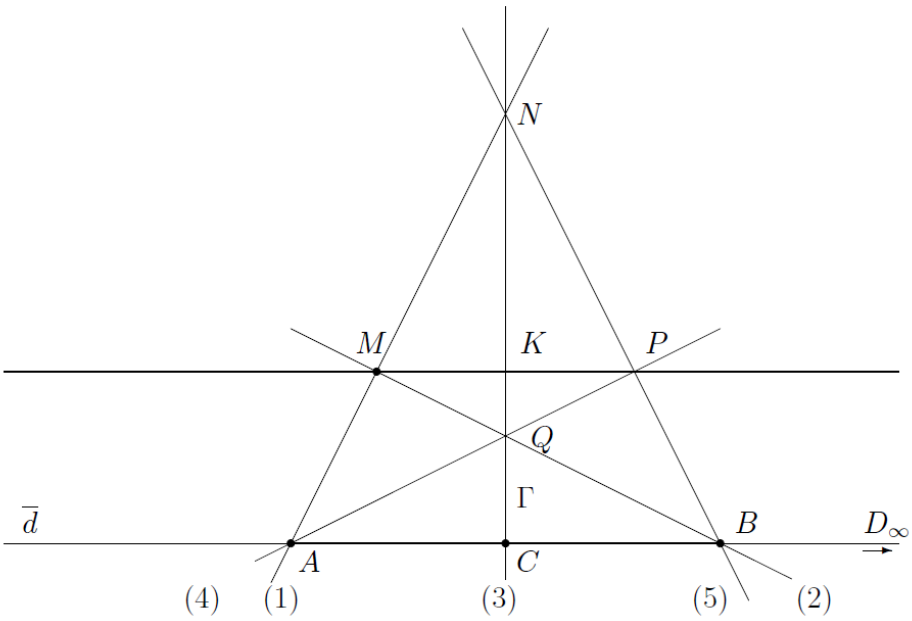


Рис.VIII.77. *Построение прямой, параллельной данной, при заданной середине отрезка*

Возьмем на плоскости три точки, A, B, M, не лежащие на одной прямой. Проведем прямую (AB) и отложим на ней середину C отрезка $[AB]$. Для построения воспользуемся теоремой (TIV.7) о свойствах полного четырехвершинника. Построим какой-нибудь полный четырехвершинник $MNPQ$ так, чтобы точки A и B были его диагональными точками, а точка C лежала на стороне, проходящей через третью диагональную точку K. Тогда, если X является точкой пересечения прямых $(AB) = \overline{d}$ и (MP), то согласно теореме (TIV.7) $(AB, CX) = -1$. Так как C — середина отрезка $[AB]$, то по теореме (TIV.8) $X = D_\infty$ - несобственная точка прямой $\overline{d}$. Но тогда $(MP) \parallel (AB)$.

Для построения указанного полного четырехвершинника:

1. Проведем прямые (AM) и (BM) — (1) и (2);

2. Проведем произвольную прямую Γ, проходящую через точку C, но не проходящую через точки A и M, — (3);

3. Обозначим $N = \Gamma \cap (AM)$ и $Q = \Gamma \cap (BM)$;

4. Проведем прямые (AQ) и (BN) — (4) и (5);

5. Обозначим $P = (AQ) \cap (BM)$;

6. Проведем прямую (MP).

Прямая (MP) и является искомой прямой.

Пример ПVIII.5. *(Обратная задача). Даны отрезок $[AB]$ и параллельная ему прямая p. С помощью одной односторонней линейки построить середину отрезка $[AB]$.*

Решение

Задача решается аналогично предыдущей. Проведем на плоскости прямую $d = (AB)$ и обозначим ее расширение с помощью $\overline{d}$ (см. (Рис.VIII.78)). Пусть D_∞ - несобственная точка этой прямой. Проведем прямую p, параллельную (AB). Тогда $(AB) \cap p = D_\infty$. Необходимо построить точку C такую, что

$$(AB, CD_\infty) = -1,$$

где D_∞ - недоступная точка, в которой пересекаются прямые (AB) и p.

Для построения середины отрезка:

1. Через точки A и B проведем произвольные прямые —- (1) и (2), пересекающиеся в произвольной точке N, не лежащей на прямой p;

2. Обозначим: $M = (AN) \cap p$ и $P = (BN) \cap p$;

3. Проведем прямые (AP) и (BM);

4. Обозначим: $Q = (AP) \cap (BM)$;

5. Проведем прямую (NQ);

6. Обозначим: $C = (NQ) \cap (AB)$.

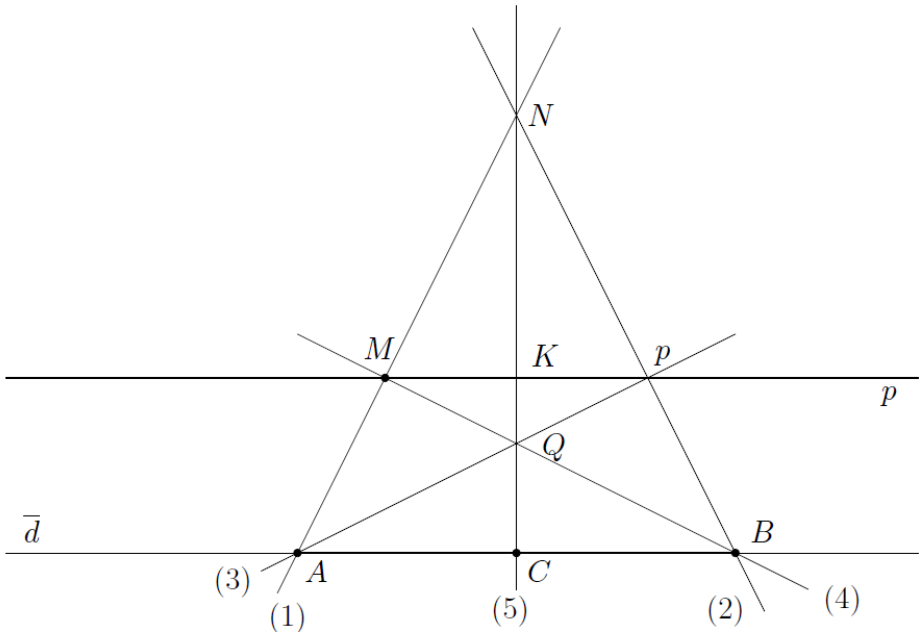


Рис.VIII.78. *К построению середины отрезка — точки C*

C - искомая точка.

Пример ПVIII.6. *С помощью одной односторонней линейки через данную точку M провести прямую, параллельную двум заданным прямым a и a'.*

Решение

Проведем параллельные прямые a и a' и возьмем точку M, не лежащую на этих прямых (см. (Рис.VIII.79)). Пусть $\overline{a}$ и $\overline{a}'$ - соответствующие расширенные прямые. Эти прямые пересекаются в несобственной точке D_∞. Искомая прямая должна пересекаться с данными прямыми в этой же точке. Следовательно, необходимо построить прямую (MD_∞), проходящую через заданную точку M и недоступную точку D_∞.

Для построения этой прямой воспользуемся теоремой Дезарга (ТII.4). Мы имеем три прямые, пересекающиеся в одной, несобственной точке плоскости. Следовательно, для решения задачи нам достаточно построить любые два дезарговых треугольника так, чтобы две их соответствующие стороны лежали на параллельных прямых.

Для этого (см. (Рис.VIII.79)):

1. Возьмем в качестве центра перспективы любую точку S, не лежащую

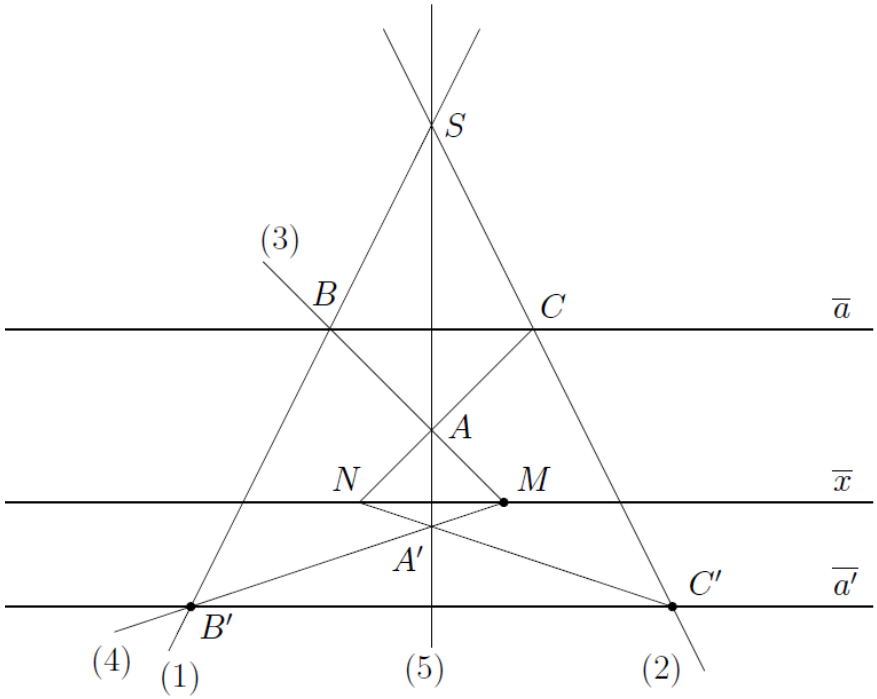


Рис.VIII.79. *К построению прямой, параллельной двум заданным прямым*

на прямых $\overline{a}$ и $\overline{a}'$;

2. Проведем две произвольные прямые, проходящие через точку S, не проходящие через точку M и не параллельные прямым a и a' — (1) и (2);

3. Обозначим: $B = (1) \cap \overline{(}a)$, $C = (2) \cap \overline{a}$, $B' = (1) \cap \overline{a}'$, $C' = (2) \cap \overline{a}'$;

4. Проведем прямые (BM) — (3) и $(B'M)$ — (4);

5. Проведем через точку S любую третью прямую — (5), не проходящую через точку M и не параллельную прямым a и a';

6. Обозначим: $A = (BM) \cap (5)$ и $A' = (B'M') \cap (5)$;

7. Проводим прямые (CA) и $(C'A')$. Ясно, что ABC и $A'B'C'$ - дезарговы треугольники;

8. Обозначим: $N = (CA) \cap (C'A')$;

9. Проведем прямую (MN).

(MN) — искомая прямая. Действительно, по теореме Дезарга точки $M = (AB) \cap (A'B')$, $N = (AC) \cap (A'C')$ и $D_\infty = (BC) \cap (B'C')$, являющиеся точками пересечения продолжений соответствующих сторон дезарговых треуголь-

ников ABC и $A'B'C'$, лежат на одной прямой, — оси перспективы. Таким образом, прямая (MN) проходит и через точку D_∞.

VIII.3 Задачи на проективные отображения

Перспективное отображение прямой на прямую

Пример ПVIII.7. *На проективной плоскости даны две прямые, d и d', на которых задана пара соответствующих реперов, $\Re\{A, B, C\}$ и $\Re'\{A', B', C'\}$ (см. (Рис. VIII.80)). Найти образ произвольной точки M прямой d в проективном отображении $f : d \longrightarrow d'$, заданное этой парой реперов.*

Решение

Из точек A, B, C не более одной может совпадать со своей соответствующей (так как по условию прямые d и d' не совпадают). Пусть точки A и A' различны. На прямой (AA') возьмем две произвольные точки O и $O' : O \neq A$, $O' \neq A'$ и рассмотрим отображение $g : P(O) \longrightarrow P(O')$ по закону:

$$f(M) = M' \Longrightarrow g(OM) = (O'M').$$

Отображение g можно представить в виде произведения трех отображений: перспективного отображения $f_1 : P(O) \longrightarrow d$, проективного отображения $f : d \longrightarrow d'$ и перспективного отображения $f_2 : d' \longrightarrow P(O')$. Каждое из них является проективным. Поэтому и их произведение g есть проективное отображение. Более того, g – перспективное отображение, так как $f(OA) = (O'A') \Longrightarrow f(OO') = (OO')$. Если $(OB) \cap (O'B') = B_0$, $(OC) \cap (O'C') = C_0$, то прямая $s = (B_0C_0)$ — ось перспективы g. Находим:

$$(OM) \cap s = M_0, \quad (O'M_0) \cap d' = M' = f(M).$$

Замечание. Мы видим, что проективное отображение $f : d \longrightarrow d'$ (d и d' — две прямые на проективной плоскости) является произведением двух проектирований:

$$f = p^s_{d'} \cdot p^d_s,$$

где p^a_b — проектирование прямой a на прямую b и запись читается справа налево.

Таким образом, важнейшее отображение, которое изучается в проективной геометрии, — проективное отображение прямой на прямую — получается как произведение проектирований.

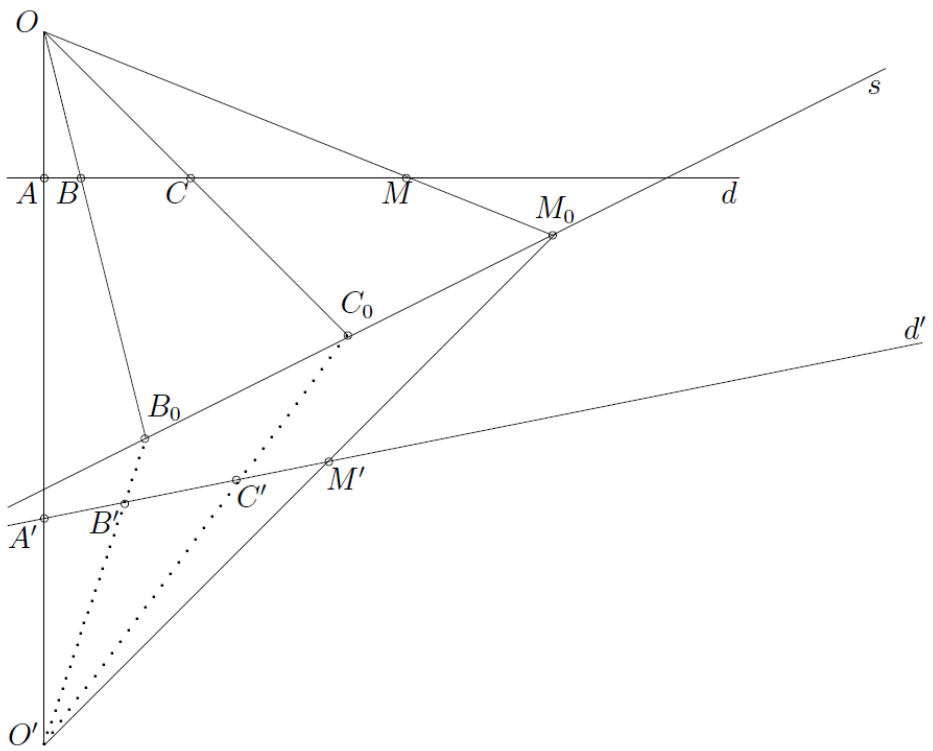


Рис.VIII.80. *Проективное отображение прямой на прямую*

Перспективное отображение пучка на пучок

Пример ПVIII.8. *На проективной плоскости даны два различных пучка прямых $P(O)$ и $P(O')$. Проективное отображения $f : P(O) \longrightarrow P(O')$ задано соответствующими реперами: $\{a, b, c\} \subset P(O)$ и $\{a', b', c'\} \subset P(O')$. Для произвольной прямой $m \in P(O)$ найти прямую $f(m)$.*

Решение

Эта задача двойственная к предыдущей задаче, и ее решение получается из решения этой задачи по принципу двойственности.

Пусть $a \neq a'$. Через точку $A = a \cap a'$ проводим две прямые d, d_1, такие что, $O \notin d$ и $O' \notin d_1$ (Рис.VIII.81). Рассмотрим отображение $g : d \longrightarrow d_1$ по закону:

$$(f(x) = x',\ x \cap d = X,\ x' \cap d_1 = X') \Longrightarrow g(X) = X'.$$

Так как f — проективное отображение, то и g — проективное. Но $g(A) = A$. Значит, g — перспектива; ее центр $S = (BB') \cap (CC')$. Для прямой $m \in P(O)$ находим:

$$m \cap d = M, \quad (SM) \cap d_1 = M', \quad f(M) = (O'M').$$

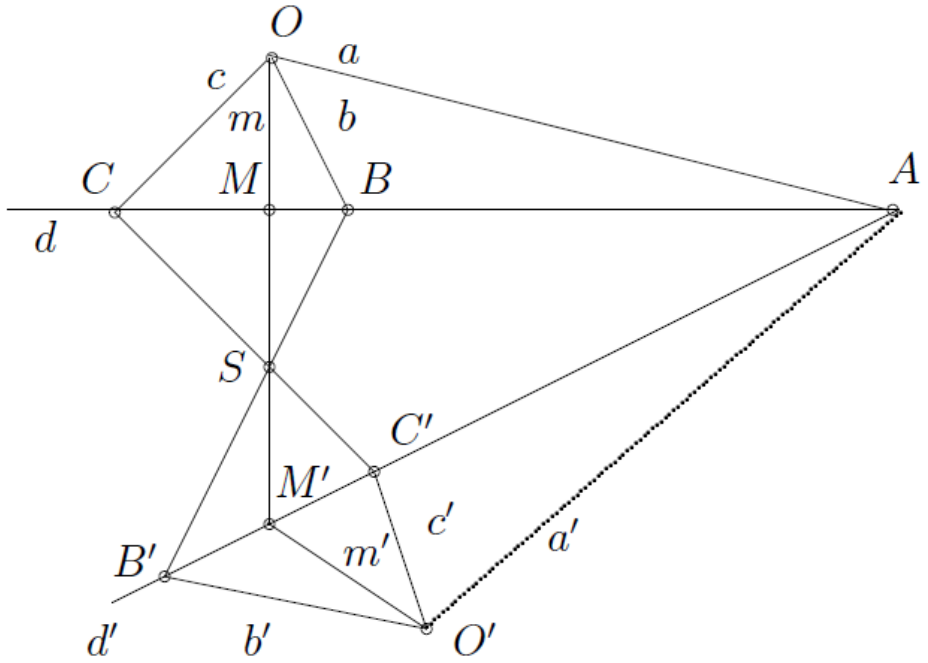


Рис.VIII.81. *Проективное отображения пучка на пучок*

Проективное преобразование прямой

Пример ПVIII.9. *На прямой d дано проективное преобразование f, которое переводит репер $\Re = \{A, B, C\}$ в репер $\Re' = \{A', B', C'\}$. Для произвольной точки $M \in d$ построить точку $M' = f(m)$.*

Решение

Возьмем точку O и в плоскости, определенной точкой O и прямой d, проведем какую-либо прямую d'. Пусть A'', B'', C'' — проекции точек A', B', C' на прямую d' из центра O. Имеем перспективное отображение $g : d \longrightarrow d'$, в котором точки A', B', C' переходят соответственно в точки A'', B'', C''. Значит произведение gf — проективное отображение прямой d на d', оно переводит точки A, B, C в точки A'', B'', C''. Для такого отображения мы умеем построить точку $M'' \in d'$, соответствующую точке $M \in d$ (задача 1). Тогда $(OM'') \cap d = M'$.

Следствие. Всякое проективное преобразование прямой можно разложить в произведение не более трех проектирований.

Проективное преобразование плоскости

Пример ПVIII.10. *Дано проективное преобразование f плоскости, которое переводит репер $\Re = \{A, B, C, D\}$ в репер $\Re' = \{A', B', C', D'\}$. Для произвольной точки M плоскости построить точку $M' = f(M)$.*

Решение

Пусть D_1, M_1 — проекции точек D и M на прямую (BC) из центра A, D_1' — проекция точки D' на прямую $(B'C')$ из центра A'. Мы знаем, что проективное преобразование f плоскости устанавливает проективное отображение $f_1 : (BC) \longrightarrow (B'C')$, которое переводит точки B, C, D_1 в точки B', C', D_1'. Строим точку $M_1' = f_1(M_1)$. Аналогично строим точку $M_2' \in (A'C')$. Наконец,

$$(A'M_1') \cap (B'M_2') = M' = f(M).$$

Глава IX

Стандартные задачи методов изображений

IX.1 Построение сечения треугольной призмы

Пример ПIX.1. *Дано изображение треугольной призиы $ABCA'B'C'$ и три точки сечения ее плоскостью на боковых гранях, P, Q, R, (см. (Рис.IX.82)). Требуется построить сечение, проходящее через эти точки.*

Решение

В расширенном евклидовом пространстве $\overline{\mathcal{E}_3}$ боковые ребра призмы (AA'), $(BB'), (CC')$ пересекаются в несобственной точке S_∞. В проектировании из этой точки образы точек P, Q, R на плоскость проектирования $A'B'C'$ получаются параллельным проектированием.

1. Через точки P, Q, R проводим прямые, параллельные ребрам призмы до пересечения их с плоскостью основания;
2. Получаем образы точек сечения: P', Q', R';
3. Строим треугольники ΔPQR и $\Delta P'Q'R'$. Это — дезарговы треугольники, так как прямые, соединяющие их соответствующие вершины, пересекаются в точке S_∞;
4. Продолжаем пары соответствующих сторон дезарговых треугольников: (RQ), $(R'Q')$ и (RP), $(R'P')$ и находим их пересечения:

$$V = (RP) \cap (R'P') \qquad W = (RQ) \cap (R'Q');$$

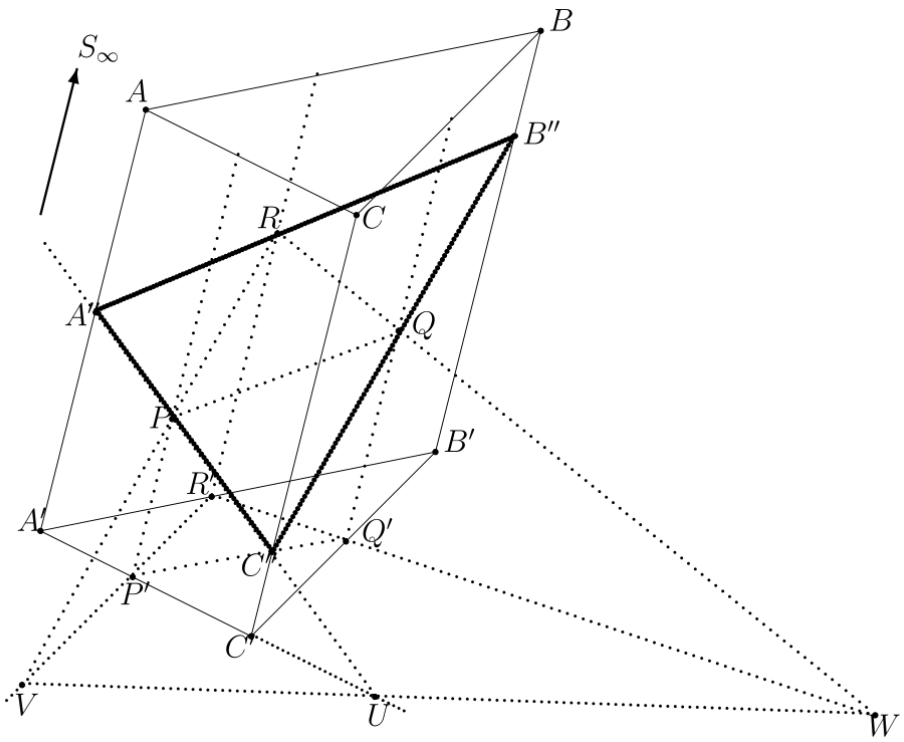


Рис.IX.82. *Построение сечения призмы A" B" C"*

5. Проводим прямую $s = (VW)$ — ось перспективы. Прямая s является прямой пересечения плоскости основания призмы $(A'B'C')$ и плоскости сечения (ABC) :
$$s = (ABC) \cap (A'B'C');$$

6. Продолжаем сторону основания призмы, например, $(A'C')$ до ее пересечения с осью перспективы s и получаем точку U :
$$U = (A'C') \cap s;$$

7. Через точку U и точку P на соответствующей грани проводим прямую (UP). Эта прямая лежит одновременно в плоскости сечения и плоскости грани, которой принадлежит заданная точка сечения P. (Построение остальных прямых сечения можно провести аналогично, но мы поступим проще);

8. Через точку $A'' = (UP) \cap (A'A)$ и точку R проводим прямую сечения $A''R$;

9. Через точку $C'' = (UP) \cap (C'C)$ и точку Q проводим прямую $(C''Q)$.

Заметим, что при правильном построении точки пересечения $B'' = (A''R) \cap (B'B)$ и $B'' = (C''Q) \cap (B'B)$ должны совпасть.

IX.2 Построение сечения четырехугольной пирамиды

Пример ПIX.2. *Дано изображение четырехугольной пирамиды $SABCD$ и три точки сечения ее плоскостью на боковых гранях, P, Q, R, (см. (Рис.IX.83)). Требуется построить сечение, проходящее через эти точки.*

Решение

В расширенном евклидовом пространстве $\overline{\mathcal{E}_3}$ боковые ребра пирамиды (AA'), $(BB'), (CC'), (DD')$ пересекаются в собственной точке S — вершине пирамиды. В проектировании из этой точки образы точек P, Q, R на плоскость проектирования $A'B'C'$ получаются пересечением прямых (SP), (SQ), (SR) с соответствующими ребрами основания;

1. Через точки P, Q, R проводим прямые (SP), (SQ), (SR) до пересечения их с плоскостью основания;

2. Получаем образы точек сечения: P', Q', R';

3. Строим треугольники ΔPQR и $\Delta P'Q'R'$. Это — дезарговы треугольники, так как прямые, соединяющие их соответствующие вершины, пересекаются в точке S;

4. Продолжаем пары соответствующих сторон дезарговых треугольников: (RQ), $(R'Q')$ и (RP), $(R'P')$ и находим их пересечения:

$$U = (RP) \cap (R'P') \qquad V = (RQ) \cap (R'Q');$$

5. Проводим прямую $s = (UV)$ — ось перспективы. Прямая s является прямой пересечения плоскости основания пирамиды $(A'B'C')$ и плоскости сечения (ABC) :

$$s = (ABC) \cap (A'B'C');$$

6. Продолжаем сторону основания пирамиды, например, $(A'C')$ до ее пересечения с осью перспективы s и получаем точку W :

$$W = (A'C') \cap s;$$

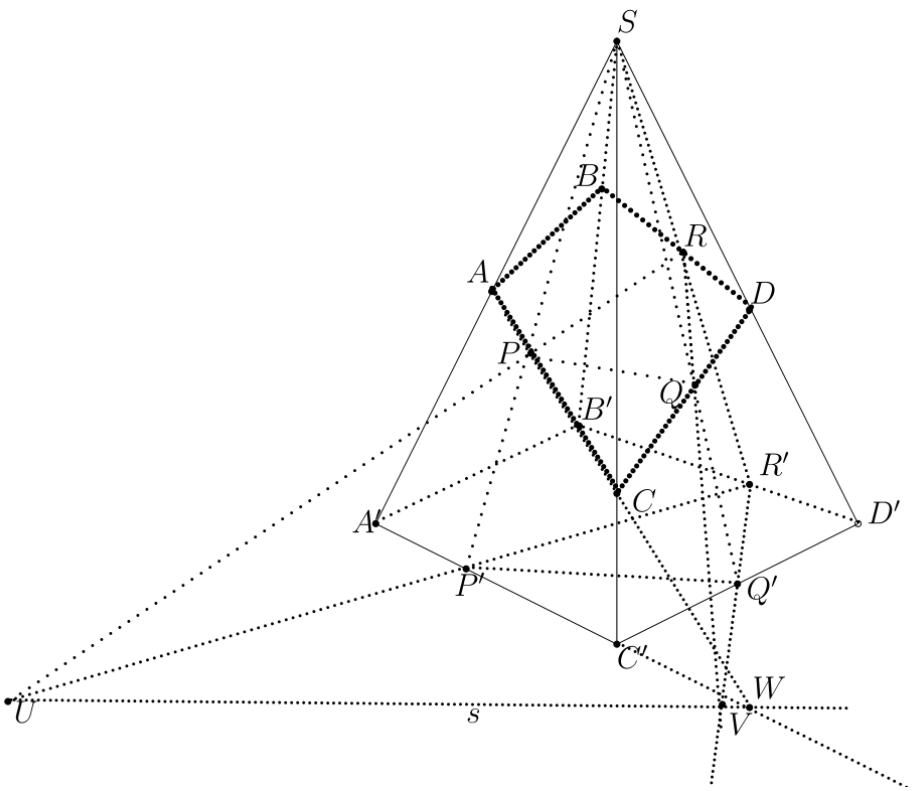


Рис.IX.83. *Построение сечения пирамиды*

7. Через точку W и точку P на соответствующей грани проводим прямую (WP). Эта прямая лежит одновременно в плоскости сечения и плоскости грани, которой принадлежит заданная точка сечения P. При этом мы получаем точки $A = (WP) \cap (SA')$ и $C = (WP) \cap (SC')$;

8. Через точку C и точку Q проводим прямую сечения CQ, в результате получаем точку $D = ((CQ) \cap (SD')$;

9. Через полученную точку D и точку R проводим прямую (DR) и получим точку $B = (DR) \cap (SB)$;

10. Проводим прямую (AB).

IX.3 Построение сечения цилиндра

Пример ПIX.3. *Дано изображение цилиндра C, три точки сечения ее плоскостью на боковых гранях, P, Q, R и любая точка M' в основании цилиндра (см. (Рис.IX.84)). Требуется построить точку сечения цилиндра, проходящего через точки P, Q, R, проекцией которой является точка M.*

Решение

В расширенном евклидовом пространстве $\overline{\mathcal{E}_3}$ образующие цилиндра пересекаются в несобственной точке $S = S_\infty$. В проектировании из этой точки образы точек P, Q, R на плоскость проектирования (основание цилиндра) получаются пересечением прямых, параллельных образующим цилиндра и проходящих через эти точки.

1. Через точки P, Q, R, M' проводим прямые, параллельные образующим цилиндра до пересечения их с плоскостью основания;
2. Получаем образы точек сечения: P', Q', R';
3. Строим треугольники ΔPQR и $\Delta P'Q'R'$. Это — дезарговы треугольники, так как прямые, соединяющие их соответствующие вершины, параллельны образующим, т.е., пересекаются в точке S_∞;

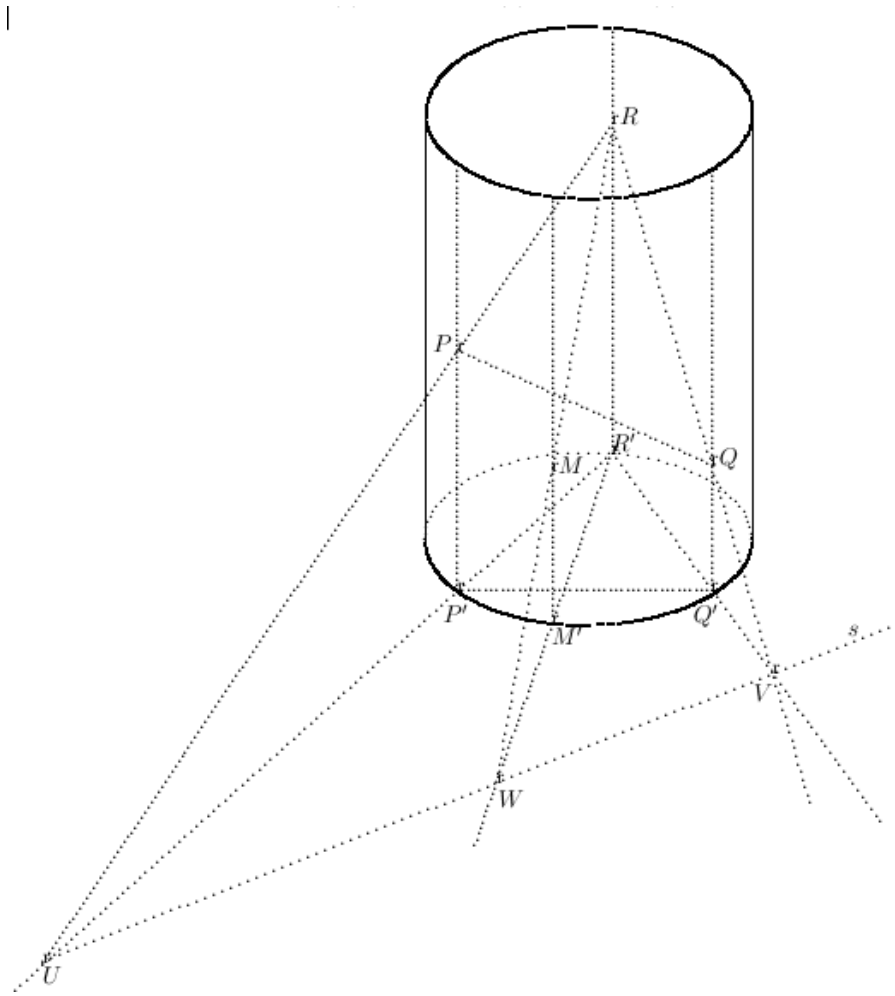


Рис.IX.84. *Построение любой точки сечения цилиндра C*

4. Продолжаем пары соответствующих сторон дезарговых треугольников: (RQ), $(R'Q')$ и (RP), $(R'P')$ и находим их пересечения:

$$U = (RP) \cap (R'P') \qquad V = (RQ) \cap (R'Q');$$

5. Проводим прямую $s = (UV)$ — ось перспективы. Прямая s является прямой пересечения плоскости основания цилиндра и плоскости его сечения (PQR);

6. Проводим прямую через одну из вершин дезаргова треугольника $P'Q'R'$, (например, R') и точку M' $((R'M'))$ до пересечения ее с осью перспективы s и находим точку W:

$$W = (R'M') \cap s;$$

7. Через точку W и точку R проводим прямую (WR). Пересечение этой прямой с образующей цилиндра, проходящей через точку M' и дает искомую точку сечения M.

Поскольку таким образом можно получить произвольную точку сечения, то далее задача сводится к стандартной - построить по этим точкам эллипс. При проектировании удобно выбирать в качестве точек M' точек, соответствующих, например, сопряженным диаметрам эллипса.

IX.4 Построение сечения параллелепипеда

Пример ПIX.4. *Дано изображение параллелепипеда $A'B'C'D'ABCD$, две точки сечения его плоскостью на боковых гранях, Q, R и одна точка P, его сечения в основании (см. (Рис.IX.83)). Требуется построить сечение, проходящее через эти точки.*

Решение

В расширенном евклидовом пространстве $\overline{\mathcal{E}_3}$ боковые ребра параллелепипеда (AA'), (BB'), (CC'), (DD') пересекаются в несобственной точке S.

В проектировании из этой точки образы точек Q, R на плоскость проектирования $A'B'C'$ получаются пересечением прямых, параллельных боковым ребрам параллелепипеда и проходящих через эти точки, образ точки P совпадает с самой точкой P;

1. Через точки Q, R проводим прямые (SQ), (SR) до пересечения их с плоскостью основания;
2. Получаем образы точек сечения: Q', R';
3. Строим треугольники ΔPQR и $\Delta PQ'R'$. Это — дезарговы треугольники, так как прямые, соединяющие их соответствующие вершины, пересекаются в точке S_∞;
4. Продолжаем стороны дезарговых треугольников: (RQ), и $(R'Q')$ и находим их пересечение:

$$V = (RQ) \cap (R'Q');$$

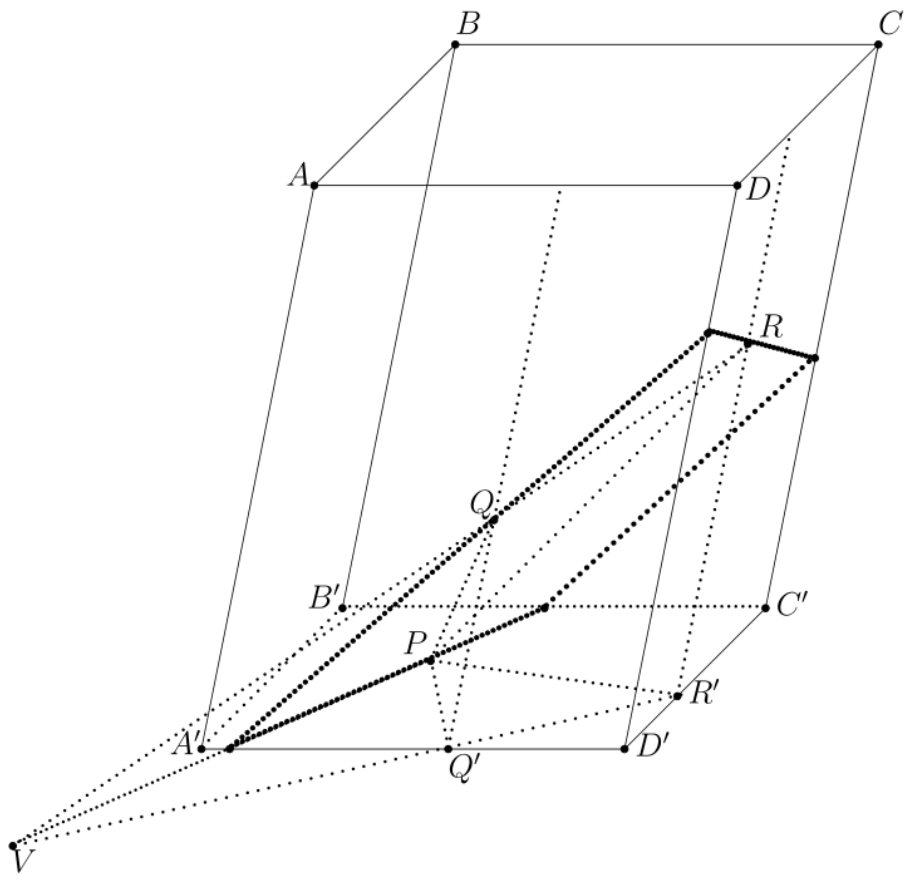


Рис.IX.85. *Построение сечения параллелепипида в случае, когда одна из точек сечения находится в основании*

5. Проводим прямую $s = (VP)$ — ось перспективы. Прямая s является прямой пересечения плоскости основания параллелепипеда $(A'B'C'D')$ и плоскости сечения (PQR) :

$$s = (PQR) \cap (A'B'C');$$

6. Через точку пересечения оси перспективы с ребром $(A'D')$:

$$s \cap (A'D')$$

и точку Q проводим прямую сечения и получаем точку пересечения этой прямой с одним из ребер параллелепипеда.

7. В зависимости от того, на каком ребре оказалась данная точка, поступаем дальше.

IX.5 Построение изображения высот треугольника

Пример ПIX.5. *Дано изображение ABC прямоугольного треугольника $A'B'C'$ с прямым углом $C' = 90^o$ и углом $A' = 30^o$. Построить изображение высоты, проведенной из вершины C'.*

Решение

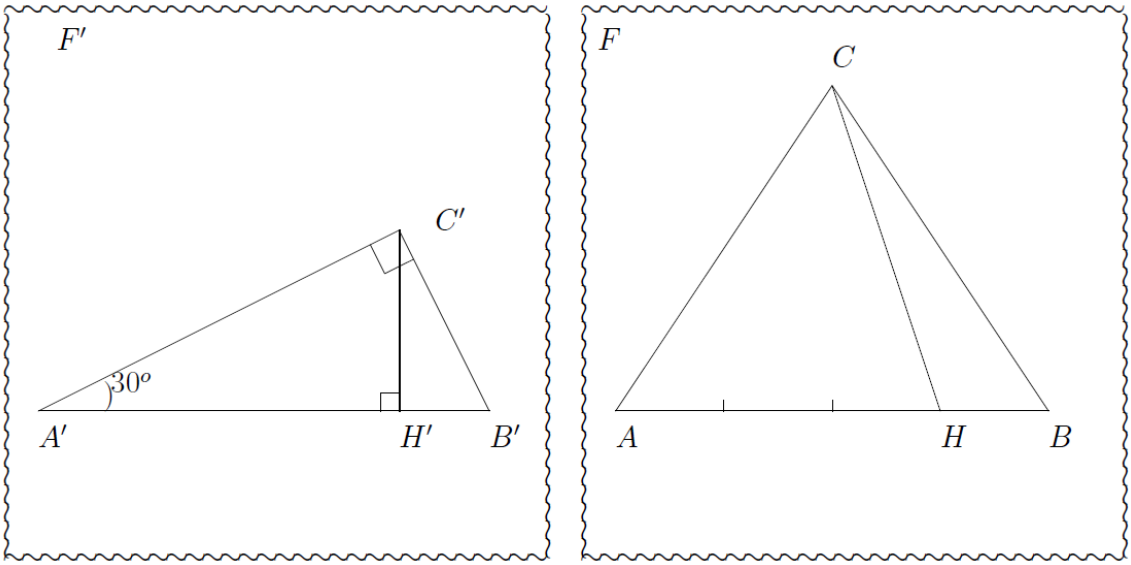


Рис.IX.86. *Построение изображения высоты треугольника. 1.*

Изображение ABC треугольника $A'B'C'$ является евклидово определенным, так как, присоединив к нему изображение $\Re = \{A, B, C\}$ репера $\Re'$ плоскости Σ', видим, что репер $\Re'$ вследствие условий задачи определяется с точностью до подобия плоскости оригинала $\Re'$.

Предположим, что задача решена и F — изображение треугольника $A'B'C'$ и его высоты $C'H'$ (см. (Рис.IX.86)). Тогда фигуры F и F' аффинно - эквивалентны, поэтому для решения задачи построим какой - либо промежуточный прямоугольный треугольник $A_0B_0C_0$ так, чтобы $\angle A_0 = 30^o, \angle C_0 = 90^o$, и проведем его высоту C_0H_0. Затем найдем образ отрезка C_0H_0 в аффинном преобразовании, которое переводит репер $\{A_0, B_0, C_0\}$ в репер $\{A, B, C\}$.

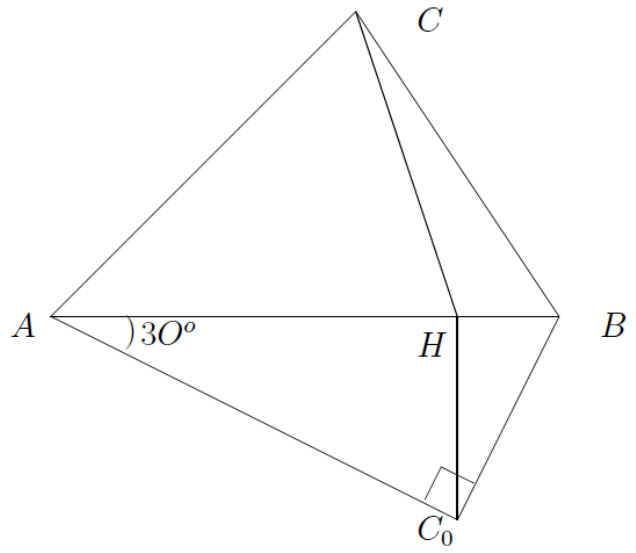


Рис.IX.87. *Построение изображения высоты треугольника. 2.*

Для упрощения построения можно использовать перспективно - аффинное преобразование с осью AB. Для этого строим треугольник ABC_0 так, чтобы $\widehat{BAC_0} = 30^o$, $\widehat{AC_0B} = 90^o$ (см. (Рис.IX.87)), и проводим высоту C_0H этого треугольника. Отрезок CH — искомый.

Литература

[1] Клейн Ф. *Элементарная математика с точки зрения высшей. II. Геометрия.* М., “Наука”, 1987.

[2] Базылев В.Т., Дуничев К.И., Иваницкая В.П. *Геометрия I.* М., “Просвещение”, 1974.

[3] Базылев В.Т., Дуничев К.И., Иваницкая В.П. *Геометрия. II.* М., “Просвещение”, 1975.

[4] Атанасян Л.С., Базылев В.Т. *Геометрия. Часть I.* М., “Просвещение”, 1986.

[5] Атанасян Л.С., Базылев В.Т. *Геометрия. Часть II.* М., “Просвещение”, 1987.

[6] Погорелов А.В. *Геометрия.* М., “Наука”, 1984.

[7] Игнатьев Ю.Г. *Аналитическая геометрия. Курс лекций. I семестр.* Компьютерная версия, Казань, 2000.

[8] Игнатьев Ю.Г. *Аналитическая геометрия. Курс лекций. II семестр.* Компьютерная версия, Казань, 2001;
Игнатьев Ю.Г. Аналитическая геометрия. Часть II. Аффинные и евклидовы пространства. Учебное пособие. II семестр. НИЛИТМО КФУ, 2013, Казань, - 188 с.
$http://www.kpfu.ru/docs/F1788036257/Aff_Evk13.pdf$.

[9] Игнатьев Ю.Г. *Аффинная геометрия. Курс лекций. II семестр.* Компьютерная версия, Казань, 1997.

[10] Игнатьев Ю.Г. *Сборник индивидуальных заданий по теме “Проективная геометрия и методы изображений.” III семестр.* Компьютерная версия, Казань, КГПУ, кафедра геометрии, 2001;

[11] Беклемишева Л.А., Петрович А.Ю., Чубаров И.А. *Сборник задач по аналитической геометрии и линейной алгебре.* М., “Наука”, 1987.

[12] Базылев В.Т., Дуничев К.И., Иваницкая В.П., Кузнецова Г.Б., Майоров В.М., Скопец З.А. *Сборник задач по геометрии.* М., “Просвещение”, 1990.

[13] Игнатьев, Юрий Геннадьевич. Математическое и компьютерное моделирование фундаментальных объектов и явлений в системе компьютерной математики Maple: [лекции для школы по математическому моделированию] / Ю. Г. Игнатьев; Казан. (Приволж.) федер. ун-т, Ин-т математики и механики им. Н. И. Лобачевского.—Казань: Казанский университет, 2014.—297 с.: $http://libweb.ksu.ru/ebooks/05-IMM/05_120_00443.pdf$.