Подстановки

Задача. Даны две подстановки. Найти произведение $\alpha^{-1}\beta$.

$$\alpha = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 1 & 4 & 3 \end{bmatrix}, \quad \beta = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 5 & 2 & 4 \end{bmatrix}.$$

Решение

Подстановка

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 & y_5 \end{bmatrix}$$

где $x_i = i$, $i = 1, \ldots, 5$, представляет собой таблично заданную натуральнозначную функцию на множестве натуральных чисел $\pi(x_i) = y_i$. Под произведением $\alpha\beta$ здесь понимается сложная функция $\alpha(\beta(x_i))$. Обратная функция задается по правилу $\pi^{-1}(y_i) = x_i$. Таким образом, вычисляя обратную подстановку α^{-1}, можно поступить двояко. Самое простое — поменять местами строки в подстановке

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 & 1 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{bmatrix},$$

а затем расставить столбцы по возрастанию чисел в первой строке (в действительности, порядок столбцов несущественен). Получим обратную функцию

$$\alpha^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 5 & 4 & 2 \end{bmatrix}.$$

Другая методика записи обратной подстановки состоит в упорядоченном поиске прообразов элементов второй строки из элементов первой. Последовательно имеем: прообразом 1 (из второй строки α) является 3 (из первой строки), прообразом 2 является 1, и т.д. Получаем тот же результат.

Теперь перемножим подстановки α^{-1} и β. Очевидно, порядок умножения имеет значение. Имеем

$\alpha^{-1}(\beta(1)) = \alpha^{-1}(3) = 5,$

$\alpha^{-1}(\beta(2)) = \alpha^{-1}(1) = 3,$

$\alpha^{-1}(\beta(3)) = \alpha^{-1}(5) = 2,$

$\alpha^{-1}(\beta(4)) = \alpha^{-1}(2) = 1,$

$\alpha^{-1}(\beta(5)) = \alpha^{-1}(4) = 4.$

Ответ:

$$\alpha^{-1}\beta = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 3 & 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}.$$